Η ΠΟΡΕΙΑ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΤΟΥ ΣΥΛΛΟΓΙΚΟΥ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΥ ΜΙΑΣ ΟΜΑΔΑΣ ΜΑΘΗΤΩΝ

Χρυσαυγή Τριανταφύλλου*, Διονυσία Μπακογιάννη* & Γιώργος Κόσυβας**

chrtriantaf@math.uoa.gr, dbakogianni@math.uoa.gr & gkosyvas@gmail.com

*Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ, **Γραφείο Συντονιστή Εκπαίδευσης Ελληνικής Πρεσβείας Λονδίνου

Η παρούσα εργασία εξετάζει την πορεία διαμόρφωσης του συλλογικού συλλογισμού μιας ομάδας 5 μαθητών Β΄ Γυμνασίου κατά τη διαπραγμάτευση του νοήματος σε ένα αυθεντικό πρόβλημα μαθηματικής μοντελοποίησης. Το θεωρητικό και αναλυτικό μας πλαίσιο είναι η θεωρία των κοινοτήτων πρακτικής (Wenger, 1998) και οι δύο διαδικασίες που αυτή ενσωματώνει, την υποστασιοποίηση και τον τρόπο συμμετοχής του κάθε μαθητή σε σχέση με τη συνεισφορά του στην εξέλιξη του συλλογικού συλλογισμού της ομάδας. Σύμφωνα με τα ευρήματα της έρευνας φαίνεται ότι ο τρόπος συμμετοχής των μαθητών (α) εξαρτάται από το είδος της υποστασιοποίησης και (β) διαφοροποιείται στην πορεία διαμόρφωσης του συλλογικού συλλογισμού.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στις σύγχρονες επιστημολογικές, ψυχολογικές και κοινωνιολογικές θεωρίες έχει παρατηρηθεί μια μετακίνηση από θέσεις οι οποίες υιοθετούσαν πως η μάθηση είναι μια καθαρά ατομική διαδικασία προς θέσεις οι οποίες υποστηρίζουν ότι η μάθηση εμπεριέχει κοινωνικές και πολιτισμικές διαστάσεις (Sfard, 2008; Radford, 2008). Η μάθηση θεωρείται τώρα προϊόν συλλογικής δράσης και διαδικασία κοινωνικής και πολιτισμικής αλληλεπίδρασης. Σύμφωνα με την παραπάνω θεώρηση οι μαθητές αναπτύσσουν μαθηματικούς συλλογισμούς όταν συμμετέχουν σε κοινότητες συλλογικής συλλογιστικής και διερεύνησης όπως μπορεί να είναι η σχολική τάξη ή μια ομάδα μαθητών που αναλαμβάνει να λύσει κάποιο πρόβλημα (Kosyvas, 2016; Maaß & Artigue, 2013). Η συλλογική συλλογιστική θεωρείται μια μορφή διαλογικής συζήτησης στην οποία δυο ή περισσότερα άτομα μοιράζονται τις ιδέες τους, ζητούν διευκρινίσεις και πρόσθετες εξηγήσεις και επισημαίνουν ασυνέπειες ή άλλα λάθη στην επιχειρηματολογία των άλλων (Elbers, 2003; Krummheuer, 2007).

Σε προηγούμενη εργασία μας (Triantafillou, Bakogianni & Kosyvas, 2016) μελετήσαμε την εξέλιξη επίλυσης ενός προβλήματος μοντελοποίησης σε 4 ομάδες μαθητών (2 ομάδες Γυμνασίου και 2 ομάδες Λυκείου) εστιάζοντας σε εντάσεις (tensions), δηλαδή αντιθέσεις και διαφωνίες μεταξύ των μελών μιας ομάδας, κατά τη διαδικασία μοντελοποίησης. Διατηρώντας την κοινωνική μας θεωρητική αντίληψη, αυτή τη φορά εστιάζουμε στην εξέλιξη του συλλογικού συλλογισμού μιας από τις ομάδες του Γυμνασίου. Συγκεκριμένα, εξετάζουμε τις κοινές δράσεις διαπραγμάτευσης του νοήματος (negotiation of meaning) της ομάδας αναλύοντας τις δύο διαδικασίες που αυτή ενσωματώνει, δηλαδή τη διαδικασία της συμμετοχής (participation) και τη διαδικασία της υποστασιοποίησης (reification) σύμφωνα το φακό της θεωρίας των κοινοτήτων πρακτικής (Wenger, 1998).

Το ερευνητικό μας ερώτημα είναι: Πώς αναπτύσσεται ο συλλογικός συλλογισμός μιας ομάδας μαθητών Γυμνασίου μέσα από τη διαπραγμάτευση του νοήματος ενός προβλήματος μαθηματικής μοντελοποίησης.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η τελευταία θεώρηση της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών ως κοινωνικο-πολιτισμικό φαινόμενο, θέλει τους μαθητές να ενισχύουν τη συμμετοχή τους στη διαδικασία της μάθησης μέσα από συνεργατικά μοντέλα που ενθαρρύνουν το συλλογικό συλλογισμό και τη συλλογική επιχειρηματολογία (Lave & Wenger, 1991).

Η μελέτη της συλλογικής επιχειρηματολογίας που αναπτύσσεται σε μια ομάδα μαθητών έχει ερευνηθεί κυρίως μέσα από τη μελέτη του τρόπου συμμετοχής των μαθητών, την ανάλυση του τρόπου επιχειρηματολογίας της ομάδας αλλά και τα στοιχεία που διαμορφώνουν μια ποιοτική συνεργασία. Συγκεκριμένα, οι Tatsis και Koleza (2006) ανέδειξαν τους εξής ρόλους συμμετεχόντων σε μια ομάδα: τον *κυρίαρχο εμπνευστή* ως το άτομο που προτείνει πολλά πράγματα αλλά δίνει ελάχιστες εξηγήσεις, τον *συνεργατικό εμπνευστή* ως το άτομο που προτείνει και εξηγεί τις ιδέες του, τον *συνεργατικό αξιολογητή*, αυτόν που συνεισφέρει με κριτικό τρόπο αντιπροτείνοντας τις δικές του ιδέες, και τον *ανασφαλή διαπραγματευτή*, αυτόν που δεν συνεισφέρει κάτι στη συζήτηση. Ο Krummheuer (2007) μελέτησε το ρόλο του συμμετέχοντα στις συζητήσεις της τάξης ως προς το βαθμό της αυτονομίας του και ως προς τη δομή των επιχειρημάτων του. Επίσης, διέκρινε "ομαλές" και "συμπυκνωμένες" περιόδους αλληλεπίδρασης με τις δεύτερες να διακρίνονται από τις πρώτες ως προς την πολυπλοκότητα και την αυθεντικότητα της επιχειρηματολογίας, την διαδοχή των συλλογισμών και τη συμμετοχή των ομιλητών στην επιχειρηματολογία θεωρώντας τις δεύτερες ως τη βελτιστοποίηση των κοινωνικών συνθηκών για τη μάθηση με συμμετοχή. Ο Sawyer (2007) υποστήριξε ότι η δημιουργική συνεργασία μεταξύ των μελών μιας ομάδας υποστηρίζεται από ανοικτού τύπου δραστηριότητες και ο Mercer (1996) ισχυρίστηκε ότι όλες οι συζητήσεις των μαθητών δεν διατηρούν πάντα τα ίδια ποιοτικά χαρακτηριστικά διακρίνοντάς τες σε συζητήσεις αθροιστικού (χωρίς διαπραγμάτευση) και διερευνητικού τύπου (με συνεχή επαναδιαπραγμάτευση του νοήματος).

Στην παρούσα έρευνα εξετάζουμε την ανάπτυξη του συλλογικού συλλογισμού υπό το πρίσμα της θεωρίας των κοινοτήτων πρακτικής (Wenger, 1998). Συγκεκριμένα, εστιάζουμε στην έννοια της διαπραγμάτευσης του νοήματος την οποία αναλύουμε με βάση τον τρόπο συμμετοχής των μελών της ομάδας και τη διαδικασία της υποστασιοποίησης. Σύμφωνα με τον Wenger (1998) η συμμετοχή έγκειται στην «κοινωνική εμπειρία ύπαρξης στον κόσμο με όρους ιδιότητας μέλους και ενεργού εμπλοκής σε κοινωνικές δράσεις» (σελ. 55) και αφορά για παράδειγμα την αλληλεπίδραση με άλλους, τη δράση μέσα στην κοινότητα, την αμοιβαία συνεισφορά πόρων κ. ά. Από την άλλη η υποστασιοποίηση έγκειται στη «διαδικασία σχηματοποίησης της εμπειρίας μας μέσα από την παραγωγή αντικειμένων που δίνουν υπόσταση στην εν λόγω εμπειρία » (σελ. 57) και αφορά για παράδειγμα τα εργαλεία, τα τεκμήρια ή τα σημεία εστίασης της κοινότητας στη διαπραγμάτευση του νοήματος. Στην παρούσα εργασία προσεγγίζουμε τη διαπραγμάτευση της διαδικασίας μοντελοποίησης ενός αυθεντικού προβλήματος από μια ομάδα μαθητών ως δράση της κοινότητας πρακτικής αυτής της ομάδας.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η δραστηριότητα

Το πρόβλημα αφορούσε την τοποθέτηση φωτοβολταϊκών (φβ) στοιχείων (πάνελ) στην οροφή ενός σπιτιού (http://www.mascil-project.eu/classroom-material). Η εκπαιδευτικός αφού παρουσίασε τη σημασία εγκατάστασης των φβ έδωσε στους μαθητές το παρακάτω πρόβλημα.

- μία επίπεδη ταράτσα που βλέπει στο Νότο έχει σχήμα ορθογωνίου και διαστάσεις 13μ επί 9μ.
- Τα φωτοβολταϊκά πάνελ (φβ) έχουν διαστάσεις 1,654μ. επί 0,993μ.
- Η γωνία κλίσης του κάθε φβ με την ταράτσα είναι 28^{o}.
- Πρακτικός κανόνας: Τα φβ τοποθετούνται σε σειρές και η κάθε σειρά απέχει από την επόμενη απόσταση διπλάσια από το ύψος του.

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον μέγιστο αριθμό φβ που μπορούμε να εγκαταστήσουμε στην ταράτσα.

Εικόνα 1: Το πρόβλημα και οι αναπαραστάσεις που δόθηκαν στους μαθητές.

Συμμετέχοντες και δεδομένα

Η δίωρη πειραματική διδασκαλία πραγματοποιήθηκε στη Β΄ Γυμνασίου. Η τάξη χωρίστηκε σε 5 ομάδες των 4-5 μαθητών. Δόθηκε στους μαθητές επαρκής χρόνος για να σκεφτούν και να γράψουν τη λύση του προβλήματος. Για τις ανάγκες της έρευνας, έγινε μαγνητοφώνηση κάποιων ομάδων και βιντεοσκόπηση της εισαγωγής καθώς και ορισμένων παρεμβάσεων της εκπαιδευτικού στην κάθε ομάδα. Στην παρούσα εργασία εστιάζουμε σε μια ομάδα 5μαθητών στην οποία παρουσιάστηκαν οι περισσότερες εντάσεις κατά τη διαμόρφωση του συλλογικού συλλογισμού της.

Ανάλυση των δεδομένων

Απομαγνητοφωνήσαμε τη συζήτηση της ομάδας, η οποία διήρκησε 40 λεπτά περίπου, και αναγνωρίσαμε 4 επεισόδια που αποτέλεσαν τη μονάδα ανάλυσής μας. Κάθε επεισόδιο αναφέρεται σε μια κοινή δράση της ομάδας κατά την επίλυση του προβλήματος. Οι συλλογισμοί των μαθητών αναλύθηκαν με βάση δύο άξονες: (i) το είδος της *υποστασιοποίησης* (δηλ. τα επί μέρους σημεία εστίασης της ομάδας σε σχέση με την επίλυση του προβλήματος) και (ii) τον *τρόπο συμμετοχής* του κάθε μαθητή (δηλ. τη συνεισφορά του στους συλλογισμούς της ομάδας). Αναλύσαμε τον τρόπο της συμμετοχής του κάθε μαθητή ακολουθώντας σε μεγάλο βαθμό την κατηγοριοποίηση των Tatsis και Koleza (2006). Συγκεκριμένα, αναγνωρίζουμε δύο κατηγορίες συμμετοχής: (iia) των μαθητών που συνεισφέρουν στη διαπραγμάτευση του νοήματος με συνεργατικό τρόπο (όπως ο *συνεργατικός εισηγητής* δηλ. το άτομο που προτείνει κάτι νέο και ταυτόχρονα εξηγεί την πρότασή του, ο *συνεργατικός διαπραγματευτής*, ο οποίος αξιολογεί την ιδέα του άλλου είτε εστιάζοντας σε σημαντικά για την περίπτωση σημεία είτε αντιπροτείνοντας τις δικές του ιδέες και ο *απλοϊκός διαπραγματευτής* δηλ. εκείνος που ζητά διαρκώς εξηγήσεις χωρίς να αντιπροτείνει κάτι) και (iib) αυτούς που δεν συνεισφέρουν με συνεργατικό τρόπο (όπως ο *κυρίαρχος εισηγητής* δηλ. το άτομο που προτείνει πολλά πράγματα, αλλά δίνει ελάχιστες εξηγήσεις διατηρώντας μια ανταγωνιστική στάση, ο *ανασφαλής συμμετέχων* δηλ. αυτός που είτε απλώς εκτελεί εντολές είτε προσπαθεί να κοινοποιήσει τη σκέψη του αλλά δεν την ολοκληρώνει και τον *μη συμμετέχοντα* δηλ. αυτόν που δεν συμμετέχει καθόλου στη συζήτηση). Τέλος, αναζητήσαμε πώς η σύνθεση των δύο αξόνων επηρέασε την πορεία διαμόρφωσης του συλλογικού συλλογισμού της ομάδας.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζεται μια συνοπτική περιγραφή των υποστασιοποιήσεων όπως αυτές εμφανίστηκαν χρονικά κατά τη διάρκεια των 4 επεισοδίων και της εξέλιξης των κοινωνικών ρόλων των μαθητών οι οποίοι συνεισέφεραν λόγω του συνεργατικού τους χαρακτήρα στην πορεία διαπραγμάτευσης της μοντελοποίησης του προβλήματος.

Όπως φαίνεται στο Πίνακα 1 το 1^{ο} επεισόδιο αφορά τον υπολογισμό του ωφέλιμου εμβαδού της ταράτσας.

ΥΠΟΣΤΑΣΙΟΠΟΙΗΣΕΙΣ **(σημεία εστίασης της ομάδας κατά τη διαπραγμάτευση της κοινής δράσης)**	**ΣΥΜΜΕΤΟΧΗ ΜΕ ΣΥΝΕΡΓΑΤΙΚΟ ΡΟΛΟ** **(τα μέλη που συνεισφέρουν στην διαπραγμάτευση του νοήματος με συνεργατικό τρόπο υποστηρίζοντας την συλλογική συλλογιστική της ομάδας)**
Επεισόδιο 1 [χρονική διάρκεια 9 λ.] *κοινή δράση της ομάδας είναι ο υπολογισμός του ωφέλιμου εμβαδού της ταράτσας*	
1α) Συσχέτιση των διαστάσεων της ταράτσας με τις διαστάσεις του φβ	M2, M4
1β) Συσχέτιση των διαστάσεων της ταράτσας με την απόσταση ασφαλείας	M2, M1
Επεισόδιο 2 [χρονική διάρκεια 2 λ.] *κοινή δράση της ομάδας είναι ο προσανατολισμός των φβ στο χώρο*	
2α) Αναγνώριση πιθανών τρόπων προσανατολισμού των φβ	M1, M2, M3, M4
2β) Κριτικός αναστοχασμός	M1, M3
Επεισόδιο 3 [χρονική διάρκεια 8 λ.] *κοινή δράση της ομάδας είναι ο υπολογισμός του συνολικού αριθμού των φβ*	
3α) Ανάδειξη της ανάγκης χρήσης τριγωνομετρικών λόγων	M1, M2, M3, M4, M5
3β) Τη δυνατότητα χρήσης του ΠΘ	M4, M1, M3
3γ) Τον υπολογισμό του ύψους	M2, M3
3δ) Τον υπολογισμό του συνολικού αριθμού των φβ	M1, M2
Επεισόδιο 4 [χρονική διάρκεια 20 λ.] *κοινή δράση της ομάδας είναι η επαναδιαπραγμάτευση του προβλήματος και η εύρεση τελικής λύσης*	
4α) Υπολογισμός των ωφέλιμων διαστάσεων της ταράτσας	M2, M4
4β) Τον υπολογισμό του ύψους	M2, M3
4γ) Την εφαρμογή του πρακτικού κανόνα	M4, M5
4δ) Τον υπολογισμό του συνολικού αριθμού των φβ	M1, M2, M5

Πίνακας 1: Πορεία διαμόρφωσης του συλλογικού συλλογισμού της ομάδας.

Στην υποστασιοποίηση 1α ο Μ1 συμμετέχει με ρόλο κυρίαρχου εισηγητή χωρίς να δικαιολογεί τις επιλογές του *(Μ1: Αφού σε μια σειρά φβ βάζουμε την απόσταση μεταξύ τους δύο φορές το ύψος του… οπότε αφαίρεσε 13 μείον 0,993. […] Γράψε 117-96,14. Μ4: Γιατί το κάνουμε αυτό δεν το χω καταλάβει. Μ1: Ξέρω γω!* Μ2: *Τετραγωνικά μέτρα δεν είναι αυτά;)*. Στην 1β υποστασιοποίηση ο Μ2 αντιπροτείνει στον Μ1 τον υπολογισμό του εμβαδού της ωφέλιμης ταράτσας αφαιρώντας 1μ από κάθε διάσταση (*Μ2: Όταν σου λέει ότι όλη η ταράτσα είναι 117, σωστά; Σου βγάζει το 0,5μ από εδώ πέρα … γράφει απόσταση ασφαλείας. Μ1: Α! Οπότε 9 μείον 0,5 8,5! Μ2: Όχι δεν είναι 0,5 γιατί το 9 είναι εδώ πέρα βγαίνει από αυτό εδώ πέρα και από αυτό εδώ πέρα ..οπότε πάει 8.)*. Τα εργαλεία διαπραγμάτευσης του Μ2 στην κοινή τους δράση παραπέμπουν στην αναπαράσταση του σπιτιού της εικόνας 1.

Σ’ αυτό το επεισόδιο παρατηρούμε τον Μ1 να μετατρέπεται από μη συνεργατικό μέλος (κυρίαρχο εισηγητή στην 1α) σε συνεργατικό διαπραγματευτή (στην 1β) ενώ ο Μ2 σε όλο το επεισόδιο έχει συνεργατικό ρόλο (ως συνεργατικός διαπραγματευτής) στην προσπάθειά του να πείσει τον Μ1 ότι οι διαστάσεις της ωφέλιμης ταράτσας είναι 12μ. και 8μ. Ο Μ4 διατηρεί συνεργατικό ρόλο (απλοϊκός διαπραγματευτής) και οι Μ3 και Μ5 μη συνεργατικό (ανασφαλών συμμετεχόντων). Το επεισόδιο λήγει όταν παρεμβαίνει η εκπαιδευτικός η οποία προσπαθεί να βοηθήσει τους μαθητές να οδηγηθούν στην εφαρμογή τριγωνομετρικών λόγων χωρίς να το εκφράζει ρητά.

Το 2ο επεισόδιο αφορά την κοινή δράση: ο προσανατολισμός των φβ στο χώρο. Σε αυτό το επεισόδιο αναγνωρίζουμε τις εξής υποστασιοποιήσεις των μαθητών: (α) την αναγνώριση διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης των φβ *(Μ1: Μπορείς να τα βάλεις έτσι ή έτσι [αναφέρεται στον προσανατολισμό των φβ]! Πώς θα τα βάλουμε εμείς; Μ2: να κοιτάνε στο νότο; [...] Μ4: μπορεί να είναι μία πολυκατοικία πιο ψηλή από πίσω! [...] Μ3: Το χέρι μου είναι έτσι ... έτσι η ταράτσα… έτσι τα φβ)*. (β) τον κριτικό αναστοχασμό, όταν ο Μ1 αμφισβητεί ένα δεδομένο του προβλήματος *(Μ1: πώς γίνεται η ταράτσα να βλέπει στο νότο αφού κοιτάει προς τα πάνω;)* και ο Μ3 αμφισβητεί αν αυτή η δράση έχει κάποιο νόημα για την επίλυση του προβλήματος (*Μ3: μας ενδιαφέρει ο προσανατολισμός των φβ;)*. Σε αυτό το επεισόδιο όλοι οι μαθητές εκτός του Μ5 διατήρησαν τον ρόλο του συνεργατικού διαπραγματευτή και χρησιμοποίησαν ποικιλία εργαλείων διαπραγμάτευσης (αναπαραστάσεις της καθημερινότητας, νοήματα κ.ά.).

Στο 3ο επεισόδιο η συνεργατική προσπάθεια συνίσταται στον υπολογισμό του πλήθους των φβ τα οποία μπορούν να τακτοποιηθούν στην ταράτσα και αναγνωρίζουμε 4 υποστασιοποιήσεις της ομάδας: (α) την ανάδειξη της ανάγκης χρήσης τριγωνομετρικών λόγων κατά την οποία όλη η ομάδα λειτουργεί συνεργατικά (βλ. απόσπασμα 1).

Απόσπασμα 1

Μ1: Το φβ είναι ξαπλωμένο έτσι... αλλά όμως με κλίση παίρνει ύψος και για να βρούμε, θέλουμε να βρούμε ύψος γιατί μετά το επόμενο φβ…

Μ4: Δηλαδή το χαμηλό σημείο να είναι εδώ και το ψηλό να είναι εδώ.

Μ2: Πώς θα το βρεις το ύψος;

Μ3: Έχω μια ιδέα! Άμα παίρναμε το φβ που είναι έτσι, και εδώ ……… η βάση … η κάθετος είναι το ύψος και ξέρουμε αυτό εδώ ας πούμε [εννοεί τη γωνία], και ψάχνουμε … το ύψος… Μήπως θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε ημίτονο;

Μ1: Ναι μπορούμε!

Μ5: Πώς ημίτονο;

Μ3: Κάθετη προς υποτείνουσα…

Μ2: Α, δεν ξέρουμε όμως …ξέρουμε, ξέρουμε!

Μ3: Ξέρουμε τη μία πλευρά! Άρα θα βρούμε το ύψος.

Παρατηρούμε σε αυτό το απόσπασμα το πέρασμα από το ρεαλιστικό πλαίσιο του προβλήματος στην ανάδειξη του μαθηματικού αντικειμένου από τον Μ3 για πρώτη φορά σε ρόλο συνεργατικού εισηγητή. (β) τη δυνατότητα εφαρμογής του Πυθαγορείου Θεωρήματος (ΠΘ) όπου ο Μ4 ήταν ο συνεργατικός εισηγητής και οι

M3 και M1 οι συνεργατικοί διαπραγματευτές του *(M4: Είναι ορθογώνιο τρίγωνο; αφού ξέρουμε την υποτείνουσα ...γιατί δεν κάνουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα; M3: Πρέπει να ξέρεις δύο πλευρές, M1: Ναι πρέπει να ξέρεις δύο πλευρές. Εδώ δεν ξέρουμε).* (γ) τον υπολογισμό του ύψους ΑΓ (δες απόσπασμα 2). Ο M2 αντιπροτείνει τη χρήση του συνημιτόνου εξηγώντας το σκεπτικό του στην προσπάθεια να διαπραγματευτεί την πρότασή του για τη χρήση του ημιτόνου.

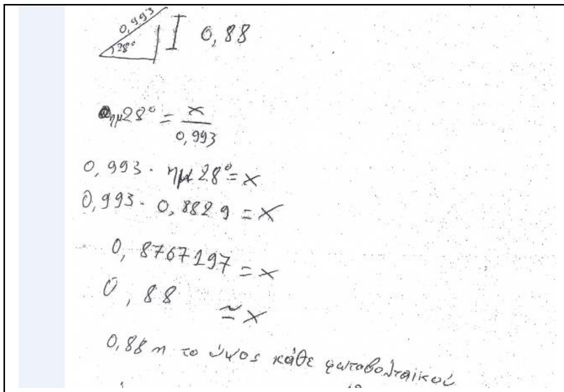
Απόσπασμα 2

> M2: Κοίτα, κοίτα, κοιτάξτε τι σκέφτηκα! Σύμφωνα με το βιβλίο, μπορούμε ξέρουμε τι είναι το συνημίτονο των 28μοιρών! Και ξέρουμε αυτή την πλευρά! Άρα μπορούμε να κάνουμε το συνημίτονο 28 μοιρών ίσον x που είναι η προσκείμενη προς αυτόν τον αριθμό, 1,654! 1,654. μετά θα βρούμε το συνημίτονο 28 σύμφωνα με το βιβλίο και θα κάνουμε το συνημίτονο του 28 επί το 1,654 και θα βρούμε το ύψος του τέτοιου
>
> M3: Γιατί να μην το βρούμε με ημίτονο ρε φίλε;
>
> M2: Για να βρούμε ημίτονο … το ίδιο πράγμα κάνεις […] Βλέπεις αυτό εδώ είναι το ύψος… αυτό εδώ είναι η απέναντι κάθετη. Άρα θέλεις να βρεις την απέναντι κάθετη η οποία είναι το ύψος σ’ αυτό το ρημάδι το τρίγωνο [τονίζει κάθε λέξη]. Για να βρεις την απέναντι κάθετη θα κάνεις το συνημίτονο γιατί αν κάνεις το ημίτονο θα βρεις την προσκείμενη κάθετη.

(δ) τον υπολογισμό του συνολικού αριθμού των φβ (2 σειρές στην πλευρά 8μ και 4 σειρές στην 12μ δηλ. συνολικά 8φβ) όπου ο M2 συνεργάζεται με τον M1.

Στο 3^{ο} επεισόδιο έχει ενδιαφέρον ότι για πρώτη φορά όλη η ομάδα έδρασε συνεργατικά (υποστασιοποίηση 3α), αναδείχθηκαν για πρώτη φορά οι M3 και M4 ως συνεργατικοί εισηγητές ενώ η ιδέα του M3 για χρήση τριγωνομετρικών λόγων αλλάζει την πορεία επίλυσης του προβλήματος. Τα εργαλεία της ομάδας σε αυτό το επεισόδιο ξεκίνησαν από διαισθητικά (π.χ. καθημερινές εικόνες, χειρονομίες) και κατέληξαν σε μαθηματικά. Το επεισόδιο λήγει όταν επεμβαίνει για 2η φορά η εκπαιδευτικός και τους εξηγεί ότι ο αριθμός των φβ που υπολόγισαν είναι λάθος και τη σημασία της προβολής του φβ στην ταράτσα για την εφαρμογή του πρακτικού κανόνα.

Το 4ο επεισόδιο αφορά την κοινή δράση της ομάδας επαναδιαπραγμάτευσης του προβλήματος και την εύρεση της τελικής λύσης. Σ’ αυτό το επεισόδιο αναγνωρίζουμε τις παρακάτω υποστασιοποιήσεις: (α) τον υπολογισμό των ωφέλιμων διαστάσεων της ταράτσας (*M4: 13 και 9 δεν είναι; M2: 12 και 8 γιατί βγάζεις το μισό, μισό από εδώ πέρα, μισό από εδώ πέρα)* με τους M4 και M2 ως συνεργατικούς διαπραγματευτές. Παρατηρούμε ότι ένα θέμα που απασχόλησε έντονα την ομάδα στο 1^{ο} επεισόδιο λύθηκε πολύ σύντομα σε αυτό το επεισόδιο με τον M2 να εξηγεί στον M1 τους ισχυρισμούς του. (β) τον υπολογισμό του ύψους ή την απόσταση του άνω μέρους του φβ από το επίπεδο της οριζόντιας ταράτσας). Οι Μ2 και Μ3 συνεργάζονται πάλι για τον υπολογισμό του ύψους αλλά πάλι αντί για το ημίτονο αναφέρονται στο συνημίτονο της γωνίας των 28 μοιρών (βλ. Πίνακα 2) ενώ οι υπόλοιποι μαθητές δεν συμμετέχουν και συζητούν για άλλα θέματα άσχετα με το πρόβλημα.

	*Απόσπασμα 3* Μ2: Αυτό είναι 28. Αυτό γράψτο 28. Αυτό εδώ πέρα γράψτο, ε…0,993 0,993, οπότε θα κάνουμε κάνε κάτω, συν ε.. συν 28 μοίρες ή ημίτονο, ό,τι θες δεν με νοιάζει.. Μ3: Ημίτονο 28μοιρών ισούται με …. Μ2: Ίσον με απέναντι κάθετη προς 0,993. Μ3: Άρα 0,88. Περίπου … στο περίπου.

Πίνακας 2. Σχέδιο στο φύλλο εργασίας των μαθητών και η σχετική τους συζήτηση.

(γ) εφαρμογή του πρακτικού κανόνα, διαπραγματευόμενοι τη σχέση (2x0,88+0,87=2,63) (1), όπου 0,88 είναι η προβολή της πλευράς 0,993 στο επίπεδο. Συνεχίζουν και εδώ να συνεργάζονται οι Μ2 και Μ3. Το ότι χρησιμοποιούν τον ίδιο αριθμό για τον υπολογισμό του ύψους και της προβολής της πλευράς των 0,993μ στο επίπεδο προκαλεί τους Μ4 και Μ5 επανειλημμένα να ζητούν εξηγήσεις(*Μ5: πώς βρήκες το 0,87; Μ2: συνημίτονο ρε φίλε…Μ4: τι είναι το 0, 87; Μ1: μη γυρίζουμε πίσω).* Οι μαθητές Μ2 και Μ3 διατηρούν ρόλο μη συνεργατικό (κυρίαρχου εισηγητή) δίνοντας μόνο γενικές εξηγήσεις μιας και θέλουν να ολοκληρώσουν την άσκηση ενώ οι Μ4 και Μ5 δρουν συνεργατικά (σε ρόλο απλοϊκού διαπραγματευτή) χωρίς όμως να καταφέρουν να πείσουν τους άλλους ότι έχουν κάνει λάθος. (δ) Υπολογισμός του συνολικού αριθμού των φβ θεωρώντας ότι στηρίζονται στη μικρή πλευρά [12:0,993] και απλώνονται σε σειρές στα 8μ. ταράτσας (δες απόσπασμα 4). Το λάθος τους είναι ότι θεωρούν ότι σε κάθε περίπτωση το ύψος είναι συγκεκριμένο άσχετα από τον τρόπο στήριξης του φβ. Οι Μ1, Μ2 και Μ5 συμμετέχουν ως συνεργατικοί διαπραγματευτές.

Απόσπασμα 4

Μ2:12 στη σειρά δεν έχει; 12 η σειρά δεν έχει [12:0,993] και κάνε 8 διά 2,63.

Μ1:3,041.

Μ2:Περίπου τρία.

Μ5:Πριν είχες 2.Τώρα έχεις….

Μ1:Οπότε τρία. Οπότε 12 επί 3;

M3:36.

Σ’ αυτό το απόσπασμα κυριαρχεί ο Μ2 σε συνεργατικό κυρίως ρόλο ο οποίος ξεκινά την επίλυση του προβλήματος από την αρχή. Τα εργαλεία του είναι κυρίως μαθηματικά (μαθηματικές διαδικασίες και αναπαραστάσεις όπως του τριγώνου στην Εικόνα 2). Ο Μ3 συνεργάζεται με τον Μ2 στην εφαρμογή τριγωνομετρικών λόγων. Ο Μ1 συμβάλλει μόνο στον υπολογισμό του αριθμού των φβ, ενώ οι Μ4 και Μ5 διατηρούν σε κάποιες υποστασιοποιήσεις το ρόλο του απλοϊκού διαπραγματευτή.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι παρατηρήσεις μας δείχνουν ότι κατά την πορεία μορφοποίησης της συλλογικής συλλογιστικής ο *τρόπος συμμετοχής των μαθητών φαίνεται να εξαρτάται από το είδος της υποστασιοποίησης*. Συγκεκριμένα, στην υποστασιοποίηση 2α η συμμετοχή ευνοείται από την ανοικτή δραστηριότητα η οποία ενθαρρύνει διαφορετικές προσεγγίσεις και συλλογισμούς (Sawyer, 2007). Στην υποστασιοποίηση 3α διαπιστώνουμε ότι όλη η ομάδα δρα συνεργατικά και οδηγείται στην αναγνώριση της χρήσης ενός μαθηματικού εργαλείου. Αυτό εξηγείται από την *ανάγκη των μαθητών να συνεργαστούν* σε μια δράση με την οποία δεν είναι εξοικειωμένοι (η εύρεση κατάλληλων μαθηματικών εργαλείων) (Sawyer, 2007). Θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε την υποστασιοποιήση 3α ως μια περίπτωση *συμπυκνωμένης διαπραγμάτευσης νοήματος* (Krummheuer, 2007) λόγω της αυθεντικότητας της επιχειρηματολογίας των μαθητών και της διαδοχής των συλλογισμών από πλαισιωμένες σε μαθηματικές. Επίσης, διαπιστώνουμε ότι οι μαθητές διατηρούν τους ίδιους ρόλους σε ίδιου τύπου υποστασιοποιήσεις όπως 3γ και 4β. Ο τρόπος συμμετοχής των περισσοτέρων μαθητών φάνηκε να *διαφοροποιείται στην πορεία διαπραγμάτευσης*. Για παράδειγμα, ο Μ1 άρχισε μη συνεργατικά (με ρόλο κυρίαρχου εισηγητή) στην αρχή του 1ου επεισοδίου τον οποίον εγκατέλειψε σε όλη την υπόλοιπη πορεία διαπραγμάτευσης του προβλήματος. Επιπλέον, οι Μ3 και Μ4 ξεκίνησαν μη συνεργατικά (ως ανασφαλείς συμμετέχοντες) και ακολούθως ανέλαβαν ρόλο συνεργατικού εισηγητή ενώ σε κάποιες αποστασιοποιήσεις στο 3^{ο} και στο 4^{ο} επεισόδιο βλέπουμε τον Μ5 να συνεργάζεται με την ομάδα έστω και στον ρόλο του απλοϊκού διαπραγματευτή. Τέλος, σύμφωνα με τις παρατηρήσεις μας, η πορεία διαμόρφωσης του συλλογικού συλλογισμού των μαθητών φάνηκε να συνδέεται με τη φύση των εργαλείων διαπραγμάτευσης. Παρόλα αυτά, στο πλαίσιο αυτής της εργασίας υπάρχουν περιορισμοί που δεν μας επιτρέπουν να μελετήσουμε περαιτέρω τη σχέση αυτή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Elbers, E. (2003). Classroom interaction as reflection: learning and teaching mathematics in a community of inquiry. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(1), 77–99.

Kosyvas, G. (2016). The students' involvement in a workplace inquiry activity: solution of the solar panel problem. In G. Adams (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *36*(1), 47-52.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom. Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behaviour*, 26, 60-84.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). S*ituated Learning: Legitimate Peripheral Participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Maaß, K. & Artigue, M. (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: a synthesis. *ZDM*, 45, 779–795.

Mercer, N. (1996). The quality of talk in children's collaborative activity in the classroom. *Learning and instruction*, *6*(4), 359–377.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 215–234). Rotterdam: Sense Publishers.

Sawyer, K. (2007). *Group genius: The creative power of collaboration*. New York, NY: Basic Books.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Tatsis, K. & Koleza, E. (2006). The effect of students' roles on the establishment of shared knowledge during collaborative problem solving: a case study from the field of mathematics. *Social Psychology of Education*, 9(4), 443–460.

Triantafillou, C., Bakogianni, D. & Kosyvas, G. (2016). Tensions in students' group work on modelling activities. In C. Csikos, A. Rausch & J. Szitanyi (Eds.). *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 283-290). Szeged, Hungary: PME.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge: Cambridge University Press.