

## Περιεχόμενα

### 1. Η αξιολόγηση στο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών

---

- 1.1 Η αξιολόγηση ως συνιστώσα της εκπαιδευτικής πράξης
  - 1.1.1 Βασικές παράμετροι της εκπαιδευτικής αξιολόγησης
  - 1.1.2 Σύγχρονες προσεγγίσεις στην εκπαιδευτική αξιολόγηση
  - 1.1.3 Εκπαιδευτικός και μαθητής στις σύγχρονες προσεγγίσεις της αξιολόγησης

### 2. Η αξιολόγηση για μάθηση στο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών

---

#### 3. Εργαλεία αξιολόγησης στα Μαθηματικά

---

- 3.1 Εργαλεία αξιολόγησης που συνδέονται με όψεις/ στοιχεία της εκπαιδευτικής διαδικασίας
  - 3.1.1 Εργαλείο αξιολόγησης της μαθηματικής γνώσης
  - 3.1.2 Εργαλείο αξιολόγησης της διδασκαλίας
    - 3.1.2.1 Εργαλείο αξιολόγησης της διδασκαλίας με εστίαση στις μαθηματικές πρακτικές και το μαθηματικό περιεχόμενο
    - 3.1.2.2 Εργαλείο αξιολόγησης με εστίαση στις κοινωνικές, πολιτισμικές και πολιτικές πρακτικές
    - 3.1.2.3 Εργαλείο αξιολόγησης με εστίαση στις κοινωνικο-συναισθηματικές πρακτικές
    - 3.1.2.4 Εργαλείο αξιολόγησης τροχιάς μάθησης και διδασκαλίας
  - 3.2 Εργαλεία αξιολόγησης που συνδέονται με ποσοτικά και ποιοτικά δεδομένα
    - 3.2.1 Παρατήρηση
      - Ημερολόγιο
      - Ρουμπρίκες
      - Εννοιολογικοί χάρτες
    - 3.2.2 Διαγνωστική συνέντευξη
    - 3.2.3 Εργασίες των μαθητών
      - 3.2.3.1 Πορτφόλιο
      - 3.2.3.1 Συνθετικές ερευνητικές εργασίες (project)
  - 3.3. Εργαλεία αξιολόγησης που αφορούν ΠΜΑ σχετικά με πρακτικές (μαθηματικές, κοινωνικο-πολιτισμικές και κοινωνικο-συναισθηματικές)

# Η ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΣΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Οι σύγχρονες αντιλήψεις για τους τρόπους με τους οποίους μαθαίνουν οι μαθητές επηρεάζουν τις αντιλήψεις για την αξιολόγηση και έχουν διαφοροποιήσει τις πρακτικές της. Ταυτόχρονα, οι εναλλακτικές μορφές αξιολόγησης ‘ανατρέπουν’ την κυριαρχία της «τελικής» ή της «αθροιστικής αξιολόγησης» που συνήθως πραγματοποιούνται στο τέλος μιας διαδικασίας ή μιας ενότητας ή μιας χρονικής περιόδου. Στα σύγχρονα Προγράμματα Σπουδών η αξιολόγηση διατρέχει το σύνολο της διδακτικής και μαθησιακής διαδικασίας, ενσωματώνεται στη διδασκαλία, εξυπηρετεί τη διδασκαλία και τη μάθηση και συμβάλλει ουσιαστικά στην ‘ποιοτική μάθηση’.

Στο πλαίσιο του Προγράμματος Σπουδών των μαθηματικών της ελληνικής εκπαίδευσης η αξιολόγηση συνδέεται με (α) βασικές συνιστώσες όπως οι λειτουργίες, οι σκοποί, οι στόχοι, οι αρχές και τα κριτήρια, (β) σύγχρονες προσεγγίσεις της έρευνας στη μαθηματική εκπαίδευση, (γ) τον εκπαιδευτικό και τον μαθητή υπό το πρίσμα νέων αξιολογικών προσεγγίσεων, (δ) την αξιολόγηση για τη μάθηση, (ε) τον οργανωμένο τρόπο αξιοποίησης της διαδικασίας αξιολόγησης από τον εκπαιδευτικό στην τάξη των μαθηματικών για την επίτευξη διδακτικών, μαθησιακών και κοινωνικών σκοπών-στόχων, (στ) τα προτεινόμενα εργαλεία αξιολόγησης στα μαθηματικά και τους τρόπους με τους οποίους αποκτούν δυναμικό χαρακτήρα και συνιστούν σημείο αναφοράς για τη διδασκαλία, τη μάθηση και την ενημέρωση των εταίρων της αξιολογικής διαδικασίας.

## 1. Η αξιολόγηση ως συνιστώσα της εκπαιδευτικής πράξης

Τα μαθηματικά αποτελούν βασικό πεδίο στα Προγράμματα Σπουδών των εκπαιδευτικών συστημάτων διεθνώς και συνιστούν κύριο μέλημα της εκπαιδευτικής πολιτικής που ασκεί η Πολιτεία. Η αξιολόγηση αποτελεί μια κρίσιμη συνιστώσα της μαθησιακής διαδικασίας, η οποία, σε συνδυασμό με άλλες συνιστώσες, συνδιαμορφώνει την αποτελεσματική διδασκαλία και μάθηση και καθορίζει μελλοντικές επαγγελματικές και άλλες πορείες του μαθητή (Κλώθου & Σακονίδης, 2017). Σύμφωνα με την πρόσφατη ελληνική νομοθεσία [ΦΕΚ 74/Α/22-4-2016 (άρθρο 1)] «η αξιολόγηση των μαθητών έχει ως στόχο τη διαρκή βελτίωση της διδασκαλίας και γενικότερα της λειτουργίας της σχολικής μονάδας και αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της διδακτικής-μαθησιακής διαδικασίας» και διακρίνεται σε διαγνωστική, διαμορφωτική και τελική. **Η διαγνωστική αξιολόγηση**, στην αρχή κάθε σχολικού έτους, έχει στόχο να ‘καταγράψει’ τις ήδη κατεκτημένες γνώσεις των μαθητών και να συμβάλει στον ετήσιο

σχεδιασμό του εκπαιδευτικού. Η **διαμορφωτική αξιολόγηση**, κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους, έχει στόχο να προσδιορίσει τον βαθμό στον οποίο έχουν επιτευχθεί οι στόχοι της διδακτικής διαδικασίας, όπως αυτοί καθορίζονται από τα ισχύοντα Προγράμματα Σπουδών των αντίστοιχων μαθημάτων. Η **τελική αξιολόγηση** επιδιώκει την έγκυρη, αξιόπιστη, αντικειμενική και αδιάβλητη αποτίμηση των γνώσεων, των ικανοτήτων και των δεξιοτήτων των μαθητών.

Στην πραγματικότητα το θεσμικό αξιολογικό πλαίσιο που περιγράφεται παραπάνω δεν εφαρμόστηκε σχεδόν ποτέ στην εκπαιδευτική πράξη. Στα περισσότερα σχολεία η αξιολόγηση των μαθητών συνεχίζει να έχει αθροιστικό χαρακτήρα, λειτουργώντας περιορισμένα και μονοδιάστατα. Οι νέες αντιλήψεις για την αξιολόγηση στην εκπαίδευση επαναπροσδιορίζουν τη μονοδιάστατη θεώρηση της αξιολογικής διαδικασίας στο σχολείο, η οποία εστιάζεται στο αποτέλεσμα της μάθησης και επικεντρώνεται στην αξιολόγηση ως διαδικασία οργανικά ενσωματωμένη στη διδασκαλία και τη μάθηση με σκοπό την εξέλιξή τους. Κατά συνέπεια, ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνεται να ‘διαχειριστεί’ την αξιολόγηση ως δυναμικό και αναπόσπαστο μέρος της διδακτικής του πρακτικής και οι μαθητές να την αντιληφθούν ως συνιστώσα της μαθησιακής διαδικασίας που διευρύνει τις ευκαιρίες για μάθηση.

### **1.1. Βασικές παράμετροι της εκπαιδευτικής αξιολόγησης**

Η αξιολόγηση συνιστά μια ιδιαίτερα σημαντική πτυχή της εκπαιδευτικής διαδικασίας που αφορά τη συλλογή, την παραγωγή και την επεξεργασία δεδομένων για να αξιοποιηθούν προς όφελος του συνόλου των εμπλεκομένων στη μαθησιακή διαδικασία (van de Walle, 2017). Αποτελεί διακριτή και στοχευμένη συνιστώσα της διδασκαλίας που καθοδηγεί τον εκπαιδευτικό στις διδακτικές του αποφάσεις και υποστηρίζει τη μάθηση του μαθητή. Συνδέεται με μια σειρά από ζητήματα που σχετίζονται (α) με την ίδια τη διαδικασία αξιολόγησης και ειδικότερα με τον σκοπό, τις αρχές και τα κριτήριά της, καθώς και με την ανάπτυξη αξιολογήσεων που μπορούν να “εκτιμήσουν” με εγκυρότητα τη μαθηματική επάρκεια στην πολυπλοκότητά της, (β) με την εκπαιδευτική πολιτική που ασκείται και συχνά συνυπολογίζει τα δεδομένα της αξιολόγησης και (γ) με θέματα ίσων ευκαιριών πρόσβασης στα αγαθά και τα οφέλη της εκπαιδευτικής διαδικασίας.

Δύο κεντρικές *λειτουργίες*, η αποτίμηση και η ανατροφοδότηση της μάθησης και της διδασκαλίας, ανάγουν την αξιολόγηση σε οργανικό στοιχείο της καθημερινής διδακτικής πράξης. Η αποτίμηση σχετίζεται με την κρίση του εκπαιδευτικού για την κατανόηση που επιδεικνύουν οι μαθητές, μπορεί να περιλαμβάνει δεδομένα από γραπτές δοκιμασίες, ωστόσο λαμβάνει υπόψη ποικίλες πηγές δεδομένων, τα οποία παράγονται κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Η παραδοσιακή αποτίμηση είναι σχεδόν ταυτόσημη με μια δοκιμασία στο τέλος μιας ενότητας. Με τη λειτουργία της

αποτίμησης ο εκπαιδευτικός εξετάζει την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας του ως προς την ανάπτυξη των μαθηματικών ιδεών από τους μαθητές και είτε σχεδιάζει την επόμενη διδασκαλία είτε επανασχεδιάζει την προηγούμενη, παρέχοντας ανατροφοδότηση στους μαθητές.

Από τα τέλη του προηγούμενου αιώνα η αξιολογική διαδικασία βρέθηκε στο επίκεντρο του εκπαιδευτικού ενδιαφέροντος με τη σχετική βιβλιογραφία να υποδεικνύει τέσσερις κρίσιμες επιδιώξεις (π.χ., NCTM, 2014):

- *Παρακολούθηση της πορείας των μαθητών*: η αξιολόγηση παρέχει πληροφορίες στον εκπαιδευτικό σχετικά με την πρόοδο που επιτυγχάνεται σε σχέση με τον στόχο ή τους στόχους που είχαν τεθεί σε κάθε διδασκαλία και ανατροφοδοτεί τους μαθητές για τη μαθησιακή τους πορεία.
- *Λήψη διδακτικών αποφάσεων*: ο εκπαιδευτικός, κατά τη διαδικασία σχεδιασμού μιας διδασκαλίας, λαμβάνει αποφάσεις σχετικές με τις δραστηριότητες που θα σχεδιάσει, συνυπολογίζοντας δεδομένα σχετικά με το τι γνωρίζουν και τι είναι σε θέση να κάνουν οι μαθητές του.
- *Αποτίμηση της επίδοσης των μαθητών*: η αποτίμηση αντανακλά τα κριτήρια επίδοσης σχετικά με το τι γνωρίζουν και τι κατανοούν οι μαθητές, ενσωματώνοντας συνεχώς πληροφορίες και δεδομένα για την πρόοδο των μαθητών.
- *Αποτίμηση των προγραμμάτων*: τα δεδομένα της αξιολόγησης απαντούν στο ερώτημα «πόσο καλά λειτούργησε αυτό το πρόγραμμα ως προς την επίτευξη των στόχων που τέθηκαν;» Το πρόγραμμα αναφέρεται σε κάθε οργανωμένη ενότητα που πρόκειται να μελετηθεί και να διδαχθεί, περιλαμβάνει διδακτικές ενότητες σχεδιασμένες από τον ίδιο τον εκπαιδευτικό ή ένα κεφάλαιο από το διδακτικό εγχειρίδιο. Κατά την αποτίμηση των Προγραμμάτων Σπουδών είναι σημαντικό να λαμβάνονται υπόψη οι γνώσεις, οι διεργασίες, η κατανόηση και η προδιάθεση των μαθητών με βάση ποικίλες πηγές δεδομένων.



**Σχήμα 1** Κεντρικοί στόχοι και σκοποί της αξιολογικής διαδικασίας (NCTM, 2014)

Η σχετική έρευνα υποδεικνύει τις ακόλουθες βασικές αρχές μιας σύγχρονης αξιολογικής διαδικασίας (Black κ.ά., 2003, 2010, 2011; Harlen, 2005):

- Χρήση ποικίλων μεθόδων για τη συλλογή δεδομένων-πληροφοριών.
- Καθορισμός κριτηρίων αξιολόγησης (με βάση συγκεκριμένους τομείς προσέγγισης του διδακτικού αντικειμένου).
- Συμμετοχή των μαθητών στην αξιολογική διαδικασία (διαμόρφωση κριτηρίων αξιολόγησης για την προσωπική τους μαθησιακή πορεία και με βάση αυτά αποτίμηση της δράσης τους).
- Συνεργασία με άλλους εκπαιδευτικούς ώστε η αξιολόγηση να είναι πληρέστερη, αξιόπιστη και αποτελεσματική.

Οι παραπάνω βασικές αρχές ‘αντιμετωπίζουν’ την αξιολογική διαδικασία ως πλήρως ενσωματωμένη στη διδασκαλία, υποδεικνύοντας τέσσερα στάδια ανάπτυξής της, τα οποία ακολουθούν συνήθως κυκλική πορεία, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



**Σχήμα 2** National Council of Teachers of Mathematics (2000)

Συνεπώς η αξιολόγηση συνιστά μια συνεχή διαδικασία συστηματικής συλλογής στοχευμένων πληροφοριών-δεδομένων, τα αποτελέσματα της οποίας ερμηνεύονται και αξιοποιούνται για τον σχεδιασμό της διδασκαλίας και την ανατροφοδότηση των μαθητών για τα επιτεύγματά τους.

Στη βάση των παραπάνω αρχών, επιδιώξω και λειτουργιών της αξιολόγησης, ο εκπαιδευτικός καλείται να υιοθετήσει μια σειρά από κριτήρια για να εντάξει με αποτελεσματικό τρόπο την αξιολογική διαδικασία στις διδακτικές του πρακτικές. Κεντρική θέση ανάμεσα σε αυτά τα κριτήρια κατέχουν τα ακόλουθα (Πετροπούλου, Κασιμάτη, Ρετάλης, 2015; Ontario Curriculum, 2020):

*Το κριτήριο της γνώσης:* Η αξιολόγηση επικεντρώνεται στη γνώση που χρειάζεται να προσεγγίσουν όλοι οι μαθητές, έτσι όπως αυτή ορίζεται από τα προγράμματα σπουδών

και από τα επιστημονικά, εκπαιδευτικά και κοινωνικο-πολιτισμικά και πολιτικά δεδομένα κάθε εποχής.

*Το κριτήριο της μάθησης:* Η αξιολόγηση στοχεύει στην ενίσχυση της μαθησιακής διαδικασίας με απώτερη επιδίωξη την εξέλιξη και όχι απλώς τον έλεγχο της επίδοσης αλλά και της απόδοσης κάθε μαθητή.

*Το κριτήριο της εφαρμογής:* Η αξιολόγηση εξετάζει και ενισχύει την ικανότητα των μαθητών να εφαρμόζουν τη γνώση που έχουν κατακτήσει αλλά και να τη συνδέουν με τη νέα γνώση.

*Το κριτήριο της αμεροληψίας:* Η αξιολόγηση προάγει την αμεροληψία. Η αμερόληπτη αξιολόγηση σέβεται τα βιώματα και τις εμπειρίες κάθε μαθητή και στοχεύει στην ανάδειξη των τρόπων σκέψης των μαθητών, των γνώσεων, των κατανοήσεων και της αποτελεσματικής διαχείρισής τους. Ταυτόχρονα είναι απαραίτητο να αναγνωρίζεται ότι όλοι οι μαθητές χρειάζονται διαφορετικής μορφής υποστήριξη στη μαθησιακή τους πορεία.

*Το κριτήριο της διαφάνειας:* Η αξιολόγηση συνιστά μια ανοιχτή διαδικασία. Οι μαθητές είναι σημαντικό να γνωρίζουν τις προσδοκίες του εκπαιδευτικού και τους τρόπους με τους οποίους θα 'επικοινωνήσουν' τη γνώση.

*Το κριτήριο της εγκυρότητας:* Η αξιολόγηση οφείλει να οδηγεί σε έγκυρα ευρήματα σχετικά με τις διαδικασίες μάθησης και διδασκαλίας και να μετρά αυτό για το οποίο σχεδιάστηκε να μετρήσει, δηλαδή να βασίζεται σε αυτό που διδάχθηκε ο μαθητής. Επίσης το αποτέλεσμα μιας αξιολογικής διαδικασίας θεωρείται έγκυρο αν εκφράζει με πληρότητα και ακρίβεια το πραγματικό 'επίπεδο' της αναμενόμενης επίδοσης, αν εντοπίζει παρατηρήσιμες συμπεριφορές των μαθητών ώστε να χρησιμοποιηθούν ως ενδείξεις για το τι γνωρίζουν και τι δεν γνωρίζουν οι μαθητές και αν ο βαθμός επίδοσης σε μια γραπτή δοκιμασία σχετίζεται με (επιβεβαιώνεται από) την αξιολόγηση της προφορικής επίδοσης των μαθητών.

*Το κριτήριο της αξιοπιστίας:* Η αξιοπιστία στην αξιολόγηση διασφαλίζει ότι, στους ίδιους μαθητές, το αποτέλεσμα μιας αξιολογικής διαδικασίας ή πολλαπλών αξιολογικών διαδικασιών, που πραγματοποιούνται σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα και κάτω από τις ίδιες συνθήκες, θα είναι ίδιο ή περίπου ίδιο. Για παράδειγμα, αν σε μια τάξη είκοσι μαθητών, στην αρχική αξιολόγηση, οι απαντήσεις δεκαπέντε μαθητών χαρακτηρίστηκαν «μέτριες» και στις επόμενες αξιολογήσεις οι απαντήσεις των ίδιων μαθητών χαρακτηρίστηκαν «μέτριες» ή «περίπου μέτριες», ενώ στην αρχική αξιολόγηση οι απαντήσεις των υπόλοιπων πέντε μαθητών χαρακτηρίστηκαν «άριστες» και στις επόμενες αξιολογικές διαδικασίες οι απαντήσεις των ίδιων μαθητών χαρακτηρίστηκαν «άριστες» ή «περίπου άριστες», τότε η αξιολογική διαδικασία ικανοποιεί το κριτήριο της αξιοπιστίας.

*Το κριτήριο της συνοχής:* Η αξιολόγηση είναι μια συνεκτική διαδικασία και, κατά συνέπεια, είναι σημαντικό να υπάρχει συμβατότητα μεταξύ των πρακτικών αξιολόγησης και των επιδιώξεων 'ισορροπίας' ανάμεσα στις πρακτικές αξιολόγησης, οι οποίες αντικατοπτρίζουν την εννοιολογική και τη διαδικαστική κατανόηση, καθώς και τις μαθηματικές διαδικασίες. Ο τρόπος που οι μαθητές συνδέουν τις μαθηματικές έννοιες και τις διαδικασίες, απαντώντας σε ένα μαθηματικό έργο, αποτυπώνει την *εννοιολογική κατανόηση* και τη διαδικαστική κατανόηση των μαθητών, δηλαδή το πώς κατανοούν οι μαθητές, ποιες ιδέες συνδέουν και πώς αναπαριστούν τις έννοιες με τις οποίες εμπλέκονται.

*Το κριτήριο της επικοινωνίας:* Η αξιολόγηση εξετάζει και προωθεί την ικανότητα των μαθητών όχι μόνο να οργανώνουν τις ιδέες τους αλλά και να τις εκφράζουν στην τάξη. Έτσι οι μαθητές επικοινωνούν με τους συνομηλίκους και τον εκπαιδευτικό, παρουσιάζουν και γενικεύουν τις ιδέες τους, ενώ καταλήγουν σε ασφαλή συμπεράσματα μέσα από διάλογο και ανταλλαγή ιδεών.

## **1.2. Σύγχρονες προσεγγίσεις στην εκπαιδευτική αξιολόγηση**

Η αξιολόγηση ως συνιστώσα της καθημερινής διδακτικής πράξης αποκτά έναν ρόλο αναβαθμισμένο και διαφορετικό σε σχέση με τον παραδοσιακό τρόπο αξιολόγησης και αποτελεί βασικό πυλώνα της διδασκαλίας και της μάθησης, ενώ στοχεύει στη μάθηση όλων των μαθητών υποστηρίζοντας τη μαθησιακή τους πορεία και εξέλιξη.

Στα σύγχρονα Προγράμματα Σπουδών η αξιολόγηση αποκτά δυναμικά χαρακτηριστικά, συλλέγει, ερμηνεύει και αξιοποιεί πληροφορίες για τη διδασκαλία και τα αποτελέσματα της μάθησης, ενώ εστιάζεται σε τρεις βασικές προσεγγίσεις: (α) την αξιολόγηση της μάθησης (β) την αξιολόγηση για τη μάθηση και (γ) την αξιολόγηση ως μάθηση. Οι τρεις προσεγγίσεις αξιοποιούνται συμπληρωματικά και λειτουργούν διαμορφωτικά (αναγνώριση των αναγκών των μαθητών ώστε να ακολουθήσουν κατάλληλες ενέργειες για την υποστήριξη της μάθησης) εστιάζοντας:

- στην καθημερινή αλληλεπίδραση εκπαιδευτικού με τους μαθητές μέσα στην τάξη και στη συλλογή-επεξεργασία ενδείξεων-στοιχείων σχετικών με τη μάθηση (αξιολόγηση για τη μάθηση)
- στη σύνθεση του μαθησιακού 'προφίλ' του μαθητή στο τέλος μιας χρονικής περιόδου για την ενημέρωση των ίδιων των μαθητών και των εταίρων της μαθησιακής διαδικασίας (αξιολόγηση της μάθησης). Οι πληροφορίες που παρέχονται στον μαθητή σχετικά με τις επιδόσεις του θα τον βοηθήσουν να κατανοήσει τι έμαθε και τι όχι, τι τον δυσκόλεψε και θα αναδείξουν τα σημεία που χρειάζεται να αναπτύξει περαιτέρω ώστε να εξελιχθεί μαθησιακά.

**(α) Αξιολόγηση της μάθησης (assessment of learning):** Πρόκειται στην πραγματικότητα για την αθροιστική αξιολόγηση, η οποία λαμβάνει χώρα κυρίως στο τέλος της ενασχόλησης με ένα (μαθηματικό) έργο (task) και εστιάζεται στην επίδοση των μαθητών με βάση τους στόχους του Προγράμματος Σπουδών, σε τομείς προκαθορισμένους και με βάση συγκεκριμένα κριτήρια αξιολόγησης. Στόχος της είναι η ενημέρωση των μαθητών και των εταίρων της μαθησιακής διαδικασίας (εκπαιδευτικοί, γονείς, στελέχη εκπαίδευσης, κ.ά.) για το πού βρίσκονται οι αξιολογούμενοι ως προς τις γνώσεις τους και το αποτέλεσμα της μαθησιακής τους πορείας. Συχνά συμβάλλει στη λήψη σημαντικών αποφάσεων που επηρεάζουν το μέλλον των μαθητών και γι' αυτό είναι σημαντικό να είναι μια αξιόπιστη και υπερασπίσιμη διαδικασία. Ωστόσο, τα περιορισμένα αποτελέσματα που επιφέρει, οι αναπόφευκτες επικρίσεις που διατυπώνονται για την αντικειμενικότητα των μεθόδων που υιοθετεί και την περιορισμένη δυνατότητα ενίσχυσης της επίδοσης του μαθητή οδήγησαν στην αναζήτηση αξιολογικών προσεγγίσεων που επιτρέπουν τη διαφορφοτική αποτύπωση των επιτευγμάτων των μαθητών.

**(β) Αξιολόγηση για μάθηση (assessment for learning):** Υποστηρίζει ένα περιβάλλον στο οποίο οι μαθητές κατανοούν τι αναμένεται να μάθουν και λαμβάνουν ανατροφοδότηση για την εξέλιξη της μαθησιακής πορείας τους. Η ανατροφοδότηση από τον εκπαιδευτικό αλλά και από τους συμμαθητές, μέσα από διάφορες στρατηγικές (Hattie, 2011), επιφέρει σημαντικές βελτιώσεις στα μαθησιακά αποτελέσματα των μαθητών (Black & William, 2005).

Οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν την αξιολόγηση ως εργαλείο διερεύνησης της γνώσης και των ικανοτήτων των μαθητών, των παρανοήσεων, των προκαταλήψεων ή των κενών που μπορεί να έχουν. Το εύρος των δεδομένων και των πληροφοριών που συλλέγουν για τη μαθησιακή διαδικασία προσδιορίζει τη μετέπειτα πορεία της μάθησης και τη λήψη αποφάσεων για υιοθέτηση στρατηγικών και εμπλουτισμό των σχετικών πόρων. Μέσω αυτής της διαδικασίας, που έχει διαφορφοτικό κυρίως χαρακτήρα, ενισχύεται η μεταγνωστική ενημερότητα του μαθητή (ως γνώση της διαδικασίας σκέψης και του τρόπου με τον οποίο μαθαίνουν), ενώ η αυτοαξιολόγηση και η αξιολόγηση από ομότιμους (ετεροαξιολόγηση) συνιστούν κομβικές συνιστώσες της *αξιολόγησης για μάθηση*.

Η *αξιολόγηση για μάθηση* αξιοποιεί το σύνολο των διαδικασιών αξιολόγησης, τόσο τις διαφορφοτικές, κυρίως τις ανεπίσημες, όσο και τις αθροιστικές. Ένα ενδιαφέρον παράδειγμα αξιοποίησης της αθροιστικής στρατηγικής αξιολόγησης, στο πλαίσιο της αξιολόγησης για τη μάθηση, είναι η χρήση της για τον εντοπισμό του ελλείμματος κατανόησης μιας συγκεκριμένης μαθηματικής έννοιας του Προγράμματος Σπουδών και στη συνέχεια για τον προσδιορισμό των στόχων που θα οδηγήσουν στη διόρθωση του ελλείμματος αυτού.



Στον παρακάτω πίνακα (NFER, 2007) παρουσιάζεται μια ταξινόμηση των στρατηγικών της *αξιολόγησης για μάθηση*, οι οποίες αξιοποιούν στοιχεία τόσο διαμορφωτικής όσο και αθροιστικής αξιολόγησης, ανάλογα με το επίσημο ή το ανεπίσημο πλαίσιο στο οποίο αναπτύσσονται συμπληρωματικά. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι το σύνολο των στρατηγικών αξιολόγησης που παρουσιάζονται παρακάτω υποστηρίζουν την *αξιολόγηση για μάθηση*, με την ‘προϋπόθεση’ ότι χρησιμοποιούνται για να υποστηρίξουν τον μαθητή στην εξέλιξη της μάθησής του.

	<b>Διαμορφωτική αξιολόγηση</b>	<b>Αθροιστική αξιολόγηση</b>
<b>Άτυπη-Ανεπίσημη (informal)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ερωτήσεις-απαντήσεις</li> <li>• Διάλογος-αλληλεπίδραση</li> <li>• Ανατροφοδότηση</li> <li>• Ετεροαξιολόγηση</li> <li>• Αυτοαξιολόγηση</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Γραπτό-προφορικό κείμενο<sup>1</sup> με στόχο τη διερεύνηση και τον προβληματισμό</li> <li>• Γραπτό-προφορικό κείμενο χωρίς καθορισμένο στόχο</li> <li>• Portfolio</li> <li>• Εργασίες</li> <li>• Αξιολόγηση από εκπαιδευτικό</li> </ul>
<b>Τυπική-Επίσημη (formal)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Καθορισμός στόχου</li> <li>• Γραπτή εξέταση (τεστ, διαγώνισμα, δοκιμασία, εξέταση, δοκίμιο)</li> <li>• Αποτίμηση-ανατροφοδότηση</li> <li>• Ετεροαξιολόγηση, αυτοαξιολόγηση)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Δοκιμασίες-Γραπτές εξετάσεις</li> <li>• Γραπτές απαντήσεις με σκοπό τη διερεύνηση και τον προβληματισμό</li> <li>• Αξιολόγηση από εκπαιδευτικό</li> </ul>

**Πίνακας 1** Στρατηγικές αξιολόγησης για τη μάθηση (Προσαρμογή από NFER 2007)

(γ) *Η αξιολόγηση ως μάθηση (assessment as learning)*: Μέσα από τη διαδικασία της αξιολόγησης ως μάθησης οι μαθητές αντιλαμβάνονται τους τρόπους με τους οποίους κατέκτησαν τις γνώσεις, καθώς και τους τρόπους με τους οποίους θα επιτύχουν την κατάκτηση της νέας γνώσης (μεταγνωστική δεξιότητα). Συλλογίζονται για τις δικές τους εργασίες (αυτο-αξιολόγηση), αλλά και για την εργασία του συμμαθητή τους (ετεροαξιολόγηση). Οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με ερωτήματα όπως: *ποιος είναι ο στόχος μάθησης νέων εννοιών και δεξιοτήτων, καταλαβαίνω αυτές τις έννοιες; Τι γνωρίζω για το ζήτημα που με απασχολεί; Ποια στρατηγική θα ακολουθήσω για να*

<sup>1</sup> Ο όρος «κείμενο» αναφέρεται σε οποιοδήποτε στοιχείο μπορεί να υποστεί και να προκαλέσει αξιολογικές κρίσεις. Με αυτήν την έννοια, το «κείμενο» μπορεί να είναι «μια χειρονομία, ο τρόπος που ο μαθητής τοποθετεί τη σάκα στην τάξη, μια προφορική απάντηση του μαθητή στην ερώτηση του δασκάλου ή ένα γραπτό σε επίσημες δοκιμασίες» (Κουλαϊδής & Τσατσαρώνη, 2010)

*μάθω; Ποια είναι τα κριτήρια με τα οποία η εργασία μου θα βελτιωθεί; Πώς θα πετύχω στους αρχικούς μου στόχους;* Συνεπώς οι μαθητές θέτουν ερωτήματα, παρακολουθούν την πορεία της μάθησής τους, αξιοποιούν τις εναλλακτικές ιδέες τους στα μαθηματικά.

Η αξιολόγηση για τη μάθηση αλλά και η αξιολόγηση ως μάθηση μπορούν να αξιοποιηθούν συνδυαστικά παρέχοντας στον εκπαιδευτικό τη δυνατότητα για συνεχείς-καθημερινές διδακτικές και μαθησιακές ενέργειες με στόχο την εξέλιξη της μάθησης όλων των μαθητών, καθώς και την εξέταση της αποτελεσματικότητας της διδασκαλίας.

### **1.3. Εκπαιδευτικός και μαθητής στις σύγχρονες προσεγγίσεις της αξιολόγησης**

Στις σύγχρονες προσεγγίσεις της αξιολογικής διαδικασίας ο εκπαιδευτικός καλείται να μεταβεί από τη μονοδιάστατη παραδοσιακή αθροιστική αξιολόγηση στη διαμορφωτική αξιολόγηση, δίνοντας βαρύτητα στην αξιολόγηση για τη μάθηση, αλλά και στην αξιολόγηση ως μάθηση.

Ο εκπαιδευτικός, στην καθημερινή διδακτική πρακτική, βρίσκεται σε διαρκή αλληλεπίδραση με τους μαθητές, παρατηρεί, θέτει ερωτήματα, λαμβάνει απαντήσεις, αναθέτει ατομικά ή ομαδικά έργα. Μέσω αυτών των πρακτικών μπορεί να αντλήσει, να συλλέξει και να επεξεργαστεί δεδομένα-πληροφορίες. Προχωρά σε επανασχεδιασμό της διδασκαλίας στην περίπτωση μη επίτευξης του στόχου ή των στόχων που είχαν τεθεί. Ενθαρρύνει και υποστηρίζει τους μαθητές να αναρωτηθούν και να αξιολογήσουν τις σκέψεις τους, την αβεβαιότητά τους, τις εναλλακτικές τους ιδέες, καταστάσεις που είναι συνήθεις όταν οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με τη νέα γνώση. Τους εμπλέκει αρχικά σε διαδικασίες αξιολόγησης χρησιμοποιώντας κατάλληλα παραδείγματα για διερεύνηση και προβληματισμό, έτσι ώστε οι μαθητές να εξοικειωθούν με τις διαδικασίες αξιολόγησης τις οποίες θα αξιοποιήσουν στη διερεύνηση-αποτίμηση των δικών τους εργασιών (αυτο-αξιολόγηση) αλλά και των εργασιών του συμμαθητή ή των συμμαθητών τους (ετερο-αξιολόγηση).

Είναι σημαντικό ο εκπαιδευτικός να διαμορφώσει ένα μαθησιακό περιβάλλον στο οποίο οι μαθητές να αποκτούν ενεργό πρωταγωνιστικό ρόλο στη διαδικασία της μάθησης και να εμπλέκονται για διαμορφωτικούς σκοπούς στην αξιολόγηση για τη μάθηση, η οποία λειτουργεί και ως μάθηση για τους ίδιους, καθώς οι μαθητές:

(α) Αναπτύσσουν τη μεταγνωστική τους ικανότητα. Η μεταγνώση είναι η επίγνωση του τρόπου λειτουργίας της σκέψης και των τρόπων επεξεργασίας της γνώσης, η επίγνωση δηλαδή του τι γνωρίζουμε (γνώση) και τι δεν γνωρίζουμε (άγνοια). Βασική στρατηγική στον χαρακτηριστικό της αυτοεπίγνωσης του ατόμου είναι η σύνδεση της νέας πληροφορίας με την υπάρχουσα γνώση, ο σχεδιασμός, ο έλεγχος και η εκτίμηση της διαδικασίας της σκέψης.

(β) Συμμετέχουν σε διαδικασίες ετεροαξιολόγησης: η ετεροαξιολόγηση ή αλλιώς η αξιολόγηση μαθητή από μαθητή ή μαθητή από ομάδα μαθητών (ομότιμους), αναφέρεται στη διαδικασία κατά την οποία οι μαθητές αξιολογούν την εργασία των συμμαθητών τους, ενώ η δική τους εργασία αξιολογείται από τους συμμαθητές τους (ΠΗΓΗ). Οι μαθητές αναλαμβάνουν την αξιολόγηση των συμμαθητών σε συνδυασμό με την αυτοαξιολόγηση, δηλαδή προβληματίζονται σχετικά με τις δικές τους προσπάθειες και στη συνέχεια επεκτείνουν και εμπλουτίζουν αυτόν τον προβληματισμό, ανταλλάσσοντας σχόλια σχετικά με τη δική τους εργασία και την εργασία των συμμαθητών τους. Η κοινωνική αλληλεπίδραση που αναπτύσσεται στο πλαίσιο της ετεροαξιολόγησης, εκτός από την υποστήριξη της μάθησης και την παροχή πληροφοριών στον εκπαιδευτικό, ευνοεί την ανάπτυξη ενός φιλικού, συνεργατικού και παιδαγωγικού κλίματος στην τάξη, δίνει έμφαση στη δημιουργική συνεργασία μεταξύ όλων των συμμετεχόντων, ενισχύει την ανταλλαγή εμπειριών και συμβάλλει σε μια δράση συλλογική. Η ετεροαξιολόγηση μπορεί να πραγματοποιηθεί αμέσως μετά από την ολοκλήρωση μιας εργασίας, επιτρέποντας έτσι την παροχή έγκαιρης ανατροφοδότησης στους μαθητές. Οι μαθητές, σε ρόλο αξιολογητή, έχουν τη δυνατότητα να αφιερώσουν περισσότερο χρόνο στη διαδικασία (κάθε μαθητής ή ομάδα μαθητών αξιολογεί την εργασία ενός μόνο μαθητή) και παρέχουν αναλυτική ανατροφοδότηση στον συμμαθητή τους έγκαιρα, σε αντιδιαστολή με τον εκπαιδευτικό που αποτιμά τις εργασίες όλων των μαθητών της τάξης.

γ) Συμμετέχουν σε διαδικασίες αυτοαξιολόγησης. Η αυτοαξιολόγηση είναι η διαδικασία κατά την οποία οι μαθητές οδηγούνται σε συμπεράσματα σχετικά με τη μαθησιακή εξέλιξή τους, προβληματίζονται σχετικά με την ποιότητα της εργασίας τους και αποτιμούν τα αποτελέσματα της προσπάθειας που έχουν καταβάλει. Η αυτοαξιολόγηση επιτρέπει 'να ακουστεί' η φωνή του μαθητή στο πλαίσιο μιας αξιολογικής διαδικασίας. Οι μαθητές εμπλέκονται σε διαδικασίες αυτοαξιολόγησης όταν σκέφτονται και διερευνούν τη δική τους εργασία, επισημαίνουν τα δυνατά αλλά και τα αδύνατα σημεία τους στα οποία θα μπορούσαν να εξελιχθούν και με βάση αυτά θέτουν τους προσωπικούς τους μαθησιακούς στόχους σε ατομικό ή συλλογικό επίπεδο (NCCA, 2008).

Η αυτοαξιολόγηση επιτρέπει στους μαθητές να παρακολουθούν την εξέλιξή τους και να στοχάζονται σχετικά με τους τρόπους που μαθαίνουν, πολλές φορές γίνονται οι ίδιοι ρυθμιστές της πορείας της μάθησής τους. Τα κριτήρια που χρησιμοποιεί κάθε μαθητής σε αυτή τη διαδικασία είναι ίδια με τα κριτήρια της ετεροαξιολόγησης. Η αυτοαξιολόγηση μπορεί να αξιοποιηθεί από μαθητές όλων των ηλικιακών ομάδων, με προσαρμογές κατάλληλες για κάθε ηλικία και σε όλες τις μαθησιακές περιοχές.

δ) Οι μαθητές αναπτύσσουν αναστοχαστική σκέψη, δηλαδή εκκινούν από μια κατάσταση αμφιβολίας ή δισταγμού για τη δική τους απάντηση σε μια ερώτηση ή σε ένα πρόβλημα και αναζητούν την κατάλληλη ιδέα για να 'εξέλθουν' από την

κατάσταση αυτή. Η γνώση προέρχεται είτε από προηγούμενες εμπειρίες των μαθητών είτε από τον εκπαιδευτικό ή από τους συμμαθητές είτε από εξωτερική πηγή αναζήτησης (π.χ. υποστηρικτικό υλικό ΠΣ). Η αναστοχαστική σκέψη και η μεταγνωστική ικανότητα είναι αλληλοσυσχετιζόμενες διαδικασίες και προϋποθέτουν τη νοητή επεξεργασία της πορείας που ακολουθήθηκε για την επίλυση ενός μαθηματικού έργου.

## **2. Η αξιολόγηση για μάθηση στο ΠΣ των Μαθηματικών**

Το νέο ΠΣ των μαθηματικών υποστηρίζει τη γνωστική-ατομική και την κοινωνικο-πολιτισμική-συμμετοχική προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών, αντιμετωπίζοντάς τες ως συμπληρωματικές και σε συνεχή αλληλεπίδραση. Με βάση τις κεντρικές προσεγγίσεις μάθησης διαμορφώνονται δύο κεντρικά συνεργαζόμενα δίπολα: μάθηση και μαθητής και μάθηση και διδασκαλία. Τα δύο αυτά δίπολα δρουν αλληλεπιδραστικά και αλληλο-συμπληρωματικά το ένα με το άλλο. Υιοθετείται η οπτική ότι σε μια τάξη μαθηματικών η εκπαιδευτική διαδικασία αναπτύσσεται τόσο σε ατομικό όσο και σε συλλογικό επίπεδο, τα οποία βρίσκονται σε συνεχή αλληλεπίδραση (Lave & Wenger, 1991, Engeström & Cole, 1997, Lerman, 2006).

Οι γενικοί στόχοι μάθησης, όπως καθορίζονται στο νέο ΠΣ των μαθηματικών, εξειδικεύονται στα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ), τα οποία διατυπώνονται με ακρίβεια για να υποδείξουν τι και πόσο καλά πρέπει να γνωρίζουν, να κατανοούν και να είναι σε θέση να κάνουν οι μαθητές μαθηματικά. Παράλληλα, στο πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης, η γνώση των μαθηματικών δομείται πάνω σε γνωστικά σχήματα που οργανώνονται γύρω από κεντρικές ιδέες ή αρχές που ονομάζονται Μεγάλες Ιδέες των Μαθηματικών. Επίσης το νέο ΠΣ εστιάζει και καταγράφει τις μαθηματικές πρακτικές, δηλαδή τις νοητικές εκείνες διεργασίες που εμπλέκονται στην ανάπτυξη γνώσης και κατανόησης, όπως η σκέψη, η μνήμη, η επίλυση προβλήματος κ.ά. (Jeannotte & Kieran 2006)

Ένα από τα καινοτόμα χαρακτηριστικά του επικαιροποιημένου ΠΣ των μαθηματικών της υποχρεωτικής και της Λυκειακής εκπαίδευσης αποτελεί η αναβαθμισμένη διαδικασία της αξιολόγησης. Το ΠΣ των Μαθηματικών βοηθά τον εκπαιδευτικό στην αξιολόγηση της μάθησης και της διδασκαλίας (α) παρουσιάζοντας αναλυτικά τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα ανά τάξη και, μέσω των μαθησιακών/διδασκτικών τροχιών, πώς συνδέονται με αυτά των προηγούμενων και των επόμενων τάξεων. Με τον τρόπο αυτό ο εκπαιδευτικός κατανοεί αφενός τις μαθηματικές δράσεις που είναι σημαντικό να αναπτύξουν οι μαθητές και αφετέρου δύναται να παρατηρήσει και να ερμηνεύσει τη μαθηματική τους δράση και να διαφοροποιήσει τη διδασκαλία του αναλόγως, (β) προτείνοντας ενδεικτικές δραστηριότητες και συνθετικές εργασίες που συσχετίζονται με συγκεκριμένα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα και καθιστούν εφικτή την υλοποίηση της

αξιολόγησης, συνιστώντας έτσι παραδείγματα για τον εκπαιδευτικό σχεδιασμό δραστηριοτήτων που επιτρέπουν τη συμμετοχή των μαθητών σε πλούσια μαθηματική δράση. (Trigueros et al.,2014, Clarke D.M. 1997)

Η σύνδεση ΠΜΑ και τροχιάς μεταξύ των τριών βαθμίδων και μέσω της διαγνωστικής αξιολόγησης από βαθμίδα σε βαθμίδα βοηθά τον εκπαιδευτικό στην αρχή του σχολικού έτους να καταγράψει τις γνώσεις που ήδη κατέχουν οι μαθητές, καθώς και τις ελλείψεις τους. Με αυτόν τον τρόπο η διαγνωστική αξιολόγηση είναι δυνατόν να συμβάλλει στον ετήσιο σχεδιασμό του εκπαιδευτικού από βαθμίδα σε βαθμίδα και σχετικά με τα σημεία τα οποία διαπιστωμένα (μέσω της διαγνωστικής αξιολόγησης) απαιτούν ανατροφοδότηση των γνώσεων των μαθητών.

Η αξιολόγηση πραγματοποιείται ανεπίσημα (άτυπα) κατά την εξέλιξη του μαθήματος μέσα στη σχολική τάξη και επίσημα (τυπικά: τεστ, διαγωνίσματα, έργα, δραστηριότητες). Ο εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιεί διαφοροποιημένα τα προηγούμενα, σύμφωνα με τις 'ιδιαιτερότητες' των μαθητών της τάξης του, να διαμορφώνει ανάλογα το πώς και το τι προτίθεται να αξιολογήσει και να αξιολογήσει τα εργαλεία αξιολόγησης που περιγράφονται παρακάτω.

Η αξιοποίηση διάφορων τρόπων και προσεγγίσεων αξιολόγησης από βαθμίδα σε βαθμίδα (διαγνωστική αξιολόγηση), αλλά και στην τάξη (διαμορφωτική αξιολόγηση-αθροιστική αξιολόγηση) αποτελεί βασική επιλογή της διδακτικής πράξης στο πλαίσιο του επικαιροποιημένου ΠΣ. Αρχικά, εκτός από τη γνώση του μαθηματικού περιεχομένου, ο εκπαιδευτικός καλείται να διακρίνει τις βασικές μαθηματικές ιδέες και επικεντρώνει το ενδιαφέρον του σε αυτές, καθώς και στα αντίστοιχα μαθηματικά νοήματα. Οργανώνει και διαχειρίζεται τη μαθησιακή διαδικασία που θα ακολουθήσει και την προσαρμόζει στις ανάγκες των μαθητών της τάξης του. Ταυτόχρονα, ο εκπαιδευτικός έχει την ευθύνη του σχεδιασμού ή του επανα-σχεδιασμού της διδασκαλίας του, αλλά και την ευθύνη της επικύρωσης και της αξιολόγησης της μαθηματικής γνώσης των μαθητών, χρειάζεται όχι μόνο να σχεδιάσει και να οργανώσει τη μαθησιακή διαδικασία αλλά και να ερμηνεύσει μη αναμενόμενες καταστάσεις ως προς τη μάθηση και να δράσει άμεσα και ανάλογα. Εξάλλου, μπορεί η μάθηση να είναι μια διαδικασία που αναπτύσσεται και εξελίσσεται σε βάθος χρόνου, η διδασκαλία όμως διαδραματίζεται σε πραγματικό χρόνο και αυτό θέτει καθημερινές προκλήσεις και ευθύνες για τον κάθε εκπαιδευτικό.

Στη συνέχεια ο εκπαιδευτικός, πριν από τη διδασκαλία και στη φάση του προγραμματισμού-προετοιμασίας της, εντοπίζει τα σχετικά ΠΜΑ από το ΠΣ των μαθηματικών. Το ΠΜΑ ή τα ΠΜΑ, τα οποία θα επιλεγούν προς αξιολόγηση είναι αναγκαίο να συνδέονται: (α) με τον μαθησιακό στόχο ή τους μαθησιακούς στόχους που έχουν τεθεί, (β) με το γνωστικό επίπεδο και τις ανάγκες των μαθητών, (γ) με το περιεχόμενο της διδασκαλίας που έχει προηγηθεί και (δ) με την ερώτηση ή το έργο ή τη δραστηριότητα ή το πρόβλημα στο οποίο θα εργαστούν οι μαθητές (επίσημα ή

ανεπίσημα) και θα αξιολογηθούν. Σε αυτήν την κατεύθυνση είναι σημαντικός ο ρόλος των εργαλείων αξιολόγησης, ώστε ο εκπαιδευτικός, αφού έχει επιλέξει τι θα αξιολογήσει, να αποφασίσει με ποια εργαλεία θα πραγματοποιήσει την αξιολόγηση.

Ακολουθεί η αποτίμηση της αξιολόγησης και η ανατροφοδότηση της μάθησης των μαθητών ή της διδασκαλίας, εφόσον διαπιστωθεί μη επίτευξη του στόχου ή των στόχων που είχαν τεθεί αρχικά.

Συνοψίζοντας, η αξιολόγηση διατρέχει όλη τη διδακτική διαδικασία, ελέγχει την πορεία επίτευξης των στόχων και τους συσχετίζει με τα μαθησιακά αποτελέσματα τα οποία προκύπτουν. Δεν είναι βαθμολογία, μέτρηση, συμπλήρωμα διδασκαλίας αλλά είναι πλήρως ενσωματωμένη στη διδασκαλία και εξυπηρετεί τη διδασκαλία και τη μάθηση, αποτελώντας μηχανισμό συνεχούς αποτίμησης και ανατροφοδότησης.

## **2.1. Η αξιολόγηση για μάθηση ως αναστοχασμός (reflecting) και ως αναφορά (reporting)**

Η εφαρμογή της διαμορφωτικής αξιολόγησης σε συνδυασμό με την αθροιστική αξιολόγηση και η χρήση των εργαλείων αξιολόγησης προσφέρουν στον εκπαιδευτικό ένα οργανωμένο σύνολο αναφοράς των αποτελεσμάτων-πληροφοριών για την αποτίμηση της διδασκαλίας και της μάθησης. Οι πληροφορίες που συλλέγονται παρέχουν τα στοιχεία εκείνα, τα οποία βοηθούν τον εκπαιδευτικό όχι μόνο να παρέχει υποστήριξη το μαθητή στην πορεία της μάθησης του αλλά και στη βελτίωση της πορείας του για μάθηση. Σε αυτό το πλαίσιο η αξιολόγηση έχει την έννοια της ποιοτικής έκφρασης της επίδοσης του μαθητή, αλλά και της μαθησιακής του πορείας για να φτάσει στη συγκεκριμένη επίδοση. (Κατσαρού-Δεδούλη 2008). Η ορθή επεξεργασία των πληροφοριών, η οργάνωση των αποτελεσμάτων και η συγκέντρωση των στοιχείων από τον εκπαιδευτικό υποστηρίζει τη βελτίωση και την ποιοτική αναβάθμιση του συνόλου των συντελεστών της αξιολόγησης για μάθηση (εκπαιδευτικός, μαθητής, γονείς) στην κατεύθυνση της μεταξύ τους παιδαγωγικής επικοινωνίας και σχέσης και προς όφελος της μαθησιακής πορείας του μαθητή. Τα στοιχεία που έχει συλλέξει, καταγράφει και αναλύει ο εκπαιδευτικός αποτελούν τη βάση για την σύνταξη της έκθεσης προόδου ή για τη σύνταξη του ατομικού δελτίου προόδου του μαθητή (ΑΔΕΠ). Η έκθεση προόδου καθώς και το ΑΔΕΠ αξιοποιούνται από τον εκπαιδευτικό για την ενημέρωση όλων των εμπλεκομένων στη διαδικασία της διδασκαλίας και της μάθησης των Μαθηματικών.

Η υιοθέτηση της αξιολόγησης για μάθηση και τα αποτελέσματα της αξιολόγησης αποτελούν βασικό σημείο αναφοράς, καθώς:

- Γνωστοποιούνται στους μαθητές και χρησιμοποιούνται για δικό τους όφελος. Βασικός σκοπός της διαμορφωτικής αξιολόγησης είναι να δημιουργήσει ο

μαθητής την εικόνα της ατομικής του προόδου και να μπορέσει να βελτιώσει τις επιδόσεις του. ( Νίκα Μ.,Βεκρής Ε., Χριστοδούλου Ν. κ.α., ΙΕΠ, 2017 σ. 16)

- Καθιστούν τους γονείς ενήμερους για τους διδακτικούς στόχους, τα κριτήρια αξιολόγησης και τον βαθμό επίτευξης των διδακτικών στόχων των παιδιών τους. Η κοινοποίηση των αποτελεσμάτων και των στοιχείων αναφοράς για την πρόοδο των μαθητών μπορεί να συμβάλλει στη βελτίωση της επικοινωνίας και της αλληλεπίδρασης ανάμεσα στους μαθητές, τον εκπαιδευτικό και τους γονείς. ( Νίκα Μ.,Βεκρής Ε., Χριστοδούλου Ν. κ.α., ΙΕΠ, 2017 σ. 14,16)
- Η έκθεση της προόδου και το ΑΔΕΠ των μαθητών αποτυπώνουν δυναμικά τη μαθησιακή πορεία του μαθητή, αποφεύγοντας στατικές εκτιμήσεις των δυνατοτήτων και των αδυναμιών του (είναι πολύ καλός, δεν διαβάζει στο σπίτι, έγραψε κάτω από τη βάση στο τεστ, δεν συμμετέχει στο μάθημα κ.λπ.).
- Αναβαθμίζουν τον ρόλο του εκπαιδευτικού, υποστηρίζουν το έργο του, τον καθιστούν αναστοχαζόμενο επαγγελματία και συμβάλλουν θετικά στην επαγγελματική του ανάπτυξη. Η επαγγελματική ανάπτυξη του εκπαιδευτικού γίνεται μέρος της καθημερινής πρακτικής για βελτίωση, οι δράσεις του όταν αξιολογεί την πρόοδο των μαθητών του είναι πολλαπλές και ουσιαστικές, περιορίζεται ο ρόλος που τον θέλει να λειτουργεί μόνο ως αναμεταδότη γνώσεων και αυστηρό βαθμολογητή στη γνωστή κλίμακα 0-20.

## **2.2. Έκθεση προόδου: αποτύπωση της επίδοσης του μαθητή και της μαθησιακής του πορείας – παράλληλη ανάδειξη των προοπτικών βελτίωσης**

Η έκθεση προόδου αφορά την διαμορφωτική αξιολόγηση και η αποτύπωση σε αυτήν των αξιολογικών στοιχείων έχει σκοπό να κοινοποιήσει στοιχεία σχετικά με την μαθησιακή και αναπτυξιακή πορεία:

- στον ίδιο το μαθητή, ώστε να του παρέχει ανατροφοδότηση και να αντιληφθεί το σημείο στο οποίο βρίσκεται, το σημείο στο οποίο επιδιώκεται να φτάσει καθώς και τους τρόπους με τους οποίους είναι δυνατόν να το πετύχει. Σταδιακά ο μαθητής είναι σε θέση να αξιολογήσει τα επιτεύγματά του, να αντιληφθεί τις κατακτήσεις του και τις τυχόν δυσκολίες, ορίζει στόχους και συνειδητοποιεί τα σημεία που χρειάζεται να βελτιώσει.
- στους γονείς –κηδεμόνες του μαθητή, ώστε να δύνανται να βοηθήσουν τα παιδιά τους και να ενισχύσουν τη συνεργασία μεταξύ εκπαιδευτικού και οικογένειας προς όφελος των μαθητών.

Η έκθεση και η αποτύπωση των αξιολογικών στοιχείων πραγματοποιείται στο τέλος μιας θεματικής ενότητας ή στο τέλος μιας χρονικής περιόδου καταγράφει το προφίλ του μαθητή ως προς την μαθησιακή του πορεία με όσο γίνεται πληρέστερο τρόπο και υποδεικνύει τα επόμενα βήματα με στόχο τη βελτίωση του. Πρόκειται δηλαδή για τη

σύνθεση της συνολικής εικόνας του μαθητή σχετικά με την προσπάθεια, την πρόοδο, την δράση του στην τάξη και με ταυτόχρονη αναφορά στην προοπτική βελτίωσης του.

Είναι σημαντικό με βάση το προτεινόμενο Π.Σ. των Μαθηματικών να επισημάνουμε τα εξής για την έκθεση προόδου:

- δεν εστιάζουμε στις ελλείψεις του μαθητή, δίνουμε έμφαση στο τι μπορεί να πετύχει και στους τομείς που χρειάζονται βελτίωση και μεγαλύτερη προσοχή, προτείνοντας ταυτόχρονα τρόπους για βελτίωση και υποστήριξη ώστε και ο ίδιος ο μαθητής να θέτει ανάλογους στόχους.
- αυτό που έχει σημασία στην έκθεση προόδου και στο πλαίσιο της διαμορφωτικής αξιολόγησης είναι να αναδειχθεί η προσωπική διαδρομή κάθε μαθητή στη μοναδικότητα του αλλά και ως μέλος της τάξης του. Είναι σημαντικό να αποφεύγονται οι στατικές εκτιμήσεις και οι αναφορές που αμφισβητούν τις δυνατότητες του μαθητή και στην ουσία υπονομεύουν τη μαθησιακή του πορεία και την ανάπτυξή του.
- είναι σημαντικό κατά τη σύνταξη της έκθεσης προόδου να λαμβάνονται υπόψη όλες οι παράμετροι που μπορεί να επηρεάσουν τη δράση και τις επιδόσεις του μαθητή στο σχολείο. Δηλαδή είναι απαραίτητο να λαμβάνονται υπόψη οι κοινωνικές παράμετροι που επηρεάζουν τόσο τη συμπεριφορά του μαθητή όσο και την εξοικείωση του με τους κανονισμούς της σχολικής τάξης και του σχολείου γενικότερα και τις δυνατότητες που έχει για να ανταποκριθεί στα αιτήματα της σχολικής τάξης και του σχολείου. Για παράδειγμα το γλωσσικό και το πολιτισμικό περιβάλλον του μαθητή είναι απαραίτητο να λαμβάνονται υπόψη, ώστε να αποφεύγονται αποτιμήσεις που μαρτυρούν διακρίσεις και προκαταλήψεις και οδηγούν σε αποκλεισμό του μαθητή.
- Η κοινοποίηση των παραπάνω στοιχείων μπορεί να συμβάλει στη βελτίωση της επικοινωνίας και της αλληλεπίδρασης ανάμεσα στους μαθητές, στον εκπαιδευτικό και στους γονείς- κηδεμόνες. ( Νίκα Μ., Βεκρής Ε., Χριστοδούλου Ν. κ.α., ΙΕΠ, 2017 σ. 64-65)

### **2.3. Μορφή έκθεσης προόδου σε μια θεματική ενότητα στο μάθημα των Μαθηματικών**

Η έκθεση προόδου σε κάθε μάθημα ολοκληρώνεται με τις παρατηρήσεις ως προς δυο κριτήρια:

- Τα δυνατά σημεία όπου ο εκπαιδευτικός σημειώνει τους τομείς στους οποίους ο μαθητής έχει παρουσιάσει βελτίωση ή δείχνει μια δυναμική ανάπτυξης σε βάθος χρόνου (κατακτήσεις μαθητή, μαθησιακή πορεία, επόμενα βήματα).
- Τα σημεία και τους τομείς που χρειάζονται βελτίωση. Ο εκπαιδευτικός επισημαίνει με διακριτικό τρόπο τις αδυναμίες και τις δυσκολίες του μαθητή



και γενικότερα τους τομείς στους οποίους είναι απαραίτητο να εστιάσει την προσοχή του ο μαθητής (τρόποι εργασίας του μαθητή, τρόποι επικοινωνίας και αλληλεπίδρασης, τρόποι δράσης μέσα αλλά και έξω από την τάξη).

<b>ΕΚΘΕΣΗ ΠΡΟΟΔΟΥ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ:</b>				
<b>ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ:</b>				
<b>Α΄ ΜΕΡΟΣ</b>				
<b>Κατακτήσεις</b>				
<b>Μαθησιακή πορεία</b>				
<b>Επόμενα βήματα</b>				
<b>Β΄ ΜΕΡΟΣ</b>				
<b>Α. Εργάζεται και ερευνά</b>	Μη ικανοποιητικά ή λίγες φορές	Μέτρια ή αρκετές φορές	Καλά ή πολλές φορές	Πολύ καλά ή σχεδόν πάντα
Μεθοδικά				
Αποτελεσματικά				
Δημιουργικά				
Καταβάλλοντας προσπάθειες για βελτίωση				
<b>Β. Αλληλεπίδραση</b>	Μη ικανοποιητικά ή λίγες φορές	Μέτρια ή αρκετές φορές	Καλά ή πολλές φορές	Πολύ καλά ή σχεδόν πάντα
Σέβεται τους κανόνες της τάξης				
Εκφράζει την άποψη του				
Διαχειρίζεται τα συναισθήματα του				
Κατανοεί τους άλλους – αποδέχεται τη διαφορετικότητα				

Συμβάλει στην επίλυση διαφορών στην τάξη				
<b>Γ. Συμμετέχει σε ομαδικές δραστηριότητες στην τάξη</b>	Μη ικανοποιητικά ή λίγες φορές	Μέτρια ή αρκετές φορές	Καλά ή πολλές φορές	Πολύ καλά ή σχεδόν πάντα
Έχει ενεργό ρόλο στις ομαδικές δραστηριότητες				
Αναλαμβάνει πρωτοβουλίες				

Στον παραπάνω πίνακα στην αριστερή στήλη βλέπουμε τα κριτήρια για την αξιολόγηση του μαθητή. Στο Α΄ Μέρος ο εκπαιδευτικός περιγράφει τις κατακτήσεις, τη μαθησιακή πορεία του και τα επόμενα βήματα του μαθητή, ενώ στο Β΄ μέρος ο εκπαιδευτικός μπορεί να συμπληρώσει με κωδικοποιημένο τρόπο σε κάθε κριτήριο τις εκτιμήσεις του για το μαθητή.

( Νίκα Μ., Βεκρής Ε., Χριστοδούλου Ν. κ.α., ΙΕΠ, 2017 σ. 67-68)

#### 2.4. Ατομικό Δελτίο προόδου

Το ΑΔΕΠ μπορεί να δώσει πληροφορίες περιγραφικά και αριθμητικά σε τακτά χρονικά διαστήματα και να συνδυάζει διαμορφωτική (άτυπη) και αθροιστική (τυπική) αξιολόγηση. Διαφοροποιείται στις βαθμίδες εκπαίδευσης ως προς το περιεχόμενο του υπο-πεδίου ή της θεματικής ενότητας και τα αναμενόμενα ΠΜΑ του αντίστοιχου ΠΣ. Δημιουργείται για κάθε μαθητή ένας φάκελος με τα ΑΔΕΠ του μαθητή και γίνεται εξαιρετικά χρήσιμο στη διδασκαλία, στην αξιολόγηση, στη σύνταξη της έκθεσης προόδου του μαθητή και στην ενημέρωση των εμπλεκόμενων (μαθητής, παιδαγωγικοί σύλλογοι σχολείου και γονείς). Τα εργαλεία αξιολόγησης για τα Μαθηματικά τα οποία αναπτύσσονται στη ενότητα 3, υποστηρίζουν τη σύνταξη του ΑΔΕΠ, αφού αξιοποιώντας τα ο εκπαιδευτικός αντλεί πληροφορίες και δεδομένα για τους μαθητές του.

Εν κατακλείδι το ΑΔΕΠ:

- Υποστηρίζει τον εκπαιδευτικό στη διαμόρφωση της διδασκαλίας του με βάση τις πραγματικές ανάγκες του μαθητή σε κάθε πεδίο ή υπο- πεδίο ή θεματική ενότητα των Μαθηματικών.
- Δίνει τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να συμπληρώσει τεκμηριωμένα την έκθεση προόδου , τον έλεγχο προόδου της τελικής αξιολόγησης του μαθητή και

παρέχει τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να ανατρέξει σε αυτό και να υποστηρίζει τις κρίσεις του για την πρόοδο του μαθητή.

- Αντλεί και μεταφέρει πληροφορίες για την πρόοδο του μαθητή σε όλους τους εμπλεκόμενους. (ΕΣΑ, 2018, σ.30)

**Ενδεικτικό έντυπο για ΑΔΕΠ:**

**Τάξη:**..... **Χρονική περίοδος:**.....

**Πεδίο:** ..... **Υπο-πεδίο:** ..... **Θεματική ενότητα:**  
.....

**ΠΜΑ:** αναγράφονται τα ΠΜΑ της θεματικής ενότητας ή ένα ή μερικά από αυτά για τα οποία έχει αποφασίσει να συντάξει ο εκπαιδευτικός το ΑΔΕΠ του μαθητή στη συγκεκριμένη χρονική περίοδο.

Πληροφορίες σχετικές με: Δεξιότητες –συμπεριφορές						
<b>Κοινωνικές</b>	****	***	**		*	<b>Παρατηρήσεις- Σχόλια</b>
Σέβεται τους κανόνες της τάξης των Μαθηματικών (συμβόλαιο τάξης).						
Επικοινωνεί- συνεργάζεται- αλληλοεπιδρά με τους συμμαθητές του και τον εκπαιδευτικό κατά την εξέλιξη του μαθήματος στην τάξη.						
Συμμετέχει στην επίλυση διαφορών στην τάξη.						
<b>Συναισθηματικές</b>	****	***	**		*	<b>Παρατηρήσεις- Σχόλια</b>
Δείχνει να του αρέσουν τα Μαθηματικά και το μάθημα στην τάξη.						
Διαθέτει αυτοπεποίθηση και αυτοεκτίμηση όταν εργάζεται στην τάξη ατομικά ή ομαδικά.						
Εκφράζει και ελέγχει τα συναισθήματα του κατά την εξέλιξη του μαθήματος.						
Παρουσιάζει δεξιότητες ενσυναίσθησης, όταν εργάζεται ατομικά ή ομαδικά στην τάξη.						
<b>Μαθησιακές</b>	<b>Πλήρης επιτυχία</b>	<b>Επαρκής επιτυχία</b>	<b>Μερική επιτυχία</b>	<b>Μη επιτυχία</b>	<b>ικανοποιητική</b>	<b>Παρατηρήσεις- Σχόλια</b>
Αντίληψη προφορικού λόγου στο μάθημα στην τάξη						

Παραγωγή προφορικού λόγου στο μάθημα στην τάξη						
Αντίληψη γραπτού μαθηματικού λόγου στην τάξη						
Παραγωγή γραπτού μαθηματικού λόγου στην τάξη						
Συγκέντρωση στο μάθημα						
Ενεργή συμμετοχή σε έργα και δραστηριότητες στην τάξη						
Προσπάθεια βελτίωσης						
Πραγματοποιεί τις εργασίες που του αναθέτει ο εκπαιδευτικός για το σπίτι						
Παρουσιάζει δεξιότητες παρατηρητικότητας και κριτικής σκέψης στις ερωτήσεις-ασκήσεις-προβλήματα κλπ.						
Παρουσιάζει μεταγνωστικές δεξιότητες						

**ΤΥΠΙΚΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ- ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ**

<b>ΕΙΔΟΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ</b>	<b>ΠΜΑ</b>	<b>Ημ/νια</b>	<b>Α</b>	<b>ΠΚ</b>	<b>Κ</b>	<b>Μ-ΚΜ</b>	<b>Παρατηρήσεις- Σχόλια</b>
Ερώτηση 1							
Ερώτηση 2							
Ερώτηση 3							
Τεστ 1							
Τεστ 2							
Τεστ 3							
Πρόβλημα 1							
Πρόβλημα 2							
Πρόβλημα 3							
Διαγώνισμα							

*** : Τις περισσότερες φορές	A (Άριστα 19-20)
** : Συχνά	ΠΚ (Πολύ καλά 17-18)
* : Μερικές φορές	K (Καλά 15-16)
: Σπάνια	M-KM (14-...)

Ιδέα από **Ενιαίο σύστημα αξιολόγησης (ΕΣΑ), 2018, Παράρτημα σ. 47.**

### 3. Εργαλεία αξιολόγησης στα Μαθηματικά

Τα εργαλεία αξιολόγησης που προτείνονται σε αυτή την ενότητα δίνουν τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να παράγει δεδομένα ώστε να διαμορφώσει μια όσο το δυνατόν πληρέστερη αντίληψη για ζητήματα σχετικά με την εξέλιξη της μαθησιακής πορείας των μαθητών και της διδασκαλίας στο πλαίσιο των βασικών αρχών της αξιολόγησης που αναπτύσσονται στο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών. Επίσης, παρέχουν τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να λάβει τεκμηριωμένες αποφάσεις για την υποστήριξη της μαθησιακής πορείας των μαθητών και την εξέλιξη της διδασκαλίας.

Τα προτεινόμενα εργαλεία της αξιολόγησης κατηγοριοποιούνται με βάση *τρεις προσεγγίσεις*. Η *πρώτη προσέγγιση* αφορά βασικές συνιστώσες της εκπαιδευτικής διαδικασίας στα μαθηματικά και ειδικότερα τη μαθηματική γνώση, τη διδασκαλία και τις διδακτικές πρακτικές, καθώς και την έννοια της τροχιάς μάθησης. Η *δεύτερη κατηγοριοποίηση* των εργαλείων αξιολόγησης πραγματοποιείται με βάση το είδος των δεδομένων που παράγονται (ποσοτικά ή/ και ποιοτικά δεδομένα) και εστιάζεται σε τρεις άξονες: την παρατήρηση, τη διαγνωστική συνέντευξη και τις εργασίες των μαθητών. Τέλος, με βάση την *τρίτη κατηγοριοποίηση*, τα εργαλεία αξιολόγησης προσεγγίζονται από την οπτική των ΠΜΑ και συνδέονται με πρακτικές τόσο καθαρά μαθηματικές όσο και κοινωνικο-πολιτισμικές και κοινωνικο-συναισθηματικές.

Παρακάτω παρουσιάζονται συνοπτικά οι προτεινόμενες τρεις κατηγοριοποιήσεις των εργαλείων αξιολόγησης στα μαθηματικά, η εξειδίκευσή τους, καθώς και τα εργαλεία αξιολόγησης που μπορούν να αξιοποιηθούν σε κάθε περίπτωση.

#### Πίνακας 2: Κατηγοριοποίηση εργαλείων αξιολόγησης

Κριτήριο κατηγοριοποίησης	Επιμέρους κατηγορίες	Εξειδίκευση	Εργαλεία αξιολόγησης στα μαθηματικά (ενδεικτικά)
Όψεις της εκπαιδευτικής διαδικασίας	Μαθηματική γνώση		Κλίμακα 4 επιπέδων
	Διδασκαλία		
	Τροχιά μάθησης		

Είδος δεδομένων	Ποσοτικά δεδομένα	Παρατήρηση, διαγνωστική συνέντευξη, εργασίες μαθητών	
	Ποιοτικά δεδομένα		
ΠΜΑ που συνδέονται με πρακτικές	Μαθηματικές πρακτικές		
	Κοινωνικο-πολιτισμικές		
	Κοινωνικο-συναισθηματικές		

### 3.1. Εργαλεία αξιολόγησης που συνδέονται με όψεις/ στοιχεία της εκπαιδευτικής διαδικασίας

#### (3.1α) Εργαλείο αξιολόγησης μαθηματικής γνώσης

Η ανάλυση και η ερμηνεία των απαντήσεων των μαθητών σε ένα μαθηματικό έργο/ πρόβλημα, είτε αυτό αποτελεί αντικείμενο συζήτησης στην τάξη είτε εντάσσεται σε γραπτό κείμενο, συνιστούν χρήσιμα στοιχεία για τον εκπαιδευτικό προκειμένου να αντιληφθεί τις συγκεκριμένες δυσκολίες που αντιμετωπίζει ο κάθε μαθητής και να προχωρήσει σε επανασχεδιασμό της διδασκαλίας του. Σε αυτό το πλαίσιο είναι αναγκαίος ο εντοπισμός της κύριας μαθηματικής ιδέας/έννοιας του έργου/ προβλήματος και η ταξινόμηση των απαντήσεων των μαθητών με βάση τον βαθμό επίτευξης του στόχου του μαθηματικού έργου και την πληρότητα ως προς την κατανόηση της βασικής μαθηματικής ιδέας/έννοιας και την αιτιολόγηση που αναπτύσσει ο μαθητής.

Στην κατεύθυνση αυτή μπορεί να αξιοποιηθεί το εργαλείο αξιολόγησης που προτείνεται παρακάτω και αναπτύσσεται σε κλίμακα 4 επιπέδων που αφορούν τις στρατηγικές-προσεγγίσεις που υιοθετούν οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με μαθηματικά έργα. Η ιδέα αποτελεί προσαρμογή του μοντέλου ποιοτικής ανάλυσης απαντήσεων μαθητών σε «ανοικτού» τύπου μαθηματικά έργα, του Προγράμματος Σπουδών *Mathematics in Context* (Smith, 2004).

Επίπεδο	Περιγραφή επιτευγμάτων του μαθητή
4	Πλήρης επίτευξη του στόχου του μαθηματικού έργου. Οι ενέργειες και οι απαντήσεις των μαθητών φανερώνουν πλήρη αντίληψη της κεντρικής μαθηματικής ιδέας του μαθηματικού έργου. Η αιτιολόγησή τους είναι σαφής, ολοκληρωμένη και περιλαμβάνει τη χρήση γραπτής, συμβολικής και εικονικής αναπαράστασης.
3	Μερική επίτευξη του στόχου του μαθηματικού έργου. Οι ενέργειες και οι απαντήσεις των μαθητών φανερώνουν μερική αντίληψη της κεντρικής μαθηματικής ιδέας του μαθηματικού έργου. Η αιτιολόγησή τους κρίνεται ελλιπής παρά το γεγονός ότι καταφέρνουν να ‘επικοινωνούν’ την προσέγγιση που ακολουθείται.
2	Περιορισμένη πρόοδος/επίτευξη του μαθηματικού έργου. Οι ενέργειες και οι απαντήσεις των μαθητών φανερώνουν ελλιπή αντίληψη της κεντρικής μαθηματικής ιδέας του μαθηματικού έργου. Η αιτιολόγηση κρίνεται ανεπαρκής, προβληματική και ασαφής.
1	Ελάχιστη έως μηδενική πρόοδος στην επίτευξη του μαθηματικού έργου. Οι μαθητές φαίνεται να αγνοούν την κεντρική μαθηματική ιδέα του μαθηματικού έργου, ενώ αδυνατούν να αιτιολογήσουν τις επιλογές τους.

**Πίνακας 3** Ποιοτική ανάλυση απαντήσεων μαθητών σε «ανοικτού» τύπου μαθηματικά έργα

Η αξιοποίηση του συγκεκριμένου ‘μοντέλου’ προϋποθέτει την καταγραφή των βασικών χαρακτηριστικών της κεντρικής μαθηματικής έννοιας του μαθηματικού έργου. Στο παράρτημα αναλύεται ένα παράδειγμα με αναφορά στο μαθηματικό έργο και στη συνέχεια γίνεται σύνδεση με τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών, ενώ ακολουθεί η ταξινόμηση αυθεντικών κειμένων των μαθητών, η οποία στηρίζεται στα βασικά χαρακτηριστικά της κεντρικής μαθηματικής ιδέας του μαθηματικού έργου. Μέσω των αποτελεσμάτων αυτής της ανάλυσης ο εκπαιδευτικός μπορεί να ενημερωθεί για τον βαθμό επίτευξης των σχετικών ΠΜΑ, για τον βαθμό δυσκολίας του συγκεκριμένου μαθηματικού έργου, καθώς και για το είδος των προβλημάτων που συναντώνται στα αυθεντικά κείμενα/δοκίμια των μαθητών (προβλήματα στην κατανόηση του ζητούμενου, δυσκολίες που οφείλονται σε ελλιπή κατανόηση του περιεχομένου, προβλήματα στην επικοινωνία, στις αναπαραστάσεις ή στην αιτιολόγηση).

### (3.1β) Εργαλείο αξιολόγησης της διδασκαλίας

Αναγνωρίζοντας την αλληλεπίδραση και την αλληλοσυμπλήρωση των δύο κεντρικών και συνεργαζόμενων δίπολων μάθηση-μαθητής και μάθηση-διδασκαλία, αναπτύσσονται εργαλεία αξιολόγησης, τα οποία παράγουν δεδομένα για την ανατροφοδότηση του εκπαιδευτικού σχετικά με τη διδασκαλία του και τη μάθηση των

μαθητών. Με τον τρόπο αυτό ο εκπαιδευτικός εφοδιάζεται με πολλαπλές δυνατότητες αξιοποίησης δεδομένων ώστε να αλληλοτροφοδοτηθούν η αξιολόγηση, η διδασκαλία και η μάθηση.

Παρακάτω προτείνονται τρία εργαλεία αξιολόγησης της διδασκαλίας, τα οποία αναδεικνύουν αναστοχαστικές διαδικασίες από μέρους του εκπαιδευτικού. Αυτά τα εργαλεία μπορούν να παρέχουν δεδομένα στον εκπαιδευτικό σχετικά με το αν η διδακτική πρακτική του στοχεύει στην ανάπτυξη (α) των βασικών μαθηματικών πρακτικών, (β) των κοινωνικο-πολιτισμικών πρακτικών και (γ) των κοινωνικο-συναισθηματικών πρακτικών που αναπτύσσονται στο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών.



**Πίνακας 3** Εργαλείο αξιολόγησης της διδασκαλίας με εστίαση στις μαθηματικές πρακτικές και το μαθηματικό περιεχόμενο

Μαθηματικές πρακτικές	Ερωτήματα
<i>Συλλογισμού και επιχειρηματολογίας</i>	<p>α. Δίνεται έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου ή οι μαθητές καλούνται κυρίως να εφαρμόσουν τυποποιημένες διαδικασίες και κανόνες;</p> <p>β. Οι παρανοήσεις των μαθητών αναδεικνύονται και αντιμετωπίζονται ως ευκαιρίες μάθησης;</p> <p>γ. Οι συλλογισμοί των μαθητών κρίνονται με βάση τη συνεισφορά τους στο μαθηματικό περιεχόμενο και τη μαθησιακή τους εξέλιξη;</p> <p>δ. Οι μαθητές εμπλέκονται σε δραστηριότητες που απαιτούν διαδικασίες πειραματισμού, διερεύνησης, διατύπωσης συμπερασμάτων και ελέγχου υποθέσεων;</p>
<i>Δημιουργίας συνδέσεων</i>	<p>α. Είναι εμφανής η σύνδεση μεταξύ των έργων στα οποία εμπλέκονται οι μαθητές και των ΠΜΑ;</p> <p>β. Παρέχονται ευκαιρίες στους μαθητές για να δημιουργούν συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών περιοχών και μεταξύ των μαθηματικών και άλλων γνωστικών περιοχών;</p> <p>γ. Υποστηρίζεται η προσέγγιση μιας έννοιας με πολλαπλές αναπαραστάσεις, εντοπίζονται οι ιδιαιτερότητες της κάθε μίας και επιδιώκεται η μεταφορά τους σύνδεση;</p> <p>δ. Εντοπίζονται κοινές και μη κοινές ιδιότητες μεταξύ των στοιχείων συνόλων από διαφορετικές μαθηματικές περιοχές;</p>
<i>Μαθηματικής επικοινωνίας</i>	<p>α. Οι μαθητές 'επικοινωνούν' το μαθηματικό περιεχόμενο μέσω ερωτήσεων-απαντήσεων, περιγραφής και τεκμηρίωσης των συλλογισμών τους, ερμηνείας και επεξήγησης καταστάσεων;</p> <p>β. Η μαθηματική επικοινωνία στην τάξη περιορίζεται μόνο μεταξύ εκπαιδευτικού-μαθητών ή επεκτείνεται μεταξύ μαθητή-μαθητή, μαθητή-μαθητών;</p> <p>γ. Επηρεάζεται η συλλογιστική των μαθητών από τον λόγο των συμμαθητών τους;</p>
<i>Επιλογής και χρήσης εργαλείων</i>	<p>α. Ενσωματώνεται λειτουργικά στη διδακτική πράξη μια ποικιλία εργαλείων (χειραπτικά, ψηφιακά) και γεωμετρικά όργανα, τα οποία αναδεικνύουν το μαθηματικό περιεχόμενο;</p> <p>β. Επιλέγονται κατάλληλα εργαλεία για την αναπαράσταση μιας μαθηματικής ιδέας ή τη μοντελοποίηση μιας κατάστασης;</p> <p>γ. Αναγνωρίζονται οι ιδιαιτερότητες και οι δυσκολίες των μαθητών με τη χρήση εργαλείων;</p>
<i>Επίλυσης προβλήματος</i>	<p>α. Εμπλέκονται οι μαθητές σε διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων ή περιορίζονται σε τετριμμένες εφαρμογές τυπικών κανόνων;</p> <p>β. Επιλέγονται διαφορετικού τύπου προβλήματα στη διδακτική διαδικασία;</p> <p>γ. Κατασκευάζουν οι μαθητές δικά τους προβλήματα;</p> <p>δ. Ζητούνται διαφορετικές λύσεις ενός προβλήματος;</p>
<i>Μοντελοποίησης</i>	<p>α. Παρέχονται στους μαθητές ευκαιρίες μαθηματικής μοντελοποίησης ρεαλιστικών προβλημάτων;</p> <p>β. Εμπλέκονται οι μαθητές σε διάφορες φάσεις και επίπεδα μοντελοποίησης;</p> <p>γ. Αξιοποιούνται μαθηματικά μοντέλα για την ερμηνεία και την πρόβλεψη πραγματικών φαινομένων;</p>
<i>Μεταγνωστικής ενημερότητας</i>	<p>α. Οι μαθητές εξελίσσουν τις προσεγγίσεις τους στο μαθηματικό περιεχόμενο κατά τη μαθησιακή τους πορεία;</p> <p>β. Οι μαθητές αποκτούν επίγνωση των στρατηγικών προσέγγισης των προβλημάτων που εφαρμόζουν αναγνωρίζοντας τις ιδιαιτερότητές τους;</p> <p>γ. Αναπτύσσεται ευελιξία και προσαρμοστικότητα στην προσέγγιση μη οικείων καταστάσεων;</p>

**Πίνακας 4 Εργαλείο αξιολόγησης της διδασκαλίας με εστίαση στις κοινωνικοπολιτισμικές πρακτικές**

<b>Κοινωνικές και πολιτισμικές πρακτικές</b>	<b>Ερωτήματα</b>
<i>Αξιοποίηση των μαθηματικών στην κριτική ερμηνεία πραγματικών καταστάσεων</i>	<p>α. Εμπλέκονται οι μαθητές σε δραστηριότητες κριτικής ερμηνείας της κοινωνικής και οικονομικής ζωής αξιοποιώντας τα μαθηματικά;</p> <p>β. Αξιοποιούνται τα μαθηματικά για την κατανόηση των σχέσεων εξουσίας που διέπουν πλευρές του σύγχρονου κόσμου;</p> <p>γ. Αναγνωρίζεται ο τρόπος που αξιοποιήθηκαν τα μαθηματικά στη διαμόρφωση σχέσεων εξουσίας, ανισοτήτων και διακρίσεων σε μορφές του κοινωνικού βίου;</p>
<i>Απόκτηση δεξιοτήτων συνεργασίας</i>	<p>α. Συνεργάζονται οι μαθητές στο πλαίσιο μιας ομάδας για την επίλυση προβλημάτων ή την εκπόνηση εργασιών;</p> <p>β. Αξιοποιούν οι μαθητές τις γνώμες των άλλων στην επιχειρηματολογία τους;</p> <p>γ. Ο διάλογος στην τάξη γίνεται με σεβασμό στις γνώμες των άλλων, με επιχειρήματα και με στόχο το μαθηματικό περιεχόμενο;</p>
<i>Κατανόηση της σχέσης μαθηματικών και πολιτισμού</i>	<p>α. Διαπραγματεύονται οι μαθητές ιστορικά μαθηματικά προβλήματα ή προσεγγίσεις ενταγμένα στη μαθησιακή διαδικασία;</p> <p>β. Συζητιούνται ιδιαιτερότητες στην ιστορική πορεία των μαθηματικών σε σχέση με το πλαίσιο ανάπτυξής τους;</p> <p>γ. Αναπτύσσονται τρόποι συμβολής των μαθηματικών στην εξέλιξη άλλων γνωστικών περιοχών και αντίστροφα;</p>

**Πίνακας 5 Εργαλείο αξιολόγησης της διδασκαλίας με εστίαση στις κοινωνικο-συναισθηματικές πρακτικές**

Κοινωνικο-συναισθηματικές πρακτικές	Ερωτήματα
<i>Ανάπτυξη θετικής στάσης για τα μαθηματικά</i>	α. Υποστηρίζονται οι θετικές πτυχές των μαθηματικών εμπειριών των μαθητών; β. Καλλιεργείται κλίμα αυτοπεποίθησης, επιμονής και υπομονής στη διαπραγμάτευση των μαθηματικών εννοιών; γ. Επιδιώκεται τα έργα στα οποία εμπλέκονται οι μαθητές να έχουν νόημα για τους ίδιους; δ. Παρέχεται επαρκής χρόνος στους μαθητές να σκεφτούν κατά τη διαπραγμάτευση των μαθηματικών εννοιών;
<i>Εκτίμηση της κομψότητας και της ομορφιάς των μαθηματικών</i>	α. Έρχονται οι μαθητές σε επαφή με έργα καλλιτεχνών που συνδέονται με τα μαθηματικά; β. Επισημαίνεται η νοητική κομψότητα στη λιτότητα, την ακρίβεια και τη λογική δομή που αποτελούν ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των μαθηματικών;
<i>Ανάπτυξη δεξιοτήτων αυτογνωσίας και αυτοελέγχου</i>	α. Δίνονται ευκαιρίες στους μαθητές για ανάπτυξη δεξιοτήτων αυτοαξιολόγησης και αυτοελέγχου της μαθησιακής τους πορείας; β. Επιδιώκεται η ανάπτυξη ισχυρών ταυτοτήτων των μαθητών σε σχέση με τα μαθηματικά;
<i>Ανάπτυξη δεξιοτήτων διαφοροποίησης και συμπερίληψης</i>	α. Δίνεται διαφοροποιημένη ανατροφοδότηση στους μαθητές ανάλογα με τις ανάγκες τους; β. Λαμβάνονται υπόψη οι διαφοροποιημένες στάσεις των μαθητών για διαφορετικούς κλάδους (γεωμετρία, άλγεβρα και προσεγγίσεις (εμπειρική, αφαιρετική) των μαθηματικών;

Οι προηγούμενες ερωτήσεις που έχουν ενταχθεί στα παραπάνω εργαλεία αξιολόγησης είναι ενδεικτικές και θα μπορούσαν να συμπεριληφθούν και άλλες από κάθε εκπαιδευτικό ή από ομάδες εκπαιδευτικών ανά σχολείο με βάση τις διεργασίες και τις πρακτικές που αναπτύσσονται στο Πρόγραμμα Σπουδών. Το δεύτερο εργαλείο αξιολόγησης θα μπορούσε να έχει όχι μόνο τη μορφή ενός εργαλείου αναστοχασμού αλλά να αποκτήσει και τη μορφή ενός εργαλείου 'μέτρησης της διδασκαλίας από τον ίδιο τον εκπαιδευτικό, ενσωματώνοντας μια κλίμακα Likert (1-4) δίπλα σε κάθε ερώτηση-χαρακτηριστικό διδασκαλίας, του τύπου "4-Πλήρης επίτευξη, 3-Μερική επίτευξη, 2-Περιορισμένη επίτευξη, 4-Ελάχιστη επίτευξη". Με τον τρόπο αυτό ο εκπαιδευτικός μπορεί να έχει τον έλεγχο της διδακτικής προσέγγισης που υιοθετεί σε ορισμένες περιόδους του σχολικού έτους ή από το ένα σχολικό έτος στο επόμενο. Επίσης, το συγκεκριμένο εργαλείο μπορεί να ενεργοποιήσει νέες διδακτικές πρακτικές από μέρους του εκπαιδευτικού σε σημεία της διδασκαλίας που αποτιμάται από τον ίδιο ότι απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή ή που σε μια ορισμένη σχολική περίοδο αποκτούν ιδιαίτερη σημασία.

### **(3.1γ) Εργαλείο αξιολόγησης τροχιάς μάθησης και διδασκαλίας**

Η έννοια της τροχιάς μάθησης χρησιμοποιείται διεθνώς από ερευνητές αφενός για τον σχεδιασμό συναφών και διδακτικά χρήσιμων σχεδιασμών διδασκαλίας, αφετέρου για τον σχεδιασμό αξιολογήσεων. Στα Μαθηματικά αρκετοί ερευνητές αναπτύσσουν αξιολογήσεις που δίνουν πληροφορίες για το τι πραγματικά γνωρίζουν οι μαθητές, τι μπορούν να κάνουν, αλλά και βοηθούν στην ανάπτυξη υποθέσεων για τον τρόπο που οι μαθητές κατακτούν τις μαθηματικές έννοιες με βάση τις τροχίες μάθησης (Confrey & Maloney, 2010).

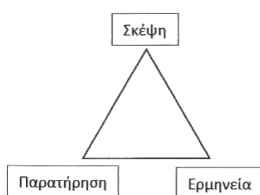
Η αξιοποίηση των τροχιών μάθησης στη Μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να προσφέρει μια σημαντική βάση για τον σχεδιασμό αξιολογήσεων με περισσότερα διδακτικά και μαθησιακά οφέλη, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι αυτού του είδους η αξιολόγηση 'εκτοπίζει' τη διαμορφωτική αξιολόγηση (καθημερινή αξιολόγηση που πραγματοποιεί ο εκπαιδευτικός στην τάξη του). Σε αυτήν την κατεύθυνση ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το παρακάτω, σύμφωνα με το οποίο στο πλαίσιο μιας τριγωνικής (κυκλικής) διαδικασίας η αξιολόγηση συνδυάζει τρεις επιμέρους διαδικασίες (NRC, 2001; Pellegrino, Chudowsky & Glaser, 2001:

**πρώτη διαδικασία:** αφορά τις επιστημονικά θεμελιωμένες αντιλήψεις σχετικά με τη σκέψη, την κατανόηση, τις δεξιότητες των μαθητών και την ανάπτυξή τους.

**δεύτερη διαδικασία:** σχετίζεται με τους τρόπους που πραγματοποιείται η παρατήρηση της συμπεριφοράς και της επίδοσης των μαθητών σχετικά με τη σκέψη, την κατανόηση και την ικανότητα αξιοποίησης της γνώσης.

**τρίτη διαδικασία:** ερμηνεύει τις δύο παραπάνω διαδικασίες, δηλαδή εξάγει συμπεράσματα σχετικά με το επίπεδο ανάπτυξης της σκέψης των μαθητών, την κατανόηση και τις δεξιότητες.

Η παραπάνω τριάδα διαδικασιών περιγράφεται με τρεις όρους: σκέψη (cognition), παρατήρηση (observation) και ερμηνεία (interpretation). Οι τρεις όροι τοποθετούνται στις κορυφές ενός τριγώνου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Με βάση την παραπάνω προσέγγιση, ο ρόλος της αξιολόγησης δεν περιορίζεται στην απλή καταγραφή γνώσεων και δεξιοτήτων, αλλά γίνεται λόγος για το πώς ο νους οργανώνει και κατανοεί τη γνώση και έτσι διαμορφώνει τις νοητικές δομές, τα αποκαλούμενα γνωστικά νοητικά σχήματα. Η αξιολόγηση καλείται να προσφέρει μια εικόνα σχετικά με το επίπεδο των γνωστικών σχημάτων, το αντίστοιχο περιεχόμενο της γνώσης των μαθητών αλλά και τα προβλήματα-εμπόδια που συναντούν οι μαθητές κατά τη μαθησιακή διαδικασία. Οι τροχιές μάθησης, όπως φαίνεται, συμφωνούν με την παραπάνω διαδικασία, καθώς ο εκπαιδευτικός με βάση αυτές ερμηνεύει τις ενέργειες των μαθητών του και προσαρμόζει ανάλογα τη διδασκαλία του (Πόταρη, 2011). Τα δεδομένα και οι συμπεριφορές που προκύπτουν από ανάλογες αξιολογήσεις είναι απαραίτητο να εξετάζονται και να αξιοποιούνται όχι μόνο για την εξέλιξη της διδασκαλίας (επιλογή στόχων και έργων, τα οποία να ανταποκρίνονται στο επίπεδο και τις δυνατότητες των μαθητών), αλλά και για την εξέλιξη της ανάπτυξης της γνωστικής πορείας των μαθητών (οικοδόμηση μαθηματικής γνώσης με τρόπο παράλληλο και συμβατό με τη φυσική τους αναπτυξιακή πρόοδο και εξέλιξη).

### Παράδειγμα τροχιάς μάθησης για τις συναρτήσεις

Η έννοια της συνάρτησης αποτελεί για τους μαθητές μια από τις δυσκολότερες μαθηματικές έννοιες. Στη βιβλιογραφία εντοπίζονται τρεις βασικές παράμετροι που συνδέονται με αυτή τη δυσκολία. Η πρώτη σχετίζεται με τη συνθετότητα της έννοιας αλλά και με την ποικιλία των μαθηματικών νοημάτων που συνδέονται με αυτήν (μεταβλητή, συμμεταβολή, σύνολο κ.λπ.). Η δεύτερη αφορά το ότι η έννοια της συνάρτησης συνυπάρχει στο μεγαλύτερο μέρος των μαθηματικών αλλά και των

σχολικών μαθηματικών (πράξεις, μέτρηση στη γεωμετρία, επίλυση εξισώσεων κ.λπ.). Η τρίτη παράμετρος σχετίζεται με την αναγκαιότητα να αντιληφθούν οι μαθητές την έννοια της συνάρτησης σε ένα επίπεδο ως διαδικασία και σε ένα άλλο ως αντικείμενο. Επιπλέον η έρευνα δείχνει ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται την έννοια της συνάρτησης ως μια υπολογιστική διαδικασία και δυσκολεύονται να συσχετίσουν τον ένα τρόπο αναπαράστασής της με έναν άλλο.

Η τροχιά της συνάρτησης στην υποχρεωτική και λυκειακή εκπαίδευση αναπτύσσεται και περιλαμβάνει δύο σημαντικούς σταθμούς (ορόσημα ανάπτυξης της έννοιας): μοτίβο- κανονικότητα και συνάρτηση:

**Μοτίβο-κανονικότητα:** Αναγνώριση, συμπλήρωση, περιγραφή της κανονικότητας και της διαδικασίας παραγωγής της, κατασκευή κανονικοτήτων διάφορων τύπων. Αναπαράσταση κανονικοτήτων με διαφορετικούς τρόπους (μετάβαση από μια αναπαράσταση σε άλλη). Εύρεση και συμβολική διατύπωση του γενικού όρου της κανονικότητας. Μοντελοποίηση και μελέτη καταστάσεων μέσω κανονικοτήτων.

**Συνάρτηση:** Συμμεταβαλλόμενα μεγέθη-διερεύνηση σχέσεων μεγεθών από την κανονική ζωή. Εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης (μεταβλητή, μονοσήμαντη απεικόνιση, αναπαραστάσεις συναρτήσεων, ερμηνεία αναπαραστάσεων). Μοντελοποίηση απλών καταστάσεων και απαντήσεις σε ερωτήματα που τις αφορούν μέσω συναρτήσεων. Διερεύνηση συγκεκριμένων συναρτήσεων (γραμμικών, της μορφής  $y = \frac{a}{x}$ , τετραγωνικών και ρυθμού μεταβολής).

Η μετάβαση από το μοτίβο-κανονικότητα στη συνάρτηση ακολουθεί τη διαδρομή τριών επιπέδων:

**Πρώτο επίπεδο-νοηματοδότηση σχέσεων:** οι μαθητές διερευνούν σχέσεις και δομές (εργασία στην τάξη). Οι σχετικές δραστηριότητες ενθαρρύνουν τους μαθητές να αναγνωρίζουν, να συμπληρώνουν, να περιγράφουν και να κατασκευάζουν απλές γεωμετρικές, αριθμητικές και άλλες κανονικότητες, πρώτα επαναλαμβανόμενες και κατόπιν αυξανόμενες ή μειούμενες.

**Δεύτερο επίπεδο-αισθητοποίηση της έννοιας της συνάρτησης:** επαναλαμβάνεται η μελέτη κανονικοτήτων αλλά σε ανώτερο επίπεδο, οι αριθμητικές και γεωμετρικές κανονικότητες γίνονται πιο σύνθετες, ενώ προστίθενται και αναδρομικές κανονικότητες. Επιπλέον οι σχετικές δραστηριότητες περιλαμβάνουν γενίκευση της κανονικότητας, αναπαράστασή της με διαφορετικά μέσα (εικονικά, λεκτικά, αριθμητικά), λεκτική διατύπωση του κανόνα του μοτίβου, εύρεση του επόμενου, εύρεση απομακρυσμένου όρου και τέλος συμβολική διατύπωση του γενικού όρου στις αριθμητικές κανονικότητες με χρήση μεταβλητών (π.χ.  $n+2$ ). Επίσης οι μαθητές συνεχίζουν να διερευνούν καταστάσεις συμμεταβολής (ανάλογα ποσά και αντιστρόφως ανάλογα ποσά), συσχέτιση μεγεθών στη γεωμετρία, στη φυσική κ.λπ., σχέση εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής, υπολογισμός μεγέθους με

αντικατάσταση αριθμού στις μεταβλητές. Τέλος διερευνούν την έννοια της συνάρτησης μέσω των διαφορετικών αναπαραστάσεων μονοσήμαντων αντιστοιχιών.

Τρίτο επίπεδο-εισαγωγή στον συναρτησιακό λογισμό και την επίλυση προβλημάτων: Οι μαθητές διερευνούν αριθμητικές κανονικότητες και διατυπώνουν τον γενικό όρο λεκτικά και συμβολικά και τις αναπαριστούν εικονικά, αριθμητικά, με πίνακες ή γεωμετρικά σε σύστημα ημι-αξόνων (έτσι ολοκληρώνεται η έννοια της κανονικότητας). Η έννοια της συνάρτησης επικεντρώνεται πλέον στις διαφορετικές μορφές αναπαράστασής της και της χρήσης της στην επίλυση προβλημάτων. Οι μαθητές οικοδομώντας στη σχετική προηγούμενη εμπειρία των δύο πρώτων επιπέδων, μοντελοποιούν μια κατάσταση με μια συνάρτηση και την εκφράζουν με διαφορετικούς τρόπους (λεκτικά, αριθμητικά, γεωμετρικά και συμβολικά). Βρίσκουν τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής για δεδομένες τιμές της εξαρτημένης και αντιστρόφως και αναγνωρίζουν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Στη συνέχεια εστιάζουν σε εργασίες σχετικές με τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων (γραμμικών, υπερβολών, τετραγωνικών και εκθετικών με αυτή την σειρά) και διερευνούν ειδικές περιπτώσεις συναρτήσεων, τις ιδιότητές τους και τη γραφική τους παράσταση ( $y = ax$ ,  $y = ax + \beta$ ,  $y = ax^2$ ). Το επίπεδο αυτό ολοκληρώνεται με δραστηριότητες που ενθαρρύνουν τους μαθητές να μετακινούνται από μια αναπαράσταση σε άλλη (αλγεβρικός τύπος, πίνακας τιμών, γραφική παράσταση).

Ο παρακάτω πίνακας αποτυπώνει μια εκδοχή της ανάπτυξης μιας τροχιάς για την έννοια της συνάρτησης στην υποχρεωτική και λυκειακή εκπαίδευση.

Πίνακας 5 Η ανάπτυξη της τροχιάς για την έννοια της συνάρτησης στην υποχρεωτική και λυκειακή εκπαίδευση

Νοηματοδότηση σχέσεων		Αισθητοποίηση της έννοιας της συνάρτησης			Εισαγωγή στον συναρτησιακό λογισμό και την επίλυση προβλημάτων						
Διερεύνηση μεταβολής μεγεθών σε σχέση με άλλα μεγέθη στην καθημερινή ζωή	Διερεύνηση και δημιουργία αντιστοιχιών μέσα από παιχνίδια	Διερεύνηση καταστάσεων συμμεταβολής (ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά, συσχέτιση μεγεθών στη Γεωμετρία, στη Φυσική κ.λπ.)	Διερεύνηση της σχέσης ανεξάρτητης-εξαρτημένης μεταβλητής	Διερεύνηση της έννοιας της συνάρτησης μέσω διαφορετικών αναπαράστασεων μονοσήμαντων αντιστοιχιών	Μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων μέσω συνάρτησης	Διερεύνηση των διαφορετικών τρόπων αναπαράστασης μιας συνάρτησης	Σχεδιασμός γραφικών παραστάσεων συνάρτησης στο καρτεσιανό επίπεδο (γραμμική, υπερβολή, τετραγωνική, εκθετική) αξιοποιώντας τον πίνακα τιμών και λογισμικό	Μελέτη ειδικών περιπτώσεων συναρτήσεων (γραμμικές- $y = ax$ , $y = ax + \beta$ και η τετραγωνική $y = ax^2$ / ιδιότητες, γραφικές παραστάσεις, ρόλος των παραμέτρων, σημεία τομής με τους άξονες, ρόλος του συντελεστή διεύθυνσης)	Μετάβαση από μια αναπαράσταση μιας συνάρτησης σε άλλη (αλγεβρικός τύπος, πίνακας τιμών, γραφική παράσταση) και επιλογή της κατάλληλης για κάθε περίπτωση	Αξιοποίηση γραφικών παραστάσεων για την επίλυση εξισώσεων, ανισώσεων και γραμμικών συστημάτων	Αξιοποίηση του διαφορικού Λογισμού στη μελέτη συνάρτησης και στην επίλυση προβλημάτων
					Αναγνώριση του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης	Διερεύνηση της συμπεριφοράς των σημείων μιας γραφικής παράστασης (εξέταση αν ένα σημείο ανήκει σε μια γραφική παράσταση, εύρεση της τιμής του $y$ για δεδομένη τιμή του $x$ και αντιστρόφως)					



### **3.2. Εργαλεία αξιολόγησης που συνδέονται με ποσοτικά και ποιοτικά δεδομένα**

Σε σχέση με τη δεύτερη κατηγοριοποίηση, προτείνονται εργαλεία αξιολόγησης με βάση το είδος των δεδομένων που παράγονται, ποσοτικά ή/ και ποιοτικά δεδομένα. Σε αυτή την κατεύθυνση τα εργαλεία αξιολόγησης εστιάζονται σε τρεις άξονες:

**A. Ο πρώτος άξονας αφορά την παρατήρηση** και περιλαμβάνει συνοπτικές σημειώσεις (ή e-σημειώσεις) σε μορφή σύντομης αφήγησης (είτε κατά τη διάρκεια του μαθήματος είτε μετά), ημερολόγιο (diary), ρουμπρικές αξιολόγησης (rubric assessment), εννοιολογικούς χάρτες (concept map), λίστες ελέγχου (για κάθε παιδί και για ολόκληρη την τάξη), καθώς και ερωτήσεις.

Η παρατήρηση είναι ένα σημαντικό εργαλείο που ο εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιήσει για να αξιολογήσει τους μαθητές του στην τάξη την ώρα που δρουν. Ωστόσο, η συλλογή και διαχείριση των πληροφοριών που αποκομίζει ο εκπαιδευτικός με την παρατήρηση συνιστά μια δύσκολη και χρονοβόρα διαδικασία. Οι παρακάτω υποδείξεις μπορεί να φανούν χρήσιμες ώστε ο εκπαιδευτικός να μην 'χαθεί' στα δεδομένα:

- Ο εκπαιδευτικός παρατηρεί έχοντας στο μυαλό του κάποιον στόχο. Έτσι, περιορίζει τον αριθμό και το εύρος των πληροφοριών από την παρατήρηση. Η παρατήρηση παρέχει στον εκπαιδευτικό την ευκαιρία να αξιολογήσει τις ικανότητες των μαθητών στο να επικοινωνούν μεταξύ τους μαθηματικά, να εφαρμόζουν μαθηματικές έννοιες και δεξιότητες, να επιλύουν προβλήματα, να συνεργάζονται με άλλους συμμαθητές τους και με τον εκπαιδευτικό.

- Δεν έχουν όλα τα παιδιά την ίδια ανάγκη παρατήρησης. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ορίσει συγκεκριμένο χρόνο που θα παρατηρήσει έναν μαθητή ώστε να επικεντρωθεί η προσοχή του σε αυτόν.

- Ο εκπαιδευτικός προσπαθεί να μην ενοχλεί τους μαθητές όταν εργάζονται προσηλωμένοι. Αναλαμβάνει τον ρόλο του συμμετέχοντος παρατηρητή που είναι ταυτόχρονα ενεργό μέλος της κοινότητας μάθησης, αλλά και εξωτερικός παρατηρητής του περιβάλλοντος στο οποίο η μάθηση λαμβάνει χώρα.

Ορισμένα αποτελεσματικά μέσα για τη συλλογή των πληροφοριών από παρατήρηση:

- Κάρτες σημειώσεων και μολύβι για την καταγραφή των παρατηρήσεων.
- Ανάπτυξη και χρήση από τον εκπαιδευτικό μια λίστας επιθυμητών συμπεριφορών και πράξεων από μέρους του μαθητή.
- Χρήση μιας συσκευής ηχογράφησης για τη μαγνητοφώνηση των υπαγορευόμενων παρατηρήσεων.
- Εύρεση του κατάλληλου μέρους της τάξης από όπου θα γίνουν οι παρατηρήσεις.

- Χρήση βιντεοκάμερας (αν και εφόσον εξασφαλισθεί άδεια και συναίνεση για τη χρήση της), για την καταγραφή των παρατηρήσεων.
- Συζήτηση των πληροφοριών από παρατήρηση με τους μαθητές με σκοπό να διερευνηθούν τα αίτια πίσω από πράξεις, συμπεριφορές και μαθηματική γλώσσα που χρησιμοποίησαν, καθώς και οι όποιες παρανοήσεις τους σχετικά με συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες.

### Παράδειγμα παρατήρησης για τη Μέτρηση Δ' Δημοτικού

Χρήση οργάνων μέτρησης. Ο εκπαιδευτικός παρατηρεί πώς οι μαθητές χρησιμοποιούν το μοιρογνώμονιο για τη μέτρηση της γωνίας και πώς υπολογίζουν το μέτρο της.

Επιλογή κατάλληλων μονάδων μέτρησης. Ο εκπαιδευτικός παρατηρεί αν και πώς οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι χρειάζεται να χρησιμοποιηθούν υποδιαιρέσεις της μονάδας μέτρησης επιφάνειας.

Επιλογή και χρήση άτυπης και τυπικής κατάλληλης ορολογίας, για παράδειγμα, *η γωνία είναι «μικρότερη από 90°», είναι «οξεία».*

- Η παρατήρηση του εκπαιδευτικού για τις μετρήσεις των μαθητών τον οδηγεί στο να παρακινήσει τους μαθητές να παρουσιάσουν στους συμμαθητές τους τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποίησαν το μοιρογνώμονιο, να συγκρίνουν τα αποτελέσματα των μετρήσεών τους και να εξάγουν συμπεράσματα.

Επέκταση της αποκτηθείσας εμπειρίας των μαθητών στην επιλογή και χρήση μονάδων και την εφαρμογή δεξιοτήτων μέτρησης στην καθημερινότητα.

### Ημερολόγιο

Τα ημερολόγια είναι ένα σημαντικό εργαλείο για να αξιολογήσει ο εκπαιδευτικός ή και ο ίδιος ο μαθητής δεξιότητες επικοινωνίας. Επιπλέον, αποτελούν μία ακόμη οδό για την αξιολόγηση των σκέψεων μέσα από τα γραπτά κείμενα των μαθητών σχετικά με τις ικανότητές τους να επικοινωνούν μαθηματικά, καθώς και τις συμπεριφορές και τις διαθέσεις τους απέναντι στα μαθηματικά. Για να μπορεί αυτό το εργαλείο να χρησιμοποιηθεί ουσιαστικά από την πλευρά των μαθητών, ο εκπαιδευτικός χρειάζεται:

- να συζητήσει με τους μαθητές του και να μοιραστεί μαζί τους σκοπούς και τα πλεονεκτήματα της τήρησης ημερολογίου,
- να φροντίζει ώστε οι μαθητές να τηρούν συμβατικό ή ηλεκτρονικό ημερολόγιο με τακτικές ημερολογιακά καταχωρημένες σημειώσεις ώστε να μπορεί να ανατρέχει σε προγενέστερες σημειώσεις με άνεση,

- να δημιουργεί ευκαιρίες συζήτησης μεταξύ των μαθητών βασισμένες στις σημειώσεις τους και να ενθαρρύνει την ανταλλαγή ιδεών που έχουν αναπτύξει,
- να ανατροφοδοτεί τα ημερολόγια των μαθητών του με δικές του σκέψεις.

### Περιγραφή τήρησης ημερολογίου

Οι μαθητές επιλέγουν να τηρήσουν ένα ημερολόγιο των ενεργειών και των σκέψεών τους για ένα μαθηματικό έργο. Διαθέτουν ένα έντυπο ή ηλεκτρονικό ημερολόγιο στο οποίο κρατούν σημειώσεις που αφορούν συμβατικό και ψηφιακό περιβάλλον.

Οι σημειώσεις μπορούν να αναφέρονται στα παρακάτω:

- Τοποθετούν το πρόβλημα που πρόκειται να λύσουν στην αντίστοιχη θεματική ενότητα, προσδιορίζουν τη διερευνητική διαδικασία (διερεύνηση της προβληματικής κατάστασης με στόχο την παραγωγή μιας εικασίας, έλεγχος, τεκμηρίωση, συμπεράσματα), προσδιορίζουν τι πρόκειται να διερευνήσουν (Boero, 1999).
- Εκφράζουν γραπτά τα συναισθήματά τους για το πρόβλημα (αισθάνονται ότι μπορούν να το λύσουν, φαίνεται ενδιαφέρον γιατί..., πιθανόν να συναντήσουν δυσκολίες γιατί...)
- Εκπονούν ένα διάγραμμα των ενεργειών που θα ακολουθήσουν για να απαντήσουν στο πρώτο ερώτημα (1ο βήμα:... 2ο βήμα:... κ.λπ.). Αργότερα, επανέρχονται στο ημερολόγιο για το διάγραμμα των ενεργειών προκειμένου να απαντηθεί ένα δεύτερο ερώτημα κοκ.
- Καταγράφουν εικασίες και τις ελέγχουν με βάση προηγούμενες εμπειρίες.

Μετά από την εκτέλεση του προγράμματος επιστρέφουν και συμπληρώνουν στο ημερολόγιό τους:

- ποιες από τις εικασίες τους επιβεβαιώθηκαν και ποιες όχι, αιτιολογώντας και αναπτύσσοντας επιχειρήματα για τα ευρήματά τους,
- σχετικά με ποιες συγκεκριμένες έννοιες και ιδιότητες διευρύνθηκαν οι γνώσεις και οι δεξιότητές τους,
- σκέψεις που έκαναν σχετικά με το μαθηματικό έργο.

Οι συζητήσεις που λαμβάνουν χώρα μεταξύ των μαθητών και του εκπαιδευτικού εστιάζονται:

- α) στους διαφορετικούς τρόπους σχεδιασμού των ενεργειών από τους μαθητές,
- β) στις διαφορετικές λύσεις που προέκυψαν από τους μαθητές,

- γ) σε επιπλέον λύσεις που πιθανόν δεν προβλέφθηκαν από τους μαθητές και προτείνει ο εκπαιδευτικός,
- δ) στην εγκυρότητα των προσεγγίσεων/ συλλογισμών εφόσον τίθεται τέτοιο θέμα,
- ε) στη δημιουργία μιας λίστας διδακτικών εργαλείων και στρατηγικών που χρησιμοποιήθηκαν.

Η ανατροφοδότηση του εκπαιδευτικού μπορεί να αναφέρεται σε ζητήματα, όπως:

- χρήση από τον μαθητή της κατάλληλης μαθηματικής γλώσσας και ορολογίας
- κατανόηση των δεδομένων και των ζητούμενων του προβλήματος από τον μαθητή,
- βαθμός συνειδητοποίησης των ενεργειών από τον μαθητή μέσα από την εκπόνηση του διαγράμματος ενεργειών,
- αιτιολογήσεις-ανάπτυξη επιχειρηματολογίας από τον μαθητή.

### **Ρουμπρίκες**

---

Η ανάλυση και η ερμηνεία των απαντήσεων των μαθητών σε κάποια κατάσταση-πρόβλημα, είτε αυτό αντιμετωπίζεται στη συζήτηση στην τάξη είτε σε κάποιο γραπτό τεστ, είναι χρήσιμα στοιχεία για τον εκπαιδευτικό της τάξης προκειμένου να αντιληφθεί τις συγκεκριμένες δυσκολίες που αντιμετωπίζει ο κάθε μαθητής και να αποφασίσει για το είδος της διδακτικής παρέμβασης που κρίνεται απαραίτητη. Είναι αναγκαίος, λοιπόν, ο εντοπισμός της κύριας μαθηματικής ιδέας/έννοιας του προβλήματος και η ταξινόμηση των απαντήσεων των μαθητών με βάση τον βαθμό επίτευξης του στόχου της δραστηριότητας, της πληρότητας στην αντίληψη της βασικής μαθηματικής ιδέας/ έννοιας και, τέλος, της πληρότητας της αιτιολόγησης που αναπτύσσει ο μαθητής.

Στην κατεύθυνση αυτή μπορεί να βοηθήσει το επόμενο εργαλείο αξιολόγησης. Το προτεινόμενο εργαλείο αναπτύσσεται σε κλίμακα 4 επιπέδων αξιολόγησης των στρατηγικών-προσεγγίσεων που αναπτύσσουν οι μαθητές σε δραστηριότητες αξιολόγησης και στηρίζεται στο μοντέλο ποιοτικής ανάλυσης των απαντήσεων των μαθητών σε «ανοικτού» τύπου δραστηριότητες του Προγράμματος Σπουδών *Mathematics in Context* (Smith, 2004, σελ. 75).

#### Αξιολογική κλίμακα τελικής αξιολόγησης

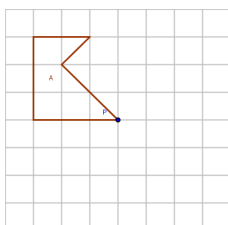
4.	<b>Πλήρης επίτευξη</b> του στόχου του έργου. Οι ενέργειες και οι απαντήσεις των μαθητών φανερώνουν πλήρη αντίληψη της κεντρικής μαθηματικής ιδέας του έργου. Η αιτιολόγησή τους είναι σαφής, ολοκληρωμένη και περιλαμβάνει τη χρήση γραπτής, συμβολικής και εικονικής αναπαράστασης.
3.	<b>Μερική επίτευξη</b> του στόχου του έργου. Οι ενέργειες και οι απαντήσεις των μαθητών φανερώνουν μερική αντίληψη της κεντρικής μαθηματικής ιδέας του έργου. Η αιτιολόγησή τους κρίνεται ελλιπής μολονότι καταφέρνουν να 'επικοινωνούν' την προσέγγιση που ακολουθείται.
2.	<b>Περιορισμένη πρόοδος/επίτευξη</b> του έργου. Οι ενέργειες και οι απαντήσεις των μαθητών φανερώνουν ελλιπή αντίληψη της κεντρικής μαθηματικής ιδέας του έργου. Η αιτιολόγηση κρίνεται ανεπαρκής, προβληματική και γεμάτη ασάφειες.
1.	<b>Ελάχιστη έως μηδενική πρόοδος</b> στην επίτευξη του έργου. Οι μαθητές φαίνεται να αγνοούν την κεντρική μαθηματική ιδέα του έργου, ενώ αδυνατούν να αιτιολογήσουν τις επιλογές τους.

Η εφαρμογή του συγκεκριμένου 'μοντέλου' από τους εκπαιδευτικούς προϋποθέτει φυσικά την ανάλυση της μαθηματικής ιδέας/έννοιας του έργου. Στο παράδειγμα που ακολουθεί παρουσιάζεται το μαθηματικό έργο και ακολουθούν οι αυθεντικές απαντήσεις μαθητών, οι οποίες αναλύονται και ταξινομούνται με τη χρήση αξιολογικής κλίμακας τεσσάρων σημείων.

#### Μαθηματικό έργο για την ΣΤ' Δημοτικού: Στροφή Θεματική ενότητα: Χώρος και Γεωμετρία – Μέτρηση

Στη δραστηριότητα αυτή θα σχεδιάσετε/κατασκευάσετε (περιστροφές) στροφές του σχήματος A γύρω από το σημείο P.

1. Το σχήμα  $A_1$  που είναι η στροφή (περιστροφή) του σχήματος A κατά  $90^\circ$  σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Σχεδιάστε και ονομάστε το σχήμα  $A_1$ .
2. Το σχήμα  $A_2$  που είναι η στροφή (περιστροφή) του σχήματος A κατά  $180^\circ$  σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Σχεδιάστε και ονομάστε το σχήμα  $A_2$ .
3. Το σχήμα  $A_3$  που είναι η στροφή (περιστροφή) του σχήματος A κατά  $90^\circ$  αντίστροφα προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Σχεδιάστε και ονομάστε το σχήμα  $A_3$ .



### Ανάλυση του έργου-ταξινόμηση/αξιολόγηση των αυθεντικών απαντήσεων των μαθητών

Η κύρια μαθηματική έννοια του έργου αφορά τον μετασχηματισμό της (περι)στροφής ενός μη κυρτού 5-γωνου με σημείο περιστροφής μια κορυφή του. Ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός ανήκει στην ομάδα των μετασχηματισμών που διατηρεί το γεωμετρικό αντικείμενο αναλλοίωτο, δηλαδή διατηρεί τις ιδιότητές του αμετάβλητες. Ο μετασχηματισμός της στροφής περιλαμβάνει ένα αρχικό γεωμετρικό αντικείμενο, μια διαδικασία μετασχηματισμού και τη δημιουργία ενός νέου γεωμετρικού αντικειμένου ίσου με το αρχικό, το οποίο είναι όμως προϊόν του συγκεκριμένου μετασχηματισμού. Η ισότητα του τελικού αντικειμένου με το αρχικό δεν αποτελεί μοναδικό κριτήριο, καθώς η διαδικασία του μετασχηματισμού απαιτεί την ύπαρξη της 1-1 αντιστοιχίας των σημείων των δύο αντικειμένων.

Οι πιθανές παρανοήσεις-ελλείψεις των μαθητών σχετικά με τη συγκεκριμένη μαθηματική έννοια περιλαμβάνουν είτε την ισότητα των δύο αντικειμένων (αρχικό-τελικό) είτε την ύπαρξη της 1-1 αντιστοιχίας των σημείων των δύο αντικειμένων είτε τη διαδικασία του μετασχηματισμού (φορά περιστροφής-γωνία περιστροφής-σημείο περιστροφής).

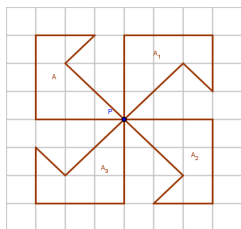
Έτσι, είναι δυνατόν να ταξινομηθούν οι απαντήσεις-προσεγγίσεις των μαθητών σύμφωνα με την αξιολογική κλίμακα σε 4 κατηγορίες:

**Πίνακας 6** Αξιολόγηση τεσσάρων αυθεντικών απαντήσεων μαθηματικών για τη στροφή

4.	Πλήρης επίτευξη του στόχου του έργου. Η απάντηση-προσέγγιση των μαθητών φανερώνει ολοκληρωμένη αντίληψη της έννοιας του μετασχηματισμού της στροφής ενός γεωμετρικού σχήματος γύρω από ένα σημείο με συγκεκριμένη φορά και γωνία.
3.	Μερική επίτευξη του στόχου του έργου. Οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα βασικά σημεία της έννοιας του μετασχηματισμού της περιστροφής: <ul style="list-style-type: none"><li>• Ισότητα των δύο σχημάτων (αρχικό-τελικό)</li><li>• 1-1 αντιστοιχία των σημείων των δύο αντικειμένων</li></ul> Η προσέγγισή τους όμως παρουσιάζει ελλείψεις σε ένα από τα παρακάτω απαραίτητα στοιχεία της διαδικασίας του μετασχηματισμού: <ul style="list-style-type: none"><li>• φορά περιστροφής</li><li>• γωνία περιστροφής</li><li>• σημείο περιστροφής</li></ul>
2.	Περιορισμένη πρόοδος/επίτευξη του έργου. Οι ενέργειες και οι απαντήσεις των μαθητών φανερώνουν ελλιπή αντίληψη της μαθηματικής ιδέας του μετασχηματισμού της περιστροφής (ανισότητα των δύο σχημάτων ή/και έλλειψη 1-1 αντιστοιχίας των σημείων τους), αν και είναι δυνατόν να ακολουθείται η εφαρμογή της διαδικασίας περιστροφής (φορά-γωνία-σημείο περιστροφής).
1.	Ελάχιστη έως μηδενική πρόοδος στην επίτευξη του έργου. Οι μαθητές αδυνατούν να εφαρμόσουν τη διαδικασία περιστροφής ενός σχήματος γύρω από ένα σημείο. Πιθανές απαντήσεις είναι δυνατόν να περιλαμβάνουν άλλα είδη μετασχηματισμών (μεταφορά, ανάκλαση) και να δημιουργήσουν ένα νέο σχήμα ίσο με το αρχικό.

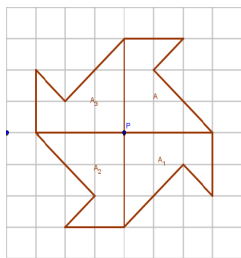
## Αυθεντικές απαντήσεις μαθητών

### Κατηγορία 4

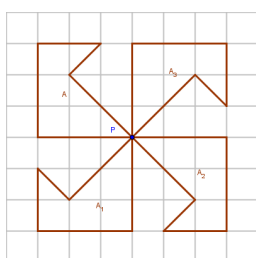


### Κατηγορία 3

#### Σημείο περιστροφής

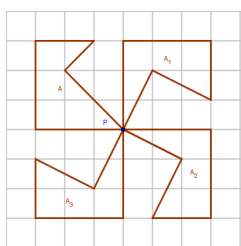


#### Φορά περιστροφής

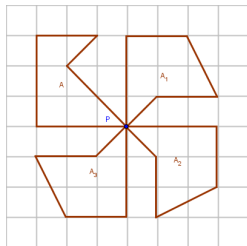


### Κατηγορία 2

#### Ισότητα σχημάτων



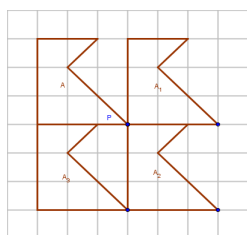
#### 1-1 αντιστοιχία



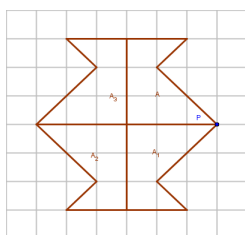


## Κατηγορία 1

### Μεταφορά



### Συμμετρία



## Εννοιολογικοί χάρτες

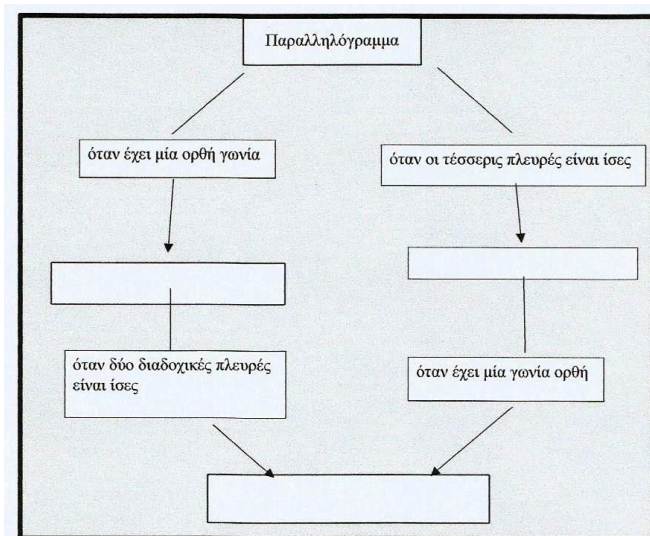
Τα τελευταία χρόνια ο εννοιολογικός χάρτης (Davies 2011, Gouli et al. 2003, Gul & Boman 2006, Hatami 2012, Novak & Canas 2008) έχει αναγνωριστεί ως ένα εναλλακτικό και αποτελεσματικό εργαλείο αξιολόγησης, το οποίο μπορεί να αξιοποιηθεί κατά τη διάρκεια της διαγνωστικής, της διαμορφωτικής και της αθροιστικής αξιολόγησης. Στο πλαίσιο της αξιοποίησης του εννοιολογικού χάρτη ως εργαλείου αξιολόγησης ο μαθητής καλείται να σχεδιάσει και να αναπτύξει έναν πλήρη εννοιολογικό χάρτη ή να διορθώσει έναν ήδη ανεπτυγμένο χάρτη (προβαίνοντας σε διορθωτικές παρεμβάσεις τόσο στο επίπεδο των εννοιών όσο και στο επίπεδο των συνδέσεων) ή να επεκτείνει και να εμπλουτίσει έναν ήδη ανεπτυγμένο χάρτη ή να συμπληρώσει έναν ημιδομημένο χάρτη με τις κατάλληλες έννοιες, συνδέσεις κ.λπ. Η αξιοποίηση εφαρμογής του εννοιολογικού χάρτη ως εργαλείο αξιολόγησης, προϋποθέτει ότι ο εκπαιδευτικός εκ των προτέρων έχει προσδιορίσει, αποσαφηνίσει και εξηγήσει με τρόπο κατανοητό και λεπτομερή στους μαθητές το πλήθος των εννοιών και τις συνδέσεις μεταξύ τους, έχει αναπτύξει επαρκή και ορθά παραδείγματα, τη ροή του χάρτη, τη γλωσσική επάρκεια μεταξύ των συνδέσεων κ.λπ. παρακάτω παρουσιάζεται ένας εννοιολογικός χάρτης, η ιδέα για την κατασκευή του οποίου προέρχεται από τους Πετροπούλου, Κασιμάτη, Ρετάλης (2015).

**Πίνακας 7 Εργαλείο αξιολόγησης εννοιολογικού χάρτη**

<b>Κατηγορία</b>	<b>Επίπεδο 1 Χαμηλή επίδοση</b>	<b>Επίπεδο 2 Μέτρια επίδοση</b>	<b>Επίπεδο 3 Σχεδόν άριστη ή άριστη επίδοση</b>	<b>Βαθμοί</b>
<b>Πληρότητα</b>	Από τον εννοιολογικό χάρτη λείπουν οι περισσότερες έννοιες και περιγραφές του μαθητή	Ο εννοιολογικός χάρτης είναι μερικώς συμπληρωμένος με τις ιδέες (έννοιες-περιγραφές) του μαθητή	Ο εννοιολογικός χάρτης είναι πλήρως συμπληρωμένος με τις ιδέες (έννοιες-περιγραφές) του μαθητή	
<b>Ακρίβεια</b>	Οι ιδέες (έννοιες-περιγραφές) του μαθητή χαρακτηρίζονται από σαφήνεια και πληρότητα σε ποσοστό κάτω του 50%.	Οι ιδέες (έννοιες-περιγραφές) του μαθητή χαρακτηρίζονται από σαφήνεια και ορθότητα σε ποσοστό 50-80%.	Οι ιδέες (έννοιες-περιγραφές) του μαθητή χαρακτηρίζονται από σαφήνεια και ορθότητα σε ποσοστό πάνω από 80%.	
<b>Δομή- οργάνωση</b>	Οι έννοιες που αναπαρίστανται με κόμβους, ομαδοποιούνται και ιεραρχούνται σε επίπεδα, σε ποσοστό κάτω του 50%.	Οι έννοιες που αναπαρίστανται με κόμβους, ομαδοποιούνται και ιεραρχούνται σε επίπεδα, σε ποσοστό 50-80%.	Οι έννοιες που αναπαρίστανται με κόμβους, ομαδοποιούνται και ιεραρχούνται σε επίπεδα, σε ποσοστό άνω του 80%.	
<b>Σχέσεις</b>	Ο μαθητής ορίζει σαφείς σχέσεις μεταξύ των ιδεών του (εννοιών) σε ποσοστό κάτω του 50% του χάρτη.	Ο μαθητής ορίζει σαφείς, απλές και σύνθετες σχέσεις μεταξύ των ιδεών- εννοιών, με τη βοήθεια συνδέσεων στο 50%-80% του χάρτη.	Ο μαθητής ορίζει σαφείς, απλές και σύνθετες σχέσεις μεταξύ των ιδεών- εννοιών, με τη βοήθεια συνδέσεων, σχεδόν στο σύνολο του χάρτη, σε ποσοστό άνω του 80%.	
<b>Συνδέσεις</b>	Οι έννοιες συνδέονται κατάλληλα μεταξύ τους με βέλη και καταγράφονται συνδετικές λέξεις ή φράσεις σε αυτά που δείχνουν τις σχέσεις, που τις συνδέουν σε ποσοστό κάτω του 50% του χάρτη.	Οι έννοιες συνδέονται κατάλληλα μεταξύ τους με βέλη και καταγράφονται σε αυτά συνδετικές λέξεις ή φράσεις που δείχνουν τις σχέσεις που τις συνδέουν στο 50%-80% του χάρτη.	Οι έννοιες συνδέονται κατάλληλα μεταξύ τους με βέλη και καταγράφονται σε αυτά συνδετικές λέξεις ή φράσεις που δείχνουν τις σχέσεις που τις συνδέουν, σχεδόν στο σύνολο του χάρτη και σε ποσοστό άνω του 80% του χάρτη.	
<b>Παραδείγματα</b>	Ο χάρτης πλαισιώνεται από παραδείγματα σε ποσοστό κάτω του 50%.	Ο χάρτης πλαισιώνεται από παραδείγματα σε ποσοστό 50-80%	Ο χάρτης πλαισιώνεται από παραδείγματα σε ποσοστό πάνω του 80%.	
<b>Γλώσσα</b>	Υπάρχει σωστή χρήση των συμβόλων των εννοιών (και της μαθηματικής γλώσσας γενικότερα) σε ποσοστό κάτω του 50% του χάρτη.	Υπάρχει σωστή χρήση των συμβόλων των εννοιών (και της μαθηματικής γλώσσας γενικότερα) σε ποσοστό 50-80% του χάρτη.	Υπάρχει σωστή χρήση των συμβόλων των εννοιών (και της μαθηματικής γλώσσας γενικότερα) σε ποσοστό πάνω του 80% του χάρτη.	
<b>Γενική εικόνα</b>	Ο εννοιολογικός χάρτης είναι ευανάγνωστος σε ποσοστό κάτω του 50%.	Ο εννοιολογικός χάρτης είναι ευανάγνωστος σε ποσοστό 50-80% του χάρτη.	Σχεδόν ολόκληρος ο εννοιολογικός χάρτης είναι ευανάγνωστος σε ποσοστό πάνω του 80%.	

Παρακάτω ακολουθεί ένα παράδειγμα κατασκευής εννοιολογικού χάρτη από τους μαθητές, όταν τους δίνονται ορισμένες έννοιες-κλειδιά ή λέξεις και φράσεις, ενώ παράλληλα παραλείπονται άλλες.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν τις έννοιες-κλειδιά που λείπουν, επιλέγοντας από τις εξής λέξεις-κλειδιά: τετράγωνο, ρόμβος, πολύγωνο, ορθογώνιο, τρίγωνο.



**Σχήμα 3:** Παράδειγμα εννοιολογικού χάρτη με συμπλήρωση εννοιών-κλειδιών (Jin, H. & Wong, K. Y., 2011).

Ακολουθεί ένα ακόμη παράδειγμα δημιουργίας εννοιολογικού χάρτη από τους μαθητές, αυτή τη φορά χωρίς να δίνεται η δομή του εκ των προτέρων. Χρησιμοποιώντας τις έννοιες-λέξεις κλειδιά και τις συνδετικές φράσεις μεταξύ των εννοιών, οι μαθητές καλούνται να δημιουργήσουν έναν εννοιολογικό χάρτη για την έννοια «παραλληλόγραμμο».

Πίνακας 8 Δημιουργία εννοιολογικού χάρτη από μαθητές

<b>Έννοιες- λέξεις κλειδιά:</b> Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο Πολύγωνο Ρόμβος Τετράγωνο	<b>Συνδετικές φράσεις:</b> όταν οι διαγώνιοι διχοτομούνται. όταν οι διαγώνιοι διχοτομούνται κάθετα, όταν οι διαγώνιοι είναι ίσες και διχοτομούνται, όταν οι διαγώνιοι είναι ίσες και διχοτομούνται κάθετα.
---	--

**Β. Ο δεύτερος άξονας αναφέρεται στη διαγνωστική συνέντευξη:** Η συνέντευξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τον εκπαιδευτικό για να αξιολογήσει τη γνωστική και συναισθηματική ανάπτυξη των μαθητών μέσω μιας ποικιλίας στρατηγικών:

- Επεξήγηση: οι μαθητές παρουσιάζουν σε συμμαθητές τους αναπαραστάσεις μαθηματικών εννοιών χρησιμοποιώντας κατάλληλη μαθηματική γλώσσα.
- Ανακατεύθυνση: οι μαθητές απαντούν σε εκμαιευτικές ερωτήσεις που τους οδηγούν σε πιο σύνθετες μαθηματικές έννοιες και ιδέες.
- Επιμερισμός: οι μαθητές χρησιμοποιούν παραδείγματα για να εξηγήσουν αλγορίθμους και διαδικασίες.
- Εφαρμογή: οι μαθητές εφαρμόζουν τη γνώση τους.

### Παράδειγμα συνέντευξης για την αξία θέσης ψηφίου (Αριθμοί, Β΄ Δημοτικού)

Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν διάφορες εκφράσεις για έναν δοσμένο αριθμό. Για παράδειγμα, ο 145: 145 μονάδες, 14 δεκάδες και 5 μονάδες, 1 εκατοντάδα, 4 δεκάδες και 5 μονάδες, 10 δεκάδες και 45 μονάδες...). Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν χειραπτικό υλικό ή άλλο τρόπο για να αναπαραστήσουν τις διαφορετικές εκφράσεις που σκέφτηκαν.

Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να κάνουν το ίδιο για τον αριθμό 104, καθοδηγώντας τους με κατάλληλες ερωτήσεις να κατανοήσουν την αξία του 0 στον αριθμό 104.

Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να εξηγήσουν τις διαδικασίες που ακολούθησαν για να βρουν τον αριθμό που λείπει (συμπλήρωμα) στην παρακάτω αριθμητική πρόταση:  $26 + \underline{\quad} = 44$

Το παρακάτω απόσπασμα είναι μια συνομιλία-συνέντευξη μεταξύ της εκπαιδευτικού και μιας μαθήτριας της Ε τάξης, που είχε βάλει 22 στην κενή θέση. Η εκπαιδευτικός ζήτησε από τη μαθήτρια Ε να πει πώς σκέφτηκε:

Ε: Από το 20 για να πάω στο 40 (έβαλα) 20, από τα 6 στα 4 (έβαλα) 2, άρα, σύνολο 22.

Δ.: Δηλαδή, Ε,  $26 + 22$  μας κάνει 44;

Η Ε κάνει την πρόσθεση οριζόντια  $26 + 22 = 48$ .

Ε: Όχι, κάνει 48. Κάτι έκανα λάθος...

Η εκπαιδευτικός φέρνει τον άβακα.

Δ.: Θέλεις να ξανακάνουμε την πράξη με τον άβακα;

Ε: Ναι!

Δ: Δείξε μου στον άβακα το 26.

Η Ε βάζει 2 Δ (εκάδες) και 6 Μ (ονάδες).

Δ: Πόσα θέλεις τώρα;

Ε: Άλλα 20, δηλ. 2 Δ.

Δ: Πόσα έχεις τώρα;

Ε: (μετράει) 46. Θα βγάλω 2 Μ για να γίνουν 44.

Δ: Θυμάσαι τι έκανες από την αρχή;

Ε: Έβαλα 20 και έβγαλα 2.

Δ: Δηλαδή, πόσα έβαλες;

Ε:  $20-2=18$ .

Οι μαθητές κατασκευάζουν ένα μη τετριμμένο, αλλά ρεαλιστικό, λεκτικό πρόβλημα, χρησιμοποιώντας τους παραπάνω αριθμούς, που να λύνεται με τη συγκεκριμένη μαθηματική ισότητα. Ανταλλάσσουν τα προβλήματά τους και τα λύνουν.

**Γ. Ο τρίτος άξονας αφορά τις εργασίες των μαθητών** και περιλαμβάνει Φάκελο εργασιών (portfolio και e-φάκελο) και συνθετικές ερευνητικές εργασίες (project).

Ο Φάκελος Εργασιών του εκπαιδευομένου (Portfolio Assessment) αποτελεί μια συστηματική, σκόπιμη και εξειδικευμένη συλλογή των έργων του μαθητή, τα οποία έχουν επιλεγεί με τη συναίνεσή του και με βάση συγκεκριμένους μαθησιακούς στόχους και με προκαθορισμένα κριτήρια. Τα έργα αυτά αποτελούν τεκμήρια για την προσπάθεια, την πρόοδο και την επίδοση του εκπαιδευομένου σε δεδομένες μαθησιακές δραστηριότητες που καλείται να επιτελέσει (Birgin & Baki, 2007; Chou & Chen, 2008). Ο ηλεκτρονικός φάκελος του εκπαιδευομένου (e-Portfolio) αποτελεί την ψηφιακή εκδοχή του φακέλου εργασιών του (portfolio) που είναι βασισμένος στο χαρτί, δομημένος και οργανωμένος σε υπολογιστικό περιβάλλον (Educause ePortfolios, 2007; Mason et al., 2004; Παπαχαραλάμπους, 2008). Σε αυτό το πλαίσιο εντάσσονται και οι συνθετικές ερευνητικές εργασίες (project), δηλαδή η οργανωμένη μαθησιακή δραστηριότητα, συλλογικής συνήθως μορφής, που αναπτύσσεται σε πλαίσιο ελεύθερης επιλογής με προκαθορισμένο σχέδιο και αποβλέπει στη διερεύνηση, οργάνωση και διαχείριση γνώσεων, υλικών, αξιών και δράσεων.

Τα πορτφόλιο, ως συλλογές έργων και εργασιών των μαθητών, μπορούν να σχεδιαστούν με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι αντιπροσωπευτικά των μαθησιακών εμπειριών των μαθητών.

Η ενδεικτική διαχείριση των πορτφόλιο προϋποθέτει:

- Οι μαθητές να έχουν την ευκαιρία να οργανώνουν το πορτφόλιο τους μόνοι τους. Αυτό στις μικρές ηλικίες είναι δύσκολο. Θα χρειαστεί ο εκπαιδευτικός να βοηθήσει τους μαθητές περισσότερο ή λιγότερο, να δώσει ορισμένες γενικές και ειδικές-ανά περίπτωση μαθητή- οδηγίες.
- Οι μαθητές να τροφοδοτούν το πορτφόλιο με υλικό τακτικά. Μπορεί να επιλέγουν να βάζουν κάθε εργασία ή μερικές από τις εργασίες τους.
- Οι εργασίες που επιλέγονται να είναι διαφορετικές ως προς το είδος, να έχουν μια ποικιλία, να παρέχουν πληροφορίες για μια ολοκληρωμένη κατά το δυνατόν εικόνα του κάθε μαθητή. Δηλαδή, οι εργασίες που ο κάθε μαθητής επιλέγει για να αντιπροσωπεύσει τη δουλειά του στα μαθηματικά να δίνουν στον εκπαιδευτικό που αξιολογεί τον φάκελο μια 'εικόνα' για τον τρόπο με τον οποίο ο κάθε μαθητής ερμηνεύει τη δουλειά του, για τις διαθέσεις του απέναντι στα

μαθηματικά, για τον βαθμό κατανόησης συγκεκριμένων εννοιών και διαδικασιών.

Επειδή το πορτφόλιο εμπλουτίζεται με εργασίες κατά τη διάρκεια μιας ολόκληρης χρονιάς, πιθανόν και περισσότερων χρόνων, τηρουμένων ορισμένων συνθηκών, επιτρέπει στον εκπαιδευτικό, αλλά και στον μεγαλύτερο μαθητή, από την Στ Δημοτικού και πάνω, να εξάγει συμπεράσματα για τα μαθησιακά του πρότυπα, τους τρόπους, δηλαδή, με τους οποίους μαθαίνει ευκολότερα και 'προσφορότερα' για τον ίδιο.

Το πορτφόλιο μπορεί να τηρείται και ηλεκτρονικά στον υπολογιστή της τάξης ή στον υπολογιστή του εργαστηρίου Η/Υ του σχολείου και να περιλαμβάνει τόσο τις εργασίες που έχουν εκπονηθεί ηλεκτρονικά όσο και τις υπόλοιπες σκαναρισμένες.

### **Παραδείγματα εργασιών που μπορεί να περιλαμβάνει το πορτφόλιο**

---

Γεωμετρία: Γεωμετρικά Σχήματα

- Αρχικά σχέδια και αναγνώριση καθορισμένων σχημάτων (τετράπλευρο, πεντάπλευρο, κ.λπ.) από την περίοδο που οι μαθητές εισάγονται στην έννοια του σχήματος (Α' Δημοτικού).
- Σχέδια και αναγνώριση σχημάτων από την περίοδο που οι μαθητές μελετούν σε μεγαλύτερο βάθος την έννοια του σχήματος (Α' Δημοτικού – Β' Δημοτικού).
- Κατασκευές με συνδυασμούς σχημάτων στο επίπεδο
- Ομαδοποίηση επίπεδων και στερεών σχημάτων με βάση χαρακτηριστικά-ιδιότητες που ορίζει ο μαθητής.
- Τελικά σχέδια και κατασκευές που προτείνει ο εκπαιδευτικός με βάση τις ιδιότητες επίπεδων και στερεών σχημάτων που έχουν μελετηθεί στην τάξη με χρήση εμπράγματου υλικού και οργάνων, στο τέλος της διδασκαλίας των γεωμετρικών σχημάτων στο τέλος της Β Δημοτικού.

Συνεχίζοντας, από τη Γ Δημοτικού μπορούν να προστίθενται και νέες εργασίες, όπως για παράδειγμα σχέδια επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων πάνω σε διάφορους καμβάδες, κ.λπ.

### **Οι συνθετικές ερευνητικές εργασίες**

---

Η αξιολόγηση μιας συνθετικής εργασίας εξετάζει τον βαθμό ανάπτυξης των ιδιαίτερων μαθηματικών διεργασιών που προτείνονται στο Πρόγραμμα Σπουδών. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιεί εργαλεία και τεχνικές που περιγράφηκαν στις εναλλακτικές

μεθόδους αξιολόγησης. Παρακάτω παρουσιάζεται ένα ενδεικτικό παράδειγμα συνθετικής εργασίας για τις τάξεις Α και Β Δημοτικού, καθώς και η αξιολόγησή της.

### ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ (Α΄ - Β΄ Δημοτικού)

#### «Ο δικός μας κήπος: παρακολουθώντας την ανάπτυξη των φυτών στην τάξη»

Οι μαθητές και ο εκπαιδευτικός της τάξης αποφασίζουν να δημιουργήσουν ένα δικό τους κήπο στην τάξη και να μελετήσουν την ανάπτυξη των φυτών που θα προκύψουν 1 φορά/ εβδομάδα την ώρα της Μελέτης Περιβαλλοντος για 3-4 εβδομάδες.



#### Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

**1<sup>η</sup> φάση:** Οι μαθητές φυτεύουν σπόρους φακής σε κεσεδάκια. Μπορεί να έχουν ένα κεσεδάκι/δύο μαθητές. Συζητούν και αποφασίζουν ότι θα πρέπει να περιμένουν λίγο καιρό (προτείνεται μία εβδομάδα) για να διαπιστώσουν ότι φυτρώνουν φυτά των οποίων την ανάπτυξη μπορούν να μετρήσουν.

**2<sup>η</sup> φάση:** (μετά από μια εβδομάδα περίπου)

Ο εκπαιδευτικός θέτει την ερώτηση: -Πώς θα μετράμε πόσο μεγάλωσαν τα φυτά μας;

Ενθαρρύνει τους μαθητές να προτείνουν τις δικές τους ιδέες σχετικά

α) με τους τρόπους καταμέτρησης των μικρών φυτών (μίσχων) σε κάθε κεσεδάκι (απαρίθμηση),

β) καταμέτρησης του αριθμού των φύλλων (απαρίθμηση) και

γ) του ύψους του υψηλότερου φυτού σε κάθε κεσεδάκι.

Για τα α) και β) οι μαθητές αναπτύσσουν στρατηγικές για να μετρήσουν κάθε φορά πόσα είναι τα φυτά και πόσα τα φύλλα των φυτών. Σημειώνουν τα αποτελέσματα σε πινακάκια.

Για το γ): εάν οι μαθητές υποδείξουν άτυπες μονάδες μέτρησης του ύψους, όπως για παράδειγμα μολύβια ή γόμες, ο εκπαιδευτικός μπορεί να προτείνει μικρές ομοιόμορφες λωρίδες χαρτί πάνω στις οποίες θα σημειώνονται οι μετρήσεις με διαφορετικό χρώμα κάθε φορά. Στο τέλος θα κληθούν να μετρήσουν με χαρακάκι στα χαρτονάκια τους για να μπορέσουν να συγκρίνουν τα αποτελέσματά τους.

Εάν οι μαθητές υποδείξουν τα χαρακάκια τους, τότε ο εκπαιδευτικός ετοιμάζει πινακάκια για τα ζευγάρια των μαθητών, όπου τα παιδιά θα σημειώσουν τις ημερομηνίες και τις μετρήσεις.

Τα παιδιά πριν από κάθε μέτρηση μπορεί να υποθέσουν αρχικά το νέο ύψος και μετά να επαληθεύσουν με μέτρηση.

**3<sup>η</sup> φάση:** (μετά από 2 εβδομάδες)

Επαναλαμβάνονται οι μετρήσεις για τα α), β), γ) και σημειώνονται στα πινακάκια.

**4<sup>η</sup> φάση:** (μετά από 3 ή 4 εβδομάδες)

Ο εκπαιδευτικός και οι μαθητές διαπιστώνουν ότι η ανάπτυξη των φυτών έχει ολοκληρωθεί. Συγκρίνουν τα τελικά αποτελέσματα των μετρήσεών τους. Διαπιστώνουν πόσο μεγάλωσαν τα φυτά τους ως προς τα α), β), γ).

Συμπεραίνουν ότι η ανάπτυξη των φυτών αλλά και των υπόλοιπων ζωντανών οργανισμών (ζώων, ανθρώπων) ολοκληρώνεται κάποτε.

### **Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα**

#### **Μαθηματικά**

Στην παρούσα εργασία οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα

- να απαριθμήσουν στοιχεία σε ρεαλιστικά περιβάλλοντα όπου τα αντικείμενα δεν είναι στη σειρά ή σε κανονική κατανομή όπως έχουν συνηθίσει στην τάξη των μαθηματικών.
- να πραγματοποιήσουν μετρήσεις ύψους με άτυπες και τυπικές μονάδες μέτρησης σε πραγματικές καταστάσεις
- να διαπιστώσουν την ανάγκη κοινής μονάδας μέτρησης του ύψους των φυτών και καταγραφής των μετρήσεων με οργανωμένο τρόπο (πινακάκι, ημερομηνία) ώστε να μπορούν να τις συγκρίνουν
- να υπολογίσουν τις διαφορές που προκύπτουν από τις νέες μετρήσεις με διάφορες στρατηγικές (αφαίρεση, συμπλήρωμα)
- να χρησιμοποιήσουν τα αποτελέσματα των μετρήσεων για να οδηγηθούν σε συμπεράσματα σχετικά με το αρχικό πρόβλημα που είναι η ανάπτυξη των φυτών.

#### **Περιβάλλον**

Οι μαθητές συζητούν για τους παράγοντες που επηρεάζουν την μετατροπή του σπόρου σε φυτό, για το ρόλο του χρόνου στην ανάπτυξη ενός φυτού, για την ολοκλήρωση της ανάπτυξης των ζωντανών οργανισμών (φυτά, ζώα, άνθρωποι) και για το τι παραμένει σταθερό μετά την ολοκλήρωση της ανάπτυξης (πχ το ύψος) και τι όχι (πχ ο αριθμός των φύλλων).

#### **Γλώσσα**

Οι μαθητές ακούνε ή διαβάζουν από το Ανθολόγιο Α και Β Δημοτικού: Φύλλο φύλλο της κουκιάς (Λαϊκό παραμύθι της Μήλου, σελ.56), Το γιασεμί, η ροδιά και η χαρουπιά (Λαϊκό παραμύθι, σελ.80) και άλλα παραμύθια.

#### **Εικαστικά**

Οι μαθητές κατασκευάζουν τις χάρτινες λωρίδες με τις οποίες θα κάνουν τις μετρήσεις και αναγνωρίζουν την ανάγκη να χρησιμοποιήσουν διαφορετικά χρώματα για κάθε καινούρια μέτρηση.

Οι μαθητές κατασκευάζουν κολάζ είτε με φωτογραφίες των δικών τους φυτών που έχουν βγάλει στην τάξη με τη μηχανή τους από διάφορες οπτικές γωνίες είτε με εικόνες από περιοδικά που δείχνουν γνωστά τους φυτά.



### Πίνακας 9 Αξιολόγηση συνθετικής εργασίας (Α' - Β' Δημοτικού) με

#### «Ο δικός μας κήπος: παρακολουθώντας την ανάπτυξη των φυτών στην τάξη»

(Η εκπαιδευτικός υπογραμμίζει στον παρακάτω πίνακα αυτές τις προτάσεις που ταιριάζουν σε κάθε δυάδα μαθητών και συμπληρώνει δικά της σχόλια)

<i>Ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο</i>	<i>Ως προς τη συνεργασία των μαθητών μεταξύ τους, των μαθητών με τον εκπαιδευτικό, όλων στην ολομέλεια (επικοινωνία)</i>
<p>Οι μαθητές: Απαριθμούν ένα-ένα, δύο-δύο, τρία-τρία, πέντε-πέντε (μέχρι το 20, 50, 100). Δεν απαριθμούν το ίδιο αντικείμενο δύο φορές (αντιστοίχιση 1 προς 1) Ομαδοποιούν δυάδες, τριάδες,... αντικειμένων για να διευκολυνθούν στη μέτρηση Πραγματοποιούν μέτρηση του ύψους και - απαγγέλουν τον σωστό φυσικό αριθμό - δεν απαγγέλουν τον σωστό φυσικό αριθμό<sup>2</sup> Αναγνωρίζουν την ανάγκη κοινής μονάδας μέτρησης του ύψους (ναι-όχι) Καταγράφουν τις μετρήσεις στο πινακάκι στο κατάλληλο κουτάκι - με ευκολία - με μικρή βοήθεια - μόνο με βοήθεια<sup>3</sup> Υπολογίζουν τις διαφορές μεταξύ των διαδοχικών μετρήσεων - με ευκολία - με μικρή βοήθεια - μόνο με βοήθεια<sup>4</sup></p>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Βαθμός συνεννόησης (υψηλός – μέτριος – μικρός)</li><li>• Βαθμός αυτονομίας και αυτενέργειας (δεν ζητούν βοήθεια – ζητούν λίγη βοήθεια – δεν μπορούν μόνοι)</li><li>• Ιεράρχηση ενεργειών (άριστη ιεράρχηση – καλή ιεράρχηση – δεν ξέρουν πώς και με τι να αρχίσουν)</li><li>• Βαθμός ισοτιμίας στη σχέση-κατανομή ενεργειών (κυριαρχεί ο ένας – μοιράζονται το έργο)</li><li>• Διαφοροποίηση (μαθητής με δυσκολίες συμμετέχει ενεργά – συμμετέχει λίγο – δεν συμμετέχει)</li><li>• Περιμένουν τη σειρά τους για να μιλήσουν στην ολομέλεια (μιλάνε μόνο μερικοί – μιλάνε όλοι)</li><li>• Γίνεται διάλογος (ακούει ο ένας τον άλλον και ανταποκρίνεται)</li><li>• Ακούνε προσεκτικά τις οδηγίες –υποδείξεις της εκπαιδευτικού</li></ul>
<p><i>Ως προς τις ιδέες – στρατηγικές των μαθητών (συλλογισμός και επιχειρηματολογία)</i></p> <p>Χρησιμοποίησαν στρατηγικές (για την απαρίθμηση) - που ανακάλυψαν από την τάξη - πρωτότυπες - αποτελεσματικές</p>	<p><i>Ως προς την επιλογή και χρήση του υλικού (εργαλεία και μέσα) – δεξιότητες</i></p> <p>Δεξιότητες χειρισμού του χάρακα (τοποθέτηση, ανάγνωση της ένδειξης, λεπτές κινήσεις, ακριβείς μετρήσεις,... Χειρισμός ψαλιδιού Χρήση κόλλας</p>

<sup>2</sup> Η εκπαιδευτικός χρησιμοποιεί τη συνέντευξη για να διερευνήσει τη σκέψη των μαθητών. Ενδεικτικές ερωτήσεις: Πώς το υπολογίσατε; (μπορεί να διαβάζουν το χαρακάκι από πάνω προς τα κάτω, βλ. και χρήση εργαλείων)

<sup>3</sup> Όπως στο 1.

<sup>4</sup> Όπως στο 1.

<p>- που οδήγησαν γρήγορα και άμεσα σε αποτελέσματα Χρησιμοποίησαν - άτυπη μονάδα μέτρησης ύψους (.....) και τη μέτρησαν με χαρακάκι - μόνο χαρακάκι - κάτι άλλο Μπορούσαν να εξηγήσουν τις στρατηγικές τους στους συμμαθητές τους - εύκολα και κατανοήσιμα - με σχετική ευκολία - δύσκολα</p>	<p>Χρήση λωρίδων (άτυπες μονάδες μέτρησης ύψους) – κόβουν ισόπαχες και ισομήκεις λωρίδες Χρήση αριθμητηρίου ή μικρών κύβων για την απαρίθμηση των φύλλων (με αντιστοίχιση) για την απαρίθμηση των μίσχων (με αντιστοίχιση) για την εύρεση της διαφοράς –συμπληρώματος των μετρήσεων</p>
<p>Παρατηρήσεις – συμπεράσματα της εκπαιδευτικού</p>	<p>Παρατηρήσεις – συμπεράσματα της εκπαιδευτικού</p>
<p><b>Ως προς τις συνδέσεις με τα άλλα μαθήματα</b></p>	<p><b>Αξιολόγηση μέσα από:</b></p>
<p><b>Ελληνική Γλώσσα</b> (... ώρες) Ανθολόγιο..... Άλλο βιβλίο.....</p>	<p>Έκφραση συναισθημάτων, ερωτήσεις-απαντήσεις, θεατρικό δρώμενο, αναπαράσταση,...</p>
<p><b>Μελέτη περιβάλλοντος</b> (... ώρες) Παρακολούθηση εικόνων, φιλμ, ντοκιμαντέρ</p>	<p>Συζήτηση  <ul style="list-style-type: none"> <li>• σέβονται τη σειρά</li> <li>• αναπτύσσουν τις ιδέες τους</li> <li>• εκφράζουν τα συναισθήματά τους, διατυπώνουν κρίσεις,...</li> </ul> </p>
<p><b>Εικαστικά</b> (... ώρες) Κατασκευή λωρίδων Κατασκευή κολάζ</p>	<p>Επιλογή χρωμάτων Επιλογή εικόνων Αισθητικό αποτέλεσμα</p>
<p><b>Αναστοχασμός εκπαιδευτικού</b></p>	
<p>Η συνθετική εργασία ήταν επιτυχημένη γιατί.....          Ιδιαίτερη εντύπωση μου έκανε.....          Στην επόμενη συνθετική εργασία θα προσέξω να.....</p>	

### **3.3. Εργαλεία αξιολόγησης μαθηματικών, κοινωνικο-πολιτισμικών και κοινωνικο-συναισθηματικών πρακτικών με εστίαση στον μαθητή**

---

Η  *τρίτη κατηγοριοποίηση* των εργαλείων αξιολόγησης αφορά τις μαθηματικές πρακτικές, δηλαδή τις νοητικές εκείνες διεργασίες που εμπλέκονται στην ανάπτυξη γνώσης και κατανόησης των μαθηματικών αλλά και της μαθηματικής πράξης, καθώς και τις κοινωνικο-πολιτισμικές και κοινωνικο-συναισθηματικές πρακτικές ως γνωστικά και κοινωνικο-πολιτισμικά στοιχεία της ανθρώπινης (νοητικής και φυσικής) δράσης και δραστηριότητας.

Η ανάπτυξη των μαθηματικών πρακτικών, αλλά και των κοινωνικο-πολιτισμικών και κοινωνικο-συναισθηματικών πρακτικών σε όλη τη διάρκεια της φοίτησης στο σχολείο υποστηρίζουν τους μαθητές στην επιτυχή αντιμετώπιση της καθημερινής τους ζωής και στη συνεισφορά τους στην κοινωνία ως ενεργά μέλη της. Σε όλες τις τάξεις, και με βάση το ΠΣ των μαθηματικών, η μάθηση των μαθηματικών, η οποία συνδέεται με τις κοινωνικοπολιτισμικές και κοινωνικοσυναισθηματικές προσδοκίες, σχετίζεται και με τις γνωστικές μαθηματικές περιοχές του αριθμού & της άλγεβρας, του χώρου & της γεωμετρίας και των στοχαστικών μαθηματικών, και αξιολογείται εντός αυτών των πλαισίων.

Οι παραπάνω πρακτικές υποστηρίζουν τους μαθητές και τις μαθήτριες στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και στην αξιοποίηση των μαθηματικών διαδικασιών που είναι βασικές για τη μάθηση των μαθηματικών τόσο στο πλαίσιο του σχολείου όσο και ευρύτερα στην κοινότητα. Επιτρέπουν στους μαθητές και τις μαθήτριες να αναπτύξουν εμπιστοσύνη, να αντιμετωπίσουν προκλήσεις και να σκεφτούν κριτικά. Αυτά με τη σειρά τους επιτρέπουν στους μαθητές να εξελιχθούν και να αξιοποιήσουν τις γνώσεις τους σε μια ποικιλία από καταστάσεις. Επιπλέον, οι κοινωνικο-συναισθηματικές πρακτικές που υιοθετούνται στην τάξη των μαθηματικών βοηθούν κάθε μαθητή να διαμορφώσει τη (θετική) ταυτότητα του «ικανού μαθητή στα μαθηματικά».

**Πίνακας 10 Εργαλείο αξιολόγησης μαθηματικών πρακτικών με εστίαση στον μαθητή**

<b>Μαθηματικές πρακτικές: ανάπτυξη γνώσης και κατανόησης</b>				
<b>Κατηγορίες</b>	<b>Ο μαθητής:</b>			
	<b>Επίπεδο 1</b>	<b>Επίπεδο 2</b>	<b>Επίπεδο 3</b>	<b>Επίπεδο 4</b>
<b>Συλλογισμός και επιχειρηματολογία</b> (π.χ. διερεύνηση φαινομένων, διατύπωση και έλεγχος υποθέσεων, συγκρότηση τεκμηριωμένων επιχειρημάτων, διαδικασίες εικασίας, γενίκευσης, δημιουργίας παραδειγμάτων, απόδειξης, επιχειρηματολογίας και πειθούς)	Ελάχιστη έως μηδενική πρόοδος	Περιορισμένη πρόοδος	Μερική πρόοδος	Πλήρης επίτευξη
<b>Δημιουργία συνδέσεων</b> (π.χ. συνειδητοποίηση σχέσεων μεταξύ μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, συνειδητοποίηση λογικών σχέσεων και δομών που συγκροτούν τα μαθηματικά)	Ελάχιστη έως μηδενική	Περιορισμένη	Μερική	Πλήρης
<b>Μαθηματική επικοινωνία</b> (π.χ. προφορική, εικονική γραπτή επικοινωνία, συνεργασία, σε βάθος κατανόηση εννοιών και διαδικασιών, αποσαφήνιση ιδεών και ανάλυση επιχειρημάτων, σωστή χρήση της φυσικής και συμβολικής γλώσσας, σταδιακή απομάκρυνση από υποκειμενικές, άτυπες εκφράσεις για την περιγραφή μαθηματικών εννοιών, σχέσεων και διαδικασιών, αναστοχασμός).	Ελάχιστη έως μηδενική	Περιορισμένη	Μερική	Πλήρης
<b>Επίλογή και χρήση εργαλείων</b> (π.χ. χρήση εργαλείων, χρήση τεχνουργημάτων (artefacts), απτικών και ψηφιακών, στρατηγικές αυθεντικής μαθηματικής δράσης (αποτελεσματική διατύπωση/ διερεύνηση εικασιών/ προβλημάτων, κατάλληλη αναπαράσταση μιας μαθηματικής ιδέας ή/ και μοντελοποίηση μιας κατάστασης), αναγνώριση σχέσεων και συνδέσεων μεταξύ των διαφόρων συστημάτων αναπαράστασης (π.χ. εικονιστικών, γεωμετρικών, συμβολικών, κ.λπ.), επιλογή χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων)	Ελάχιστη έως μηδενική	Περιορισμένη	Μερική	Πλήρης
<b>Επίλυση προβλήματος</b> (π.χ. διερεύνηση μαθηματικών ιδεών μέσω επίλυσης προβλημάτων, προοδευτική κατασκευή και εννοιολογική εμφάθυση μαθηματικής γνώσης, συνειδητοποίηση λειτουργικής πτυχής μαθηματικής γνώσης και πολιτισμικής και ιστορικής της διάσταση, πρακτικές κατασκευής προβλήματος).	Ελάχιστη έως μηδενική	Περιορισμένη	Μερική	Πλήρης
<b>Μοντελοποίηση</b> (π.χ. επιλογή και χρήση κατάλληλων μαθηματικών για την ανάλυση εμπειρικών καταστάσεων, την καλύτερη κατανόησή τους και τη βελτίωση των λήψης αποφάσεων, χρήση ψηφιακών εργαλείων για δημιουργία υποθέσεων, διερεύνηση συνεπειών και έλεγχο των προβλέψεων με βάση τα δεδομένα)	Ελάχιστη έως μηδενική	Περιορισμένη	Μερική	Πλήρης
<b>Μεταγνωστική ενημερότητα</b> (π.χ. συνειδητός έλεγχος της μάθησης, σχεδιασμός και επιλογή στρατηγικών, παρακολούθηση της ανάπτυξης της γνώσης, διόρθωση των λαθών, ανάλυση της αποτελεσματικότητας των στρατηγικών και αλλαγή τους, συνείδηση της γνωστικής διαδικασίας, έλεγχος, ρύθμιση και αξιολόγηση του τρόπου σκέψης του, ευελιξία στη σκέψη και δυνατότητα προσαρμογής σε νέες μη οικείες καταστάσεις).	Ελάχιστη έως μηδενική	Περιορισμένη	Μερική	Πλήρης

### Παράδειγμα αξιοποίησης εργαλείου αξιολόγησης μαθηματικών πρακτικών με εστίαση στον μαθητή

Οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν το κόστος κατανάλωσης του νερού για διαφορετικές τιμές  $m^3$  νερού, να μοντελοποιήσουν το πρόβλημα βρίσκοντας τη συνάρτηση του κόστους σε σχέση με την κατανάλωση και να σχεδιάσουν τη γραφική της παράσταση. Επίσης, καλούνται να ερμηνεύσουν τους λόγους για τους οποίους επιλέγεται η κλιμακωτή και όχι η ενιαία χρέωση στη συγκεκριμένη κατάσταση.

#### Κλιμακωτή χρέωση

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται η τιμολογιακή πολιτική μιας εταιρείας ύδρευσης.

Πάγιο τέλος	12 €
Από 0 έως 30 $m^3$ νερού	0,55 €/ $m^3$
Από 30 έως 60 $m^3$ νερού	0,68 €/ $m^3$
Από 60 έως 100 $m^3$ νερού	0,86 €/ $m^3$
Πάνω από 100 $m^3$	1,4 €/ $m^3$

Ενδεχόμενες απαντήσεις των μαθητών κατηγοριοποιούνται ενδεικτικά ως εξής:

Πίνακας 11

Κατηγορία	Επίπεδο 1	Επίπεδο 2	Επίπεδο 3	Επίπεδο 4
<b>Μοντελοποίηση</b>	Οι μαθητές:			
<i>Κατασκευή και ερμηνεία μοντέλου</i>	Υπολογίζουν το κόστος για ορισμένες τιμές κατανάλωσης, αδυνατούν να κατασκευάσουν ένα μοντέλο-συνάρτηση ή να ερμηνεύσουν ένα έτοιμο μοντέλο του προβλήματος ακόμα και όταν παρέχεται υποστήριξη.	Υπολογίζουν το κόστος για ορισμένες καταναλώσεις, ερμηνεύουν ένα έτοιμο μοντέλο αλλά δυσκολεύονται να κατασκευάσουν από μόνοι τους ένα μοντέλο του προβλήματος.	Ερμηνεύουν ένα έτοιμο μοντέλο του προβλήματος και κάνουν προβλέψεις με αυτό. Αξιοποιούν τους υπολογισμούς για ορισμένες καταναλώσεις στην κατασκευή του μοντέλου αλλά δεν καταφέρνουν να ολοκληρώσουν πλήρως το μοντέλο και τις αναπαραστάσεις του.	Κατασκευάζουν πλήρως το μοντέλο στις διαφορετικές αναπαραστάσεις του και το αξιοποιούν στην ερμηνεία της κατάστασης.

Πίνακας 12

Κατηγορίες	Επίπεδο 1	Επίπεδο 2	Επίπεδο 3	Επίπεδο 4
<b>Δημιουργία συνδέσεων</b>	Οι μαθητές:			
<i>Μεταξύ των μαθηματικών και του κοινωνικού και οικονομικού περιβάλλοντος</i>	Αδυνατούν να κατανοήσουν στοιχειωδώς τη διαφορά μεταξύ ενιαίας και κλιμακωτής χρέωσης ακόμα και όταν αυτές εξηγούνται.	Διακρίνουν την ενιαία από την κλιμακωτή χρέωση αλλά δυσκολεύονται στο να ερμηνεύσουν τις διαφορές στην εφαρμογή τους. Αποδίδουν απλοϊκές ερμηνείες όπως “επιλέγεται η χρέωση με την οποία πληρώνουμε περισσότερα” ή “γενικότερα γίνεται για λόγους προσέλκυσης πελατών και ανταγωνισμού μεταξύ των εταιρειών”.	Για την επιλογή της κλιμακωτής χρέωσης αποδίδουν ερμηνείες όπως: “επιλέγεται για να αποθαρρύνει την αλόγιστη χρήση νερού”, “για την προστασία του περιβάλλοντος”, “οι πολύπλοκες χρεώσεις δυσκολεύουν τους πολίτες στην κατανόησή τους με αποτέλεσμα να χειραγωγούνται πιο εύκολα”	Εκτός από ερμηνείες του προηγούμενου επιπέδου και αναγνωρίζουν επιπλέον ότι θεσμικά οι πολίτες πρέπει να αντιμετωπίζονται ως ίσοι απέναντι στον νόμο και έτσι να χρεώνονται για την ίδια κατανάλωση το ίδιο ποσό.
<i>Μεταξύ των αναπαραστάσεων μιας έννοιας</i>	Αδυνατούν να χρησιμοποιήσουν τον τύπο μιας συνάρτησης με πολλαπλό τύπο, καθώς και να κάνουν εκτιμήσεις από τη γραφική της παράσταση.	Μπορούν να χρησιμοποιήσουν τον τύπο μιας συνάρτησης με πολλαπλό τύπο και να κάνουν εκτιμήσεις από τη γραφική της παράσταση αλλά αδυνατούν να βρουν τις συγκεκριμένες αναπαραστάσεις οι ίδιοι. Επίσης, δυσκολεύονται στη σύνδεση μεταξύ των δύο αναπαραστάσεων.	Βρίσκουν με υποστήριξη τον τύπο της συνάρτησης και σχεδιάζουν τη γραφική της παράσταση χωρίς να συνδέουν κοινά χαρακτηριστικά στις δύο αναπαραστάσεις.	Βρίσκουν τον τύπο της συνάρτησης και κατασκευάζουν τη γραφική της παράσταση. Έχουν επίγνωση των πλεονεκτημάτων και μειονεκτημάτων της κάθε αναπαράστασης και τα αξιοποιούν ανάλογα με το ερώτημα.

**Πίνακας 13 Εργαλείο αξιολόγησης κοινωνικοπολιτισμικών πρακτικών με εστίαση στον μαθητή**

1<sup>ο</sup> παράδειγμα

Κοινωνικοπολιτισμικές πρακτικές: γνωστικά και κοινωνικο-πολιτισμικά στοιχεία της ανθρώπινης (νοητικής και φυσικής) δράσης και δραστηριότητας				
Κατηγορίες	Επίπεδο 1	Επίπεδο 2	Επίπεδο 3	Επίπεδο 4
		<b>Ο μαθητής:</b>		
Ερμηνεία καταστάσεων του φυσικού και κοινωνικού περιβάλλοντος αξιοποιώντας τα μαθηματικά	Ελάχιστη έως μηδενική πρόοδος στην αξιοποίηση των μαθηματικών για την ερμηνεία καταστάσεων του φυσικού κόσμου	Περιορισμένη πρόοδος στην αξιοποίηση των μαθηματικών για την ερμηνεία καταστάσεων του φυσικού κόσμου	Μερική πρόοδος στην αξιοποίηση των μαθηματικών για την ερμηνεία καταστάσεων του φυσικού κόσμου	Πλήρης επίτευξη στην αξιοποίηση των μαθηματικών για την ερμηνεία καταστάσεων του φυσικού κόσμου
Αυτοπεποίθηση και επιμονή στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων	Ελάχιστη έως μηδενική αυτοπεποίθηση και επιμονή στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων	Περιορισμένη αυτοπεποίθηση και επιμονή στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων	Μερική αυτοπεποίθηση και επιμονή στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων	Πλήρης αυτοπεποίθηση και επιμονή στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων
Διερεύνηση προβλημάτων	Ελάχιστη έως μηδενική διερεύνηση	Περιορισμένη διερεύνηση	Μερική διερεύνηση	Πλήρης διερεύνηση
Συνεργασία και αλληλεπίδραση στην αντιμετώπιση μαθηματικών έργων	Ελάχιστη έως μηδενική συνεργασία και αλληλεπίδραση	Περιορισμένη συνεργασία και αλληλεπίδραση	Μερική συνεργασία και αλληλεπίδραση	Πλήρης συνεργασία και αλληλεπίδραση
Αναγνώριση της αλληλεπίδρασης των μαθηματικών και της πολιτισμικής εξέλιξης	Ελάχιστη έως μηδενική αναγνώριση	Περιορισμένη αναγνώριση	Μερική αναγνώριση	Πλήρης αναγνώριση



**Πίνακας 14 Εργαλείο αξιολόγησης κοινωνικοπολιτισμικών πρακτικών με εστίαση στον μαθητή**

2<sup>ο</sup> παράδειγμα

<b>Κοινωνικοπολιτισμικές πρακτικές:</b> γνωστικά και κοινωνικο-πολιτισμικά στοιχεία της ανθρώπινης (νοητικής και φυσικής) δράσης και δραστηριότητας				
<b>Κατηγορίες</b>	<b>Επίπεδο 1</b>	<b>Επίπεδο 2</b>	<b>Επίπεδο 3</b>	<b>Επίπεδο 4</b>
	<b>Ο μαθητής:</b>			
Ερμηνεία καταστάσεων στον προσωπικό, εργασιακό και ευρύτερα κοινωνικό βίο, χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά	Ελάχιστη έως μηδενική πρόοδος	Περιορισμένη πρόοδος	Μερική πρόοδος	Πλήρης επίτευξη
Κριτική επίγνωση του τρόπου με τον οποίο τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται στις κοινωνικές, περιβαλλοντικές, πολιτισμικές και οικονομικές σχέσεις	Ελάχιστη έως μηδενική πρόοδος	Περιορισμένη πρόοδος	Μερική πρόοδος	Πλήρης πρόοδος
Απόδοση αξίας στις ιδέες των άλλων, επιχειρηματολογία και λήψη αποφάσεων που στηρίζονται στον διάλογο και τη διαπραγμάτευση	Ελάχιστη έως μηδενική πρόοδος	Περιορισμένη πρόοδος	Μερική πρόοδος	Πλήρης πρόοδος
Κατανόηση της διαλεκτικής σχέσης ανάμεσα στη ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και του πολιτισμού, καθώς και την αξία της για την ανθρώπινη δραστηριότητα διαχρονικά	Ελάχιστη έως μηδενική πρόοδος	Περιορισμένη πρόοδος	Μερική πρόοδος	Πλήρης πρόοδος
Ανάλυση, ερμηνεία, χρήση των μαθηματικών σε μια ποικιλία ενδο- και εξω-μαθηματικών καταστάσεων	Ελάχιστη έως μηδενική πρόοδος	Περιορισμένη πρόοδος	Μερική πρόοδος	Πλήρης πρόοδος

## Παράδειγμα εργαλείου αξιολόγησης κοινωνικο-πολιτισμικών πρακτικών

Στη συνέχεια παρατίθεται ένα έργο με το οποίο δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να αξιοποιήσουν τα μαθηματικά στην *κριτική ερμηνεία πραγματικών καταστάσεων*.

### Καταθέσεις και δάνεια

Η Λάιλα έχει ένα μικρό εμπορικό κατάστημα και χρειάζεται κεφάλαιο κίνησης. Πήρε λοιπόν δάνειο 10.000 ευρώ από την Τράπεζα με επιτόκιο 5% για ένα έτος<sup>5</sup>.

Η Μαρία και ο σύζυγός της αποταμιεύουν κάποια χρήματα από την εργασία τους και καταθέτουν 10.000 ευρώ στην Τράπεζα με επιτόκιο 0,2%.

Πόσα χρήματα θα επιστρέψει η Λάιλα στην Τράπεζα σε έναν χρόνο; Πόσα χρήματα θα επιστρέψει η Τράπεζα στη Μαρία μετά από έναν χρόνο;

Πόσα χρήματα θα επιστρέψει η Λάιλα στην Τράπεζα και η Τράπεζα στη Μαρία μετά από δέκα χρόνια, αν κάθε χρόνο το ποσό ανατοκίζεται;

Πόσα χρήματα κερδίζει η Τράπεζα σε έναν χρόνο; Πόσα κερδίζει σε έναν χρόνο, αν υπάρχουν 10.000 τέτοια ζευγάρια (σαν τη Λάιλα και τη Μαρία); Πόσα κερδίζει σε 10 χρόνια;

Συζητήστε στην ομάδα σας και σκεφτείτε τι θα θέλατε να αλλάξει, αν ήσασταν στη θέση της Λάιλας, στη θέση της Μαρίας ή στη θέση της Τράπεζας.

(Πηγές: Τα επιτόκια είναι στρογγυλοποιήσεις των επιτοκίων καταθέσεων και δανείων που αναφέρονται στο Δελτίο Τύπου της Τράπεζας της Ελλάδος στις 31/3/2021. Επίσης, τον Δεκέμβριο του 2020 υπήρχαν επιχειρηματικά δάνεια ύψους περίπου 110 δις ευρώ, το 30% των οποίων ήταν μη εξυπηρετούμενα).

Για την αξιολόγηση του δείκτη/ κριτηρίου “*κριτική ερμηνεία πραγματικών καταστάσεων*” θεωρείται ότι οι μαθητές στο πλαίσιο της συζήτησης στην ομάδα τους έχουν προχωρήσει σε σημαντικό βαθμό το υπολογιστικό μέρος του μαθηματικού έργου και η συζήτηση επικεντρώνεται στο τελευταίο μέρος.

<sup>5</sup> Το επιτόκιο χρηματοδοτήσεων εξαρτάται: από την επιχείρηση (μικρή-μεγάλη) και από τον πιστοληπτικό κίνδυνο που αναλαμβάνει η Τράπεζα (είναι συνάρτηση των καλύψεων/εξασφαλίσεων που αναλαμβάνει η Τράπεζα ως εγγύηση του δανείου).

Τα παραπάνω επηρεάζουν το επιτόκιο χρηματοδότησης. Σε αυτό ενυπάρχει και ένα 0,12% που είναι η εισφορά καταθέσεων (υπέρ δημοσίου)/ “φόρος επιτοκίου”.

Στο πρόβλημα “Καταθέσεις και δάνεια”, ο τρόπος υπολογισμού του εκτοκισμού που χρησιμοποιεί η Τράπεζα στα δάνεια δεν έχει ληφθεί υπόψη

**Με σχόλια [H1]:** Το επιτόκιο χρηματοδοτήσεων εξαρτάται:

- από την επιχείρηση (μικρή-μεγάλη)
- από τον πιστοληπτικό κίνδυνο που αναλαμβάνει η τράπεζα (είναι συνάρτηση των καλύψεων/εξασφαλίσεων που αναλαμβάνει η τράπεζα ως εγγύηση του δανείου)

Τα παραπάνω επηρεάζουν το επιτόκιο χρηματοδότησης

Σε αυτό υπάρχει και ένα 0,12% που είναι η εισφορά καταθέσεων (υπέρ δημοσίου)/ φόρος επιτοκίου

Το επιτόκιο καταθέσεων:

- είναι ακόμη πιο χαμηλό (λιγότερο από 0.1 για το ποσό των 10.000 ευρώ)

Δεν βάλουμε διάρκεια δανείου

Γενικά:

- Το κεφάλαιο κίνησης μπορεί να είναι 6/μηνες ή 8/μηνες ή 12/μηνες ανακύκλισης ή να έχει μονιμότερο χαρακτήρα

(Επίσης, ο τρόπος υπολογισμού του εκτοκισμού που χρησιμοποιεί η τράπεζα στα δάνεια δεν έχει ληφθεί υπόψη)

Πίνακας 15 Εργαλείο αξιολόγησης της κριτικής ερμηνείας πραγματικών καταστάσεων από τον μαθητή

Κατηγορία	Επίπεδο 1	Επίπεδο 2	Επίπεδο 3	Επίπεδο 4
Οι μαθητές:				
<i>Αξιοποίηση των μαθηματικών στην κριτική ερμηνεία πραγματικών καταστάσεων</i>	Αδυνατούν να συνδέσουν τα αποτελέσματα του υπολογιστικού μέρους του έργου με τις συνέπειές τους στον ρόλο και τη λειτουργία των χρηματοπιστωτικών πολιτικών στον κοινωνικό και οικονομικό βίο.	Αποδίδουν στοιχειώδεις ερμηνείες για τη λειτουργία των χρηματοπιστωτικών πολιτικών στον κοινωνικό και οικονομικό βίο και αναγνωρίζουν κάποιες από τις συνέπειές τους με βάση τα δεδομένα και τη μαθηματική τους επεξεργασία.	Εκτός από όσα κατοχυρώνονται στο προηγούμενο επίπεδο επιπλέον αξιοποιούν τη μαθηματική επεξεργασία των δεδομένων, καθώς και ευρύτερες γνώσεις τους για να ερμηνεύσουν τον ρόλο του χρηματοπιστωτικού συστήματος αναγνωρίζοντας ότι η λειτουργία του βασίζεται σε ένα πλέγμα αλληλοσυγκρουόμενων συμφερόντων με καθοριστικό τον ρόλο της εξουσίας.	Εκτός από όσα κατοχυρώνονται στο προηγούμενο επίπεδο ανταλλάσσουν επιχειρήματα για τον ρόλο και την αναγκαιότητα των χρηματοπιστωτικών οργανισμών δίνοντας ερμηνείες για φαινόμενα της πολιτικής συγκυρίας.

### Παράδειγμα εργαλείου αξιολόγησης κοινωνικο-συναισθηματικών πρακτικών με εστίαση στον μαθητή

---

Μια από τις κοινωνικο-συναισθηματικές πρακτικές που λαμβάνονται υπόψη στο Πρόγραμμα Σπουδών των μαθηματικών είναι η καλλιέργεια και η αξιοποίηση δεξιοτήτων που υποστηρίζουν τη θετική αλληλεπίδραση με τους άλλους για την αντιμετώπιση μαθηματικών έργων, με σεβασμό στη διαφορετικότητα της σκέψης και της έκφρασης.

Στη συνέχεια παρατίθενται:

(α) ένα σενάριο με στόχο να αναδειχθεί η αλληλεπίδραση στην τάξη των μαθηματικών, και

(β) ένα παράδειγμα αξιολόγησης της καλλιέργειας και αξιοποίησης δεξιοτήτων αλληλεπίδρασης στην τάξη των μαθηματικών

#### (α) Σενάριο

---

Ένας εκπαιδευτικός σε μια τάξη της Γ΄ Γυμνασίου καλεί τους μαθητές να επιλύσουν την ακόλουθη άσκηση:

“Αν  $x=2,8$  και  $y=1,2$ , υπολογίστε την παράσταση:  $3y^2+5x-3y(y-2)-4x$ .”

Αφού οι μαθητές ασχοληθούν με την άσκηση για λίγη ώρα, τους ζητά να μοιραστούν τις λύσεις τους με τους συμμαθητές τους και τον ίδιο.

Ακολουθεί ο παρακάτω διάλογος:

**Εκπαιδευτικός:** Ωραία, για να δούμε πώς μπορούμε να λύσουμε αυτή την άσκηση. Ποιος θέλει να μας πει τι έκανε;

Η Ειρήνη και ο Κωνσταντίνος σηκώνουν ταυτόχρονα τα χέρια τους.

**Ε:** Για πες μας Ειρήνη;

**Ειρήνη:** Βρήκα 10.

**Ε:** Και πώς βρήκες την τιμή 10;

**Ειρήνη:** Αντικατέστησα στην παράσταση τις τιμές 2,8 και 1,2. Μου πήρε αρκετή ώρα.

**Ε:** Πολύ ωραία Ειρήνη! [Σε όλη την τάξη] Συμφωνείτε οι υπόλοιποι;

**Κωνσταντίνος:** Εγώ βρήκα την ίδια απάντηση αλλά το έκανα πολύ πιο γρήγορα.

**Ε:** Για πες μας ...

**Κωνσταντίνος:** Απλοποίησα την παράσταση πριν αντικαταστήσω τις τιμές και κατέληξα σε μια απλούστερη παράσταση  $x+6y$ . Μετά αντικατέστησα στην καινούρια παράσταση τις τιμές 2,8 και 1,2 και βρήκα 10. Ήταν πολύ εύκολο!

**Ειρήνη:** Δεν μου αρέσει η απλοποίηση. Προτιμώ τον δικό μου τρόπο.

**Κωνσταντίνος:** Η λύση σου παίρνει πολύ χρόνο, η δική μου λύση είναι καλύτερη. Δεν μπορείς να δουλέψεις με γράμματα γιατί είσαι χαζή και δεν καταλαβαίνεις τα μαθηματικά, αλλά τι να περιμένει κάποιος από εσένα;

(β) Παράδειγμα αξιολόγησης της καλλιέργειας και αξιοποίησης δεξιοτήτων αλληλεπίδρασης στην τάξη των μαθηματικών

Πίνακας 16 Αξιολόγηση της καλλιέργειας και αξιοποίησης δεξιοτήτων αλληλεπίδρασης στην τάξη των μαθηματικών

Κατηγορία	Επίπεδο 1	Επίπεδο 2	Επίπεδο 3	Επίπεδο 4
	Η τάξη:			
Καλλιέργεια και αξιοποίηση δεξιοτήτων που υποστηρίζουν τη θετική αλληλεπίδραση με άλλους για την αντιμετώπιση μαθηματικών έργων σεβόμενοι τη διαφορετικότητα στη σκέψη και την έκφραση	Η Ειρήνη δεν υποστήριξε περισσότερο τον εαυτό της. Κάποιοι μαθητές γέλασαν όταν μιλούσε ο Κωνσταντίνος και κανένας μαθητής δεν υπερασπίστηκε την Ειρήνη. Ο εκπαιδευτικός συμφώνησε με τον Κωνσταντίνο στη μαθηματική προσέγγιση του ζητήματος και δεν σχολίασε την επικριτική συμπεριφορά του.	Κανένας μαθητής δεν γέλασε/ δεν επικρότησε με τη στάση του τον Κωνσταντίνο και κάποιοι του είπαν να προσέχει πώς μιλάει. Η Ειρήνη θύμισε στον Κωνσταντίνο ότι δεν είναι σε όλα τα μαθήματα τόσο καλός όσο στα μαθηματικά και ότι δεν θα του άρεσε να του συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο. Ο εκπαιδευτικός συμφώνησε με την Ειρήνη για το θέμα της συμπεριφοράς και με τον Κωνσταντίνο για τη μαθηματική προσέγγιση του ζητήματος.	Η στάση της τάξης έκανε τον Κωνσταντίνο να αναγνωρίσει το λάθος στη συμπεριφορά του και την Ειρήνη να αναγνωρίσει τις δυνατότητες της μεθόδου που πρότεινε ο Κωνσταντίνος.	Εκτός από όσα αναφέρονται στο προηγούμενο επίπεδο δόθηκε η ευκαιρία στον εκπαιδευτικό να επισημάνει την αποτελεσματικότητα στην ευελιξία χρήσης διαφορετικών μεθόδων. Έτσι ζήτησε από τους μαθητές να βρουν κάποια αντίστοιχη παράσταση και κατάλληλους αριθμούς $x, y$ , σύμφωνα με την προσέγγιση της Ειρήνης που δίνει πιο γρήγορα αποτέλεσμα σε σχέση με την προσέγγιση του Κωνσταντίνου.

## Reporting (ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ)

Πίνακας 17

Κατηγορίες	Επίπεδο 1	Επίπεδο 2	Επίπεδο 3	Επίπεδο 4
<b>Γνώση και κατανόηση:</b> Το περιεχόμενο που αποκτάται σε κάθε θεματική ενότητα (γνώση) και η αντίληψη του νοήματος και της σημασίας της (κατανόηση)				
	Ο μαθητής:			
<b>Γνώση του περιεχομένου</b> (προτάσεις, όροι, διαδικασίες, δεξιότητες)	επιδεικνύει περιορισμένη γνώση του περιεχομένου	επιδεικνύει μερική γνώση του περιεχομένου	επιδεικνύει σημαντική γνώση του περιεχομένου	επιδεικνύει πλήρη γνώση του περιεχομένου
<b>Κατανόηση των μαθηματικών εννοιών</b>	επιδεικνύει περιορισμένη <b>κατανόηση</b> των εννοιών	επιδεικνύει μερική <b>κατανόηση</b> των εννοιών	επιδεικνύει σημαντική <b>κατανόηση</b> των εννοιών	επιδεικνύει πλήρη <b>κατανόηση</b> των εννοιών
<b>Σκέψη:</b> Η ανάπτυξη κριτικών και δημιουργικών δεξιοτήτων και διεργασιών				
	Ο μαθητής:			
<b>Ανάπτυξη δεξιοτήτων σχεδιασμού</b> - κατανόησης προβλήματος -εκπόνησης σχεδίου επίλυσης προβλήματος	ενεργοποιεί δεξιότητες σχεδιασμού με περιορισμένη αποτελεσματικότητα	ενεργοποιεί δεξιότητες σχεδιασμού με μερική αποτελεσματικότητα	ενεργοποιεί δεξιότητες σχεδιασμού με σημαντική αποτελεσματικότητα	ενεργοποιεί δεξιότητες σχεδιασμού με υψηλού βαθμού αποτελεσματικότητα
<b>Χρήση δεξιοτήτων επεξεργασίας</b> -πραγματοποίηση ενός σχεδίου (συλλογή δεδομένων, διατύπωση ερωτήσεων, δοκιμές, αναθεώρηση, μοντελοποίηση, επίλυση, συμπεράσματα) - Αναδρομή στη λύση (αξιολόγηση του συλλογισμού, αξιοπιστία επιχειρημάτων, αναστοχασμός)	χρησιμοποιεί δεξιότητες επεξεργασίας με περιορισμένη αποτελεσματικότητα	χρησιμοποιεί δεξιότητες επεξεργασίας με μερική αποτελεσματικότητα	χρησιμοποιεί δεξιότητες επεξεργασίας με σημαντική αποτελεσματικότητα	χρησιμοποιεί δεξιότητες επεξεργασίας με υψηλού βαθμού αποτελεσματικότητα
<b>Αξιοποίηση διεργασιών κριτικής/δημιουργικής σκέψης</b> (π.χ. επίλυση προβλήματος, διερεύνηση)	αξιοποιεί κριτική/ δημιουργική σκέψη με περιορισμένη αποτελεσματικότητα	αξιοποιεί κριτική/ δημιουργική σκέψη με μερική αποτελεσματικότητα	αξιοποιεί κριτική/ δημιουργική σκέψη με σημαντική αποτελεσματικότητα	αξιοποιεί κριτική/ δημιουργική σκέψη με υψηλού βαθμού αποτελεσματικότητα

Πίνακας 18

Κατηγορίες	Επίπεδο 1	Επίπεδο 2	Επίπεδο 3	Επίπεδο 4
<b>Επικοινωνία:</b> Η απόδοση του νοήματος με διάφορες μορφές				
	Ο μαθητής:			
<b>Έκφραση και οργάνωση των μαθηματικών ιδεών και της μαθηματικής σκέψης</b> (σαφήνεια της έκφρασης, λογική οργάνωση) <b>χρήση προφορικών, οπτικών και γραπτών μορφών</b> (γραφικές, δυναμικές, αριθμητικές, αλγεβρικές μορφές)	εκφράζει και οργανώνει τη μαθηματική σκέψη με περιορισμένη αποτελεσματικότητα	εκφράζει και οργανώνει τη μαθηματική σκέψη με μερική αποτελεσματικότητα	εκφράζει και οργανώνει τη μαθηματική σκέψη με σημαντική αποτελεσματικότητα	εκφράζει και οργανώνει τη μαθηματική σκέψη με υψηλού βαθμού αποτελεσματικότητα
<b>Επικοινωνία με διαφορετικούς αποδέκτες</b> (συμμαθητές, εκπαιδευτικούς) <b>και σκοπούς</b> (παρουσίαση δεδομένων, αιτιολόγηση μιας λύσης, έκφραση μαθηματικού επιχειρήματος) <b>σε προφορικές, οπτικές και γραπτές μορφές</b>	επικοινωνεί για διαφορετικούς αποδέκτες και σκοπούς με περιορισμένη αποτελεσματικότητα	επικοινωνεί για διαφορετικούς αποδέκτες και σκοπούς με μερική αποτελεσματικότητα	επικοινωνεί για διαφορετικούς αποδέκτες και σκοπούς με αξιοσημείωτη αποτελεσματικότητα	επικοινωνεί για διαφορετικούς αποδέκτες και σκοπούς με υψηλού επιπέδου αποτελεσματικότητα
<b>Χρήση συμβάσεων, λεξιλογίου, ορολογίας των μαθηματικών</b> (π.χ. όρους, σύμβολα) <b>σε προφορικές, οπτικές και γραπτές μορφές</b>	χρησιμοποιεί συμβάσεις και ορολογία των μαθηματικών με περιορισμένη αποτελεσματικότητα	χρησιμοποιεί συμβάσεις και ορολογία των μαθηματικών με μερική αποτελεσματικότητα	χρησιμοποιεί συμβάσεις και ορολογία των μαθηματικών με σημαντική αποτελεσματικότητα	χρησιμοποιεί συμβάσεις και ορολογία των μαθηματικών με υψηλού επιπέδου αποτελεσματικότητα
<b>Αξιοποίηση:</b> της γνώσης και των δεξιοτήτων στη δημιουργία συνδέσεων εντός ενός πλαισίου και μεταξύ διαφορετικών πλαισίων.				
	Ο μαθητής:			
<b>Αξιοποίηση γνώσεων και δεξιοτήτων σε οικεία πλαίσια</b>	αξιοποιεί γνώσεις και δεξιότητες σε οικεία πλαίσια με περιορισμένη αποτελεσματικότητα	αξιοποιεί γνώσεις και δεξιότητες σε οικεία πλαίσια με μερική αποτελεσματικότητα	αξιοποιεί γνώσεις και δεξιότητες σε οικεία πλαίσια με σημαντική αποτελεσματικότητα	αξιοποιεί γνώσεις και δεξιότητες σε οικεία πλαίσια με υψηλού βαθμού αποτελεσματικότητα



<b>Αξιοποίηση γνώσεων και δεξιοτήτων σε νέα πλαίσια</b>	αξιοποιεί γνώσεις και δεξιότητες σε νέα πλαίσια με περιορισμένη αποτελεσματικότητα	αξιοποιεί γνώσεις και δεξιότητες σε νέα πλαίσια με μερική αποτελεσματικότητα	αξιοποιεί γνώσεις και δεξιότητες σε νέα πλαίσια με σημαντική αποτελεσματικότητα	Αξιοποιεί γνώσεις και δεξιότητες σε νέα πλαίσια με υψηλού βαθμού αποτελεσματικότητα
<b>Δημιουργία συνδέσεων εντός ενός πλαισίου και μεταξύ διαφορετικών πλαισίων (π.χ. συνδέσεις μεταξύ εννοιών, αναπαραστάσεων και μορφών εντός των μαθηματικών και συνδέσεις που περιλαμβάνουν την αξιοποίηση προηγούμενων γνώσεων και εμπειριών, συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών και άλλων γνωστικών περιοχών, όπως και του πραγματικού κόσμου)</b>	δημιουργεί συνδέσεις εντός πλαισίου και μεταξύ διαφορετικών πλαισίων με περιορισμένη αποτελεσματικότητα	δημιουργεί συνδέσεις εντός πλαισίου και μεταξύ διαφορετικών πλαισίων με μερική αποτελεσματικότητα	δημιουργεί συνδέσεις εντός πλαισίου και μεταξύ διαφορετικών πλαισίων με σημαντική αποτελεσματικότητα	δημιουργεί συνδέσεις εντός πλαισίου και μεταξύ διαφορετικών πλαισίων με υψηλού βαθμού αποτελεσματικότητα

## Βιβλιογραφικές αναφορές

Με σχόλια [H3]: APA 7<sup>th</sup> edition

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions*. National Council of Teachers of Mathematics.

[https://curriculum.gov.mt/en/Assessment/Assessment-of-Learning/Documents/assessment\\_of\\_for\\_as\\_learning.pdf](https://curriculum.gov.mt/en/Assessment/Assessment-of-Learning/Documents/assessment_of_for_as_learning.pdf)

ΙΕΠ 2011. Περιγραφική αξιολόγηση

ΙΕΠ 2017. Περιγραφική αξιολόγηση: Θεωρητικό Πλαίσιο και Μεθοδολογία

Υπουργείο παιδείας και Πολιτισμού 2018: Ενιαίο σύστημα αξιολόγησης μαθητή/μαθήτριας

Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο- Μια Εξελικτική Διδασκαλία- J.A. Van De Walle

Consortium for Policy Research in Education (CPRE 2011)

Σύγχρονες μορφές εκπαιδευτικής αξιολόγησης με αξιοποίηση εκπαιδευτικών τεχνολογιών. ([www.Kallipos.gr](http://www.Kallipos.gr))

Κατσαρού, Ε. & Δεδούλη Μ. (2008). Επimόρφωση και αξιολόγηση στο χώρο της εκπαίδευσης. Αθήνα: ΥΠΕΠΑΙΘ- Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Armstrong, C. (2011) The impact of self and peer perceptual differences on student social behavior. *Journal of educational Psychology*.

Boud D., Lawson R. & Thomson D. (2013) Does students engagement in shelf assessment calibrate their judgment over time? *Assessment and Evaluation in Higher Education*.

Clarke, D.M. (1997) The changing role of the mathematics teacher. *Journal for Research in mathematics Education*.

Deakin-Crick, R., Sebba, J., Harlen W., Guoxing Y. & Lawon, H (2005). Systematic review of research evidence of the impact on students of shelf-and peer- assessment. Protocol. In *Research Evidence in Education Library*. London EPPICentre, Social Science Research Unit, Institute of Education, University of London.

Gouli E., Gogoulou A. & Grigoriadou M. (2006). Supporting Self-Peer and Collaborative Assessment through a Web-based environment.

Lave , J., Wegner, E. (1991). *Situated learning: legitimate peripheral participation*. Cambridge University press.

Roberts T. 2006, *Self, Peer and Group Assessment in E-Learning*. Idea Group Inc.

Trigueros, M., Lozano, M.D.,& Sandoval, I. (2014). Integrating technology in the primary school mathematics classroom: The role of the teacher. Springer, Dordrecht.

Willey K. & Gardner A. 2009. Using self and Peer Assessment to engage students and increase their desire to learn. 37<sup>th</sup> Annual Conference of the European association of engineering Education (SEFI) July 1-4-2009 Rotterdam.

Handley, K. & Cox, B. 2007. Beyond model answers: Learners perceptions of self-assessment materials in e-learning applications. ALT-J: Research in Learning Technology.

Wolffenspergera, Y & Patkina, D. (2013): Self –Assessment of Self –Assessment in a process of co-teaching. Assessment and Evaluation in Higher Education.