ΠΡΑΚΤΙΚΑ

7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ.)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

1, 2 & 3 Δεκεμβρίου 2017

- ΈΝΩΣΗ ΕΡΕΥΝΗΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.)
- ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΕΚΠΑ
- ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ-ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ "ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ", ΕΚΠΑ

Επιμέλεια:
Θ. Ζαχαριάδης, Δ. Πόταρη, Γ. Ψυχάρης

ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΕΚΠΑ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ-ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ "ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ", ΕΚΠΑ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ

Επιμέλεια: Θ. Ζαχαριάδης, Δ. Πόταρη, Γ. Ψυχάρης

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
1-3 Δεκεμβρίου 2017

Αναφορά ως

Θ. Ζαχαριάδης, Δ. Πόταρη, Γ. Ψυχάρης (επιμ.). *Πρακτικά 7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών: Μαθηματική Γνώση και Διδακτικές Πρακτικές*. Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ

Ιστοσελίδα: http://enedim7.gr/

ISBN: 978-618-82277-1-2

Οργάνωση ύλης: Θεοδόσιος Ζαχαριάδης, Δέσποινα Πόταρη, Γεώργιος Ψυχάρης

Τεχνική Επιμέλεια: Ελένη Κλη

Γραφιστική Επιμέλεια (Εξωφύλλου): Ελένη Κλη

Τεχνική Επιμέλεια Ιστοσελίδας: INSERT-Web Services

Λογότυπο συνεδρίου: Αγγελική Ζούπα

ΧΟΡΗΓΟΙ ΣΥΝΕΔΡΙΟΥ

Διακεκριμένοι χορηγοί

Χορηγοί

Υποστηρικτές

Μαθηματική Γνώση και Διδακτικές Πρακτικές

Η Ένωση Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών σε συνεργασία με το Τμήμα Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών και το Διαπανεπιστημιακό-Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών» του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών διοργανώνει το 7ο Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή με θέμα: **Μαθηματική Γνώση και Διδακτικές Πρακτικές.**

Το θέμα του συνεδρίου θέτει τη μαθηματική δραστηριότητα ως βασική συνιστώσα της έρευνας και εστιάζει στο πώς αυτή αναπτύσσεται μέσα από τη διδασκαλία στις διάφορες εκπαιδευτικές βαθμίδες. Οι εισηγήσεις του συνεδρίου αναδεικνύουν με διαφορετικό τρόπο γνωστικές, συναισθηματικές και κοινωνικές παραμέτρους που συνδέονται με τη μαθηματική δραστηριότητα, αποτυπώνοντας μια αντιπροσωπευτική εικόνα της σχετικής έρευνας τόσο από το διεθνή χώρο όσο και από την Ελλάδα και την Κύπρο. Ζητήματα γνώσης των εκπαιδευτικών, χρήσης πόρων και εργαλείων από τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς, επίλυσης προβλήματος ως μέσου ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης και της μαθηματικής δημιουργικότητας και της μετάβασης από τη μια εκπαιδευτική βαθμίδα σε άλλη αποτελούν κεντρικές κατευθύνσεις των εισηγήσεων.

Οι θεματικοί άξονες γύρω από τους οποίους αναπτύχθηκαν και παρουσιάζονται οι εργασίες του συνεδρίου είναι:

Θεματικός άξονας 1: Η μαθηματική δραστηριότητα στη σχολική τάξη

Ο θεματικός άξονας 1 αναφέρεται στο διδακτικό τρίγωνο εκπαιδευτικός-μαθηματικά-μαθητές και επικεντρώνεται στη μελέτη της μαθηματικής δραστηριότητας που αναπτύσσεται στην σχολική τάξη μέσα από τις αλληλεπιδράσεις των συμμετεχόντων. Η μαθηματική δραστηριότητα αναφέρεται στις διεργασίες και έννοιες που συνδέονται με τη μαθηματική γνώση και την κατασκευή της. Η έρευνα εστιάζεται στα επιστημολογικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας και σε σχετικά ζητήματα όπως ο διδακτικός σχεδιασμός, η εμπλοκή των μαθητών, η επικοινωνία στη σχολική τάξη κ.λπ.

Θεματικός άξονας 2: Εργαλεία διαμεσολάβησης της μαθηματικής γνώσης στη διδασκαλία

Ο θεματικός άξονας 2 επικεντρώνεται στον ρόλο των εργαλείων στο διδακτικό τρίγωνο εκπαιδευτικός-μαθηματικά-μαθητές και ιδιαίτερα στο πώς αυτά επηρεάζουν τις διδακτικές πρακτικές και τη μαθησιακή διαδικασία. Ο όρος 'εργαλεία' συμπεριλαμβάνει τυπικά μαθηματικά εργαλεία (π.χ. αναπαραστάσεις), χειραπτικά υλικά, ψηφιακά δομήματα, τεχνουργήματα από διαφορετικά πεδία εκτός της σχολικής τάξης (π.χ. τέχνη, χώρος εργασίας) κ.λπ. Η σχετική έρευνα αναδεικνύει τη σημασία του ρόλου των εργαλείων στον διδακτικό σχεδιασμό, τις διδακτικές πρακτικές και την οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης.

Θεματικός άξονας 3: Κοινωνικο-πολιτισμικές, πολιτικές και θεσμικές διαστάσεις της μάθησης και της διδασκαλίας

Ο θεματικός άξονας 3 αναφέρεται στο εκπαιδευτικό και κοινωνικό πλαίσιο στο οποίο λαμβάνει χώρα η διδασκαλία των μαθηματικών και η κατασκευή της μαθηματικής γνώσης. Ειδικότερα, περιλαμβάνει θέματα όπως τα πολιτισμικά και κοινωνικά χαρακτηριστικά των συμμετεχόντων στη σχολική τάξη, τη μαθηματική γνώση σε μη τυπικά πλαίσια (π.χ. εθνομαθηματικά, μαθηματικά στον χώρο εργασίας), τις μεταβάσεις από μια εκπαιδευτική βαθμίδα σε άλλη κ.λπ. Η έρευνα στα συγκεκριμένα θέματα διευρύνει τη φύση της μαθηματικής γνώσης και δημιουργεί την ανάγκη διαφοροποιημένων διδακτικών πρακτικών.

Θεματικός άξονας 4: Η μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία και η ανάπτυξή της

Ο θεματικός άξονας 4 αναφέρεται στη φύση της μαθηματικής γνώσης που απαιτείται για τη διδασκαλία των μαθηματικών και πώς αυτή αναπτύσσεται. Το ζήτημα αυτό έχει μελετηθεί μέσα από διαφορετικά θεωρητικά και μεθοδολογικά πλαίσια και σε διαφορετικές εκπαιδευτικές βαθμίδες. Η έρευνα δείχνει τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά αυτής της γνώσης και προτείνει τρόπους για την ανάπτυξή της στο πλαίσιο της αρχικής εκπαίδευσης και της επαγγελματικής εξέλιξης των εκπαιδευτικών.

Το Συνέδριο πραγματοποιείται στην Αθήνα, την Παρασκευή 1/12/2017, το Σάββατο 2/12/2017, και την Κυριακή 3/12/2017 στο τμήμα Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.

Το Προεδρείο

Θεοδόσιος Ζαχαριάδης
Δέσποινα Πόταρη
Γεώργιος Ψυχάρης

Θεματικοί Άξονες Συνεδρίου

1. Η μαθηματική δραστηριότητα στη σχολική τάξη
2. Εργαλεία διαμεσολάβησης της μαθηματικής γνώσης στη διδασκαλία
3. Κοινωνικο-πολιτισμικές, πολιτικές και θεσμικές διαστάσεις της μάθησης και της διδασκαλίας
4. Η μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία και η ανάπτυξή της

Επιτροπές του συνεδρίου

Οργάνωση
Ένωση Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ.)
Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ
Διαπανεπιστημιακό-Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών "Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών", ΕΚΠΑ

Προεδρείο
Ζαχαριάδης Θεοδόσιος, Καθηγητής, ΕΚΠΑ
Πόταρη Δέσποινα, Καθηγήτρια, ΕΚΠΑ
Ψυχάρης Γεώργιος, Επικ. Καθηγητής, ΕΚΠΑ

Επιστημονική Επιτροπή
Βαμβακούση Ξένια, Επικ. Καθηγήτρια, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Καλαβάσης Φραγκίσκος, Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Αιγαίου
Κολέζα Ευγενία, Καθηγήτρια, Πανεπιστήμιο Πατρών
Κυνηγός Πολυχρόνης, Καθηγητής, ΕΚΠΑ
Παπαδόπουλος Ιωάννης, Επικ. Καθηγητής, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Πιττάλης Μάριος, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών, ΕΕΠ, Πανεπιστήμιο Κύπρου
Σταθοπούλου Χαρίκλεια, Αναπλ. Καθηγήτρια, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Χρήστου Κωνσταντίνος, Επικ. Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Οργανωτική Επιτροπή
Βερύκιος Πέτρος
Ζούπα Αγγελική
Ζωιτσάκος Σωτήρης
Καφετζόπουλος Γεώργιος-Ιγνάτιος
Κλη Ελένη
Μπαμπίλη Αμαλία
Μπακογιάννη Διονυσία
Παπακανδεράκη Χαρά
Πετροπούλου Γεωργία
Σιώπη Καλλιόπη
Στουραΐτης Κων/νος
Τριανταφύλλου Χρυσαυγή
Τσίγκα Αναστασία

Γραμματεία Συνεδρίου

Αναστασία Τσίγκα, τηλ. 210 727 6386

Ηλεκτρονική Επικοινωνία: enedim7@math.uoa.gr

Ιστοσελίδα: http://enedim7.gr

Κριτές των εργασιών

Βαμβακούση Ξένια, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Βερύκιος Πέτρος, Δρ Διδακτικής Μαθηματικών

Γαβρίλης Κώστας, Δρ Διδακτικής Μαθηματικών

Γαγάτσης Αθανάσιος, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Γρίβα Γεωργία, Δρ. Γνωστικής Ψυχολογίας

Δεσλή Δέσποινα, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Δημοσθένους Ελένη, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Ζαγοριανάκος Αντώνιος, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Ζάντζος Ιωάννης, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Ζαχαριάδης Θεοδόσης, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ζαχάρος Κώστας, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ζούπα Αγγελική, Υπ. Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Ζυμπίδης Δημήτριος, Σχολ. Σύμβουλος

Ζωιτσάκος Σωτήριος, Υπ. Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Ηλία Ιλιάδα, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Θωμά Αθηνά, Υπ. Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Θωμαΐδης Ιωάννης, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Καλαβάσης Φραγκίσκος, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Καλδρυμίδου Μαρία, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Καλογερία Ελισσάβετ, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Καμπουρίδη Βαρβάρα, τ. Σχολ. Σύμβουλος

Κανέλλος Ιωάννης, Σχ. Σύμβουλος

Κασκαντάμης Μιχαήλ, Διπλ.ωματούχος Διδακτικής Μαθηματικών

Κασσώτη Όλγα, Δρ Διδακτικής Μαθηματικών

Καφετζόπουλος Γεώργιος-Ιγνάτιος, Υπ. Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Καφούση Σόνια, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Κεϊσογλου Στέφανος, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Κλιάπης Πέτρος, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Κλώθου Αννα, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Κολέζα Ευγενία, Πανεπιστήμιο Πατρών

Κόμης Βασίλειος, Πανεπιστήμιο Πατρών

Κόσυβας Πέτρος, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Κοταρίνου Παναγιώτα, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Κούβελα Ειρήνη, Υπ. Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Κούρκουλος Μιχάλης, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κυνηγός Χρόνης, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Λάτση Μαρία, Δρ Διδακτικής Μαθηματικών

Λεμονίδης Μπάμπης, Πανεπιστήμιο Δυτ. Μακεδονίας

Μαμωνά-Downs Γιάννα, Πανεπιστήμιο Πατρών

Μαρκόπουλος Χρήστος, Southern Cross University , Australia

Μελετίου-Μαυροθέρη Μαρία, Ευρωπαϊκό Πανεπιστήμιο Κύπρου

Μεταξάς Νικόλαος, Δρ. Διδακτικής των Μαθηματικών

Μισαηλίδου Χριστίνα, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Μιχαήλ-Χρυσάνθου Παρασκευή, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Μουσουλίδης Νικόλας, Πανεπιστήμιο Λευκωσίας

Μούτσιος Ρέντζος Ανδρέας, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Μπακογιάννη Διονυσία, Υπ. Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Μπαμπίλη Αμαλία, Υπ. Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Μπαραλής Γιώργος, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Μπιζά Ειρήνη, University of East Anglia

Μπούφη Άντα, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Ναρδή Έλενα, University of East Anglia

Νικολαντωνάκης Κώστας, Πανεπιστήμιο Δυτ. Μακεδονίας

Νικολουδάκης Εμμανουήλ, Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου

Ξενοφώντος Κωνσταντίνος, Πανεπιστήμιο Λευκωσίας

Παναούρα Αρετή, Frederic University of Cyprus

Παντζιάρα Μαριλένα, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου

Παπαδάκη Χρύσα, Υπ. Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Παπαδόπουλος Ιωάννης, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Παπακανδεράκη Χαρά, Διπλωματούχος Διδακτικής Μαθηματικών

Παπαριστοδήμου Έφη, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου

Πετροπούλου Γεωργία, Υπ. Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Πιττάλης Μάριος, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Πίττα-Πανταζή Δήμητρα, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Πόταρη Δέσποινα, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Σακονίδης Μπάμπης, Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

Σδρόλιας Κωνσταντίνος, Σχολ. Σύμβουλος

Σιώπη Καλλιόπη, Υπ. Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Σκουμπουρδή Χρυσάνθη, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Σοφοκλέους Παρασκευή, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Σπηλιωτοπούλου Βάσω, Πανεπιστήμιο Πατρών

Σπύρου Παναγιώτης, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Σταθοπούλου Χαρίκλεια, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Στουραΐτης Κωνσταντίνος, Υπ. Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Τάτσης Κώστας, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τζανάκης Κωνσταντίνος, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Τζεκάκη Μαριάννα, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Τριανταφυλλίδης Τριαντάφυλλος, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τριανταφύλλου Χρυσαυγή, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τσακιρίδου Ελένη, Πανεπιστήμιο Δυτ. Μακεδονίας

Τσίτσος Βασίλειος, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Φεσάκης Γεώργιος, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Χαβιάρης Πέτρος, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Χαραλάμπους Χαράλαμπος, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Χατζηκυριάκου Κων/νος, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Χιονίδου Μαρία, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Χρήστου Κωνσταντίνος, Πανεπιστήμιο Δυτ. Μακεδονίας

Χρίστου Κωνσταντίνος, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Χρυσοστόμου Μαριλένα, Δρ. Διδακτικής Μαθηματικών

Ψυχάρης Γεώργιος, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΗΓΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΟΛΟΜΕΛΕΙΑ

ΣΤΡΟΓΓΥΛΟ ΤΡΑΠΕΖΙ

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΑΞΟΝΑΣ-1: Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΣΤΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΤΑΞΗ

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΑΞΟΝΑΣ-2: ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΔΙΑΜΕΣΟΛΑΒΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΑΞΟΝΑΣ-3: ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ-ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΕΣ, ΠΟΛΙΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΘΕΣΜΙΚΕΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΑΞΟΝΑΣ-4: Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ

ΑΝΑΡΤΗΜΕΝΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ (POSTERS)

ΟΜΑΔΕΣ ΑΝΤΑΛΛΑΓΩΝ

ΚΑΙΝΟΤΟΜΕΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

ΕΙΣΗΓΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΟΛΟΜΕΛΕΙΑ

MATHEMATICS TEACHERS' "TAKE-UP" FROM PROFESSIONAL DEVELOPMENT

Adler Jill

University of the Witwatersrand

jill.adler@wits.ac.za

This paper reports a study of the relationship between knowledge and practice in the context of a professional development (PD) intervention with secondary mathematics teachers in South Africa. Teachers' "take-up" from the PD is indicated by differences in practice – specifically in what mathematics is made available to learn in these teachers' lessons observed before and after the PD. I tell the story of take-up through two telling cases that illuminate its diversity. When set alongside teachers' mathematical progress, the diversity of take-up opens up interesting insights into the relationship between teachers' subject matter knowledge and their practice.

INTRODUCTION

A wide array of papers reviewing research on mathematics teachers' PD (e.g. Stazjn et al 2017), and on teacher PD more generally (e.g. Kennedy, 2016) have been recently published. Each, though in different ways, provides insight into what has been learned from extensive work in this field. There is widespread agreement that PD is important for improving the teaching and learning of mathematics, and the reviews evidence such improvement across programmes. However, what "works", where, why, how and for whom remain open questions, challenging simple notions of uniform benefits, scale-up and/or long term improvement across contexts and conditions. This paper, and presentation, contribute to this important domain of research and practice by sharing insights on what we describe as teacher "take-up" from the Wits Maths Connect Secondary (WMCS) professional development project in South Africa.

Of more specific concern in the WMCS is our focus on subject matter knowledge (SMK) (Shulman, 1987) in our PD. For while there is also widespread agreement that a strong subject focus is a key feature of successful PD (e.g. Desimone, 2009), interpretations of "subject focus" vary widely, thus requiring caution in extrapolations from specific interventions. Of interest to us is that in many cases, the focus is on pedagogic content knowledge (PCK) (Adler & Ronda, forthcoming).

I begin the paper with a theoretical note, outlining our orientation to mathematics and teaching that in turn shape our intervention. I then describe WMCS, what we did, how and why, making explicit our rationale, content and approach. I proceed to the story of two WMCS teacher participants and use these telling cases to illuminate the relationship between "initial conditions", particularly, teachers' mathematical knowledge, and their take-up from PD, with implications for research and practice.

THEORETICAL NOTE

Our orientation has roots in sociocultural theory, particularly Vygotsky's (1978) theory of mediated learning, and scientific (and so mathematical) knowledge as a network of connected concepts. Our starting point is that teaching and so learning is always about *something*, and bringing that into focus is the teacher's work. Following variation theorists (Marton & Tsui, 2004) we call this 'something' the *"object of learning"* – that which students are to know and be able to do. In practical terms, it is akin to a lesson goal, but worded so that the mathematics of the goal needs to be made clear. Whatever the goal, it needs to be mediated and so exemplified and elaborated. Fig. 1 below shows that *exemplification (through examples and tasks), explanatory talk (in how signs and objects are named, and justified or legitimated), and learner participation* are viewed as the key mediational means or cultural tools in mathematics classroom instruction.

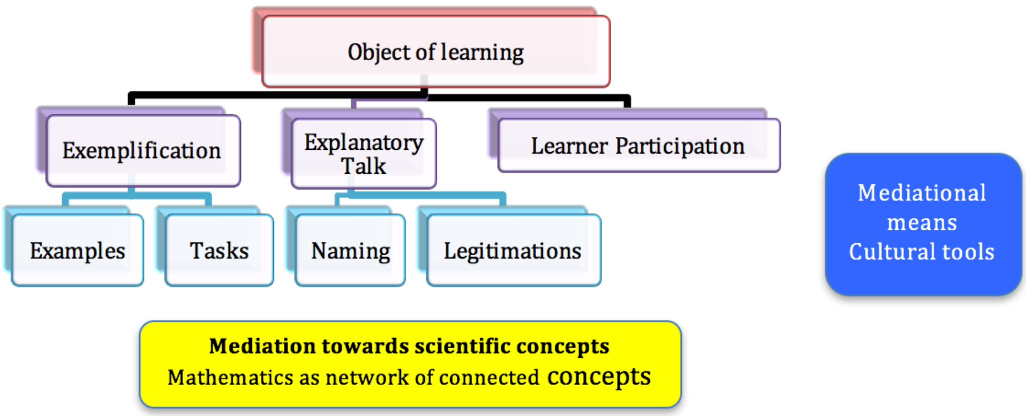


Figure 1: Constitutive elements of MDI (Adapted from Adler & Ronda, 2015

This framing, named Mathematical Discourse in Instruction (MDI), enables us to describe and analyse what it is teachers do, and then to work with them developmentally on the mathematical quality of their teaching. Elsewhere I have described how MDI operates as a boundary object in WMCS (Adler, forthcoming). It frames the planning of our mathematics sessions with teachers, and is operationalised in our research on mathematics teaching, as will become evident later in the paper. It is also offered as a tool for planning and reflecting on mathematics teaching in the PD. MDI is a living framework, with power lying in its iterative nature, moving between and supporting both our research and development work, and teaching practices.

WMCS TRANSITION MATHS (TM) COURSE(S) FOR TEACHERS

The major component of WMCS, developed and trialled in Phase 1 of the project (2012-2014) is a "20-day" mathematics for teaching course spread over a year. Called "Transition Maths 1", the course is aimed at teachers teaching at the junior secondary level (Grades 8 – 10)[1]. TM1 is organized into eight two-day contact sessions over a year, with an additional four days of independent work between these sessions. Teachers are released from school for the 16 course days, typically for a two-day session once a month between February and October. These sessions are held at the University. Ten of the 16 days focus on algebra and functions, and within each day's activity, 75% of time is spent on mathematics content (for teaching) or SMK, and 25% on mathematics teaching or PCK. These two foci are deliberately distinguished and taught in separate sessions.

The content emphases and grade level focus was a function of widespread poor performance on national annual assessment in Grade 9, with poor results skewed towards schools in socio-economically poor communities, the kinds of schools we were and are working with in the project. Our observations in schools confirmed and illuminated the national picture. It is beyond the scope of this paper to present a full description of the South African mathematics education context. Interested readers are referred to a detailed elaboration in Adler & Pillay (2017). Suffice it to say that our observations also confirmed our sense from previous research (e.g. Adler & Davis, 2006) that the effects of poor quality mathematics preparation of teachers under apartheid were residual in these schools. We thus set out to strengthen the teachers' mathematics (for teaching) in the first instance. We aimed our intervention quite specifically at teachers' mathematical content (for teaching) knowledge, and we add *(for teaching)* to indicate the inclusion of specialized content knowledge (Ball et al, 2008). In our mathematics (for teaching) or SMK sessions, teachers spend most of their time on mathematical tasks where the objects of learning are key mathematical concepts, the selection of which have been influenced by the South African national school curriculum.

In general, teachers engage with sequences of mathematical activities that provide opportunities for them to revisit and deepen their knowledge of the mathematics they teach (Pournara, 2013; Zaskis, 2011), as well as activities that extend their knowledge of content to senior secondary mathematics, and where appropriate, beyond. For example, the mathematics sessions in the first two days of the course began with tasks and activities directed at generalization and proof in number and algebra and moved on to topic specific revisiting of algebraic expressions, equations and inequalities. The activity below is one example of from a mathematics session that illustrates how we focus our mathematics sessions.

Task: What happens when we solve equations like these?	
$\sqrt{x-3} = x-3$	How many solutions are there
$\sqrt{x-4} = x-4$	What is the pattern in the solutions
$\sqrt{x-5} = x-5$	Can you describe the patter in words and in algebra
$\sqrt{x+1} = x+1$	Does this finding always hold?

Figure 2. Extract from TM1 course notes – Session on equations

The task (Fig. 2) is intended to strengthen or deepen teachers' knowledge of quadratic equations, both how these are solved, as well as the meaning of solutions. Example sets are carefully selected and sequenced using principles of variation (Watson & Mason, 2006) to bring both structure and generality into focus. Of course, while doing the task, teachers might well think about its relevance and use in their own teaching. However, mediation and so collective attention to the task in the mathematics PD session will focus on mathematical properties, principles and related derived procedures. Focus is not the how and why of task design, nor the selection of these specific examples. These could, and indeed do come into focus in a teaching session.

With regard to aspects of teaching, we structure these sessions around our MDI framework, re-presenting it in a practice-based form (Fig. 3) that we mediate in the teaching sessions in the TM1 course. We work with teachers on articulating their mathematical goals for a lesson (objects of learning), and then on choosing and using examples; providing explanations and justifications; and setting up appropriate learner activity all in relation to the lesson goal. For example, a teaching session could be organized around example sets in prescribed textbooks, or in more specific lesson plans and, also using principles of variation, what is possible to come into focus through these. A key strength of this approach to teaching is that it focuses on issues that are sufficiently close to teachers' current practice, and to curriculum demands, as to be possible to implement. We work from the assumption that better teaching is characterised by more thoughtful selections of examples and tasks, and by mathematical explanations that focus explicitly on the mathematics that the teacher intends the learners to learn. This is achieved through attention to how mathematics is talked about and justified. We focus on opportunities for doing and talking mathematics that learners are offered in tasks set. We might also use a similar task to those in the mathematics session in a teaching session. However, the focus of attention shifts. Attention would, for example, be specifically directed at the various examples of equations they were asked to solve, principles for their selection and sequencing, and whether and how these, together with how they are elaborated, and what learners are invited to do and say, become purposeful towards the lesson goal.

<table>
<tr><td colspan="3">Lesson goal: What do we want learners to know and be able to do?</td></tr>
<tr><td>Exemplification</td><td>Learner Participation</td><td>Explanatory talk</td></tr>
<tr><td>Examples, tasks, representations
What examples are used?
What are the associated tasks?
What representations are used?</td><td>Doing and talking maths
What do learners say?
What do learners write?</td><td>Word use, justifications
What is said?
What is written?
How is it justified?</td></tr>
<tr><td colspan="3">Coherence: Are there coherent connections between
* the lesson goal, exemplification, explanatory talk, and learner participation?
* from one part of the lesson to the next?
Will learners know and be able to do what you intended? How will you know?</td></tr>
</table>

Figure 3: Extract TM1 course notes - Mathematics Teaching Framework

We are committed to teachers' improving their mathematics confidence and competence and this is explicit at entry for all teachers. In addition to continuous activity and feedback, teachers take an entry and end of course test focused on the mathematics offered in the course. These provide us evidence of teachers' mathematical progress.

What then of take-up as manifested in their classroom teaching? How does the strengthening of their mathematics (for teaching) translate into the mathematics that they make available to learn in their lessons?

To answer this question here I tell stories of two teachers who participated in the TM1 course in 2012. Ms A and Ms B are purposively selected as they are telling cases of diverse “take-up” from the PD. Their stories are made possible through the study we undertook of the 2012 cohort, greater detail of which is provided in Adler & Ronda (forthcoming).

TWO TEACHERS STORIES

Ms A and Ms B are experienced mathematics teachers, teaching in relatively impoverished, poor performing secondary schools in the same province in South Africa. They are qualified teachers[2] though with different trajectories into their positions. Interestingly, and what is not uncommon for black South African teachers of their age, both spoke of having absent mathematics teachers in their final years of secondary school, and had periods in Grade 12 in particular when they were learning on their own with their peers as they prepared for their matriculation examinations. Ms A and Ms B were active participants in the WMCS Transition Maths (TM) course in 2012, and continued to participate in additional activities in subsequent years, though this latter participation is not in focus here. Theirs are contrasting stories of take-up that illuminate the complex relationship between knowledge and practice and how these are shape and are shaped by specific PD practices and the initial conditions from which this process unfolds.

Ms A

Ms A attended school in one of the poorest townships in the province. She then qualified as a secondary mathematics teacher with a three-year diploma from a teachers’ training college. She was attracted into teaching through a call for future teachers to people who had passed mathematics in their Grade 12 matriculation examination. Once qualified, she joined the staff of her old school in the same township where she taught first in the lower secondary grades. She later upgraded her 3-year diploma by studying an Advanced Certificate in (Secondary Mathematics) Education (ACE).

In the course entry test, Ms A’s responses suggested she was relatively fluent with Grade 10 level mathematics. She performed well in the end of course test, showing mathematical learning progress and in our terms that through the course she had deepened her knowledge of the mathematics offered. The question that follows is whether and then how this progress relates to the mathematics that she made available to learn in her lessons?

Answering this question required that we observe and then describe her teaching, over time, in ways that would enable us to discern differences in practice. We have video records of Ms A teaching algebra at the beginning of 2012 and then again after she completed the TM course in 2013. The analytic tools used here are are also elaborated in Adler & Ronda (op cit). I hope to illustrate these as I describe Ms A's lessons.

Ms A's 2012 lesson was focused on solving simple equations in one unknown with fractional indices. The following three equations were completed during whole class activity, where the procedure to be carried out was explained as: "what you do on the left, you do on the right". Classwork followed with a set of more complex equations.

a) $x^{\frac{1}{3}} = 3;$ $\quad$ $b)$ $x^{\frac{1}{5}} = 2$ $\quad$ $c)$ $2x^{\frac{3}{2}} = 54$

Through the lesson, learners were invited to participate in different ways e.g. presenting their solutions to equations on the chalkboard, responding to her questions in class, and talking with their partner about their solution strategies when doing the classwork. Learner difficulties were apparent as illustrated by the following interpretation of the rule above:

a) $x^{\frac{1}{3}\times\frac{3}{1}} = 3^{\frac{1}{3}\times\frac{3}{1}}$

Difficulties continued through the classwork. Ms A's response as she confronted these difficulties was largely to demonstrate again the rule of "doing the same on both sides".

In Ms A's 2013 lesson learner participation patterns were similar to those in 2012. I provide more detail here to illustrate how we examine the example set and related explanatory talk in the lesson and how these offer opportunities for learning in relation to the lesson goal.

The object of learning of in the lesson was solving quadratic equations. The lesson began with the presentation of a product of two unknowns a and b equal to zero, together with a verbal a reminder that one or both of them must thus be zero. Ms A then proceeded, in whole class activity inviting learner responses to the steps needed, to solve the four examples below, each of which is a quadratic equation, though in a different form.

a. $x^2 = 6x;$ b. $8x^2 = 8;$ c. $(x + 1)(x + 2) = 0;$ d. $x^2 = 2x + 8$.

Ms A drew attention to this variation in form, and the invariance of the process of solving each equation (Watson & Mason, 2006). Each involves transforming the equation to an expression equal to 0 and applying the property if $ab = 0$ then $a = 0$ or $b = 0$ to solve for x. As we argue in more detail in Adler & Ronda (op cit) this invariant is the object of learning, and the set of examples provided opportunity for learners to discern the process and principles of solving quadratic equations where $a = 1$, and the quadratic could be factored.

During this part of the lesson, Ms A carried out all the solution steps herself. The underlying property of a product of factors equal to zero was reinforced through this part of the lesson. For example, working on the transformation of a. above into $x(x-6)=0$, Ms A said:

> Right, so the only way that this *equation will be equal to zero is when one of the two is zero*. If for an example the x *akiri* zero, right, meaning we are saying *zero multiplied this whole bracket*, which gives us zero. *So for a quadratic equation to be equal to zero, one of the products must be zero*

While learners responded to questions posed as Ms A demonstrated how to solve the equation, these did not require attention to the steps themselves and their derivation. Thus, while the task was initially presented as one where learners could apply their knowledge about quadratic expressions and solving equations, it was reduced to simply recalling known procedures.

Classwork followed with seven additional equations with the instruction: $Solve\ for\ x$:

a. $(x+2)(x-5)=0$; b. $x(2x-1)=0$; c. $x^2-3x+2=0$; d. $4x^2-9=0$; e. $3x^2-5x=2$; f. $2x^2-x=10$; g. $(x+1)^2=(x+1)(2x+3)$.

The learners were given some time to work on these equations. They completed the first two independently, but had difficulty with example c, specifically with factorizing the trinomial[3]. The teacher returned to the chalkboard and proceeded to factorise and then solve this equation in a similar manner to the previous equations.

Our analysis of Ms A's two lessons, and the differences between them focused on their example sets, learner participation, and explanatory communication, and how these accumulated towards the lesson goal. This shows her more careful attention to the selection and sequencing of examples so as to bring in to focus the lesson goal, as well as her focus on the mathematical properties underlying the procedure for solving the equations. We view these differences as substantial, noting at the same time, that as the quality of the mathematics offered in the lesson improved, in our terms, so opportunities for learner participation diminished.

Ms B

Ms B was also schooled in a poor township school, but in contrast to Ms A, she initially qualified with a three-year diploma in *primary* teaching, where she said she did not study mathematics (i.e. it was not one of her focus subjects). She began teaching Grade 7 general science and mainly biology in a school that included learners from Grades 1 – 12. When the school became secondary (Grades 8 – 12) only, she remained on the staff, later obtaining an Advanced Certificate in Education (ACE) for the intermediate and senior phases in school (Grades 4 – 9) mathematics, and continued teaching mathematics in Grades 8 and 9.

Ms B's performance in the entry test suggested that she was not fluent with Grade 10 mathematics, perhaps unsurprising given her mathematical learning history, but concerning given the classes she was teaching. There are teachers with similar mathematical histories teaching in secondary schools, and not only in South Africa. Ms B participated actively in the course, but nevertheless had difficulties in the end of course test obtaining a relatively low score. So, what did Ms B make available to learn?

Ms B's first lesson was about ratio and proportion, and the second lesson on simplifying algebraic expressions. I focus here on the latter as it is sufficient to bring into focus the purpose of this paper. The object of learning in Ms B's 2013 lesson as stated and written on the board was "Factorising Monomials and Binomials". She began with the two examples below, that she later referred to as "monomials", and interactions with learners suggested this was revision.

$\frac{10ab^2}{15ab}$ and $\frac{15a^2b}{5ab}$

She then proceeded to work through the following five examples interactively with learners.

a. $5x + 5y$;   b. $7a + 7b$;   c. $\frac{4x+4Y}{16x+16y}$;   d. $\frac{5x-5Y}{10x+10y}$;   e. $\frac{6x^5-6^3}{3x^2}$,

Using notions of variation for analysing the example set, this set shows numerous qualities moving from the division of monomial expressions to binomial expressions with deliberate attention to variance and invariance. The same, however, did now show in her explanatory talk. For example, she tried to bring attention to the differences in her example set and said:

> Can you see the difference between this [pointing to $\frac{5x-5Y}{10x+10y}$] and that $\frac{15a^2b}{5ab}$? Here [pointing to $\frac{15a^2b}{5ab}$] we look for a number that can divide both of them; Here [pointing to $\frac{5x-5Y}{10x+10y}$] we look at what is common between the binomial on its own. Ok... so we looking at the binomial on the numerator and the denominator. Here [pointing to $\frac{15a^2b}{5ab}$] we are looking for what's common between because it was a monomial... so can you see that we treat binomials and monomials not the same

References to the particular expressions she was focused on were both ambiguous (e.g. this, them), and mathematically confusing. The emphasis that binomials and monomials are “not the same” in this lesson, disrupts the possible common mathematical narrative of simplifying different forms of algebraic expressions.

DISCUSSION

I selected Ms A and Ms B’s stories as they were reflective of others in the 2012 cohort, and discussed in Adler & Ronda (forthcoming). All the teachers progressed with their selection and sequencing of examples, leading us to suggest that using the notion of variation amidst invariance resonated with teachers, and in ways that they could begin to select examples for their lessons differently and more deliberately. In the context of our observations in the initial year in the project, this is indeed progress, and also indicative of developmental activities with teachers that have impact. At the same time however, there was unevenness in developing and strengthening the mathematical talk in lessons, across the cohort. Grounding talk in mathematical principles, properties and derived procedures appears to “lag behind” take-up of exemplification. Ms A also illustrates that enhancing explanatory talk can interact with learner participation. It was not only Ms A who Ms A who strengthened the quality of her mathematical talk, but reduced learner participation in class, suggesting perhaps that teachers hold on to more control as they attend to the quality of mathematics offered.

We were aware at the outset of the wider study that some of the teachers entered the programme with limited mathematical histories, limitations that were largely confirmed by their performance in the entry test. We did not know whether and how this would interact with their participation and take-up, and so the suitability of the course to their mathematical starting conditions. Indeed, some who scored relatively poorly on the entry test made substantial progress. Nevertheless, our results add to Munter & Correnti’s (2017) finding that starting conditions matter. We suggest that the starting conditions of teachers like Ms B did not provide sufficient traction for deepening and extending their mathematics. We submit, of course this needs further study, that for teachers like Ms B there was a threshold of possible mathematical progress. The TM course is designed to revisit and deepen the mathematics teachers’ knowledge, and extend beyond this to the learning of new and relatively advanced mathematics from an elementary standpoint. Our assumptions that revisiting (as opposed to (re)learning) Grade 8 – 10 level mathematics knowledge and was not valid for these teachers.

IN CONCLUSION

This paper describes two constrasting teachers' take-up from a subject-focused PD intervention in terms of their instructional practice over time. When set alongside their mathematical progress, the diversity of take-up opens up insights into the relationship between knowledge and practice as this unfolds from teacher learning in PD. The study was located in the specific conditions that pertain in South African education, and particularly the enduring impact of apartheid teacher education. However, we are aware that mathematics teachers teaching "out of field" in secondary school are not unique to South Africa.

I wish to add in conclusion that while not elaborated in detail in this paper, it is the MDI framework and its analytic tools that enabled us to see diversity of take-up both within and across teachers, and thus its analytic power. MDI is grounded in the realities of our classrooms, and as such also informs our PD practice, deepening our appreciation of whom the program we offer is suited to, and how we support participating teachers' progress. MDI, we suggest, holds similar relevance for mathematics PD projects elsewhere.

Notes

1. There is a TM2 course aimed at teachers in the upper secondary school. However, our focus has been on TM1 and we continue to work with teachers on this course in Phase 2 (2015-2019) of the project.
2. At the time both Ms A and B did their initial training, you could qualify as a primary or secondary teacher with a three-year diploma from a teachers' training college. These qualifying criteria changed as the higher education sector was restructured post-apartheid.
3. It is frequent in poor schools in SA, that learners are not adequately prepared for the grade they are in, and so falter with tasks the teacher would otherwise assume would not be challenging, like factorizing this trinomial.

Acknowledgments

This work is based on the research supported by the South African Research Chairs Initiative of the Department of Science and Technology and National Research Foundation (Grant No. 71218). Any opinion, finding and conclusion or recommendation expressed in this material is that of the author(s) and the NRF does not accept any liability in this regard.

REFERENCES

Adler, J., & Davis, Z. (2006). Opening another black box: Researching mathematics for teaching in mathematics teacher education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(4), 270-296.

Adler, J., & Pillay, V. (2017). Mathematics education in South Africa. In J. Adler & A. Sfard (Eds.), *Research for educational change: Transforming researchers' insights into improvement in mathematics teaching and learning* (pp. 9-24). Abingdon: Routledge

Adler, J. (forthcoming) Mathematics Discourse in Instruction (MDI): A discursive resource as boundary object across practices. In Kaiser, G (Ed.) *Proceedings of ICME13, Hamburg*.

Adler, J & Ronda, E. (Forthcoming) Take-up and tools: Teachers' learning from professional development focused on subject matter (mathematical) knowledge. Under review.

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of teacher education*, *59*(5), 389-407.

Desimone, L, M. (2009) Improving impact studies of teachers' professional development: towards better conceptualisations and measures. *Educational Researcer*. 38, 181 – 199.

Kennedy, M. (2016). How does professional development improve teaching? *Review of Education Research*, *86*(4), 945-980.

Marton, F., & Tsui, A. B. M. (2004). *Classroom discourse and the space of learning*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Munter, C., & Correnti, R. (2017). Examining Relations between Mathematics Teachers' Instructional Vision and Knowledge and Change in Practice. *American Journal of Education*, *123*(2), 000-000.

Pournara, C. (2013). *Mathematics-for-teaching in pre-service mathematics teacher education: The case of financial mathematics.* (PhD), University of the Witwatersrand, Johannesburg.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, *57*(1), 1-23.

Sztajn, P., Borko, H., & Smith, T. (2017). Research on mathematics professional development. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education.* (pp. 0000-0000). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society : the development of higher psychological processes*. Cambridge: Harvard University Press.

Watson, A., & Mason, J. (2006). Seeing an exercise as a single mathematical object: Using variation to structure sense-making. *Mathematical thinking and learning*, *8*(2), 91-111.

Zaskis, R. (2011). *Relearning mathematics: A challenge for prospective elementary school teachers.* . Charlotte, NC: Information Age Publishing.

MATHEMATICS TEACHERS' WORK WITH CURRICULUM RESOURCES

Gueudet Ghislaine

CREAD, ESPE de Bretagne, University of Brest

Ghislaine.Gueudet@espe-bretagne.fr

Mathematics teachers have always worked with many curriculum resources. These resources include textbooks, computer software; they have recently evolved to incorporate a profusion of online resources, leading to important evolutions of teachers' work. To understand and study these evolutions, we have developed a theoretical approach in mathematics education: the documentational approach to didactics. In this conference, I briefly introduce the main principles of this approach, and I present examples of research projects that used this approach to study the interactions between teachers and curriculum resources and their consequences.

CONTEXT AND RELATED WORKS

Mathematics teachers have always worked with many curriculum resources, defined here as "all the resources, which are developed and used by teachers and pupils in their interaction with mathematics in/for teaching and learning, inside and outside the classroom" (Pepin & Gueudet 2014).

Amongst these resources, the textbook plays a central role. Textbooks and their use have been the focus of many research works in mathematics education (see e.g. Pepin & Haggarty 2001; Remillard 2005; Fan, Jones, Wang & Xu 2013). Textbook studies can focus on the content of the textbooks; on their design; on their use by the students or the teachers; but also on the consequences of this use in terms of teachers' professional development. In the context of educational reforms, textbooks are sometimes designed by the educational authorities to support a change in the teachers' practices (Ball & Cohen, 1996). Textbooks certainly influence teachers' practices; nevertheless, the textbook alone cannot lead to a deep modification of the teachers' practices. Remillard (2012) has evidenced that teachers' use of textbook must be viewed as an interaction. When using a textbook, even a new one, the teacher is guided by his/her usual "mode of engagement" with textbooks. At the same time, this "mode of engagement" has been developed along the years through the use of many textbooks, hence it depends on the features of these textbooks. The perspective we propose on the interactions between teachers and curriculum resources is very close from the perspective developed by Remillard. Nevertheless it introduces new concepts, in order to take into account the recent evolutions of the available curriculum material.

Indeed curriculum resources include textbooks, teachers' guides, but also manipulatives or computer software. Moreover they have recently evolved to incorporate a profusion of online resources: websites, interactive exercises, and in particular more and more Open Educational Resources. This availability of Open Educational Resources (OERs) produces drastic changes in education, and in teachers' work in particular. This fact has been acknowledged for several years at the policy level (see e.g. OECD 2007). For example, a text of the European parliament, following a report on new technologies and open educational resources by the Committee on Culture and Education states that:

"[The European parliament] emphasises that OERs create opportunities for both individuals, such as teachers, students, pupils and learners of all ages, and educational and training institutions to teach and learn in innovative ways; calls on educational institutions to further assess the potential benefits of OERs in the respective educational systems." (European commission 2013)

The OERs are potentially disruptive, not only for learners but also for teachers who can transform the available material, share it with colleagues etc. (Trouche, Gueudet & Pepin to appear). This potential is naturally linked with the issue of new technologies –open educational resources and digital technologies are strongly connected. Indeed the Internet is the central means that allows finding and even designing and publishing open resources; moreover, some of these resources can themselves be considered as "new technologies": free educational software, e-textbooks etc.

For these reasons we claim that an approach aiming at researching these evolutions needs to be connected not only with textbook research, but also with research on the use of technology in mathematics education (Hoyles & Lagrange 2010). Recent works on technology use have also acknowledged the fact that understanding the use of ICT by teachers requires taking into account their resource system (Ruthven 2012). In the next section we present the approach we developed, drawing on these previous works.

THE DOCUMENTATIONAL APPROACH: THEORY AND METHOD

Central concepts of the theory

The main theoretical source of the documentational approach is the instrumental approach (Rabardel 1995) developed by Rabardel. The instrumental approach defines an artefact as a product of the human activity, designed for a human activity with a given aim. The instrumental approach itself is indeed rooted in activity theory (Vygotsky 1978), and considers subjects engaged in an activity with a given aim or object.

Along his/her activity with the artefact, the subject develops an instrument. An instrument is a mixed entity, comprising the artefact or parts of it, and a scheme of use of the artefact (Vergnaud 1998). A scheme is a stable organisation of the activity for a class of situations (a set of situations corresponding to the same aim of the activity). Two different subjects, starting from the same artefact, can develop different instruments.

The instrumental approach has been used in mathematics education to study how students learn mathematics with technology (Guin, Ruthven & Trouche 2005). For example with the artefact "graphic calculator", two grade 10 students can develop two different instruments for the aim "studying a function". One student can start with the graphic tools, without a preliminary choice of an appropriate window; while another can start with a table of values, in order to choose a window before trying to see the graph of the function.

The development of the instrument is a process called "instrumental genesis". This genesis comprises two intertwined movements: on the one hand, the features of the artefact influence the schemes developed by the subject, this is called "instrumentation". On the other hand, the subject him/herself modifies the artefact, according to his/her personal knowledge or choices: this is called instrumentalisation.

We claim that considering not only ICT, but all the resources available for the mathematics teacher requires a concept of resources overcoming the artefacts. Such a concept of resources has been introduced by Adler (2000), who considers that a resource for a teacher can be anything "likely to re-source the teacher's practice". An artefact can be a resource; but here the focus is on the use by the teacher. For example a teacher in preschool can use an orange (which is not an artefact) to provide a representation of a round shape. The students' productions are also important resources for the teacher.

The main principles of the documentational approach have been introduced in Gueudet and Trouche 2009, or Gueudet, Pepin and Trouche 2012 for example. We consider that a teacher, in his/her work, interacts with a variety of resources. The teacher looks for resources, sometimes just meets resources, stores them, then transforms them, associates several resources, sets them up in class etc. We call this the teacher's documentation work. Along this work, from a set of resources the teacher develops a document: a mixed entity, comprising the selected resources and a scheme of use of these resources. For example, a teacher can develop a document from the class textbook, for the aim "giving homework". He/she chooses two exercises corresponding to the lesson; one easy exercise, a direct application, and one more complex and gives them has homework for the next course. This is a stable organisation of his/her activity, hence a scheme (which can be described with more details, I will not present it here).

The development of a document is a process called a documentational genesis. Alike the instrumental approach, it is composed of two intertwined processes: instrumentation and instrumentalisation (Figure 1).

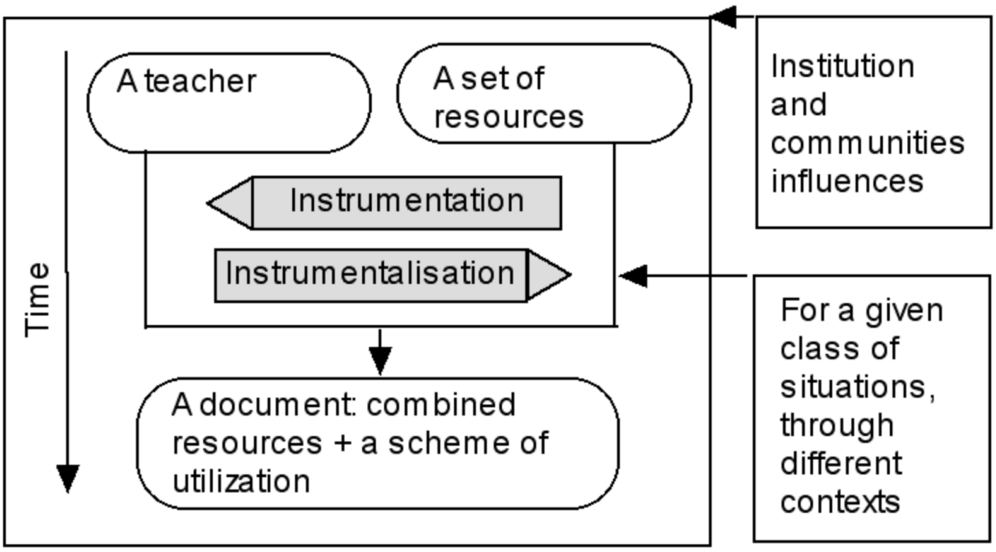


Table 1: Representation of a documentational genesis (Gueudet, Pepin & Trouche 2012).

Along his/her work, the teacher develops a resource system: a structured set of resources, organised according to the different aims in his/her activity: introducing new notions, practising learned techniques, assessing, for example.

Investigating the teachers' resources: methodology

Investigating the teachers' resources raises important methodological questions. Teachers can discover resources in many different places and at any moment: not only at school, but also at home; discussing with their colleagues, but also with their family etc. A researcher who wants to follow in details the use of resources by a teacher should stay with this teacher night and day! A second difficulty is that geneses are long-term processes. A scheme is a stable organisation; so observing schemes requires following the teachers over long periods of time. For all these reasons, we have developed a special methodology, called "reflexive investigation".

The main principles of this methodology are:

- A long-term follow-up of the teacher, ranging from several weeks to several years;
- A close association with the teacher, who will collect data him/herself: hence the name "reflexive investigation". When starting to work with teachers on their resources, they are generally not aware of the variety of resources they actually use. They can say things like: "you know, I use only a few resources, always the same". Working on the description of these resources, they become aware of their number and variety;
- A collection of all the resources used and produced;
- Observations in class, to confront the teacher's declaration and his/her actual practice.

The data produced following these principles include interviews, classroom videos, resources used and designed by the teacher (in particular students' productions) and different kinds of descriptions produced by the teacher: logbooks, or graphical representations of their resources. These representations, called "Schematic Representation of the Resources System" inform us about how the teacher views the organisation of his/her resources. Various treatments of these data can then be organised, according to the research question investigated.

The Documentational Approach can be used to study a large variety of questions: which evolutions of the design modes of resources? Which criteria guide the teachers' choices of resources, the modifications of the resources they choose? How does the work with resources influence teachers' professional development, when they work individually, or when they work collectively, for example in teacher education programs?

We develop below two examples of research works using the Documentational Approach, and investigating different kinds of questions in different contexts.

THE VIRTUAL ABACUS: A STUDY AT PRIMARY SCHOOL

Presentation of the virtual abacus

The Virtual abacus (figure 2) is an OER developed in France by Sésamath, an association of mathematics teachers producing online resources. Alike all other Sésamath resources, it is freely available online[1], and can also be downloaded to be used without Internet access. I briefly recall here the principles of the abacus.

Figure 2. An interactive exercise on the virtual abacus

The Chinese abacus is separated in two parts by a central bar (the material abacus must be used horizontally, while the virtual abacus appears as vertical). The central bar is called “the reading bar”: only the beads on this bar are considered as “activated”. There are two kinds of beads: 5-unit beads (two of them, in the upper part for the virtual abacus) and 1-unit beads (five of them, in the lower part of the abacus). The Chinese abacus comprises 13 vertical rods. Each rod corresponds to a rank of the place-value system: units, tens, hundreds, etc. (from the right to the left). There are several possibilities to display the same number on the Chinese abacus: for example 10 can be represented by two 5-unit beads on the last rod on the right (representing units), or by one 1-unit bead on the rod on its left (representing tenths).

On the virtual abacus, the beads can be moved using the mouse. Figure 2 represents an interactive Sésamath exercise, where the student is asked to display a given number. Here the student made a typical mistake: he/she used two 5-unit beads instead of two 1-unit beads.

We worked during several years within research and design groups, associating teachers, teacher educators, and researchers and designed different kinds of resources for the teachers (in particular within a French national project called "Mallette Mathématique pour l'école, financed by the ministry of education), and an online training path, around the virtual abacus (Gueudet & Bueno-Ravel 2016).

Integration of the virtual abacus by a teacher in a grade 4 class

Rose is a teacher at grade 4 (students aged 9 to 10 years old). In her class she has a computer for the teacher, a video projector, a visualizer, 15 laptops for the students and 12 material abaci.

We followed Rose in her class during a sequence of lessons devoted to "large numbers" (Poisard, Gueudet & Robin 2016). Rose uses clearly a resource system during this sequence. The technological resources: laptop, visualizer, virtual abaci etc. have been integrated in her usual resource system because of their possible link with the material abacus. Indeed Rose declares: "*It is important for the students to touch things and to move them*". This is typically an operational invariant: a theorem-in-action, a proposition considered as true, and leading the teacher's practice. For this reason, Rose wanted to use the abacus with her class; but it is too difficult to organise a lesson with only the material abacus, the teacher cannot observe simultaneously all the students, and the beads can move very quickly. Hence she decided to use the virtual abacus, together with the material one. She also used traditional students' sheets on paper with the laptops, and traditional posters on paper with the video-projector and visualizer.

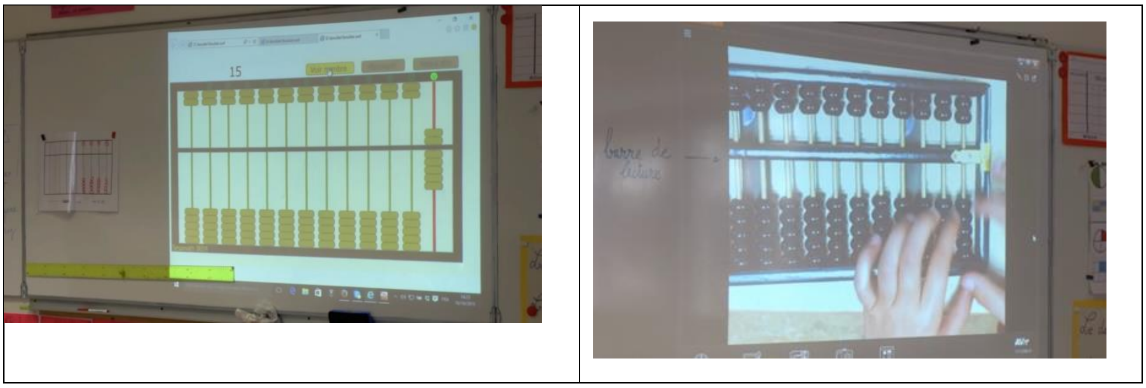


Figure 3. In Rose's class: Poster, Virtual abacus, visualizer (Poisard et al. 2016).

Rose combines the traditional resources and the technological resources during the all lesson. At the end of the lesson, she prepares an assessment on paper. The students have to draw on an empty abacus the beads to represent a given number (for example 91605). When she observes mistakes (for example Yann drew 9165, he forgot to leave an empty rod), she proposes an additional work on the virtual abacus. Indeed on this virtual abacus, it is possible (with a button called "see the number") to check which number is displayed: hence the students can work autonomously.

Proposing a training path for teachers

Rose discovered the existence of the virtual abacus because she participated to a teacher education program. The documentational approach suggests that the design of lessons by groups of teachers, using a given resource, is the best way to lead to the integration of this resource in the teachers' resource systems, and to a significant and sustainable change in their practice. For these reasons we designed a training path, which provides the structure and the content for a blended training (Riou-Azou, Dhont, Moumin & Poisard 2016).

Figure 4. M@gistère training path: "The Chinese abacus at primary school"

This training path proposes 5 steps, three in presence (1h30 each), and two as distant work. The most important choice is that during step 3 in presence, teams of teachers are formed, and work together to prepare a lesson with the abacus. The lesson is then implemented in classes (step 4); it is presented, discussed and amended during step 5 in presence. The collective documentation work of the teams is central in this training. The training path is available on the national platform M@gistère; the corresponding training can be organised anywhere in the country, by teacher trainers who are not the initial authors of the path, since all the resources to be used are available in the path.

DOCUMENTATION WORK AT HIGHER SECONDARY SCHOOL: "STUDY AND RESEARCH COURSES".

The study I present here belongs to the project REVEA, meaning "Living Resources for Teaching and Learning". In this national research project, we follow teachers systems of resources and their evolutions on four subjects: Mathematics, Physics, English and Technology. We followed in particular teachers in a high school during three years. We present here an extract of the case of Gwen, a mathematics teacher who decided in 2016-2017 to set up a "study and research course" entitled "how does a parabolic antenna work"? in her grade 10 class (Gueudet, Lebaud, Otero & Parra submitted).

A study and research course on parabolic antennas, context

Gwen is an experienced teacher: 35 years as upper secondary school teacher, and she participates for many years to groups in the local IREM (Institute for Research on Mathematics Education, proposing thematic groups associating teachers and researchers). She joined this way in September 2016 a group about Study and Research Courses. Study and Research Courses (SRC) have been introduced by Chevallard (2009) as an alternative proposition to the dominant teaching epistemology, where knowledge is presented to the students like works in a museum. At the opposite, the SRC starts by a "generative question"; then the students develop their own inquiry on this question, leading to sub-questions, partial answers etc. The teacher supports this inquiry, but it can develop in different directions, according to the students' choices. This way the meaning of the mathematics involved appears clearly: they are needed to answer to the question. Many research works have proposed SRC at secondary school or at university, concerning different mathematical topics (e.g. Llanos & Otero 2015, Barachet, Demichel & Noirfalise 2007, Fonseca 2011). Nevertheless, organizing an SRC in traditional classes is very difficult for teachers, because of the institutional constraints: they have to teach a given content (the official curriculum) in a limited time. Some of the research works on SRC have produced resources to support the implementation in class of SRC by the teachers. This way Gwen has found a booklet proposing SRC, written by a team of an IREM (Bellenoue et al. 2014), and she has decided to set up the SRC called "how does a parabolic antenna work" in her grade 11 class. We have followed this process using the reflective investigation method described above: we set up an interview with Gwen at the beginning of the SRC, observed all the sessions in class, collected all the resources used and produced during the SRC, and had a final interview with Gwen. We analysed all this data by searching for possible operational invariants in Gwen's declarations, then confronting them to Gwen's effective activity in order to identify the operational invariants guiding her action and their consequences. We present below examples of these analyses.

Analysing the documentation work of Gwen

The first important element of the documentation work of Gwen is her decision to use the booklet and set up the "Parabolic Antenna" SRC in her class. This decision was guided by several operational invariants (identified through her declaration in the interviews):

- "Giving problems and exercises which are related to a real-life context raises students' motivation" guided her general intention to give an SRC;
- "The official curriculum of grade 11 must be entirely treated in class" guided her choice of the "Parabolic Antenna" path, which covers several aspects of the program: equations of right lines, of circles, second degree curves, tangents etc.
- Another important operational invariant, for the choice of the "Parabolic Antenna" was that it proposed links between different contents, which are usually taught at different moments of the school year, like the equations of right lines and of circles. This is linked with the operational invariant: "It is interesting to modify the usual organization of the contents".

Nevertheless, the SRC that Gwen organized in her class is not the SRC planned in the booklet for several reasons.

The major source of modifications is linked with operational invariants, theorems-in-action, that can be formulated as *"The available time is limited"*, and "*The teacher must keep control of the time*". As a consequence, Gwen modifies the SRC, adding many elements to guide the students –finally the course does not meet the criteria of an SRC.

The booklet already presents a course more guided than an SRC as described by the theory – naturally it is not possible to keep open all the possibilities that the students are likely to investigate, starting from the question: "how does a parabolic antenna work?" For example, the booklet proposes a study of cylindrical mirrors, and how a beam reflects (or not) on such a mirror.

Étude 1 : Miroir cylindrique

Partie 3 : Rayons ne se réfléchissant pas
Soit le cercle C_1 de centre O et de rayon 6 et $B_1(6 ; 10)$.

1) Construire avec *GeoGebra* les rayons issus de B_1 qui ne se réfléchissent pas sur le miroir. Justifier tous les résultats qui apparaissent dans la fenêtre algèbre.
2) Faire de même pour les rayons issus de $B_2(18 ;18)$.

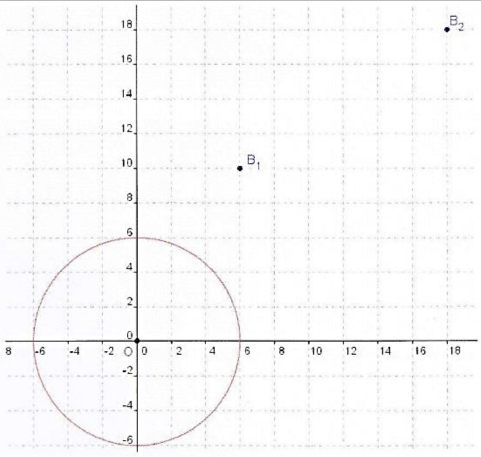


Figure 4. Activity in the booklet: Beams that do not reflect on a cylindrical mirror.

The students are provided with a GeoGebra file, the circle represents the cylindrical mirror of center O. They must construct on GeoGebra the beams coming from the point B_1 that do not reflect on the cylindrical mirror – which means constructing the two tangents to the circle passing through B_1. They observe the equations in the algebra window of GeoGebra, and must compute themselves these equations on paper.

Gwen modifies this activity as follows. The students work by group on paper – not on GeoGebra. They have a sheet with a figure drawn by Gwen on GeoGebra (figure 5). On the figure provided by Gwen, the circle of diameter [OB], which intersections with the initial circle are the two points of contact of the tangents with the mirror circle (indeed the tangents are perpendicular to the radius of this circle) is already present, and the two tangents are constructed as well. Then progressive questions guide the students: find the equations of the two circles, find the coordinates of their intersections D and E, and finally find the equations of the two straight lines (BD) and (BE).

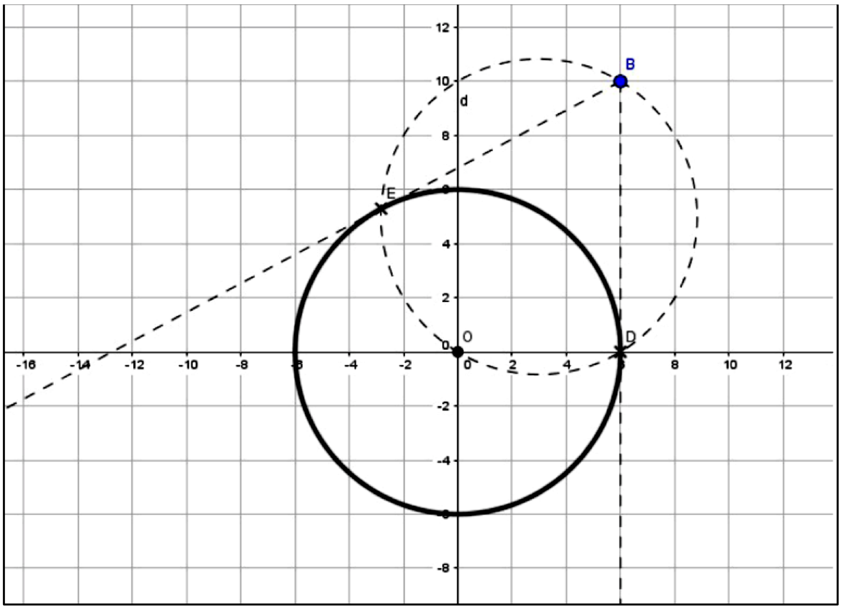


Figure 5. Activity on spherical mirrors, modified by Gwen.

Gwen introduces many modifications of the SRC described in the booklet. Here we only give this example. Our aim is not to criticize Gwen's courses: she uses a very rich system of resources, articulating the booklet with the class textbook, and other resources found on the Internet. The operational invariants leading her to guide the students much more than in an SRC come from real institutional constraints.

We only wanted to exemplify here how teachers' knowledge guides their work with resources: the choice of initial resources, and how they modify these resources. On the other hand, the work with the booklet has also modified Gwen's practices and knowledge. She modified her usual order for the presentation of concepts and developed an operational invariant like "*It is interesting to teach the equations of straight lines and the equations of circles together*". She also mentions, in the final interview, how important it is to evidence the meaning of the mathematical concepts taught, and this is directly linked with her experience with the SRC.

CONCLUSIONS

Our conclusions are linked with the two cases presented above, but also with many other cases we studied across different projects using the documentational approach.

The importance of the work of teachers with resources appears clearly. Teachers interact with many resources; the digital resources, and OER in particular intervene in their work in class and out-of-class. The documentational approach is helpful to understand the consequences of these interactions. It is now used by many colleagues, for all levels of class and for teacher education. It has been used also outside of mathematics: in physics (Alturkmani 2015), chemistry (Hammoud 2012), but also in English (Gruson, Gueudet, Le Hénaff & Lebaud to appear). The comparison between different subjects in terms of interactions between teachers and resources is very informative, and can also contribute to teacher development. In one project were we worked with teachers of English and teachers of mathematics, the teachers of mathematics started asking their students for oral productions (recorded on an MP3), observing that such resources were used by their colleagues in English.

In our different projects, we observe important evolutions linked with digital resources. For example, the collective design by teachers of e-textbooks (Gueudet, Pepin, Sabra & Trouche 2016) is a completely new phenomenon. But we also observe a stability in the practice of the teachers, and this is explained by the documentational approach. The teachers choose indeed, and modify, the resources according to their professional knowledge. Hence even with many resources freely available, the changes in teachers' practices happen very gradually.

Note

1. http://cii.sesamath.net/lille/exos_boulier/boulier.swf

REFERENCES

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education, *Journal of Mathematics Teacher Education* 3, 205–224.

Allturkmani, M.D. (2015). Genèse des affinités disciplinaire et didactique et genèse documentaire : le cas des professeurs de physique-chimie en France. Thèse de l'ENS Lyon, France, available at https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01256020.

Ball, D.L., & Cohen, D. (1996). Reform by the book: what is – or might be – the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform? *Educational Researcher*, *25*(9), 6-8, 14.

Barachet, F.; Demichel, Y.; & Noirfalise, R. (2007). Activités d'étude et de recherche (AER) pour dynamiser l'étude de la géométrie dans l'espace en classe de seconde. *Petit X*, 75, 34-49.

Bellenoue, F. et al. (2014). *Enseigner les mathématiques en 1ère S : Trois parcours sur l'analyse et la géométrie analytique.* Poitiers : IREM de Poitiers.

Chevallard, Y. (2009a). *La notion de PER : problèmes et avancées*. Consulté le 26 juin 2017 : http://yves.chevallard.free.fr/

European Commission (2013). Communication from the Commission to the European Parliament, the Council, the European Economic and Social Committee and the Committee of the Regions. Opening up Education: Innovative Teaching and learning for all through new technologies and open educational resources. Retrieved from http://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=CELEX%3A52013DC0654

Fan, L., Jones, K., Wang, J., & Xu, B. (Eds.) (2013). Textbook research in mathematics education. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *45*(5).

Fonseca, C. (2011). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: los Recorridos de Estudio e Investigación. *Educación Matemática*, 23(1), 97-121.

Gruson, B., Gueudet, G., Le Hénaff, C., & Lebaud, M.-P. (to appear). Investigating teachers' work with digital resources. A comparison between the teaching of Mathematics and English. *Revue Suisse des Sciences de l'Education.*

Gueudet, G., & Bueno-Ravel, L. (2016). Perspectives didactiques sur le boulier : un questionnement renouvelé. In Poisard, C. (ed.) *Mathematice 51 numéro spécial Les ressources virtuelles et matérielles en mathématiques : des instruments pour travailler en classe sur le nombre, la numération et le calcul* http://revue.sesamath.net/spip.php?article887

Gueudet, G., Lebaud, M.-P., Otero, M.-R., & Parra, V. (submitted). Mise en œuvre d'un PER et ressources pour les professeurs : une étude de cas en Première S. *Recherches en Didactique des Mathématiques*.

Gueudet, G., Pepin, B., Sabra, H., & Trouche, L. (2016). Collective design of an e-textbook: teachers' collective documentation. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19(2-3), 187-203.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for teachers? *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 199-218.

Guin, D., Ruthven, K., & Trouche, L. (eds.) (2005). *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument*. New York: Springer.

Hammoud, R. (2012). *Le travail collectif des professeurs en chimie comme levier pour la mise en œuvre de démarches d'investigation et le développement des connaissances professionnelles. Contribution au développement de l'approche documentaire du didactique.* Thèse de l'Université de Lyon 1. Retrieved at https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-

00762964.

Hoyles, C., & Lagrange, J.-B. (eds.) (2010). *Mathematics Education and Technology - Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study.* New York: Springer.

Llanos, V. C.; Otero, M. R. (2015). Inserción de un REI en la escuela secundaria: el caso de las funciones polinómicas de segundo grado. *Relime*, 18 (2).

Organization for Economic Cooperation and Development. (2007). *Giving knowledge for free: The emergence of open educational resources.* Paris: Centre for Educational Research and Innovation, OECD, retrieved from http://www.oecd.org/edu/ceri/38654317.pdf.

Pepin B., & Gueudet G. (2014). Curriculum Resources and Textbooks. In Lerman S. (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 132-135).

Pepin, B., & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures. *ZDM- The International Journal on Mathematics Education, 33* (5), 158-175.

Poisard, C., Gueudet, G., & Robin, R. (2016). Ressources technologiques en mathématiques : les grands nombres au CM1. *Math-Ecole 226*, 18-22.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Remillard, J. (2012). Modes of engagement: understanding teachers' transactions with mathematics curriculum resources. In G. Gueudet, B. Pepin & L. Trouche (Eds.), *Mathematics Curriculum Material and Teacher Development: from text to 'lived' resources* (pp. 105-122). New York: Springer.

Riou-Azou, G., Dhont, D., Moumin, E. & Poisard, C. (2016). Le boulier chinois, une ressource pour la classe et pour la formation des professeurs. In Poisard, C. (ed.) *Mathematice 51 numéro spécial Les ressources virtuelles et matérielles en mathématiques : des instruments pour travailler en classe sur le nombre, la numération et le calcul*

Ruthven, K. (2012). Constituting digital tools and material as classroom resources: an example in dynamic geometry. In Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L. (Eds.) *From Text to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development*, (pp. 83-103). NY: Springer.

Trouche, L., Gueudet, G. & Pepin, B. (to appear). Open Educational resources: a chance for opening mathematics teachers' resource systems? In L. Fan, L. Trouche, C. Qi, S. Rezat, & J. Visnovska (Eds) *Research on Mathematics Textbooks and Teachers' Resources: Advances and issues.* New York, NY: Springer.

Vergnaud, G. (1998). Toward a cognitive theory of practice. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (eds.), *Mathematics education as a research domain: a search for identity* (pp. 227-241). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in society*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

ΟΡΙΖΟΥΜΕ, ΕΠΙΛΥΟΥΜΕ, ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΟΥΜΕ, ΑΝΑΠΤΥΣΣΟΥΜΕ ΘΕΩΡΙΕΣ ...ΟΨΕΙΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Μαμωνά-Downs Γιάννα

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

mamona@upatras.gr

> And so he began again, now D major, now D minor, and forward each scale, moving up, each time a variation on its beginning, structure giving rise to possibilities.
>
> The Piano Tuner by Daniel Mason

Το θέμα του 7ουΣυνεδρίου της ΕΝΕΔΙΜ είναι 'Μαθηματική Γνώση και Διδακτικές Πρακτικές'. Η εισήγησή μου θα εστιάζει στις κύριες διαστάσεις της μαθηματικής εργασίας που παράγουν τη μαθηματική γνώση στο επίπεδο της Τριτοβάθμιας εκπαίδευσης: Επίλυση Προβλήματος, Απόδειξη, Ορισμοί, Ανάπτυξη Θεωρίας.

Η επίλυση προβλημάτων αποτελεί την αφετηρία της δουλειάς στα μαθηματικά. Θα αναφερθώ κυρίως στα θέματα στα οποία επικεντρώνεται η έρευνα στη Διδακτική Μαθηματικών και που συνιστούν τη μαθησιακή προοπτική της Επίλυσης Προβλήματος.

Η Απόδειξη μπορεί να θεωρηθεί ότι υπόκειται στην επίλυση προβλήματος, αλλά παρόλα αυτά υπάρχουν διακριτές διαφορές μεταξύ των δύο. Η απόδειξη έχει μια αυστηρή λογική δομή και συντάσσεται στη 'γλώσσα της απόδειξης', εισάγοντας μια εντελώς νέα οπτική για την επιχειρηματολογία. Στο πλαίσιο της εκπαίδευσης, η απόδειξη βάζει ερωτήματα σχετικά με τον βαθμό λογικής αυστηρότητας, φορμαλιστικής παρουσίασης, γενίκευσης αλλά και εξαγωγής νοήματος και πειθούς.

Ως προς τους ορισμούς, μας ενδιαφέρει η κατανόηση και αφομοίωσή τους στο πλαίσιο της ανάπτυξης της μαθηματικής θεωρίας. Είναι η προσέγγιση της 'καθοδηγούμενης επανεφεύρεσης' ορισμών κατά τη διδασκαλία, όπως υποστηρίζουν κάποιοι ερευνητές, εφικτή ή ακόμη και επιθυμητή; Ποια η σημασία της εμπλοκής φοιτητών στη δημιουργία ισοδύναμων ορισμών;

Τέλος, θα μας απασχολήσει η ανάπτυξη της θεωρίας στα πλαίσια ενός αξιωματικού συστήματος. Κατά τον Tall (2004): "Μετασχηματίζει τις προηγούμενες εμπειρίες στον νου των φοιτητών, καθώς εργάζονται όχι πλέον με οικεία αντικείμενα της εμπειρίας, αλλά με αξιώματα που διατυπώνονται προσεκτικά, προκειμένου να οριστούν οι μαθηματικές δομές μέσω χαρακτηριστικών ιδιοτήτων". Η εργασία αυτή αναδεικνύει τον *ρόλο και τον χαρακτήρα της μαθηματικής δομής του μαθηματικού περιβάλλοντος στο οποίο δουλεύουμε.*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην ομιλία αυτή θα επικεντρωθώ σε εκείνες τις πτυχές της Μαθηματικής Παιδείας που διαμορφώνουν τη μαθηματική γνώση που παρέχεται στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση, ιδιαίτερα στα Τμήματα Μαθηματικών απ'όπου κυρίως αντλώ και την εμπειρία. Είναι φυσικό εδώ να τίθεται εξαρχής το καίριο θέμα της μετάβασης από τη Δευτεροβάθμια στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση. Το θέμα αυτό αποτελεί μέρος της θεματικής του Στρογγυλού Τραπεζιού του Συνεδρίου, επομένως δεν εστιάζω σ΄αυτό καθαυτό αλλά αναμφίβολα διαπερνά την προβληματική που θα αναπτύξω.

Η μαθηματική γνώση στο επίπεδο αυτό αποκαλείται *προχωρημένα μαθηματικά* (advanced mathematics) και η έρευνα στη Διδακτική του αντικειμένου κωδικοποιείται διεθνώς με τον όρο AMT (Advanced Mathematical Thinking), τουλάχιστον όπως κάποιοι από εμάς αποδίδουμε στον όρο την αρχική του σημασία. Η γνώση αυτή διαμορφώθηκε (και διαμορφώνεται) διαχρονικά μέσω της επίλυσης *ανοικτών προβλημάτων* της μαθηματικής επιστήμης.

Ποια είναι όμως τα κύρια χαρακτηριστικά που θα αποδίδαμε στα προχωρημένα μαθηματικά; Πρώτα πρώτα υπάρχει μια σημαντική μεταστροφή από την σχολική εμπειρία στο πώς τίθενται τα ερωτήματα που συνεπάγονται την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης που παρέχεται στο πανεπιστήμιο. Πλέον, αντί να προτάσσουμε το 'να βρείτε' ζητούμε, ως επί το πλείστον, 'να δείξετε' ή 'να αποδείξετε'. Έτσι, αντί ενός αποτελέσματος, το ζητούμενο είναι ένα κατάλληλο επιχείρημα, συμβατό με τους νόμους της Λογικής, το οποίο διαμορφώνεται σε αυστηρή γλώσσα, στη *γλώσσα της απόδειξης*, όπως θα εξειδικεύσω παρακάτω. Επίσης, στο περιβάλλον ενός *αξιωματικού συστήματος* (που αποτελεί το φυσικό περιβάλλον της μαθηματικής δουλειάς στο πανεπιστήμιο),ο λόγος που θέτουμε (ή ακόμη καλύτερα διαμορφώνουμε) *ορισμούς* έγκειται στη συμβολή τους δυνητικά στην περαιτέρω *ανάπτυξη της θεωρίας*. Εξαιτίας μάλιστα του σημαίνοντα ρόλου που έχουν στα προχωρημένα μαθηματικά οι *ισοδύναμες προτάσεις*, πολλές φορές το status της *απόδειξης* και του *ορισμού* εναλλάσσεται. Το καίριο όμως χαρακτηριστικό στοιχείο των προχωρημένων μαθηματικών εντοπίζεται στις διεργασίες ανίχνευσης και προσδιορισμού της *δομής* που συσχετίζει την υπόθεση με το προτεινόμενο συμπέρασμα των υπό εξέταση προτάσεων στο συγκεκριμένο αξιωματικό σύστημα. Επικεντρώνοντας την προσοχή μας στη *μαθηματική δομή*, επιλέγουμε μια θεωρητική οπτική για την

Εκπαίδευση των Μαθηματικών σε προχωρημένο επίπεδο, η οποία δεν εξαρτάται τόσο πολύ από την υπόθεση της διδασκαλίας του αντικειμένου ως ένα *continuum/συνεχές* από λιγότερο σε περισσότερο αυστηρές μορφές αιτιολόγησης, όπως κάποιοι ερευνητές της Διδακτικής ισχυρίζονται. Η οπτική αυτή, που έχουμε αποκαλέσει RMS, είναι πιστεύω περισσότερο συμβατή και με τον τρόπο που σκέπτονται οι ερευνητές μαθηματικοί. Και αυτό μας ενδιαφέρει (ή πρέπει να μας ενδιαφέρει) πάρα πολύ.Το Συνέδριό μας σήμερα φιλοξενείται στο Τμήμα Μαθηματικών του Καποδιστριακού Πανεπιστημίου, έτσι δεν μπορεί παρά να αναλογιζόμαστε επιτακτικά την ανάγκη για την επίτευξη του “Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground, (2014)”, όπως τιτλοφορείται ο τόμος με τα πρακτικά του Συνεδρίου που έλαβε χώρα στο Πανεπιστήμιο Ben Gurion, με αφορμή τη συνταξιοδότηση του Ted Eisenberg. Στην ομιλία μου στο Συνέδριο εκείνο έθεσα, από τη σκοπιά της ερευνήτριας στο αντικείμενο AMT, δέκα σημεία που μπορούν να καλλιεργήσουν αυτήν ακριβώς τη συνεργασία. Θα σταθώ μόνο σε δύο από αυτά:

Πρώτα στην ανάγκη της από κοινού οργάνωσης (από ερευνητές μαθηματικούς και ερευνητές της Διδακτικής Μαθηματικών), μιας ‘ύλης’ και του τρόπου επικοινωνίας της, που αφορά στην εκπαίδευση μελλοντικών δασκάλων των μαθηματικών.

Δεύτερον, στον τρόπο της αμοιβαίας σχέσης των δύο κοινοτήτων. Δεν αρκεί η ‘μελέτη’ του τρόπου διδασκαλίας των διδασκόντων στα Τμήματα Μαθηματικών και η αποτύπωση των συμπερασμάτων σε κάποια περιοδικά του δικού μας χώρου που είτε δεν φτάνουν στα χέρια τους ή όταν φτάνουν η τεχνητή γλώσσα τους αποθαρρύνει να τα μελετήσουν. Η επικοινωνία πρέπει να σμιλεύεται καθημερινά και με άξονα κάθε φορά τη διδασκαλία κάποιας συγκεκριμένης θεματικής. Αυτό φυσικά απαιτεί σεβασμό στην ‘προοπτική’ του άλλου.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Η Επίλυση Προβλήματος στο πλαίσιο της μαθηματικής παιδείας αποτελεί μια μαθησιακή προοπτική μέσω της οποίας στοχεύουμε να ενθαρρύνουμε τους μαθητές και φοιτητές μας να ‘κάνουν’ μαθηματικά, αποκτώντας έτσι και μια αίσθηση της δημιουργίας του αντικειμένου.

Στο πρόσφατο βιβλίο μας «Επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά. Η πορεία της σκέψης κατά την αναζήτηση της λύσης» (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2017), εξετάζονται και αναλύονται τα βασικά θέματα που διερευνώνται στην Επίλυση Προβλήματος στη Διδακτική Μαθηματικών όπως: Ευρετικές (η κληρονομιά του Polya), Νοερή Επιχειρηματολογία, Έλεγχος (Μεταγνώση), Διερεύνηση, Ανάκληση και

Εφαρμογή της μαθηματικής γνώσης, Μαθηματικοποίηση/Μοντελοποίηση, χρήση Συναρτήσεων ως εργαλείων στην επίλυση προβλημάτων, αλληλοσυσχέτιση Προβλήματος και Απόδειξης. Όλα τα θέματα προφανώς αλληλοσυνδέονται αλλά θα περιοριστώ σήμερα κατ' αρχήν στην Ανάκληση και Εφαρμογή της μαθηματικής γνώσης και σε ένα ειδικότερο θέμα, αυτό των Τεχνικών επίλυσης. Στην ενότητα της Απόδειξης, θα αναφερθώ στη συσχέτιση μεταξύ των δύο καθώς και στο θέμα της Μαθηματικοποίησης/Μοντελοποίησης (που εμπεριέχει και τη δημιουργία Συναρτήσεων ως εργαλείων στην επίλυση προβλημάτων).

Ανάκληση και Εφαρμογή της μαθηματικής γνώσης

Η δυνατότητα να ανακαλούμε τη γνώση από το μαθηματικό μας υπόβαθρο για να αντιμετωπίσουμε ένα πρόβλημα έχει πρωταρχική σημασία. Οι φοιτητές μου συχνά εκφράζουν ανοικτά τη δυσκολία τους σ' αυτό. Πώς όμως θα ενεργοποιούμε κάθε φορά αυτήν την 'αδρανή' γνώση, όπως εύστοχα την είχε χαρακτηρήσει ο Whitehead (1929); Η ικανότητα αυτή καλλιεργείται σε δύο επίπεδα. Το πρώτο είναι να οργανώνουμε τη μαθηματική γνώση στο μυαλό μας, καθώς τη μαθαίνουμε και την αναπτύσσουμε, κατά τέτοιον τρόπο ώστε να είναι πρόσφορη για εφαρμογή στην επίλυση προβλημάτων. Το δεύτερο επίπεδο είναι να αναπτύξουμε τη δυνατότητα δημιουργίας συσχετισμών όταν δουλεύουμε στα Μαθηματικά. Η δυνατότητα τώρα του εντοπισμού συσχετίσεων, κατά την επίλυση προβλημάτων, είναι αποτέλεσμα της επίγνωσης της μαθηματικής δομής του περιβάλλοντος του προβλήματος από τον λύτη. Αλλά πώς αυτό επιτυγχάνεται; Θα ήθελα εδώ να διευκρινήσω ότι ως μαθηματική γνώση εννοώ κυρίως τη γνώση του μαθηματικού περιεχομένου αυτού καθ' αυτού και όχι τη γνώση των ευρετικών, τη μεταγνώση, ή ακόμη και τη διαδικαστική γνώση (procedural knowledge), όπως τους διάφορους τύπους και αλγορίθμους που συνήθως συγκρατούμε στη μνήμη μας.

Πρώτα όμως να εξειδικεύσω την έννοια της μαθηματικής δομής. Ακολουθώντας τον Rickart (1996), ως μαθηματική δομή θεωρώ ένα σύνολο αντικειμένων μαζί με τις σχέσεις που ισχύουν μεταξύ τους. Παρά το ότι στα αξιωματικά συστήματα η δομή μορφοποιείται σε υψηλά αφηρημένο επίπεδο, είναι επίσης δυνατόν να ταυτοποιείται τοπικά στο μαθηματικό περιβάλλον των προβλημάτων που καλούμαστε να λύσουμε. Άρα, αυτό που έχει σημασία είναι να εξάγουμε τις βασικές εκείνες σχέσεις/ιδιότητες που επιτρέπουν την ανάπτυξη της λύσης. Κατ' αυτόν τον τρόπο είμαστε σε θέση να διακρίνουμε παράλληλες δομές στα μαθηματικά περιβάλλοντα διαφορετικών προβλημάτων και ακόμη σε διαφορετικά μαθηματικά αντικείμενα, πράγμα που μας καθιστά ικανούς να προσφεύγουμε στην κατάλληλη γνώση κατά την επίλυση.

Σχετικά με αυτό, μου αρέσει συχνά να αναφέρομαι στο παράδειγμα της σύγκλισης της ακολουθίας Fibonacci (Dorier 1995).Όταν ζητάω από τους φοιτητές μου να βρουν το όριό της, κάποιοι καταγράφουν μερικούς από τους πρώτους όρους της ακολουθίας:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$a_6 \dots$
a	b	$(a+b)$	$(a+2b)$	$(2a+3b)$	$(3a+5b)$

και κάποιοι γενικεύουν:

$a_i = n_i a + m_i b$, $\quad a_{i+1} = n_{i+1} a + m_{i+1} b$

Πάντοτε, $\quad n_{i+1} > n_i \quad (i \geq 4)$ και $\quad m_{i+1} > m_i$.

Επομένως, απαντούν ότι εάν τα a και b είναι και τα δύο θετικά, τότε το $\lim(a_i)$ όταν $i \to \infty$ είναι το ∞, ενώ εάν τα a και b είναι και τα δύο αρνητικά, τότε το $\lim(a_i)$ όταν $i \to \infty$ είναι το $-\infty$.

Η περίπτωση όπου τα a και b έχουν διαφορετικά πρόσημα δεν αντιμετωπίζεται εύκολα, συνήθως δε στους φοιτητές δεν γεννιέται καν το ερώτημα. Οι περισσότεροι λύτες που έχουν στη διάθεσή τους χρόνο για να διερευνήσουν διάφορες περιπτώσεις, τις περισσότερες φορές διατυπώνουν την εικασία ότι όλες οι ακολουθίες Fibonacci αποκλίνουν είτε στο ∞ ή στο $-\infty$.

Κάνοντας όμως μια μεταστροφή στο μαθηματικό περιβάλλον του προβλήματος, αντιμετωπίζουμε την κατάσταση πιο 'στρουκτουραλιστικά'. Προσέχουμε ότι οι δύο αρχικοί όροι, $a_1 = a$ και $a_2 = b$, μπορούν να εκληφθούν ως δύο ανεξάρτητες μεταβλητές a και b, με (a, b) τυχόν σημείο του επιπέδου. Στην περίπτωση αυτή, θεωρούμε όλες τις ακολουθίες Fibonacci μαζί που έτσι συνιστούν έναν Ευκλείδειο Χώρο δύο διαστάσεων. (Με άλλα λόγια, υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των ακολουθιών Fibonacci και του R^2.) Αυτό σημαίνει ότι είναι δυνατόν να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα σε περιβάλλον Γραμμικής Άλγεβρας. Λεπτομερής παρουσίαση υπάρχει στο βιβλίο Ε. Π.

Τεχνικές

Η καλλιέργεια της ικανότητας στους φοιτητές μας να διαβλέπουν τη μαθηματική δομή στα προβλήματα που αντιμετωπίζουν είναι ουσιαστική για να είναι σε θέση να ανασύρουν κάθε φορά από το μυαλό τους τη γνώση που θα βοηθήσει στην επίλυση. Ακόμη και οι διάφοροι αλγόριθμοι που έχουμε στη μνήμη μας δεν μπορεί να αποβούν χρήσιμοι παρά μόνον αν έχουμε εκτιμήσει τη δομική τους θεμελίωση. Πώς θα το επιτύχουμε αυτό; Είναι φυσικό όσοι διδάσκουμε Μαθηματικά να θέλουμε να συστηματοποιούμε συγκεκριμένες προσεγγίσεις που θα βοηθούν την πρόσβαση στην αναγκαία γνώση. Μία προσέγγιση που προτείνουμε σ' αυτήν την κατεύθυνση είναι η ανάπτυξη *τεχνικών*. Τι εννοούμε με τον όρο τεχνική; Μια *τεχνική* καθορίζει ορισμένα σταθερά βήματα επιχειρηματολογίας που οδηγούν σε ένα αποτέλεσμα που,στη γενικότητά του, ο λύτης το αντιλαμβάνεται από την αρχή. Η *τεχνική* έχει μια αλγοριθμική διάσταση όσον αφορά στα βήματα που ακολουθούνται, αλλά ενέχει επίσης και μια ισχυρή μη-αλγοριθμική διάσταση στην πραγμάτωση των βημάτων αυτών: εδώ είναι που υπεισέρχεται η επίλυση προβλήματος. Για παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε τη Μαθηματική Επαγωγή ως *τεχνική* (αναφέρομαι φυσικά σε καταστάσεις που δεν αποτελούν τετριμμένες εφαρμογές της Μαθηματικής Επαγωγής). Στην εργασία των Mamona-Downs και Downs (2004) περιγράφεται μια διδακτική ακολουθία που έχει ως σκοπό να αποκτήσουν οι φοιτητές συνειδητή επίγνωση στοχευμένων *τεχνικών* επίλυσης προβλήματος. Η έρευνα πεδίου που παρουσιάζεται στην εργασία αυτή εξειδικεύει τη διδακτική ακολουθία ειδικά για την *τεχνική της κατασκευής αμφιμονοσήμαντων συναρτήσεων* για τον υπολογισμό πληθαρίθμων συγκεκριμένων συνόλων. Η *τεχνική* αυτή επελέγη για δύο κυρίως λόγους:

α. Για τη μαθηματική της βαρύτητα αυτή καθαυτή (στην απαρίθμηση πληθαρίθμων συνόλων, στην άλγεβρα των ισομορφισμών, στη συνδυαστική κ.α.).

β. Για την εννοιακή της διαύγεια. Εάν το ενδιαφέρον μας από ερευνητικής και μαθησιακής πλευράς γενικότερα είναι να διαμορφώσουμε τη συνάρτηση στο περιβάλλον του προβλήματος, δεν θα θέλαμε να προκύψουν γνωστικές δυσκολίες μαθηματικής φύσης στους φοιτητές **μετά** τον σχηματισμό της.

Κλείνοντας το θέμα των *τεχνικών*, θα ήθελα να αναφέρω ότι στη διδακτική πρακτική καλό θα είναι να προτείνουμε 'τεχνικά παρόμοια' προβλήματα για να διευκολύνουμε τους σπουδαστές να εξάγουν την *τεχνική*, χωρίς να φοβόμαστε ότι είμαστε «too leading». Αυτό γιατί στο ζήτημα της 'μεταφοράς' (transfer problem) (Greer and Harel, 1998), η διδακτική και η ερευνητική εμπειρία καταδεικνύει τη δυσκολία των φοιτητών να αναγνωρίσουν ομοιότητες σε προβλήματα με εντελώς ανάλογη δομή.

Σημειώνω ότι η έρευνα στην Επίλυση Προβλήματος δεν κυριαρχεί στο επίπεδο ΑΜΤ. Οι ερευνητές της Διδακτικής στην Επίλυση Προβλήματος συνήθως επιλέγουν να μην ‘παρεμβάλλεται’ προχωρημένη μαθηματική θεωρία στα ερευνητικά τους εγχειρήματα, και σωστά θα έλεγα. Το να μπορεί κανείς να λύνει προβλήματα στα μαθηματικά είναι μια θεμελιώδης ικανότητα/δεξιότητα που δεν περιορίζεται σε ένα εξειδικευμένο μαθηματικό πεδίο.

Στην εκπαιδευτική διαδικασία τώρα, η επίλυση προβλημάτων (όπως και η απόδειξη) αντιπροσωπεύει δραστηριότητες για τις οποίες η μαθηματική δομή είναι δεδομένη, κάτι που δεν ισχύει στην αυθεντική δημιουργία των μαθηματικών. Για να δοθεί στο πλαίσιο της εκπαίδευσης μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα του πώς παράγονται τα μαθηματικά, κάποιοι ερευνητές έστρεψαν την προσοχή τους στη δημιουργία προβλήματος (Problem Posing). Αλλά και αυτή η ερευνητική προοπτική συνήθως πραγματώνεται στο πλαίσιο των πρώτων σταδίων της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ως επί το πλείστον, δίνονται φυσικά/πραγματιστικά περιβάλλοντα και τα υποκείμενα της έρευνας καλούνται με βάση αυτά να θέσουν προβλήματα. Τα παραγόμενα προβλήματα σπάνια διαπερνούν το δοθέν περιβάλλον και, συνήθως, δεν είναι κατάλληλα για μαθηματική επεξεργασία, όπως έδειξαν και τα πρώτα ερευνητικά αποτελέσματα στη δημιουργία προβλήματος στο περιβάλλον του ‘τραπεζιού του μπιλιάρδου’ (Silver, Mamona-Downs etal. 1996). Στο επίπεδο AMT, η έρευνα στη δημιουργία προβλήματος μπορεί να αποδώσει, αν συνδεθεί στενά με την ανάπτυξη της μαθηματικής θεωρίας ώστε να υπάρχει το μαθησιακό κίνητρο αλλά και μια αίσθηση κατεύθυνσης της όλης δραστηριότητας. Ως ένα απλό παράδειγμα, αναφέρω εδώ την περίπτωση στην Πραγματική Ανάλυση όταν προσπαθούμε να εκμαιεύσουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής από το Θεώρημα Rolle. Καθώς οι ίδιοι οι μαθητευόμενοι διαμορφώνουν την πρόταση, θέτουν στην ουσία ένα νέο πρόβλημα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Με την *απόδειξη* εισερχόμαστε σε ένα πεδίο που είναι σύνθετο από εκπαιδευτικής πλευράς. Ενέχει ερωτήματα σχετικά με την αυστηρότητα, τη λογική, τον φορμαλισμό, αλλά και ερωτήματα πειθούς, κατανόησης, γενίκευσης και διαχείρισης ίσως ιδιαίτερα περίπλοκων μαθηματικών δομών. Είναι αναμενόμενο, επομένως, να επικρατεί ασυμφωνία ως προς τι εκλαμβάνει ο καθένας μας ως ‘απόδειξη’. Ίσως αυτό που κυρίως ξεχωρίζει την απόδειξη από την επίλυση προβλήματος είναι το γεγονός ότι η *απόδειξη* απαιτεί φορμαλιστική ανάπτυξη. Επίσης, η προς απόδειξη πρόταση έχει ζωτική σημασία σε μια μαθηματική θεωρία και επομένως η απόδειξή της υπάγεται σε συγκεκριμένες μαθηματικές ανάγκες που πολλές φορές καθιστούν την επιχειρηματολογία μάλλον δύσκαμπτη.

Παραλληλίζοντας τη βαθειά φιλοσοφική διαφορά μεταξύ *λογικισμού* και *ιντουισιονισμού* (Kline, M., 1972), ανακύπτει το παιδαγωγικό ζήτημα του τι βαθμός αυστηρότητας αναμένεται στο πλαίσιο της Μαθηματικής Παιδείας. Βλέπε Thurston, W.P. (1995) και Hanna, G. & Jahnke N. (1996).

Αν ακόμη και ερευνητικές εργασίες στα μαθηματικά περιοδικά διαφέρουν ως προς την αυστηρότητα της παρουσίασης, πολύ περισσότερο συγκεχυμένη είναι η κατάσταση στην εκπαίδευση. Οι εκπαιδευτικοί συνήθως θεωρούν την *απόδειξη* ως ένα επιβαλλόμενο σύστημα κανόνων που πρέπει να διέπουν την επιχειρηματολογία. Οι κανόνες όμως αυτοί δεν είναι αυθαίρετοι, αλλά αποτελούν τη βάση για την ανάπτυξη της *γλώσσας της απόδειξης*, η οποία συνιστά ένα συνεπές σύστημα ελέγχου. Αυτό που κυρίως ελέγχεται είναι ότι κάθε συνεπαγωγή πρέπει να αναγνωρίζεται με σαφήνεια. Και θα έλεγα ότι το τι αποδεχόμαστε ως συνεπαγωγή είναι ακριβώς αυτό που προκαλεί την υποκειμενικότητα στις αντιλήψεις ως προς την απόδειξη. Η υποκειμενικότητα αυτή, με τη σειρά της, προκαλεί σύγχυση στους φοιτητές και ενθαρρύνει κάποιους να διαφεύγουν με το γνωστό: «είναι φανερό ότι...», μιμούμενοι προφανώς κάποιους από εμάς!

Ένα άλλο ζήτημα είναι ότι ένα επιχείρημα περιλαμβάνει διαφορετικά είδη μαθηματικών αντικειμένων και επομένως πρέπει με ακρίβεια να εντοπίσουμε τον ρόλο και το status του καθενός από αυτά. Προς αυτήν την κατεύθυνση εισάγουμε για παράδειγμα το 'σύνολο' που εκφράζει «τι ανήκει και πού». Για οποιεσδήποτε αλληλεπιδράσεις μεταξύ αντικειμένων πρέπει να υπάρχουν υποκείμενες αντιστοιχίες. Επομένως, τα σύνολα αναγνωρίζονται ως τα αντικείμενα που περιγράφουν την 'έκταση' της ισχύος των αντιστοιχιών και οι σχέσεις –και ειδικότερα οι συναρτήσεις–παρέχουν τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε για κάθε στοιχείο σε ένα σύνολο ποιο το σχετιζόμενο με αυτό στοιχείο σε ένα άλλο σύνολο.Τα σύνολα και οι συναρτήσεις (ή οι σχέσεις γενικότερα) συνιστούν τα θεμέλια της *γλώσσας της απόδειξης*. Η αποσαφήνιση ενός μη αυστηρού επιχειρήματος υπόκειται σε συγκεκριμένους περιορισμούς και συνθήκες. Συνεπώς, στην αυστηρή διαμόρφωσή του θα πρέπει να υπάρχουν ποσοδείκτες καθώς και προσδιορισμός του εύρους εφαρμογής του. Επομένως, θα θεωρούσαμε τη *γλώσσα της απόδειξης* ως ένα 'κόσκινο' για την οργάνωση του επιχειρήματος.

Αλλά θα ήταν λάθος να θεωρούσαμε τη *γλώσσα της απόδειξης* απλά ως μέσο οργάνωσης, διασαφήνισης και ελέγχου. Στα προχωρημένα Μαθηματικά οι θεωρίες που διδάσκουμε στο πανεπιστήμιο είναι αφηρημένες και έχουν αναπτυχθεί στο ίδιο είδος γλώσσας, εντάσσονται δε σε αξιωματικά συστήματα. Παρ' όλα αυτά: "Axioms result from necessity, not from some arbitrary decree, and this reason is often misunderstood" (Artmann, 1988). Η *γλώσσα της απόδειξης* είναι συμβατή με τον τρόπο που τα εμπλεκόμενα μαθηματικά αντικείμενα ορίζονται στις αφηρημένες μαθηματικές θεωρίες και τελικά συνιστά το φυσικό μέσο να επιχειρηματολογούμε στα πλαίσιά τους. Αλλά, την ίδια ώρα, μπορούμε να ερμηνεύσουμε διαισθητικά μια αφηρημένη θεωρητική κατασκευή, πράγμα που μας δίνει τη δυνατότητα να εντοπίσουμε συγκεκριμένες δομικές πτυχές που θα είναι χρήσιμες στη διαμόρφωση της στρατηγικής για την ανάπτυξη της απόδειξης. Οι φοιτητές δεν κατανοούν επαρκώς τον χαρακτήρα και τον ρόλο της *γλώσσας της απόδειξης*. Τους λέμε ότι είναι απαραίτητη για την αυστηρότητα της επιχειρηματολογίας, αλλά μια περισσότερο διαισθητική προσέγγιση συνεχίζει να είναι πιο επεξηγηματική γι' αυτούς. Σχολιάζω το φαινόμενο αυτό με αναφορά στις *αναπαραστάσεις*.

Ως *αναπαράσταση* θεωρούμε ένα σύστημα που το αντιλαμβανόμαστε να προσομοιάζει το αρχικό σύστημα του μαθηματικού μας έργου, ως προς τις κύριες δομικές πτυχές του. Επομένως, η μαθηματική επεξεργασία μεταφέρεται στην αναπαράσταση. Οι φοιτητές, ιδιαίτερα των Τμημάτων Μαθηματικών που εκτίθενται στην αυστηρή απόδειξη, είναι διστακτικοί στη χρήση αναπαραστάσεων όταν δουλεύουν στα μαθηματικά, ειδικά δε στη χρήση γραφημάτων ως εργαλείων απόδειξης.

Κλείνοντας το θέμα της απόδειξης, πιστεύω ότι στη συνήθη διδακτική πρακτική στο πανεπιστήμιο οι αποδείξεις δεν «κάνουν τους φοιτητές σοφότερους», ένα κριτήριο που έθεσε ο Manin (1981) σχετικά με τη σημασία της 'καλής' απόδειξης. Γι' αυτούς, η *απόδειξη* είναι μια διανοητικά σχολαστική κατασκευή και συχνά με έλλειμμα περιεχομένου (Mamona-Downs & Downs, 2011). Για να 'απαλύνουμε' αυτήν την εντύπωση, θα συμφωνήσω με τον N. Balacheff (2010) ότι στη διδασκαλία μας η ανάπτυξη της θεωρίας πρέπει να 'διυλίζεται' με ιδιαίτερη έμφαση στο γιατί οι ορισμοί είναι αυτοί που είναι, ώστε να δημιουργούμε μια στέρεα βάση για την κατανόηση των αποδείξεων και την παραπέρα μαθηματική δουλειά. Εισέρχομαι τώρα στο θέμα των ορισμών.

ΟΡΙΣΜΟΙ

Οι ορισμοί συχνά αποτελούν το σημείο εκκίνησης της μαθηματικής μελέτης. Πράγματι, η ταυτότητα ενός θεωρητικού θέματος μπορεί να εξαρτάται από έναν κεντρικό ορισμό. Οι ορισμοί ενέχουν την προοπτική RMS που ανέφερα στην αρχή, διότι στο επίπεδο των προχωρημένων μαθηματικών συνήθως είναι οι ορισμοί που καθορίζουν τις έννοιες και όχι αντίστροφα. Υπάρχουν διάφορες διαστάσεις που πρέπει να τεθούν υπόψιν στη διαμόρφωση ενός ορισμού: πρέπει να αντιμετωπίζει τον σκοπό για τον οποίον δημιουργείται, πρέπει να είναι δομικά αδιαμφισβήτητος (λέμε, είναι καλά ορισμένο) και η μορφή του πρέπει να είναι τέτοια ώστε να βοηθά στην πρακτική του χρήση. Αυτά είναι που ενδιαφέρουν τον μαθηματικό που διαμορφώνει τον ορισμό αλλά και τον φοιτητή που τον μελετά. Συχνά, αλλά όχι πάντα, ο διδάσκων αναφέρει στους φοιτητές και στους μαθητές (σε επίπεδο Λυκείου) τον σκοπό της διαμόρφωσης του ορισμού που θα παρουσιάσει, για να εγείρει διαισθητικές προσεγγίσεις. Βέβαια, τις περισσότερες φορές οι ορισμοί σέβονται τις αρχικές διαισθητικές προσεγγίσεις τους μέχρι του σημείου που είναι συνεπείς. Αυτό καταφαίνεται ιδιαίτερα στους ορισμούς ιδιοτήτων.

Στη διδακτική πρακτική όμως, οι κύριοι φορμαλιστικοί ορισμοί εμφανίζονται σε μεγάλο βαθμό στον πίνακα χωρίς από πριν να καλλιεργείται η μαθηματική ανάγκη του σχηματισμού τους, αλλά και χωρίς κάποιον λεπτομερή σχολιασμό μετά την παρουσίασή τους. Επίσης, πιθανόν οι διδάσκοντες να δώσουν κάποια παραδείγματα του μαθηματικού αντικειμένου που έχει οριστεί, με σκοπό να προσανατολιστεί το ακροατήριο στο υπό εξέταση θεωρητικό θέμα. Φυσικά, όπως και η έρευνα δείχνει, όποια παιδιά παράγουν δικά τους παραδείγματα ορισμών κατανοούν τη θεωρία καλύτερα. Στις μεταρρυθμιστικές πρακτικές της διδασκαλίας τα παραδείγματα προηγούνται των αυστηρών ορισμών. Τα παιδιά καλούνται να εξαγάγουν την κοινή στα παραδείγματα ουσιώδη δομή, ώστε να διαμορφωθεί ο ζητούμενος ορισμός. Κάποιοι ερευνητές συστήνουν την ανάπτυξη, ατομικά ή συλλογικά, ενός προσωπικού ‘example space’, βλέπε Watson &Mason (2005). Άλλοι προτείνουν την απόκτηση εμπειρίας τόσο στη χρήση των ορισμών όσο και στη διαδικασία κατασκευής τους, βλέπε Edwards & Ward (2004). Ειδικότερα, συστήνεται η ταυτόχρονη καλλιέργεια της ‘κατασκευής του ορισμού’ στην τάξη (definition construction process) και αυτή της ‘διαμόρφωσης της έννοιας’ (concept formation process), (Ouvrier-Buffet, 2006).Ο σχεδιασμός αυτός ‘παντρεύει’ θα έλεγα, για να θυμηθούμε τον Skemp, το ‘instrumental understanding’ με το ‘relational understanding’. Παρ’ όλα αυτά, το ερώτημα παραμένει πώς θα καλλιεργήσουμε το ενδιαφέρον του ακροατηρίου μας να συμμετέχει στη δημιουργία ορισμών.

Στη σχολική εμπειρία οι ορισμοί ήταν κατά κύριο λόγο περιγραφικοί, οριοθετούνταν αντιληπτικά και είχαν σιωπηρές προϋποθέσεις. Στο πανεπιστήμιο, οι φοιτητές αντιμετωπίζουν μια νέα κατάσταση, όπου μάλιστα η μορφή του αυστηρού ορισμού έχει μεγάλη σημασία.

Ένα τελευταίο ζήτημα που θα ήθελα να θίξω σχετικά με τους ορισμούς είναι αυτό των λογικά ισοδύναμων ορισμών. Στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε από τους δύο ως ‘τον ορισμό’ και τον άλλον ως λογική συνεπαγωγή του. Οποιοδήποτε αποτέλεσμα που εξάγεται βάσει του ενός ισχύει και με την προϋπόθεση του άλλου. Οι ισοδύναμοι ορισμοί δημιουργούνται είτε προσαρμόζοντας τις συνθήκες που ισχύουν στο ίδιο σύστημα είτε εξισώνοντας τον ρόλο των ιδιοτήτων από δύο διαφορετικά συστήματα. Οι διάφορες μορφές της ιδιότητας της πληρότητας, για παράδειγμα, είναι ενδεικτικές και των δύο παραπάνω περιπτώσεων. (Στο βιβλίο του Artman παρατίθενται περισσότερες από 10 εκφάνσεις του ορισμού της πληρότητας.) Η κατανόηση από τους φοιτητές των ισοδύναμων ορισμών πρέπει να μελετηθεί συστηματικά γιατί φανερώνει διαφορετικές προσλήψεις της δομής, οι οποίες προσδίδουν και διαφορετικές δυνατότητες για την προώθηση του μαθηματικού έργου. Στις εργασίες των Mamona-Downs & Megalou (2013), και Mamona-Downs (2014) εξετάζονται ισοδύναμοι ορισμοί του ορίου πραγματικών συναρτήσεων δύο μεταβλητών. Ειδικότερα, στη δεύτερη εργασία, μορφοποιείται ο ορισμός με τη ‘γραμμική’, όπως την αποκαλώ, προσέγγιση στην έκφρασή του μέσω πολικών συντεταγμένων, ώστε να είναι ισοδύναμος με τον κλασικό ορισμό.

Τελειώνω με κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με την τελευταία στον τίτλο πτυχή της Μαθηματικής Παιδείας, το «αναπτύσσουμε θεωρίες ...».

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΘΕΩΡΙΩΝ

Η *ανάπτυξη της θεωρίας* μπορεί να θεωρηθεί συμπληρωματική της *απόδειξης* και του *ορισμού* με την έννοια ότι ολοκληρώνει το ρόλο της δομής στα μαθηματικά. Αποτελεί πρόκληση για έναν ερευνητή της Διδακτικής των Μαθηματικών στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση να μελετήσει πώς οι φοιτητές προσλαμβάνουν μια μαθηματική θεωρία, όπως αυτή αναπτύσσεται στην τάξη. Για τους καλούς φοιτητές, η τρέχουσα θεωρία είναι ιδιαίτερα εύπλαστη. Αρχικά, φιλτράρουν το περιεχόμενό της για ‘τοπική’ χρήση και μετά πρέπει να αποφασίσουν τι να συγκρατήσουν από τη θεωρία μακροπρόθεσμα. Είναι δύσκολο για τον διδάσκοντα να περιγράψει από την εισαγωγή με σαφήνεια το θεωρητικό περιεχόμενο ενός μαθήματος, καθώς η απαιτούμενη ‘γλώσσα’ αναπτύσσεται κατά τη διάρκειά του. Υπάρχουν ποικίλοι τρόποι να δώσεις το ‘στίγμα’ μιας θεωρίας αλλά δεν νομίζω ότι είναι ρεαλιστικό να αντιμετωπίσεις τη θεωρία μέσα από δραστηριότητες ‘re-invention’ (επανεφεύρεσης), όπως μερικοί ερευνητές διατείνονται. Όλοι μας νομίζω θα θέλαμε οι μαθητές/φοιτητές μας να παίρνουν μέρος σε δραστηριότητες δημιουργίας ‘νέων’ γι’ αυτούς μαθηματικών. Η καλή εξάσκηση όμως και η καλλιέργεια της δυνατότητας να συγκρατεί κάποιος μαθηματικά αποτελέσματα που έχει διδαχθεί είναι πολύ σημαντικές για ένα τόσο σωρευτικό αντικείμενο όπως τα μαθηματικά.

Ένα τελευταίο σχόλιο για το θέμα που διαπέρασε την ομιλία μου, αυτό της μαθηματικής δομής. Στη διδασκαλία, είναι άλλο πράγμα να υπογραμμίζεις τη σπουδαιότητα της κατανόησης της μαθηματικής δομής σε θεωρητικό επίπεδο και άλλο να τη μεταφράζεις σε συγκεκριμένες πρακτικές που έχουν παιδαγωγική αξία. Επανερχόμενη μάλιστα στην πρώτη πτυχή, αυτή της *επίλυσης προβλήματος*, πιστεύω ότι πρέπει να ενισχυθεί με τη δομική προοπτική δίνοντας κεντρικό ρόλο στην κατανόηση και την χρήση των *κατασκευών*. Οι *κατασκευές* είναι πράγματι πολύ ενδιαφέρουσες γιατί αφορούν τόσο ζητήματα *ορισμών* όσο και την ανάπτυξη εργαλείων που προάγουν την *επιχειρηματολογία* και την *απόδειξη*. Είναι σημαντικό να μελετήσουμε πόσο καλά οι προπτυχιακοί φοιτητές μας είναι σε θέση να κάνουν *κατασκευές* και πώς εμείς θα τους ενισχύσουμε σ' αυτήν την κατεύθυνση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Artmann, B. (1988, English Edition). *The Concept of Number: from quartenions to monads and topological fields.* New York, Chichester: John Wiley & Sons.

Balacheff, N. (2010). Bridging Knowing and Proving in Mathematics: A Didactical Perspective. In G. Hanna, H. N. Jahnke, H. Pulte (Eds.) *Explanation and proof in Mathematics. Philosophical and Educational Perspectives* (p.p. 115-137). Dordrecht Heidelberg New York London: Springer.

De Villiers, M. (1998). An Alternative Approach to Proof in Dynamic Geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space* (pp. 369 393). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Dorier, J. L. (1995). Meta Level in the Teaching of Unifying and Generalizing Concepts in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 29, 175-197.

Downs, M., & Mamona-Downs, J. (2005). The Proof Language as a Regulator of Rigor in Proof, and its effect on Student Behavior. *Proceedings of CERME 4*, 1748 – 1757 (electronic form). Sant Feliu de Guixols, Spain.

Edwards, B. S., & Ward, M. B. (2008). The Role of Mathematical definitions in Mathematics and in Undergraduate Mathematics Courses. In M. P. Carlson and C. Rasmussen (Eds.) *Making the* *connection; Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 223-232). MAA.

Greer, B., & Harel, G. (1998). The role of isomorphisms in mathematical cognition. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17, 5-24.

Hanna, G. & Jahnke N. (1996). Proof and Proving. In Bishop, A. et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 877-908). Dordrecht, Holland: Kluwer Academic Publishers.

Kline, M. (1972) *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press.

Mamona-Downs, J. & Downs, M. (2002). Advanced Mathematical Thinking with a special reference to Reflection on Mathematical Structure. In Lyn English (Chief Ed.) *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 165 – 195). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mamona-Downs, J., & Downs, M. L. N. (2004). Realization of techniques in problem solving: The construction of bijections for enumeration tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 235-253.

Mamona-Downs, J., & Downs, M. (2011). Proof: A Game for Pedants? *Proceedings of CERME* 7, 213-223, Rzeszów, Poland.

Mamona-Downs, J., & Downs, M. (2013). Problem Solving and its elements in forming Proof. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1), 137-162.

Mamona-Downs, J., & Megalou, F. (2013) Students' understanding of limiting behavior at a point for functions from R^2 to R. *Journal of Mathematical Behavior, 32*(1) 53-68.

Mamona-Downs, J. (2014). Reconciling two non-equivalent definitions for the limit of two-variable real functions. *Talk presented at the MAA Joint Mathematics Meeting*, Baltimore, MD.

Mamona-Downs, J. (2014). According to a Mathematics Educator from a Mathematics Department. In M. Fried & T. Dreyfus (Eds.) *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground* (pp.61-64). Dordrecht Heidelberg New York London: Springer.

Μαμωνά-Downs, Γ., Παπαδόπουλος, Ι. (2017). *Επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά. Η πορεία της σκέψης κατά την αναζήτηση της λύσης.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Manin, Y. 1. (1981). A digression on proof. *Two-Year College Mathematics Journal, 12*(2), 104-107.

Mason, D. (2002).*The Piano Tuner*. New York: Alfred A. Knopf, Inc.

Ouvrier-Buffet, C. (2011). A mathematical experience involving defining processes: in-action definitions and zero-definitions. *Educational Studies in Mathematics*, *76*(2), 165-182.

Rickart**,** C. (1996). Structuralism and Mathematical Thinking. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.) *The nature of mathematical thinking* (pp. 285-300). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S. S., & Penney, K. A. (1996). Posing mathematical problems: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 293-309.

Thurston, W.P. (1995).On Proof and Progress in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *15*(1), 29-37

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics As A Constructive Activity: Learners Generating Examples*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Whitehead, A. N. (1929). *The aims of education*. NewYork: MacMillan.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΝΟΟΤΡΟΠΙΑ ΚΑΙ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Χρίστου Κωνσταντίνος

Πανεπιστήμιο Κύπρου

edchrist@ucy.ac.cy

Ένα από τα πιο επίμονα ερωτήματα στην εκπαίδευση των μαθηματικών είναι η δημιουργία συνθηκών που παρακινούν ή ενθαρρύνουν τους μαθητές στην επινόηση ιδεών και στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων. Σκοπός αυτού του άρθρου είναι η συζήτηση τρόπων που είναι δυνατό να βοηθήσουν τους μαθητές να ανοίξουν τον οπτικό τους ορίζοντα και να αντιληφθούν τη δημιουργική διαδικασία και τη διαδικασία γένεσης μαθηματικών ιδεών μέσα από διαφορετικές προοπτικές. Από τη μελέτη της βιβλιογραφίας φαίνεται ότι η διαδικασία επινόησης ιδεών για την ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών επηρεάζεται τόσο από παράγοντες που οφείλονται αποκλειστικά στο άτομο (εσωτερικοί), όπως η φαντασία και οι στάσεις του ατόμου όσο και από εξωτερικούς παράγοντες, όπως οι πόροι που διατίθενται για βελτίωση της εκπαίδευσης και η γενικότερη κουλτούρα της κοινωνίας. Παρουσιάζονται παραδείγματα τα οποία μπορούν να προωθήσουν τη μαθηματική φαντασία και την επινοητικότητα των μαθητών, εστιάζοντας σε μαθηματικές ιδέες, όπως η αναδόμηση μαθηματικών προβλημάτων, η υποβολή ερωτήσεων, η σύνδεση και σύνθεση εικασιών, η αλλαγή της προοπτικής και η αναπαράσταση ιδεών (Friedlander, 2016). Στα πλαίσια της κουλτούρας δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην αναπτυξιακή, μαθηματική νοοτροπία μέσα από παραδείγματα και κατάλληλα μαθηματικά έργα και δραστηριότητες (Boaler, 2016). Πολλοί ερευνητές θεωρούν ότι η σύνθεση των εσωτερικών και εξωτερικών παραγόντων, είναι δυνατόν να οδηγήσουν σε μια ενοποιημένη θεωρία ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης και της δημιουργικότητας, η οποία σίγουρα δεν θα αποτελεί μια γραμμική, σειριακή διαδικασία βημάτων τα οποία το άτομο θα πρέπει να ακολουθήσει, για να είναι δημιουργικό ή για να κατανοεί μαθηματικές έννοιες.

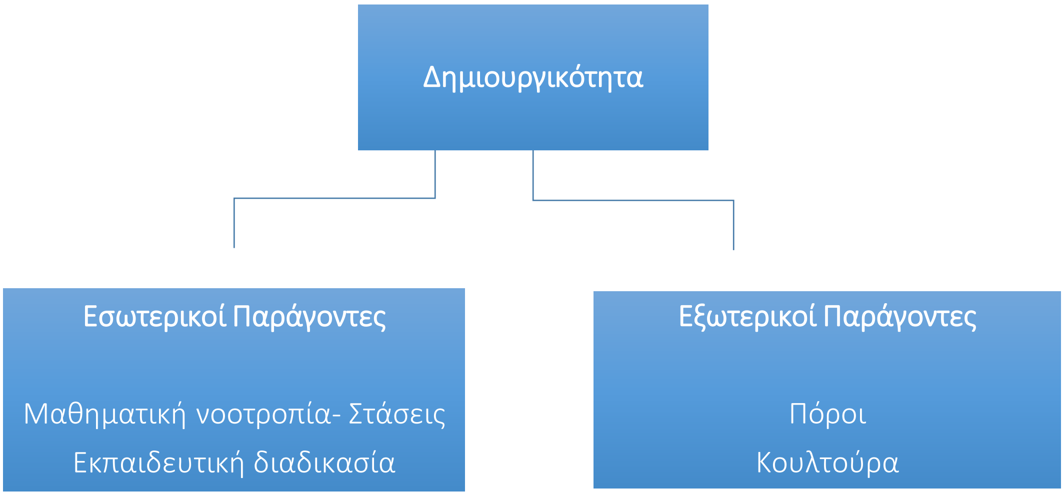
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Παρόλο που έχουν δοθεί πολλοί ορισμοί για την έννοια της δημιουργικότητας (Collard & Looney, 2014·Mann, 2006), στο άρθρο αυτό επικεντρωνόμαστε στην αντίληψη ότι μια δημιουργική πράξη είναι μια νέα ιδέα ή ενέργεια του ατόμου και ως εκ τούτου όλα τα άτομα είναι σε θέση να είναι δημιουργικά (Boden, 2004 · Craft, 2003). Έτσι, η δημιουργικότητα μπορεί να οριστεί και ως η δημιουργία ιδεών. Για να είναι κανείς δημιουργικός πρέπει να είναι σε θέση να δημιουργήσει ή να επινοήσει ιδέες. Όταν ένα παιδί σκέφτεται μια ιδέα, ακόμα κι αν αυτή η ιδέα είναι πολύ συνηθισμένη, είναι δημιουργικό. Κατά ανάλογο τρόπο, όταν ένας επιστήμονας ασχολείται με μια ιδέα, ασκεί τη δημιουργικότητά του. Επομένως, η δημιουργικότητα είναι μια διαδικασία σκέψης και σίγουρα δεν είναι κάτι που φέρουμε μαζί μας, αλλά κάτι που μπορούμε να κάνουμε ή να αποκτήσουμε αναπτύσσοντας τις ικανότητές μας στα μαθηματικά.

Αριθμός ερευνών στον τομέα της δημιουργικότητας δείχνει ότι οι παραδοσιακοί τρόποι προσέγγισης της διδασκαλίας των μαθηματικών δεν έχουν καμιά σχέση με τη δημιουργικότητα (Bolden, Harries & Newton, 2010· Kennedy, 2005· Mann, 2006· Skiba, Tank, Sternberg, & Grigorenko, 2010). Μερικές φορές, κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των μαθηματικών, η δημιουργικότητα θεωρείται ως ανεπιθύμητος αποπροσανατολισμός από τον στόχο του μαθήματος (Beghetto, 2007). Από την άλλη πλευρά, υποστηρίζεται έντονα ότι η διδασκαλία των μαθηματικών, χωρίς την παροχή ευκαιριών για δημιουργικότητα, στερεί στους μαθητές την ευκαιρία να εκτιμήσουν την ομορφιά των μαθηματικών και αποτυγχάνει να τους δώσει την ευκαιρία να αναπτύξουν τις ικανότητές τους για κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (Mann, 2006). Με αυτό τον τρόπο φαίνεται ότι η δημιουργικότητα συνδέεται άμεσα με την ανάπτυξη και κατανόηση των μαθηματικών και επομένως η διδασκαλία των μαθηματικών και η μεθοδολογική προσέγγιση θα πρέπει να προσιδιάζει με τις διαδικασίες ανάπτυξης της δημιουργικότητας.

Θεωρώντας ότι η δημιουργικότητα αποτελεί, πέραν των άλλων, μέσο για ανάπτυξη της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών, σκοπός του άρθρου είναι η συζήτηση παραγόντων που είναι δυνατό να δώσουν την ευκαιρία στους μαθητές να βιώσουν τη δημιουργικότητα και να χρησιμοποιήσουν τη φαντασία τους στην τάξη των μαθηματικών.

Ένα από τα πιο επίμονα ερωτήματα στην εκπαίδευση των μαθηματικών είναι η δημιουργία συνθηκών ή προϋποθέσεων κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας που παρωθούν τους μαθητές στην επινόηση ή κατασκευή νέων ιδεών. Αυτό που χρειάζονται οι μαθητές είναι να ανοίξουν τον οπτικό τους ορίζοντα και να αντιληφθούν τη δημιουργική διαδικασία και τη διαδικασία γένεσης μαθηματικών ιδεών μέσα από διαφορετικές προοπτικές. Η συζήτηση που ακολουθεί δομήθηκε μέσα σε ένα πλαίσιο σύγχρονων ερευνών (Boaler, 2016·Seelig, 2012). Συγκεκριμένα, από τη μελέτη της βιβλιογραφίας οι έρευνες που αναφέρονται στους παράγοντες της δημιουργικότητας μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε δύο ομάδες, στους εσωτερικούς και στους εξωτερικούς.



Διάγραμμα 1: Δημιουργικότητα, εσωτερικοί και εξωτερικοί παράγοντες που συμβάλλουν στην ανάπτυξη της δημιουργικότητας

Όπως φαίνεται από το διάγραμμα 1, η δημιουργικότητα επηρεάζεται τόσο από παράγοντες που οφείλονται αποκλειστικά στο άτομο και την εκπαιδευτική διαδικασία (εσωτερικοί) όσο και από εξωτερικούς παράγοντες, όπως είναι οι πόροι που διατίθενται για βελτίωση της εκπαίδευσης και της δημιουργικότητας και η γενικότερη κουλτούρα του σχολείου και της κοινωνίας. Οι παράγοντες αυτοί δεν λειτουργούν, φυσικά, μεμονωμένα, αλλά βρίσκονται σε μια συνεχή αλληλεξάρτηση. Τα τελευταία χρόνια πολλοί ερευνητές θεωρούν ότι αυτοί οι παράγοντες είναι δυνατόν να οδηγήσουν σε μια ενοποιημένη θεωρία ανάπτυξης της δημιουργικότητας, η οποία σίγουρα δεν θα αποτελεί μια γραμμική, σειριακή διαδικασία βημάτων που θα πρέπει το άτομο να ακολουθήσει, για να είναι δημιουργικό (Seelig, 2012). Στη συνέχεια γίνεται μια περιγραφή των πιο πάνω παραγόντων με έμφαση στους εσωτερικούς παράγοντες ενώ η αναφορά στους εξωτερικούς παράγοντες είναι πολύ σύντομη και επιγραμματική, ώστε να φανεί η αλληλεξάρτηση των παραγόντων.

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΚΑΙ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ

Βασικό στοιχείο των εσωτερικών παραγόντων ανάπτυξης της δημιουργικότητας και της κατανόησης των μαθηματικών ερευνών είναι η διαδικασία μάθησης και διδασκαλίας. Πολλές έρευνες για τη δημιουργικότητα ξεκινούν από το ρόλο της διδασκαλίας των μαθηματικών και η συζήτηση επικεντρώνεται κυρίως στα προγράμματα που προωθούν και διατηρούν ένα περιβάλλον, που προάγει την επινόηση, τη φαντασία και τις διαδικασίες δημιουργικής σκέψης (Hoyt, 2002· Leikin, 2014·Leikin & Pitta-Pantazi, 2013). Για να επιτευχθεί αυτό, έχουν προταθεί πολλά μοντέλα που έχουν στόχο να εμπλουτίσουν τη διδασκαλία. Στο παρόν άρθρο ορίζονται οι εσωτερικοί παράγοντες ενός θεωρητικού μοντέλου, που αποτελεί το αποτέλεσμα σύζευξης και σύνθεσης πολλών ερευνών (Boaler, 2016·Seelig, 2012). Οι εσωτερικοί παράγοντες αναφέρονται, όπως έχει λεχθεί, αφενός στην εκπαιδευτική διαδικασία και αφετέρου στην ανάπτυξη μαθηματικής νοοτροπίας και στάσεων απέναντι στα μαθηματικά.

Μαθηματική νοοτροπία

Μια σημαντική πηγή της δημιουργικότητας είναι η νοοτροπία και οι στάσεις που έχουν οι μαθητές. Αν οι μαθητές δεν καθοδηγηθούν, δεν παρακινηθούν να έχουν εμπιστοσύνη στον εαυτό τους ότι μπορούν να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα, τότε δεν θα το λύσουν. Η Seeling (2012) στο βιβλίο της "inGenius: A Crash Course on Creativity", υπογραμμίζει τη σημασία των στάσεων και η Boaler (2016) στο βιβλίο της «Mathematical Mindsets" περιγράφει την έννοια της μαθηματικής νοοτροπίας για τη δημιουργική σκέψη και θεωρεί ότι είναι εξίσου σημαντική, όπως η ανάγκη για γνώση ή η παρουσία κινήτρων. Η ανάπτυξη μαθηματικής νοοτροπίας στηρίζεται σήμερα σε δεδομένα ερευνών που προκύπτουν από την εξέταση και διερεύνηση των διεργασιών του εγκεφάλου, όταν οι μαθητές εργάζονται στα μαθηματικά. Ως αποτέλεσμα των ερευνών αυτών φαίνεται ότι οι εκπαιδευτικοί μπορούν να κάνουν πολλά στην τάξη και να διαφοροποιήσουν τη διδασκαλία των μαθηματικών, για να αναπτύξουν θετική στάση για τη δημιουργικότητα.

Είναι συχνό το φαινόμενο οι μαθητές/ οι μαθήτριες να αποφοιτούν από το γυμνάσιο και να πιστεύουν ότι κάθε μαθηματικό πρόβλημα μπορεί να λυθεί σε 30 δευτερόλεπτα ή ακόμα και σε λιγότερο χρόνο. Πολλοί μαθητές πιστεύουν ότι αν δεν γνωρίζουν την απάντηση σε ένα πρόβλημα, δεν είναι καλοί στα μαθηματικά και ότι τα μαθηματικά δεν είναι για αυτούς. Αυτή η κατάσταση περιγράφει μία αποτυχία του εκπαιδευτικού μας συστήματος. Λίγες είναι οι φορές στην τάξη που δίνουμε έμφαση στην επιμονή και υπομονή, στην εξερεύνηση των μαθηματικών εννοιών και στη διερεύνηση του πλήθους των τρόπων επίλυσης προβλημάτων. Ο μόνος τρόπος για να διδαχτεί η επιμονή στη λύση προβλήματος είναι να δώσουμε στους μαθητές χρόνο να ενασχοληθούν και να προβληματιστούν για πραγματικά προβλήματα. Αν οι εκπαιδευτικοί δημιουργήσουν αυτή την ατμόσφαιρα σε μια τάξη και οι μαθητές αφιερώνουν χρόνο στον προβληματισμό, θα συνειδητοποιήσουν ότι όσο περισσότερο χρόνο αφιερώνουν τόσο περισσότερο η τάξη ζωντανεύει και ενισχύεται η σκέψη των μαθητών, που είναι ίσως ο πιο βασικός στόχος της διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο.

Ο ακρογωνιαίος λίθος ανάπτυξης της ικανότητας στα μαθηματικά και της δημιουργικότητας των μαθητών είναι η ανάπτυξη μαθηματικής νοοτροπίας. Υπάρχει η δυνατότητα σήμερα να δούμε τον τρόπο με τον οποίο ο εγκέφαλος αναπτύσσεται και τις επιπτώσεις στην εγκεφαλική δραστηριότητα από συναισθήματα ή άλλες δραστηριότητες. Σε πολλές έρευνες έχει μελετηθεί η εγκεφαλική δραστηριότητα των ατόμων, όταν εργάζονται με μαθηματικές δραστηριότητες (Dweck, 2006). Αυτό που αποτελεί έκπληξη, ως αποτέλεσμα των ερευνών αυτών, είναι η πλαστικότητα του εγκεφάλου και το συμπέρασμα ότι ο εγκέφαλος αναπτύσσεται συνεχώς σε αντίθεση με ότι πιστεύαμε μέχρι σήμερα ότι ο εγκέφαλος με τον οποίο έχουμε γεννηθεί δεν αλλάζει (Abiola & Dhindsa, 2011· Woollett & Maguire, 2011). Όταν μαθαίνουμε κάτι νέο, δημιουργείται ηλεκτρικό ρεύμα που διαπερνά τις συνάψεις και συνδέει διάφορες περιοχές του εγκεφάλου. Το σημαντικό στοιχείο είναι το γεγονός ότι οι συνδέσεις που δημιουργούνται από την επιφανειακή γνώση διαλύονται σύντομα ενώ όταν μαθαίνουμε κάτι σε βάθος, οι συνδέσεις παραμένουν και υποβοηθούν την ανάπτυξη του εγκεφάλου.

Η ανακάλυψη ότι ο εγκέφαλος αναπτύσσεται, προσαρμόζεται και πρωτίστως αλλάζει έχουν πολλές επιπτώσεις στην εκπαίδευση. Υπάρχει τεκμηρίωση ότι η διαφορά αυτών που επιτυγχάνουν στα μαθηματικά και αυτών που αποτυγχάνουν δεν είναι οι διαφορές στη δομή του εγκεφάλου, αλλά η προσέγγιση στον τρόπο ζωής, η πληροφόρηση που έχουν για τις δυνατότητές τους και οι ευκαιρίες μάθησης. Τις πιο πολλές ευκαιρίες τις έχουν οι μαθητές που πιστεύουν στον εαυτό τους ενώ η μάθηση στο σχολείο μειώνεται ή παραμένει στα ίδια επίπεδα από τα αρνητικά μηνύματα που παίρνουν οι μαθητές για τις ικανότητές τους. Σίγουρα οι επιστήμονες σήμερα δεν ισχυρίζονται, φυσικά, ότι όλοι έχουμε την ίδια δομή εγκεφάλου. Ισχυρίζονται, όμως, ότι δεν υπάρχει αυτό που συνήθως λέγεται «μαθηματικό μυαλό» ή «μαθηματικά προικισμένος». Αντίθετα, ισχυρίζονται ότι όλοι οι μαθητές έχουν τις δυνατότητες να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες.

Μέσα από τις έρευνες φαίνεται ότι το 40% των μαθητών έχουν σταθερές νοοτροπίες, το 40% πιστεύουν ότι έχουν αναπτυξιακές νοοτροπίες και το 20% βρίσκεται κάπου μεταξύ των δύο. Αναπτυξιακή μαθηματική νοοτροπία έχουν οι μαθητές που πιστεύουν στον εαυτό τους και ότι έχουν την ικανότητα να κάνουν μαθηματικά. Σταθερή μαθηματική νοοτροπία έχουν οι μαθητές που πιστεύουν ότι όποια προσπάθεια και να καταβάλουν, η επίδοσή τους στα μαθηματικά δεν μπορεί να διαφοροποιηθεί. Σε έρευνες, επίσης, έχει διαφανεί ότι οι μαθητές με σταθερές μαθηματικές νοοτροπίες έχουν σταθερή επίδοση στα μαθηματικά ενώ οι μαθητές με αναπτυξιακές μαθηματικές νοοτροπίες αναπτύσσουν σε μεγάλο βαθμό τις μαθηματικές τους ικανότητες (Blackwell, Trzesniewski, & Dweck, 2007).

Η αλλαγή της μαθηματικής νοοτροπίας των μαθητών από σταθερή σε αναπτυξιακή είναι προϋπόθεση για βελτίωση της μαθηματικής ικανότητας και της επίδοσης των μαθητών και δημιουργεί τις συνθήκες ώστε οι μαθητές να κατασκευάζουν και να εφαρμόζουν ιδέες επίλυσης προβλημάτων. Σε αυτό το πλαίσιο της αλλαγής της μαθηματικής νοοτροπίας συμβάλλει και η θεώρηση του λάθους στα μαθηματικά μέσα από μια νέα προοπτική.

Το λάθος στα μαθηματικά

Ο εγκέφαλος αντιδρά με δύο τρόπους κάθε φορά που ο μαθητής κάνει λάθος:

1. Δημιουργείται αυξημένη ηλεκτρική δραστηριότητα, όταν υπάρχει σύγκρουση μεταξύ μιας σωστής απάντησης και μιας λανθασμένης. Αυτό συμβαίνει ανεξάρτητα από το αν το άτομο γνωρίζει ή όχι ότι έκανε λάθος.
2. Υπάρχει εγκεφαλικό σήμα, όταν ο μαθητής γνωρίζει ότι έκανε λάθος και καταβάλλει συνειδητή προσπάθεια διόρθωσης.

Κάθε φορά που ένας μαθητής κάνει λάθος στα μαθηματικά, δημιουργείται στον εγκέφαλό του μια σύναψη. Είναι η στιγμή που ο εγκέφαλος νιώθει την πρόκληση και καταβάλλει προσπάθεια εξισορρόπησης. Έτσι, με την πρόκληση του λάθους, ο εγκέφαλος αναπτύσσεται πιο πολύ. Μέσα από τα λάθη ο εγκέφαλος αντιδρά σε μεγαλύτερο βαθμό. Παράλληλα, φαίνεται από τις έρευνες ότι η εγκεφαλική δραστηριότητα των μαθητών που χαρακτηρίζονται από αναπτυξιακές μαθηματικές νοοτροπίες είναι πολύ μεγαλύτερη από τη δραστηριότητα των μαθητών με σταθερές μαθηματικές νοοτροπίες (Moser et al., 2011). Επομένως, το λάθος δεν είναι μόνο ευκαιρία για μάθηση, αλλά ευκαιρία και για ανάπτυξη του εγκεφάλου.

Η ανάπτυξη της μαθηματικής νοοτροπίας αλληλοσχετίζεται με την εκπαιδευτική διαδικασία και κυρίως με τη μεθοδολογική προσέγγιση των μαθηματικών. Στη συνέχεια συζητούνται πρακτικές ανάπτυξης της ικανότητας των μαθητών να δημιουργούν ιδέες στα μαθηματικά μέσα από προβλήματα και διαδικασίες που σε συνδυασμό με τις μαθηματικές νοοτροπίες περιγράφουν ένα θεωρητικό μοντέλο της διδασκαλίας των μαθηματικών. Βασικός στόχος της εκπαιδευτικής διαδικασίας είναι η δημιουργία των συνθηκών εκείνων που θα βοηθήσουν τους μαθητές με σταθερές μαθηματικές νοοτροπίες να αποκτήσουν αναπτυξιακές. Η αναπτυξιακή μαθηματική νοοτροπία αποτελεί προϋπόθεση της ανάπτυξης της δημιουργικότητας του ατόμου και της ικανότητάς του να επινοήσει μαθηματικές ιδέες.

Εκπαιδευτική διαδικασία

Για να εκδηλωθεί η ικανότητα των μαθητών για δημιουργική σκέψη, πρέπει να τους δοθεί η ευκαιρία να επαναπροσδιορίζουν τα προβλήματα, να αλλάζουν την προοπτική από την οποία κοιτάζουν τα προβλήματα, να αποκτήσουν γνώσεις και να θέτουν ερωτήματα που προωθούν τη μαθηματική κατανόηση. Η ανάπτυξη μαθηματικής νοοτροπίας και της ικανότητας για δημιουργική σκέψη έχει άμεση σχέση με το αναλυτικό πρόγραμμα και τις δραστηριότητες που δίνονται στους μαθητές. Ουσιαστικά, η επιδίωξη κάθε προγράμματος δημιουργικότητας και γένεσης ιδεών είναι η ανάπτυξη της σκέψης, της επινόησης και της φαντασίας των μαθητών. Οι πρακτικές που φαίνονται στο διάγραμμα 2 εμπερικλείουν τους τρόπους ανάπτυξης της διδακτικής μεθοδολογίας με στόχο την αναπτυξιακή μαθηματική νοοτροπία και κατά επέκταση την κατανόηση και τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά.

Διάγραμμα 2: Στρατηγικές για οικοδόμηση μαθηματικής νοοτροπίας και δημιουργικότητας στην τάξη των μαθηματικών.

Πλαισίωση προβλημάτων:

Στο νηπιαγωγείο, οι μικροί μαθητές σχεδιάζουν και επινοούν ενδιαφέροντα πράγματα αλλά με την πάροδο του χρόνου φαίνεται να χάνουν την εμπιστοσύνη στις δημιουργικές τους ικανότητες και τη δημιουργικότητά τους. Ένας από τους λόγους για τους οποίους συμβαίνει αυτό είναι τα είδη των ερωτήσεων που υποβάλλονται σε αυτούς από τους εκπαιδευτικούς. Δυστυχώς, το εκπαιδευτικό μας σύστημα, ξεκινώντας από το νηπιαγωγείο, είναι οικοδομημένο σε ένα πλαίσιο όπου οι ερωτήσεις που υποβάλλονται πρέπει να έχουν μία ορθή απάντηση. Ωστόσο, στον πραγματικό κόσμο, έξω από τις αίθουσες του σχολείου, τα περισσότερα προβλήματα που αντιμετωπίζει ο σημερινός άνθρωπος είναι ανοιχτά. Σε πολλές έρευνες έχει φανεί ότι η πλαισίωση των προβλημάτων και των δραστηριοτήτων στα μαθηματικά όπως και το είδος των ερωτήσεων που οι εκπαιδευτικοί υποβάλλουν καθορίζουν και το είδος των απαντήσεων που δίνουν οι μαθητές (Morgan, 1993).

Οι δημιουργικοί άνθρωποι δεν αντιμετωπίζουν τον κόσμο δίνοντας απαντήσεις σε μονοδιάστατες ερωτήσεις. Εξετάζουν τα προβλήματα με διαφορετικό φακό και επαναπροσδιορίζουν τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν. Για παράδειγμα, θα ήταν πιο δημιουργικό αντί οι εκπαιδευτικοί να διδάσκουν τα μαθηματικά, χρησιμοποιώντας ερωτήσεις της μορφής «Πόσο κάνει 10 + 10;», να υποβάλλουν στους μαθητές ερωτήματα του τύπου «Ποιοι δύο αριθμοί έχουν άθροισμα 20;», «Μπορείτε να βρείτε και άλλους αριθμούς που το άθροισμά τους είναι 20;», «Πόσες απαντήσεις μπορείτε να βρείτε;» .

Το ίδιο μαθηματικό περιεχόμενο μπορεί να διδαχτεί στους μαθητές με ερωτήσεις που απαιτούν από τους μαθητές να σκεφτούν ιδέες και να εφαρμόσουν διαδικασίες, όπως (α) αντί να ζητηθεί από τους μαθητές να υπολογίσουν το εμβαδόν ορθογωνίου με διαστάσεις 12×2, μπορεί να τους ζητηθεί να βρουν ορθογώνια με εμβαδόν 24 τετραγωνικές μονάδες, (β) αντί να ζητηθεί η απλοποίηση της παράστασης $\frac{1}{3}(2x + 15) + 8$, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να βρουν όλες τις ισοδύναμες παραστάσεις, όπως φαίνεται πιο κάτω (Διάγραμμα 3). Αυτές οι μικρές διαφοροποιήσεις αλλάζουν το κίνητρο των μαθητών να ασχοληθούν με το πρόβλημα και παράλληλα τους παρακινούν να κατανοήσουν το περιεχόμενο και να αναζητήσουν ιδέες.

$\frac{1}{3}(2x+15)+8$	$\frac{2x+15}{3}+8$	$\frac{2}{3}x+5+8$
$\frac{2x}{3}+13$	$\frac{2x+15+24}{3}$	$\frac{1}{3}(2x+39)$

Διάγραμμα 3: Ισοδύναμες παραστάσεις της $\frac{1}{3}(2x+15)+8$

Οι ερωτήσεις που τίθενται στους μαθητές είναι ουσιώδης παράγοντας για την ανάπτυξη της δημιουργικότητας, αφού συχνά οι απαντήσεις που δίνουν οι μαθητές προκαθορίζονται από τις ερωτήσεις που έχουν να απαντήσουν. Για αυτό το λόγο, αν οι εκπαιδευτικοί δεν προβληματιστούν για τις ερωτήσεις που υποβάλλουν στους μαθητές, δεν θα δοθούν πραγματικά καινοτόμες απαντήσεις από τους μαθητές. Στην πραγματικότητα, όλα τα ερωτήματα αποτελούν το πλαίσιο στο οποίο εμπίπτουν οι απαντήσεις που αναμένονται από τους μαθητές. Με αυτό τον τρόπο, οι δάσκαλοι καθορίζουν τα πλαίσια και τις εμπειρίες που βιώνουν οι μαθητές μας στο σχολείο. Αν λοιπόν οι δάσκαλοι διαφοροποιήσουν το πλαίσιο των ερωτήσεων που υποβάλλουν στους μαθητές, είναι πολύ πιθανόν να δούμε θεαματικές αλλαγές στο εύρος και στο είδος των απαντήσεων που δίνουν οι μαθητές μας (Morgan, 1993). Το πλαίσιο των δραστηριοτήτων δημιουργεί και τις προϋποθέσεις για κατανόηση εννοιών και δημιουργία.

Αναζήτηση κατάλληλων ερωτήσεων και αλλαγή εικασιών

Λόγω του περιορισμένου χρόνου διδασκαλίας, δεν δίνεται η ευκαιρία στους εκπαιδευτικούς να ενασχοληθούν με τα ουσιαστικά ερωτήματα και τη δημιουργία εικασιών και αλλαγής του πλαισίου της δραστηριότητας. Συνήθως στις τάξεις των μαθηματικών το περιθώριο αμφιβολίας ως αποτέλεσμα των ερωτήσεων που υποβάλλονται είναι αρκετά μικρό και έτσι δεν παρουσιάζονται στους μαθητές πραγματικές, μαθηματικές προκλήσεις. Πιο κάτω παραθέτουμε ένα παράδειγμα μιας διερεύνησης η οποία είναι δυνατόν να προκαλέσει περισσότερες ερωτήσεις αντί απαντήσεις (NRICH, 2017).

Εξετάζοντας τους υπολογισμούς με προσοχή οι εκπαιδευτικοί μπορούν να θέσουν μια σειρά από ερωτήσεις, όπως: «Είστε σίγουροι ότι βρήκατε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς των τεσσάρων αριθμών;», ή «γιατί όλες οι απαντήσεις είναι άρτιοι αριθμοί;» ή «γιατί δεν εμφανίζεται ως απάντηση το «- 6»; ».

Ένας άλλος τρόπος να ενισχυθεί η φαντασία των μαθητών είναι μέσω προκλητικών εικασιών. Αυτό σημαίνει ότι οι εκπαιδευτικοί δεν αρκούνται στην πρώτη ορθή απάντηση που θα δώσουν οι μαθητές, αλλά υποβάλλουν επιπρόσθετα στους μαθητές νέα ερωτήματα και προκαλούν νέες διερευνήσεις που πιθανόν να οδηγήσουν τους μαθητές σε ενδιαφέρουσες λύσεις. Ο Ponte (2007) υπογραμμίζει ότι οι διερευνήσεις και η επίλυση προβλημάτων προσφέρουν εύφορο έδαφος για ανάπτυξη της δημιουργικότητας των μαθητών.

Χρησιμοποιώντας τους διαδοχικούς αριθμούς 1, 2, 3 και 4 να διερευνήσετε τι συμβαίνει, όταν χρησιμοποιούμε διαφορετικούς συνδυασμούς του + και – μεταξύ αυτών των αριθμών. Μπορούμε να ξεκινήσουμε με τον ακόλουθο τρόπο:

$$1+2+3+4=10$$
$$1-2+3+4=6$$
$$1+2-3+4=4$$
$$1+2+3-4=2$$
$$1-2-3+4=0$$
$$1-2+3-4=-2$$
$$1+2-3-4=-4$$
$$1-2-3-4=-8$$

Διάγραμμα 4: Συνδυασμοί τεσσάρων διαδοχικών αριθμών.

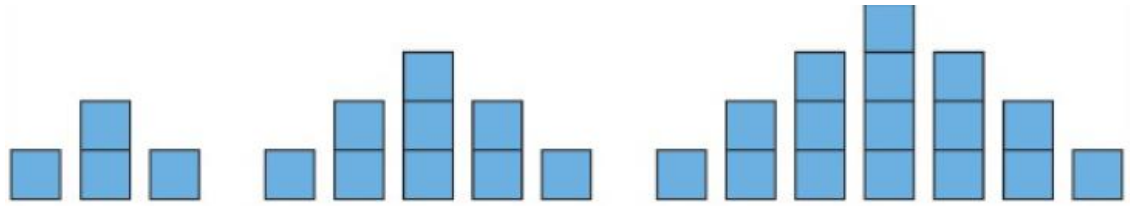
Επιπρόσθετα, αυτό το είδος διερεύνησης δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να αλλάξουν τους διαδοχικούς αριθμούς, π.χ. σε 2, 3, 4 και 5 και να παρατηρήσουν κατά πόσο οι απαντήσεις που προέκυψαν από την πρώτη ομάδα διαδοχικών αριθμών παραμένει η ίδια με τις απαντήσεις που παίρνουν από τη δεύτερη ομάδα αριθμών. Είναι επίσης δυνατόν να διευρυνθεί η διερεύνηση με ερωτήσεις του τύπου «τι θα συμβεί αν…;», όπως «Τι θα συμβεί αν χρησιμοποιήσεις διαδοχικούς αριθμούς οι οποίοι μικραίνουν αντί να μεγαλώνουν;», «τι θα συμβεί αν χρησιμοποιείς τρεις ή δύο διαδοχικούς αριθμούς;», «τι θα συμβεί αν τοποθετήσεις τα σύμβολα + ή – πριν από τον πρώτο αριθμό;».

Στο πιο πάνω παράδειγμα, φαίνεται ότι αυτό το απλό μαθηματικό πλαίσιο παρέχει μια καλή ευκαιρία στους μαθητές να εξερευνήσουν μαθηματικές έννοιες. Για να συνδέσουμε αυτό το παράδειγμα άμεσα με τη δημιουργικότητα υπογραμμίζουμε ότι η δημιουργικότητα εμπλέκεται τόσο στη σύνδεση διαφορετικών περιοχών ή ερωτήσεων, όπως επίσης και στον αναστοχασμό των ερωτήσεων ο οποίος οδηγεί στη διαδικασία δημιουργίας προκλητικών εικασιών.

Οπτικοποίηση

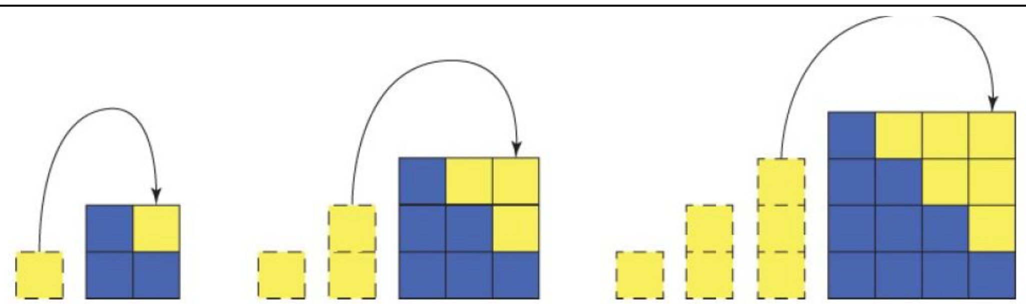
Η οπτικοποίηση των μαθηματικών εννοιών συμβάλλει στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και πολύ περισσότερο αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο της φαντασίας και της επινόησης, χαρακτηριστικά που είναι απαραίτητα για την ανάπτυξη της δημιουργικότητας των μαθητών. Στο πιο κάτω πρόβλημα (Διάγραμμα 5) ζητείται από τους μαθητές να υπολογίσουν τον 100ό όρο και στη συνέχεια να κάνουν γενίκευση για τον νιοστό όρο. Είναι η πιο συνηθισμένη ερώτηση που υποβάλλεται στους μαθητές σε παρόμοιες καταστάσεις.

Να βρείτε τον 100ό όρο του πιο κάτω μοτίβου και στη συνέχεια να βρείτε τον νιοστό όρο.



Διάγραμμα 5: Πρόβλημα οπτικοποίησης μοτίβου

Ένας μικρός αριθμός μαθητών στο γυμνάσιο έχουν την ικανότητα να εργαστούν με την άλγεβρα και να δώσουν μια ορθή απάντηση. Αν ο εκπαιδευτικός παρακινήσει τους μαθητές να επιλύσουν το πρόβλημα, χρησιμοποιώντας τον σχηματισμό του μοτίβου (Διάγραμμα 5), η κατάληξη θα είναι σίγουρα πιο παραγωγική, γιατί όλοι σχεδόν οι μαθητές θα είναι σε θέση να δουν νοερά την ανάπτυξη του μοτίβου με πολλούς τρόπους και εύκολα να καταλήξουν ότι ο νιοστός όρος του μοτίβου είναι ίσος με το $(\nu+1)^2$. Η οπτικοποίηση σε αυτή την περίπτωση συμβάλλει όχι μόνο στη λύση του προβλήματος, αλλά πολύ περισσότερο στην κατανόηση της αλγεβρικής μεθόδου, που συνήθως χρησιμοποιείται στην επίλυση αυτών των προβλημάτων, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 6.



Διάγραμμα 6: Οπτικοποίηση μοτίβου

Η μοντελοποίηση, που είναι υπό έμφαση στόχος των μαθηματικών σε πολλά αναλυτικά προγράμματα, συμβάλλει στην ανάπτυξη της φαντασίας στα μαθηματικά. Πολλά προβλήματα, που φαίνονται δύσκολα σε πολλούς μαθητές, απαιτούν μια αλλαγή στην προοπτική αντιμετώπισής τους, ώστε να υπολογίσουν οι μαθητές τη σχετική απάντηση. Για παράδειγμα, το πιο κάτω πρόβλημα είναι δύσκολο για πολλούς μαθητές στο δημοτικό και στις πρώτες τάξεις του γυμνασίου. Η οπτικοποίηση του προβλήματος μέσω μοντελοποίησης εμπεριέχει πολλές ευκαιρίες για κατανόηση και επίλυσή του ενώ αντίθετα η χρήση αριθμητικών πράξεων είναι δυνατό να δυσκολεύει πολύ την επίλυσή του.

Ο Γιάννης είναι σε αυστηρή δίαιτα. Αγόρασε από ένα κατάστημα 3 φέτες γαλοπούλα που ζύγιζαν 1/3 του κιλού. Λόγω της δίαιτάς του πρέπει να καταναλώσει μόνο ¼ του κιλού. Τι μέρος των φετών που αγόρασε μπορεί να καταναλώσει;

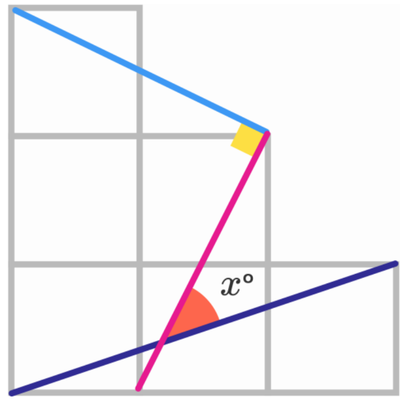
Διάγραμμα 7: Πρόβλημα μοντελοποίησης-οπτικοποίησης

Σύνδεση μαθηματικών εννοιών

Οι μεγαλύτερες επινοήσεις στα μαθηματικά δεν προέρχονται από το κενό. Είναι αποτέλεσμα σύνθεσης ή και διασύνδεσης εννοιών με τρόπους που μας εκπλήσσουν. Η διασύνδεση των μαθηματικών εννοιών αποτελεί σήμερα προτεραιότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης και αποτελεί πολλές φορές προϋπόθεση για τη διαφοροποίηση των τρόπων επίλυσης προβλημάτων. Οι διαδικασίες που χρησιμοποιούν οι μαθητές στην επίλυση προβλημάτων συνδέονται άμεσα με τις προϋπάρχουσες γνώσεις τους και τις εμπειρίες τους.

Η ευκαιρία των μαθητών να επιλύουν προβλήματα στα οποία θα χρησιμοποιήσουν προηγούμενες γνώσεις και να εφαρμόσουν στρατηγικές που έμαθαν προηγουμένως είναι χαρακτηριστικό γνώρισμα των μαθητών που κατασκευάζουν ιδέες. Το πιο κάτω πρόβλημα (Διάγραμμα 8) ακριβώς επεξηγεί πώς οι μαθητές κάνοντας χρήση προηγούμενων γνώσεων (π.χ. η μεταφορά ευθύγραμμου τμήματος δεν διαφοροποιεί τη γωνία που σχηματίζει με άλλη ευθεία).

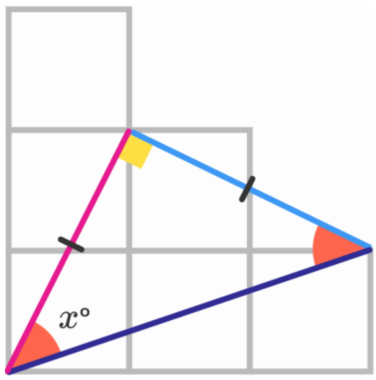
Να βρεις το μέτρο της κόκκινης γωνίας:



Διάγραμμα 8: Σύνδεση με προηγούμενες γνώσεις

Οι τρόποι λύσης του προβλήματος εξαρτώνται ακριβώς από τις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών και από τις εμπειρίες τους στην επίλυση προβλημάτων. Αν για παράδειγμα δοθεί το πρόβλημα αυτό σε μαθητές του λυκείου, θα δώσουν λύσεις, χρησιμοποιώντας τριγωνομετρία και διανύσματα. Αν όμως δοθεί σε μαθητές στο γυμνάσιο θα δώσουν λύσεις ευφάνταστες, μεταφέροντας τα ευθύγραμμα τμήματα σε θέσεις παράλληλες με τις αρχικές, ανασχηματίζοντας το πρόβλημα με τρόπο που η λύση να είναι άμεσα ορατή, όπως φαίνεται πιο κάτω (Διάγραμμα 9).

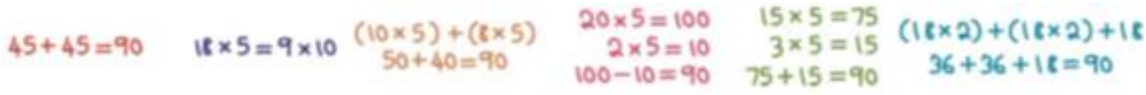
Να βρεις το μέτρο της κόκκινης γωνίας:



Διάγραμμα 9: Λύση του προβλήματος που φαίνεται στο Διάγραμμα 8

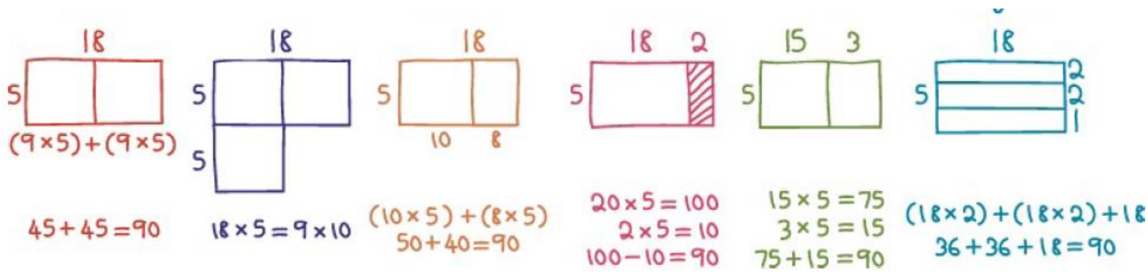
Αποτέλεσμα της σύνδεσης είναι η κατανόηση της ευελιξίας των μαθηματικών και η αντίληψη των μαθητών ότι τα μαθηματικά είναι ένα ανοικτό αντικείμενο στο οποίο οι έννοιες διασυνδέονται μεταξύ τους και αποτελούν τον τρόπο επίλυσης πολλών προβλημάτων. Πολλές φορές οι δυσκολίες των μαθητών στα μαθηματικά είναι αποτέλεσμα της ελλιπούς κατανόησης προαπαιτούμενων εννοιών, οι οποίες διδάχτηκαν με επιφανειακό τρόπο σε προηγούμενα χρόνια και με τρόπο που τα μαθηματικά να φαίνονται απομονωμένα από άλλες έννοιες του αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών.

Η δημιουργικότητα στη διδασκαλία διδάσκεται μόνο με τρόπους επίλυσης προβλημάτων που προσφέρουν ευκαιρίες για φαντασία και αλληλοσύνδεση των μαθηματικών εννοιών. Σε έρευνα που έγινε στην Αμερική με δείγμα επιστήμονες που το αντικείμενο της εργασίας τους έχει άμεση σχέση με τα μαθηματικά έδειξε ότι ερωτήσεις για απλές έννοιες των μαθηματικών προκαλούν ακόμα και μαθηματικούς που δεν ασχολούνται με τα μαθηματικά του σχολείου (Boaler, 2016). Ταυτόχρονα έδειξε ότι οι δυσκολίες που έχουν, για παράδειγμα, οι μαθητές με την άλγεβρα στο γυμνάσιο έχουν ως αιτία τη μη κατανόηση της αίσθησης του αριθμού. Φυσικά αυτό ήταν το αποτέλεσμα της επιφανειακής διδασκαλίας των αριθμών σε προηγούμενες τάξεις, όταν οι μαθητές δεν είχαν την ευκαιρία να προβληματιστούν με πραγματικές ερωτήσεις στα μαθηματικά, ώστε να έχουν τη δυνατότητα να εργαστούν σε βάθος με τα μαθηματικά, χρησιμοποιώντας και εφαρμόζοντας όλες τις ικανότητές τους και τη δημιουργικότητά τους. Σε ερώτηση στην πιο πάνω έρευνα να βρουν το αποτέλεσμα του 15×8, οι ερωτώμενοι έδωσαν τις πιο κάτω λύσεις (Διάγραμμα 10):



Διάγραμμα 10: Τρόποι υπολογισμού του γινομένου 15×8

Η ερώτηση, όμως, που ξάφνιασε και προκάλεσε τους ερωτώμενους ήταν η λύση του πιο πάνω προβλήματος με γραφικό τρόπο. Η απάντηση που δόθηκε ήταν η σύνδεση των πιο πάνω απαντήσεων με τα σχεδιαγράμματα που φαίνονται πιο κάτω (Διάγραμμα 11):



Διάγραμμα 11: Οπτικοποίηση του γινομένου 15×8,

Το συμπέρασμα των πιο πάνω δείχνει ακριβώς ότι τα μαθηματικά απαιτούν σκέψη με ακρίβεια, αλλά όταν η σκέψη αυτή συνδέεται με την ευελιξία, τη φαντασία και τη δημιουργικότητα, τα μαθηματικά είναι ζωντανά στα μάτια των μαθητών. Οι δάσκαλοι των μαθηματικών μπορούν να δημιουργήσουν τέτοιες δημιουργικές καταστάσεις στην τάξη με οποιοδήποτε πρόβλημα ή άσκηση δίνουν στους μαθητές.

Αλλαγή προοπτικήςς

Η ικανότητα αλλαγής προοπτικής φαίνεται να είναι σημαντική για την ανάπτυξη της κατανόησης, της φαντασίας και της δημιουργικότητας στα μαθηματικά. Τα μαθηματικά είναι η εύρεση μοτίβων, συνδέσεων, δομών, κανόνων που ερμηνεύουν τις πιο πολλές φορές τον κόσμο στον οποίο ζούμε. Τα μαθηματικά είναι επίσης η ικανότητα αναπαράστασης αυτών των μοτίβων μέσω μιας άλλης γλώσσας με διαφορετικά σύμβολα. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει μία συγκεκριμένη γλώσσα (ένας συμβολισμός) στην οποία μπορούμε να αναπαραστήσουμε κάποια ιδέα, τότε χρειάζεται να δημιουργήσουμε αυτή τη νέα γλώσσα (τα νέα σύμβολα). Είναι επίσης σημαντικό να κάνουμε κάποιες εικασίες και να επεξεργαστούμε αυτές τις εικασίες, για να εξετάσουμε τι συμβαίνει.

Ταυτόχρονα, αν κάποιος διαφοροποιήσει την προοπτική μέσω της οποίας αντιλαμβάνεται μια κατάσταση, θα διαπιστώσει μία διαφορετική όψη των πραγμάτων που θα οδηγήσει σε κάτι νέο. Για παράδειγμα, μια απλή εξίσωση όπως αυτή $x + x = 2x$ είναι ένα πολύ ωραίο μοτίβο. Συμβολίζει κάτι που προσθέτουμε το οποίο όμως ισούται με κάτι άλλο που δεν είναι πρόσθεση. Είναι μια διαφορετική αντίληψη, που είναι ταυτόχρονα και πρόκληση και ανακάλυψη της άμεσης κατανόησης των μαθηματικών εννοιών. Συγκεκριμένα, υπάρχουν δύο διαφορετικές προοπτικές σε αυτή την εξίσωση: η μια προοπτική είναι το άθροισμα και η δεύτερη προοπτική είναι ο πολλαπλασιασμός.

Το ίδιο συμβαίνει στα μαθηματικά με οποιοδήποτε αριθμό. Απλώς οι μαθητές χρειάζονται χρόνο, για να δούνε τα μοτίβα και τις προοπτικές που ξεδιπλώνονται μπροστά τους μέσα από διαφορετικές αναπαραστάσεις. Για παράδειγμα, οι περισσότεροι μαθητές γνωρίζουν ότι το κλάσμα 4/3 ισούται με $1{,}33333333\ldots_{10}$. Αυτή η αναπαράσταση είναι γραμμένη στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης και εμφανίζει ένα μοτίβο. Οι μαθητές μπορούν να προχωρήσουν περισσότερο και να ενασχοληθούν με τη γραφή του αριθμού αυτού σε διαφορετικά συστήματα αρίθμησης και έτσι να ανακαλύψουν τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να εκφράσουμε τον αριθμό 4/3, π.χ. $1{,}33333333\ldots_{10}$ $1{,}11111111\ldots_{4}$, $1{,}13131313\ldots_{5}$, $1{,}22222222\ldots_{7}$, $1{,}25252525\ldots_{8}.1{,}33333333\ldots_{10}$ Όλες αυτές είναι μορφές του ίδιου αριθμού και οι μαθητές μπορούν να παρατηρήσουν τα μοτίβα που εμφανίζονται, όταν ο αριθμός γραφτεί σε διαφορετικές βάσεις (Antonsen, 2017). Επιπλέον, οι μαθητές θα μπορούσαν να απεικονίσουν 4/3 ως λόγο ή ως έναν ορθογώνιο με διαστάσεις 4×3 και να το συνδέσουν με τις οθόνες παλαιότερων υπολογιστών και τηλεοράσεων που είναι 800×600 ή 1024×768 ή 1600×1200. Οι μαθητές μπορούν επίσης να οπτικοποιήσουν το 4/3 και σε πολλές άλλες καταστάσεις, όπως για παράδειγμα στον τύπο του όγκου της σφαίρας (Antonsen, 2017).

ΕΞΩΤΕΡΙΚΕΣ ΠΗΓΕΣ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑΣ

Οι πόροι αποτελούν μία από τις εξωτερικές πηγές δημιουργικότητας και είναι θέμα αρκετά πολύπλοκο και πολυδιάστατο. Οι πόροι περιλαμβάνουν μεταξύ άλλων, τα μέσα και τα υλικά, τον χρόνο, την τεχνολογία και τα κατάλληλα προβλήματα που έχουν οι εκπαιδευτικοί στη διάθεσή τους, για να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν τη δημιουργικότητά τους. Ωστόσο, ένα από τα στοιχεία στα οποία οι εκπαιδευτικοί συχνά δεν δίνουν την απαραίτητη προσοχή είναι ο χώρος.

Ο χώρος, είναι κρίσιμος για τη δημιουργία ενός περιβάλλοντος στο οποίο η δημιουργικότητα μπορεί να ευδοκιμήσει. Οι μαθητές χρειάζονται χώρο όπου η δημιουργικότητα, η χαρά της δημιουργίας και η γένεση ιδεών να είναι ευπρόσδεκτες.

Η κουλτούρα είναι ένας άλλος σημαντικός παράγοντας και είναι κάτι που επηρεάζει ολόκληρο το σχολείο. Η κουλτούρα επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο σκεφτόμαστε, τον τρόπο που ενεργούμε και έτσι πρέπει να τον λαμβάνουμε σοβαρά υπόψη μας. Η μαθηματική νοοτροπία δεν μπορεί να αναπτυχθεί μόνο στο σχολείο, όταν για παράδειγμα οι γονείς των μαθητών και πολύ περισσότερο η ευρύτερη κοινωνία δεν επιδιώκουν την ευελιξία, τον τρόπο σκέψης, τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Στο άρθρο αυτό αναφέρθηκαν σε συντομία οι εξωτερικοί και εσωτερικοί παράγοντεςr της δημιουργικότητας. Ωστόσο, το πιο σημαντικό είναι να δούμε τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί συνολικά αυτό το πλαίσιο. Ο λόγος είναι ότι οι παράγοντες αυτοί δεν λειτουργούν από μόνοι τους ή απομονωμένα από τους υπόλοιπους. Όλοι οι παράγοντες επηρεάζονται ο ένας από τον άλλο και κανένας τους δεν μπορεί να λειτουργήσει χωρίς την ύπαρξη των άλλων. Για παράδειγμα, η φαντασία και οι πόροι λειτουργούν παράλληλα. Οι πόροι που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί επηρεάζουν τη μάθηση των μαθητών. Οι πόροι που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί επηρεάζουν τον τρόπο που σκέφτονται οι μαθητές και ο τρόπος με τον οποίο ενεργούν οι μαθητές σίγουρα επηρεάζει τη μαθηματική νοοτροπία που αναπτύσσουν. Το ίδιο ισχύει και για τις στάσεις, τη μαθηματική νοοτροπία και την κουλτούρα. Η κουλτούρα είναι η συλλογή των στάσεων διαφορετικών ατόμων και ταυτόχρονα κάθε άτομο συνεισφέρει σε αυτή την κουλτούρα. Το σημαντικό είναι ότι οι εκπαιδευτικοί μπορούν να ξεκινήσουν από οπουδήποτε σημείο αυτού του πλαισίου, γιατί δεν υπάρχει ούτε αρχή ούτε τέλος. Η δημιουργικότητα είναι σημαντική και προσδίδει δύναμη στα άτομα και στον κόσμο γενικότερα και πρέπει το σχολείο να την ενεργοποιήσει.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abiola, O. O., & Dhindsa, H. S. (2011). Improving classroom practices using our knowledge of how the brain works. *International Journal of Environmental & Science Education, 7*(1), 71–81.

Antonsen, R. (April 2017). Math is the hidden secret to understanding the world. Retrieved from https://www.ted.com/talks/roger_antonsen_math_is_the_hidden_secret_to_understanding_the_world.

Beghetto, R.A. (2007). Does creativity have a place in classrom discussions? Prospective teachers' response preferences. *Thinking skills and creativity, 2,* 1-9. doi:10.1016/j.tsc.2006.09.002

Blackwell, L., Trzesniewski, K., & Dweck, C. S. (2007). Implicit theories of intelligence predict achievement across an adolescent transition: A longitudinal study and an intervention. *Child Development, 78*(1), 246–263.

Boaler, J. (2016). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Boden, M. (2004). *The creative mind: myths and mechanisms.* New York: Routledge.

Bolden, D., Harries, A., & Newton, D. (2010). Pre-service primary teachers' conceptions of creativity in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 73*(2), 143-157.

Collard, P., & Looney, J. (2014). Nurturing Creativity in Education. *European Journal of Education*, *49*(3), 348-364.

Craft, A. (2003). The limits to creativity in education: Dilemmas for the educator. *British Journal of Educational Studies, 51,* 113-127. doi:10.1111/1467-8527.t01-1-00229.

Dweck, C. S. (2006). *Mindset: The new psychology of success.* New York: Ballantine Books.

Hoyt, D.P. (April, 2017). Some thoughts on selecting IDEA objectives. Manhattan, KS: The IDEA Center. Retrieved from http://www.rpi.edu/coursedevelopers/DesigningInstruction/DL_A/idea/IDEATeaching%20Effectiveness/IDEA%20Objective%20Selection%20Thoughts. pdf.

Friedlander, A, (2016). *Some types of creativity-promoting tasks.* Paper presented at the 13th International Congress on Mathematical Education, Hamburg, Germany.

Kennedy, M. (2005). *Inside teaching: How classroom life undermines reform.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Leikin, R. (2014). Challenging mathematics with multiple solution tasks and mathematical investigations in geometry. In Y. Li, E. A. Silver, & S. Li (Eds.), *Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices.* Dordrecht, the Netherlands: Springer.

Leikin, R., & Pitta-Pantazi, D. (2013). Creativity and mathematics education: Overview on the state-of-art. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education,* *45*(2), 159-166. doi:10.1007/s11858-012-0459-1

Mann, E. L. (2006). Creativity: The Essence of Mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, *30*, 236-262.

Morgan, M. (1993). *Creating Workforce Innovation.* Sydney: Business and Professional Publishing.

Moser, J., Schroder, H. S., Heeter, C., Moran, T. P., & Lee, Y. H. (2011). Mind your errors: Evidence for a neural mechanism linking growth mindset to adaptive post error adjustments. *Psychological Science, 22,* 1484–1489.

NRICH (2017). Consecutive numbers. Retrieved from http://nrich.maths.org/31.

Ponte, J. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *39*, 419–430.

Seelig, T. (2012). *inGenius: A Crash Course on Creativity*. New York: HarperOne.

Skiba, T., Tan, M., Sternberg, R.J., & Grigorenko, E.L. (2010). Roads not taken, new roads to take: looking for creativity in the classroom. In Beghetto R.A., & Kaufman J.C. (Eds.), *Nurturing Creativity in the Classroom* (pp. 252-269). New York: Cambridge University Press.

Woollett, K., & Maguire, E. A. (2011). Acquiring “The Knowledge” of London’s layout drives structural brain changes. *Current Biology, 21*(24), 2109–2114.

ΣΤΡΟΓΓΥΛΟ ΤΡΑΠΕΖΙ

ΜΕΤΑΒΑΣΕΙΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ (ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑ-ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ-ΤΡΙΤΟΒΑΘΜΙΑ-ΣΧΟΛΕΙΟ): ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΚΕΣ, ΨΥΧΟΛΟΓΙΚΕΣ, ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΚΑΙ ΘΕΣΜΙΚΕΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Στο στρογγυλό τραπέζι συμμετέχουν:

Αμαλία Μπαμπίλη, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
amabab@gmail.com

Άντα Μπούφη, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
aboufi@primedu.uoa.gr

Κώστας Στουραΐτης, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
kstouraitis@math.uoa.gr

Τριαντάφυλλος Τριανταφυλλίδης, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
ttriant@uth.gr

Συντονίστρια:

Έλενα Ναρδή, University of East Anglia, e.nardi@uea.ac.uk

Οι μεταβάσεις στη μαθηματική εκπαίδευση είναι πολλαπλές και πολυδιάστατες. Αφορούν τόσο το πέρασμα από τη μια βαθμίδα της εκπαίδευσης στην επόμενη ή στο χώρο εργασίας, όσο και περάσματα που σχετίζονται με το περιεχόμενο των μαθηματικών (π.χ. από την αριθμητική στην άλγεβρα). Σε αυτό το στρογγυλό τραπέζι, θα συζητήσουμε επιστημολογικές, ψυχολογικές, παιδαγωγικές και θεσμικές διαστάσεις των μεταβάσεων αυτών. Στη συνέχεια, θα εντοπίσουμε προβληματικά σημεία τους. Τέλος, θα συζητήσουμε διασυνδέσεις ανάμεσα στις διαφορετικές διαστάσεις αυτών των μεταβάσεων και θα προτείνουμε τρόπους με τους οποίους οι μεταβάσεις μπορούν να γίνουν ομαλότερες και πιο γόνιμες.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

> Ο νεαρός φοιτητής έβρισκε, στην αρχή, τον εαυτό του αντιμέτωπο με προβλήματα που δεν έμοιαζαν καθόλου με αυτά με τα οποία ασχολούνταν στο σχολείο. Αυτά φυσικά τα είχε εντελώς και γρήγορα ξεχάσει. Όταν, αφού τελείωσε τις σπουδές του, έγινε εκπαιδευτικός, ξαφνικά ανακάλυψε πως αναμενόταν από αυτόν να διδάξει τα παραδοσιακά, θεμελιώδη μαθηματικά με τον παλιό, σχολαστικό τρόπο· και μιας και ήταν ελάχιστα προετοιμασμένος και αβοήθητος στο να διακρίνει το σύνδεσμο ανάμεσα σε αυτό το καθήκον και στα μαθηματικά που είχε μάθει στο πανεπιστήμιο, σύντομα υιοθέτησε τον παλιομοδίτικο τρόπο διδασκαλίας, και οι πανεπιστημιακές του σπουδές απέμειναν μια λίγο πολύ ευχάριστη ανάμνηση που δεν είχε όμως καμία επίδραση πάνω στη διδασκαλία του. (Klein, 1908/1932, σελ.1)

Με αυτή τη γλαφυρή εξιστόρηση ξεκινάει ο Felix Klein τον εναρκτήριο τόμο της κλασικής σειράς *Στοιχειώδη μαθηματικά από προχωρημένη οπτική γωνία* για να αναδείξει αυτό που αποκαλεί «διπλή ασυνέχεια» (double discontinuity) και την οποία βιώνουν όσοι περνάνε από το σχολείο στο πανεπιστήμιο και πίσω πάλι στο σχολείο, πλέον ως επαγγελματίες-εκπαιδευτικοί. Η πρώτη ασυνέχεια αφορά τα πολλαπλά και πλέον ευρέως αναλυμένα προβλήματα (π.χ. Gueudet, 2008; Nardi, 1996; 1999; 2008, σελ.93-101) που αντιμετωπίζουν οι νέοι φοιτητές κατά την εισαγωγή τους στο πανεπιστήμιο. Η δεύτερη ασυνέχεια (π.χ. Winsløw & Grønbæk, 2014) αφορά όσους επιστρέφουν στο σχολείο ως εκπαιδευτικοί και είναι επιφορτισμένοι με πρώτιστο καθήκον τους να μετασχηματίσουν την ακαδημαϊκή γνώση, μαθηματική και παιδαγωγική, σε διδακτική πράξη.

Σε αυτό το στρογγυλό τραπέζι εστιάζουμε σε τέσσερις εκφάνσεις αυτής της διπλής ασυνέχειας με στόχο να εξετάσουμε πώς αυτές χαρακτηρίζουν την ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα. Ξεκινάμε αποδεχόμενοι πως οι μεταβάσεις στη μαθηματική εκπαίδευση είναι όχι μόνο πολλαπλές αλλά και πολυδιάστατες. Αφορούν το πέρασμα από τη μια βαθμίδα της εκπαίδευσης στην επόμενη, ή στο χώρο εργασίας: από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, από το σχολείο στο πανεπιστήμιο και από τις πανεπιστημιακές σπουδές στη διδακτική πράξη του σχολείου. Αφορούν όμως πρωτίστως και περάσματα που σχετίζονται με το περιεχόμενο των μαθηματικών: από την αριθμητική στην άλγεβρα, θεμελιώδη και αφηρημένη· από την άλγεβρα στην ανάλυση· από την ανάλυση στην τοπολογία, κλπ.

Διευρύνοντας τον ορίζοντα της θεώρησής μας πέρα από, αλλά πάντα μαζί με, το μαθηματικό περιεχόμενο της εμπειρίας των μαθητών / φοιτητών / εκπαιδευτικών, αναγνωρίζουμε πως οι μεταβάσεις αυτές έχουν διαστάσεις *επιστημολογικές*, *ψυχολογικές*, *παιδαγωγικές* και *θεσμικές* – και πως χρειαζόμαστε εύρος θεωρητικών και μεθοδολογικών εργαλείων για να διερευνήσουμε την καθεμία από αυτές τις διαστάσεις. Δεν μας προκαλεί επομένως έκπληξη το γεγονός πως από τις πρώτες μελέτες της μετάβασης, π.χ., από το σχολείο στο πανεπιστήμιο, οι οποίες συχνά εστίαζαν πάνω στα «κενά» και τα «λάθη» των σχολικών προγραμμάτων και συγγραμμάτων – και συνεπώς την ελλειμματική προετοιμασία των άρτι αφιχθέντων φοιτητών – η πλειονότητα των σύγχρονων μελετών υιοθετεί μια πιο ολιστική προσέγγιση που δανείζεται θεωρητικά και μεθοδολογικά εργαλεία της γνωστικής και κοινωνικής ψυχολογίας, κοινωνιολογίας αλλά και ανθρωπολογίας. Αυτή είναι και η προσέγγιση που έχουμε υιοθετήσει και εμείς κατά την προετοιμασία αυτού του στρογγυλού τραπεζιού.

Από *επιστημολογική* σκοπιά αναρωτιόμαστε, π.χ., τι σημαίνει «κάνω μαθηματικά» στο σχολείο, και τι στο πανεπιστήμιο; Από *ψυχολογική* σκοπιά διερευνούμε, π.χ., πώς επηρεάζει η έλευση της εφηβείας την ενασχόληση των μαθητών του Γυμνασίου με τα μαθηματικά; Από *παιδαγωγική* σκοπιά, αναρωτιόμαστε, π.χ., πώς επηρεάζεται η μάθηση των μαθηματικών από τις έντονα διαφορετικές διδακτικές προσεγγίσεις και αντιλήψεις για το ρόλο του διδάσκοντα στο δημοτικό, στο γυμνάσιο, στο λύκειο και στο πανεπιστήμιο; Τέλος από *θεσμική* σκοπιά διερευνούμε ερωτήματα, όπως: τι επίπτωση έχει στις διδακτικές προσεγγίσεις ενός εκπαιδευτικού η μετάβαση από χώρους μάθησης, όπως το πανεπιστήμιο, σε χώρους εργασίας, όπως η σχολική ή φροντιστηριακή τάξη, ή το ιδιαίτερο μάθημα;

Καθ'όλη τη διερεύνησή μας εντοπίζουμε προβληματικά σημεία αυτών των μεταβάσεων και αναρωτιόμαστε από πού προκύπτουν αυτά τα προβλήματα. Ιδού μερικά παραδείγματα: κατά τη μετάβαση από το δημοτικό στο γυμνάσιο πολλοί μαθητές χάνουν την έως τότε θετική στάση τους απέναντι στα μαθηματικά. Ή, λίγο μετά την είσοδό τους στο πανεπιστήμιο οι φοιτητές εκπλήσσονται δυσάρεστα από το φορμαλισμό και την αφαίρεση των πανεπιστημιακών μαθηματικών. Ή οι νεοδιόριστοι καθηγητές των μαθηματικών απογοητεύονται όταν η καθημερινή σχολική λειτουργία και η διαμορφωμένη κουλτούρα περιορίζουν τις ενθουσιώδεις, φιλόδοξες προθέσεις τους για διδακτικές καινοτομίες.

Τέλος, εντοπίζουμε διασυνδέσεις ανάμεσα στις διαφορετικές διαστάσεις αυτών των μεταβάσεων και προτείνουμε τρόπους με τους οποίους οι μεταβάσεις μπορούν να γίνουν ομαλότερες (π.χ., με πιο διαφανή, σαφή και σκόπιμη προετοιμασία για τις απαιτήσεις του νέου πλαισίου από μαθητές και διδάσκοντες σε κάθε μετάβαση) και πιο γόνιμες (π.χ., αξιοποιώντας τις πλούσιες δυνατότητες της συνεργασίας ανάμεσα στην εκπαιδευτική και την ακαδημαϊκή κοινότητα).

Σε κάθε μία από τις τέσσερις ενότητες που ακολουθούν, εστιάζουμε σε μία από τις τέσσερις μεταβάσεις που αναφέραμε στην αρχή. Σημειώνουμε πως ο Τριαντάφυλλος Τριανταφυλλίδης επιμελήθηκε κυρίως την πρώτη ενότητα (από το δημοτικό στο γυμνάσιο), η Αμαλία Μπαμπίλη τη δεύτερη (από το σχολείο στο πανεπιστήμιο), η Άντα Μπούφη την τρίτη (από το πανεπιστήμιο στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση) και ο Κώστας Στουραΐτης την τέταρτη (από το πανεπιστήμιο στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση).

“MIND THE GAP!”: Η (ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ) ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Η μετάβαση από ένα οικείο σε ένα λιγότερο γνωστό περιβάλλον προβάλλει ως πολυεπίπεδα απαιτητική διαδικασία για εκείνον ή εκείνη που τη βιώνει. Εκτός από τη διαφοροποίηση των χωρικών συνθηκών, αυτό το πέρασμα συνοδεύεται από προκλήσεις και αλλαγές προσωπικών και συλλογικών ταυτοτήτων. Για έναν μαθητή ή μια μαθήτρια, η μετάβαση από έναν δομημένο συναισθηματικά, κοινωνικά, γνωσιακά, παιδαγωγικά και διδακτικά χώρο, όπως είναι αυτός του δημοτικού σχολείου, προς το γυμνάσιο, συμβαδίζει με αμφισβητήσεις, μετατοπίσεις και δυναμικές αλλαγές ταυτοτήτων.

Οι Clark και Lovric (2008) περιγράφουν τη μετάβαση από τη δευτεροβάθμια στην τριτοβάθμια μαθηματική εκπαίδευση αντλώντας αναλυτικά εργαλεία από την ανθρωπολογική έννοια της διαβατήριας τελετουργίας. Η μετάβαση από μια βαθμίδα της εκπαίδευσης σε μια άλλη συνιστά τελετουργία αφού επιτελείται σε συγκεκριμένο χώρο και χρόνο, χαρακτηρίζεται από μορφές συμβολικής δράσης, είναι κοινωνικά προδιαγεγραμμένη και επαναλαμβανόμενη, και αποτελεί σε αρκετές εκφάνσεις της ένα δημόσιο γεγονός. Μια διαβατήρια τελετουργία εξελίσσεται μέσα από τις φάσεις του αποχωρισμού, της μεθοριακότητας και της επανένταξης (Van Gennep, 2016). Ο αποχωρισμός περιλαμβάνει την προετοιμασία και εν τέλει την αποστασιοποίηση του υποκειμένου από το κοινωνικό σύνολο σε ένα συγκεκριμένο χωροχρόνο. Η μεθοριακότητα αφορά στη ως ένα βαθμό μη ορατότητα του μεταβατικού υποκειμένου, αφού, όντας «μεταξύ και ανάμεσα», αφενός δεν είναι πλέον κατηγοριοποιημένο και αφετέρου δεν έχει ακόμη ταξινομηθεί. Η επανένταξη σηματοδοτεί την επιστροφή του υποκειμένου στην κοινωνία, σε μια νέα όμως θέση, με νέα υπόσταση, υποχρεώσεις και δικαιώματα.

Από τα παραπάνω είναι μάλλον σαφές ότι η μετάβαση από το δημοτικό στο γυμνάσιο αποτελεί μια διαβατήρια τελετουργία. Οι μαθητές και οι μαθήτριες όταν αναφέρονται στο σχολείο ή την εκπαίδευσή τους εστιάζουν περισσότερο στο ρόλο και τη στάση των δασκάλων τους και λιγότερο στη φύση των διδακτικών αντικειμένων (Sdrolias & Triandafillidis, 2008). Σε αυτή τη γραπτή επικοινωνία, θα εστιάσω συνοπτικά σε γνωσιακά, παιδαγωγικά και διδακτικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής μετάβασης από το δημοτικό στο γυμνάσιο.

Αλλάζοντας βαθμίδα εκπαίδευσης, ένας μαθητής ή μια μαθήτρια εισέρχεται σε ένα νέο συγκείμενο το οποίο χαρακτηρίζεται από διαφορετικό *λόγο*, όπως αυτός εκφράζεται μέσα από τη γλώσσα, τα σύμβολα, τις αναπαραστάσεις και τα διάφορα εργαλεία (Yerushalmy, 2005). Η διδασκαλία και η μάθηση των σχολικών μαθηματικών είναι εγκαθιδρυμένη σε δραστηριότητες που διαδραματίζονται σε πολιτισμικά συγκείμενα, με τους συμμετέχοντες να αναπτύσσουν δυναμικά ‘κοινές’ μαθηματικές πρακτικές βάσει του περιεχομένου και των στόχων του αναλυτικού προγράμματος. Είναι όμως τόσο διαφορετικές οι πρακτικές στα δύο συγκείμενα για τα οποία συζητούμε, ώστε να δικαιολογούνται ασυνέχειες ή και ρήξεις;

Στο δημοτικό τα παιδιά νιώθουν διδακτικά και παιδαγωγικά ασφαλή. Η Νικολίνα μάς λέει ότι ο δάσκαλος της έκτης ήταν πολύ καλός και εξηγούσε καλά τα μαθηματικά. Έλεγε πολλές φορές το ίδιο πράγμα για να το καταλάβουν, ενώ πριν ξεκινήσουν να λύνουν μία άσκηση διάβαζαν όλοι μαζί τη θεωρία και μετά την έλυναν. Όταν μάλιστα έβλεπε ότι κουραζόντουσαν, έκανε αστεία για να τους ξεκουράσει και μετά ξαναγύριζε στο μάθημα. Πριν τον αποχωρισμό από το δημοτικό, οι δάσκαλοι και οι δασκάλες χρησιμοποιούν το γυμνάσιο και ως ‘φόβητρο’ για τους μαθητές και τις μαθήτριες προκειμένου να διαβάσουν περισσότερο. Συχνά όμως αυτοί οι αφορισμοί είναι προϊόντα εδραιωμένων αντιλήψεων κι όχι ουσιαστικής γνώσης της άλλης βαθμίδας. «Δεν γνωρίζω πώς γίνεται η προσέγγιση βλέπω όμως τα αρνητικά αποτελέσματα στο δικό μου παιδί», δηλώνει μια δασκάλα για τον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών στο γυμνάσιο.

Στο ξεκίνημα της πρώτης τάξης του γυμνασίου, όταν οι μαθητές και οι μαθήτριες βρίσκονται «μεταξύ και ανάμεσα», δυσκολεύονται να προσαρμοστούν στο νέο συγκείμενο. Όπως χαρακτηριστικά παρατηρεί μια δασκάλα: «Και τώρα έρχονται αυτά τα ίδια τα παιδιά *(τα περυσινά εκτάκια δηλαδή)* στο σχολείο και λένε: Καλά που τα μάθαμε πέρυσι, γιατί φέτος δεν καταλαβαίνουμε τίποτε έτσι όπως μας τα λέει». Η αναφορά στην επεξήγηση αναδύεται ως σημαντική και από τα λόγια μαθητών και μαθητριών. Η Εύα θεωρεί ότι ο καθηγητής τους ξέρει πιο πολλά πράγματα στα μαθηματικά από εκείνα που γνώριζε ο δάσκαλός τους, μιας και τα μαθηματικά στο γυμνάσιο είναι πιο απαιτητικά και ο καθηγητής τα αναλύει περισσότερο. Όμως τα αναλύει μόνο μία φορά και δεν επιμένει όπως ο δάσκαλος. Επίσης τη θεωρία τούς ζητά να τη διαβάσουν στο σπίτι και να τον ρωτήσουν την επόμενη φορά αν κάτι δεν κατάλαβαν.

Η προσαρμογή στο νέο συγκείμενο περιλαμβάνει την αποδοχή της μοναδικής, λογοκεντρικής ανάλυσης του καθηγητή. Όταν ο Σταμάτης δεν καταλάβαινε ποιο πρόσημο έπρεπε να βάλει στον αριθμό που προκύπτει από τη διαίρεση θετικών ή αρνητικών ποσοτήτων, ο καθηγητής τούς έδειξε ένα τρόπο για να το θυμούνται λέγοντάς τους: «Συν διά συν, ίσον συν–ο φίλος του φίλου μου είναι φίλος μου, και μείον διά μείον, ίσον συν–ο εχθρός του εχθρού μου είναι φίλος μου, μείον διά συν, ίσον μείον–ο εχθρός του φίλου μου είναι εχθρός μου, συν διά μείον, ίσον μείον–ο φίλος του εχθρού μου είναι εχθρός μου». Έκτοτε όπως είπε ο Σταμάτης θυμόταν τι έπρεπε να κάνει με τα πρόσημα.

Από τη δική τους όμως οπτική οι καθηγητές σημειώνουν με νόημα ότι συνεχώς αντιμετωπίζουν μαθητές δημοτικού «με παντελώς μηδαμινή τη μαθηματική σκέψη», στο βαθμό που αναρωτιούνται κάθε χρόνο τι είδους εργασία γίνεται στο δημοτικό. Έτσι, όπως δηλώνουν οι ίδιοι, ξεκινούν τη διδασκαλία τους από μηδενική βάση, αν και σε αυτή την επιλογή τούς οδηγεί μάλλον και η άγνοια του τι και με ποιο τρόπο διδάσκεται στο δημοτικό σχολείο: «Δε γνωρίζω ποιες γεωμετρικές έννοιες διδάσκονται στο δημοτικό. Διδάσκω τη γεωμετρία ξεκινώντας από το μηδέν».

Η προσαρμογή στο νέο συγκείμενο μπορεί να εκδηλωθεί από τους μαθητές και τις μαθήτριες μέσα από πρακτικές αποφυγής ή περιορισμού της ορατότητάς τους μέσα στην τάξη. Η Εύα στην αρχή της χρονιάς ρωτούσε τον καθηγητή της όταν δεν καταλάβαινε κάτι. Αν όμως και πάλι μετά την εξήγηση συνέχιζε να έχει απορίες, δεν ξαναρωτούσε για να μην τη θεωρήσουν οι συμμαθητές της χαζή. Η Νικολίνα στο γυμνάσιο ποτέ δε σήκωνε το χέρι για απορίες μολονότι είχε αρκετές, μα ούτε και απαντούσε στις ερωτήσεις του καθηγητή επειδή ντρεπόταν να σηκωθεί στον πίνακα. Όταν η Εύα και η Νικολίνα ξεκίνησαν φροντιστήριο σταμάτησαν να ρωτούν αλλά και να προσέχουν γιατί γνώριζαν ότι θα τους τα εξηγήσουν εκεί.

Θα περιμέναμε η διδακτική μετάβαση από το δημοτικό στο γυμνάσιο να περιλαμβάνει τον αποχωρισμό από μια ενσώματη μάθηση με χειραπτικά υλικά και αναπαραστάσεις, εργασία σε ομάδες και διεπιστημονικές δραστηριότητες, και την προσαρμογή σε μια μάθηση που θα στηρίζεται στη μετάδοση και σε δραστηριότητες που εκτελούνται με χαρτί και μολύβι (Gueudet, 2016). Κάτι τέτοιο όμως δεν αποτελεί τον κανόνα, αφού καλός δάσκαλος και καλός καθηγητής συχνά θεωρείται αυτός που τα εξηγεί πολλές φορές, κατά προτίμηση και με αστείο τρόπο. Επομένως, ως προς αυτό το χαρακτηριστικό, θα λέγαμε ότι οι διδακτικές πρακτικές μοιάζουν περισσότερο από όσο διαφέρουν. Θα περιμέναμε επίσης, λόγω και της εξειδίκευσης των καθηγητών στο γυμνάσιο, η πορεία από τη διαδικασία προς το αντικείμενο (Tall et al., 1999) να είναι περισσότερο επιτυχής και να συνοδεύεται από κατανόηση των εννοιών αλλά και καλύτερες επιδόσεις από τους μαθητές και τις μαθήτριες. Όπως όμως μας πληροφορούν οι Φιλίππου, Πίττα-Πανταζή και Χρίστου (2003), οι επιδόσεις των μαθητών και των μαθητριών της έκτης τάξης του δημοτικού και της πρώτης του γυμνασίου στην Κύπρο, όσον αφορά στα κλάσματα, δεν παρουσιάζει στατιστικά σημαντική διαφορά. Ζητήματα λοιπόν που αφορούν στη γνωσιακή ετοιμότητα των εκπαιδευτικών των δύο βαθμίδων φαίνεται να υπερβαίνουν τις ευρέως διαδεδομένες και απλουστευτικές αντιλήψεις που συνοδεύουν το δίπολο δάσκαλος–καθηγητής (μαθηματικός).

Ασυνέχειες, κενά και ρήξεις στην πορεία υλοποίησης προδιαγεγραμμένων στόχων, όπως η μετάβαση από το δημοτικό στο γυμνάσιο που συζητούμε, μαρτυρούν τους εγγενείς περιορισμούς των ιεραρχικών κοινωνικών δομών. Σε ανάλογες δομές, ο χώρος, ο χρόνος και οι υποδομές κατανέμονται με ομοιογενή τρόπο και οι αποφάσεις λαμβάνονται κεντρικά. Αυτές οι δενδρικές δομές όμως, συνυπάρχουν με άλλες ριζωματικές δομές, όπως άκεντρα δίκτυα, συλλογικότητες ή μικρές ομάδες, τα οποία συντονίζονται τοπικά ή και υπερτοπικά προς κοινές δράσεις (Deleuze & Guattari, 1987). Οι ριζωματικές δομές δεν επιζητούν την κατάργηση των δενδρικών δομών, μα στοχεύουν στην προώθηση, για παράδειγμα, της επικοινωνίας μεταξύ διαφορετικών επιπέδων της ιεραρχίας.

Ριζωματικές δομές εκπαιδευτικών προβληματοποιούν τους στόχους και τις διαθεσιμότητες των προγραμμάτων σπουδών των μαθηματικών στις δύο βαθμίδες, συζητούν για πρακτικές που περιορίζουν τις επιτυχημένες συμμετοχές στα σχολικά μαθηματικά, αναζητούν και εισηγούνται νέες, παράγουν διδακτικό υλικό εμπλουτίζοντας τοπικά και εθνικά ψηφιακά αποθετήρια. Τέτοιες δομές μπορούν και χρειάζεται να προωθηθούν ιδιαίτερα σε ομάδες όπου συνυπάρχουν εκπαιδευτικοί των δύο βαθμίδων, όπως στο πλαίσιο μεταπτυχιακών ή και ερευνητικών προγραμμάτων. Οι προβληματισμοί και οι δράσεις των συμμετεχόντων σε αυτές τις δομές θα πρέπει να εκφραστούν μέσα από τα προγράμματα σπουδών των πανεπιστημιακών τμημάτων που προετοιμάζουν δασκάλους των μαθηματικών των δύο βαθμίδων της εκπαίδευσης και ιδιαίτερα από τα προγράμματα σχολικής πρακτικής άσκησης. Εν τέλει, οι παραπάνω ευκαιρίες για κοινές δράσεις θα μπορέσουν να αναδείξουν ως σημαντική τη συζήτηση για το *τι* και το *πώς* της διδασκαλίας των μαθηματικών, και συνάμα να πλέξουν νήματα που θα γεφυρώσουν το κενό μεταξύ των δύο βαθμίδων της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, μεταξύ της επεξήγησης και της κατανόησης, μεταξύ των διδακτικών στόχων των δύο βαθμίδων, και μεταξύ εκπαιδευτικών, ώστε να αντιμετωπίζουν τη μαθηματική εκπαίδευση ως (ενιαίες) τροχιές που συνδέονται και εμπλουτίζονται κατά τη μετάβαση από το δημοτικό στο γυμνάσιο.

ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΣΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Η μετάβαση από τη δευτεροβάθμια στην τριτοβάθμια εκπαίδευση είναι μια συναρπαστική και συχνά περίπλοκη εμπειρία για τους μαθητές. Μετά από δύσκολες εξετάσεις, οι φοιτητές πρέπει να προσαρμοστούν σε νέα περιβάλλοντα μάθησης, σε νέους τρόπους μελέτης και πάνω από όλα σε υψηλότερες προσδοκίες. Τα προβλήματα που συναντώνται στη μετάβαση από τα σχολικά στα πανεπιστημιακά μαθηματικά είναι κοινά σε κάθε εκπαιδευτικό σύστημα παγκοσμίως. Πολλοί ερευνητές εντοπίζουν ένα «κενό», μια ασυνέχεια μεταξύ του περιεχομένου των σχολικών και των πανεπιστημιακών μαθηματικών (Kajander & Lovric, 2005), ενώ άλλοι επισημαίνουν σημαντικές αλλαγές που επηρεάζουν τους μαθητές κατά τη μετάβαση από το σχολείο στο πανεπιστήμιο. Αυτές περιλαμβάνουν το νέο ακαδημαϊκό και κοινωνικό περιβάλλον καθώς και τη μετατόπιση που απαιτείται για έναν διαφορετικό μαθηματικό τρόπο σκέψης και μελέτης (Cherif & Wideen, 1992, Tall, 1992).

Η μετάβαση από τα σχολικά μαθηματικά στα πανεπιστημιακά μπορεί να θεωρηθεί ως μια αλληλεπίδραση μεταξύ κοινωνικής, ακαδημαϊκής, και μαθηματικού περιεχομένου μετάβασης (Alcock & Simpson, 2002). Το Πανεπιστήμιο, σαν ίδρυμα, και τα πανεπιστημιακά μαθηματικά εκλαμβάνονται ως ένας νέος κόσμος με καινούργιους κανόνες και διαφορετική «μαθηματική γλώσσα», που κάνει τους νεοεισερχόμενους φοιτητές να αισθάνονται ξένοι στο νέο περιβάλλον (Gueudet, 2008).

Όσον αφορά στην κοινωνική διάσταση της μετάβασης, οι νεοεισερχόμενοι φοιτητές βιώνουν αλλαγές στον τρόπο ζωής τους. Από ένα δομημένο και με την ευθύνη των γονέων / κηδεμόνων τρόπο ζωής σε έναν πιο αυτονομημένο, από τη γειτονιά και τους φίλους στο σχολείο, σε μια (πιθανά) άλλη πόλη ή ακόμα και στην ίδια πόλη στο πανεπιστήμιο όπου τα μεγέθη είναι διαφορετικά και οι συμφοιτητές άγνωστοι. Η απόσταση σπίτι-πανεπιστήμιο είναι συνήθως μεγαλύτερη από την απόσταση σπίτι-σχολείο, με αποτέλεσμα ο χρόνος να χρειάζεται νέα διαχείριση από τους ίδιους.

Όσον αφορά στην ακαδημαϊκή διάσταση της μετάβασης, οι νεοεισερχόμενοι φοιτητές βιώνουν αλλαγές στο πανεπιστημιακό περιβάλλον. Οι σχέσεις καθηγητών-φοιτητών είναι συχνά απρόσωπες σε αντίθεση με εκείνες μαθητών-καθηγητών στο σχολείο. Η στήριξη από το ακαδημαϊκό και διοικητικό προσωπικό είναι συχνά ελλιπής όχι μόνο σε προσωπικό επίπεδο αλλά και σε συλλογικό, σε αντίθεση με το σχολείο. Οι σχέσεις μεταξύ συμφοιτητών είναι συχνά πιο ανταγωνιστικές από εκείνες μεταξύ συμμαθητών.

Όσον αφορά στη μετάβαση από τα σχολικά στα πανεπιστημιακά μαθηματικά, οι νεοεισερχόμενοι φοιτητές βιώνουν αλλαγές στο τρόπο συσχέτισής τους με τα μαθηματικά. Στα πανεπιστημιακά μαθηματικά οι φοιτητές καλούνται να μάθουν μια νέα «γλώσσα» (αφηρημένες έννοιες, απαιτήσεις αιτιολόγησης-απόδειξης). Έρχονται αντιμέτωποι με την αυξημένη απαίτηση για ακρίβεια και αυστηρότητα στη χρήση της μαθηματικής γλώσσας (Clark & Lovric, 2009). Υπάρχει ανάγκη για μετακίνηση από ένα «διαδικαστικό» σε έναν περισσότερο «εννοιολογικής προσέγγισης» τρόπο μελέτης. Ενώ στο σχολείο κατά κανόνα ο καθηγητής διδάσκει και ο μαθητής ακολουθεί, στο πανεπιστήμιο ζητείται από τον φοιτητή να «κάνει» ο ίδιος μαθηματικά.

Στην Ελλάδα έρευνες που να μελετούν ζητήματα μετάβασης από το σχολείο στα Μαθηματικά τμήματα δύσκολα θα βρει κανείς. Από προσωπική εμπλοκή και στο πλαίσιο της διδακτορικής μου διατριβής, μελετώντας τις τοποθετήσεις και απόψεις πρωτοετών φοιτητών του Μαθηματικού τμήματος του ΕΚΠΑ, παρατηρώ ότι π.χ. η Νεφέλη ενώ έγραψε καλά στα Μαθηματικά στις πανελλαδικές εξετάσεις και είχε δηλώσει ως πρώτη επιλογή να σπουδάσει Μαθηματικά, στην αρχή και κατά τη διάρκεια του πρώτου εξαμήνου άρχισε να σκέφτεται ότι ίσως αυτή να μην ήταν μια σωστή επιλογή. Οι σπουδές της επηρεάστηκαν αρνητικά από τις μεγάλες αλλαγές στην προσωπική της ζωή (π.χ. πολλές ώρες στο δρόμο από το σπίτι στο πανεπιστήμιο και η δυσκολία διαχείρισης του χρόνου, η αίσθησή της ότι οι σχέσεις με τους συμφοιτητές της είναι κατά βάση ανταγωνιστικές) και από τις απαιτήσεις του νέου ακαδημαϊκού περιβάλλοντος (π.χ. οι απρόσωπες σχέσεις με τους καθηγητές, η ελλιπής υποστήριξη από το ακαδημαϊκό προσωπικό και από το φοιτητικό σύλλογο). Τα μαθηματικά της φαίνονταν ξαφνικά «ξένα». Ο τρόπος που είχε μάθει να διαβάζει και να παρακολουθεί το μάθημα στο σχολείο δεν δούλευε και στο πανεπιστήμιο. Σκέφτηκε ακόμα και να εγκαταλείψει τις σπουδές της (Bampili κ.α., 2017)

Θεωρούμε ότι η μελέτη των πανεπιστημιακών μαθηματικών (σπουδάζω μαθηματικά) είναι μια πολυδιάστατη διαδικασία που απαιτεί την ανασυγκρότηση της μαθηματικής σκέψης. Η ανασυγκρότηση αυτή για να πραγματοποιηθεί, απαιτεί την επανατοποθέτηση του φοιτητή σε σχέση με το νέο κοινωνικό περιβάλλον και τη νέα ακαδημαϊκή κοινότητα. Κατά τη διάρκεια της μετάβασης (που δεν είναι κοινή για όλους) έχει λοιπόν ενδιαφέρον να ερευνήσουμε τους τρόπους με τους οποίους αλληλεπιδρούν οι εμπειρίες των φοιτητών στο νέο περιβάλλον (κοινωνικό και ακαδημαϊκό) με το κοινωνικοπολιτισμικό τους υπόβαθρο για να διαμορφώσουν τη νέα ταυτότητα που απαιτείται και τις επιλογές που υιοθετούν με στόχο να επιτύχουν τα μαθησιακά αποτελέσματα που προσδοκούν.

Προς αυτή την κατεύθυνση, και ανάμεσα σε άλλα: α) το ακαδημαϊκό και διοικητικό προσωπικό πρέπει να προσφέρει συστηματικά υποστήριξη στους φοιτητές και μάλιστα με καλά οργανωμένο τρόπο (Student Learning Advisor, Personal Tutor System, workshops with higher-years students) β) είναι σημαντικό να διερευνηθούν συστηματικά και οργανωμένα οι δυνατότητες συνεργασίας ανάμεσα στην εκπαιδευτική και την ακαδημαϊκή κοινότητα.

Η ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Οι ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών συμφωνούν ότι, προκειμένου οι μαθητές να μαθαίνουν με κατανόηση τα Μαθηματικά που διδάσκονται, είναι απαραίτητο οι δάσκαλοι να στηρίζονται στην ανάπτυξη διδακτικών πρακτικών που τοποθετούν τη μαθητική σκέψη στον πυρήνα του σχεδιασμού της διδασκαλίας και της λήψης διδακτικών αποφάσεων. Όμως, παρά τις συνεχείς προσπάθειες σχεδιασμού προγραμμάτων εκπαίδευσης μελλοντικών δασκάλων, η ερευνητική κοινότητα εξακολουθεί να προβληματίζεται για την αποτελεσματικότητά τους. Σε πρόσφατη έκδοση από το Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικής Εκπαίδευσης (ICME-13), η οποία αναφέρεται στις μεταβάσεις που αφορούν στη μαθηματική εκπαίδευση, επισημαίνεται ότι οι σπουδές στο Πανεπιστήμιο δεν εξασφαλίζουν τις επιθυμητές αλλαγές στις πρακτικές των δασκάλων, όταν αυτοί αρχίζουν να διδάσκουν (Gueudet, Bosch, di Sessa, Kwon & Verschaffel, 2016).

Αν και υπάρχουν παραλλαγές στο σχεδιασμό των προγραμμάτων εκπαίδευσης, ένα κοινό χαρακτηριστικό τους είναι ο εφοδιασμός των φοιτητών-δασκάλων με ένα συνδυασμό γνώσεων (εξειδικευμένες μαθηματικές γνώσεις, παιδαγωγικές γνώσεις ειδικές για τη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών, γνώσεις αναλυτικών προγραμμάτων, γενικές θεωρίες μάθησης, κτλ.) τις οποίες οι ερευνητές/εκπαιδευτές κρίνουν ως σημαντικές για την ανάπτυξη αποτελεσματικών διδακτικών πρακτικών. Με άλλα λόγια, ο σχεδιασμός της εκπαίδευσης στηρίζεται σε μια αντίληψη της μάθησης των φοιτητών ως εφαρμογής γνώσεων στην τάξη.

Η ίδια αντίληψη φαίνεται να κυριαρχεί και στον σχεδιασμό προγραμμάτων εκπαίδευσης δασκάλων εν ενεργεία. Τα τελευταία χρόνια, οι έρευνες που ασχολούνται με τη μάθηση και την εκπαίδευση των δασκάλων οδηγούν στη διαμόρφωση ενός νέου θεωρητικού πλαισίου το οποίο δείχνει να έχει τη δυνατότητα να παράσχει βαθύτερες εξηγήσεις για τον τρόπο που οι δάσκαλοι μαθαίνουν. Η μάθησή τους θεωρείται ως συνεξέλιξη των τρόπων συμμετοχής τους στις πρακτικές που αναπτύσσονται στα πλαίσια ενός επιμορφωτικού προγράμματος και της τάξης τους (Cobb, Zhao & Dean, 2009; Kazemi, & Hubbard, 2008; Zhao, 2011).

Παρ' όλο που οι φοιτητές δεν έχουν τις δικές τους τάξεις, η δυνατότητα μιας διαφορετικής οργάνωσης της πρακτικής τους άσκησης στα σχολεία θα μας επέτρεπε να εξετάζουμε τη μάθησή τους θεωρώντας ότι εξελίσσεται καθώς συμμετέχουν στο πανεπιστημιακό μάθημα και στη σχολική πρακτική άσκηση (Boufi, Kolovou & Gravemeijer, 2014). Ταυτόχρονα, μια τέτοια θεώρηση, η οποία δίνει έμφαση στη διαλεκτική σχέση θεωρίας και πράξης των δασκάλων, θα στήριζε εναλλακτικούς σχεδιασμούς των προγραμμάτων προετοιμασίας τους. Τα δύο μαθήματα (Διδακτική Μαθηματικών Ι και ΙΙ) που διδάσκω στους φοιτητές του τελευταίου έτους σπουδών του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Αθηνών, μου δίνουν την ευκαιρία να έχω στη διάθεσή μου αρκετά παραδείγματα τα οποία φανερώνουν ότι αυτή η θεώρηση της μάθησης των φοιτητών μπορεί να βοηθήσει στην κατανόηση του τρόπου που αυτή μπορεί να συντελείται καθώς και των μέσων που τη στηρίζουν και την οργανώνουν. Τα παραδείγματα που ακολουθούν υποδεικνύουν τις δυνατότητες μιας συντονισμένης ανάλυσης της δραστηριότητας των φοιτητών στον σχεδιασμό πιο αποτελεσματικών προγραμμάτων εκπαίδευσής τους.

*Οι λύσεις των μαθητών ως 'παράθυρο' στη σκέψη τους παρά σαν αποτέλεσμα της διδασκαλίας***.** Τρεις φοιτητές παίρνουν συνεντεύξεις από τρεις μαθητές μιας τάξης της Β΄ δημοτικού για να διαπιστώσουν με ποιον τρόπο θα λύσουν ένα πρόβλημα διαίρεσης μερισμού. Στο μάθημα του Πανεπιστημίου είχε προηγηθεί συζήτηση για τα διαφορετικά επίπεδα μαθηματικής σκέψης των μαθητών σε προβλήματα αφαίρεσης. Η δασκάλα της τάξης αντιδρά λέγοντας ότι οι μαθητές της δεν έχουν ακόμα διδαχθεί τη διαίρεση. Οι φοιτητές εξηγούν στη δασκάλα τον σκοπό των συνεντεύξεων.

*Η σημασία του διδακτικού συμβολαίου της τάξης***.** Οι φοιτητές παρακολουθούν το μάθημα των Μαθηματικών σε διαφορετικές τάξεις δημοτικών σχολείων και απομονώνουν επεισόδια από τις διδασκαλίες, τα οποία αντανακλούν τις κοινωνικές νόρμες (Cobb & Yackel, 1996) που χαρακτηρίζουν τη συμμετοχή των μαθητών. Φτιάχνουν, επίσης, μικρά ερωτηματολόγια και τα δίνουν στους μαθητές ή παίρνουν συνεντεύξεις από τους μαθητές και τον δάσκαλο για να διαπιστώσουν τι πιστεύουν για τα Μαθηματικά και τον δικό τους ρόλο στο μάθημα. Στη συνέχεια, παρουσιάζουν και συζητούν τα συμπεράσματά τους στο μάθημα του Πανεπιστημίου.

Η ερμηνεία του θεσμικού πλαισίου ως κεντρικής πτυχής της ποιότητας της διδασκαλίας. Αφού οι φοιτητές εξετάσουν το βιβλίο των Μαθηματικών της τάξης που πρόκειται να επισκεφθούν, παρατηρούν με ποιο τρόπο χρησιμοποιείται στο μάθημα. Δίνουν σε μερικούς μαθητές προβλήματα παρόμοια με αυτά του βιβλίου και τους ζητούν να τα λύσουν με τρόπους διαφορετικούς από αυτούς που προτείνει το βιβλίο. Στο μάθημα του Πανεπιστημίου γίνεται συζήτηση της εμπειρίας των φοιτητών.

Η σκέψη των μαθητών ως βασικό στοιχείο κατασκευής ενός σχεδίου διδασκαλίας. Τρεις φοιτητές επισκέπτονται την ίδια τάξη για 3-4 διδακτικές ώρες και προσπαθούν να εξετάσουν με ποιους τρόπους σκέφτονται οι μαθητές πάνω σε προβλήματα που έχουν σχέση με το μάθημα που έχουν επιλέξει και πρόκειται να διδάξουν. Συνεργάζονται για να φτιάξουν ένα σχέδιο διδασκαλίας το οποίο περιλαμβάνει εκτός από το πρόβλημα ή τα προβλήματα που θα συζητηθούν στην τάξη, πιθανές λύσεις που μπορεί να προτείνουν οι μαθητές καθώς και τρόπους σύνδεσης αυτών των λύσεων. Ανταλλαγή απόψεων μεταξύ των φοιτητών για τον σχεδιασμό των διδασκαλιών τους γίνεται και στο μάθημα του Πανεπιστημίου.

Η αντίληψη της διδασκαλίας σαν ένα 'πείραμα σχεδιασμού'. Μία ομάδα φοιτητών που έχει ήδη διδάξει κάποιο μάθημα σε μία τάξη περιγράφει την εμπειρία της στο μάθημα του Πανεπιστημίου. Μετά από τη συζήτηση που ακολουθεί, φτιάχνεται ένα νέο σχέδιο μαθήματος προκειμένου να δοκιμαστούν νέες ιδέες σχετικά με την ανάπτυξη βαθύτερης κατανόησης στα θέματα που διαπραγματεύτηκαν οι μαθητές στο προηγούμενο μάθημα.

Τα παραπάνω παραδείγματα δείχνουν ότι στο πλαίσιο της πρακτικής τους άσκησης οι φοιτητές έχουν την ευκαιρία να εμβαθύνουν σε γνώσεις αλλά και να τις αξιοποιούν με δημιουργικούς τρόπους. Οι μαθηματικές τους γνώσεις, η παιδαγωγική τους σκέψη, η συνειδητοποίηση των περιορισμών του θεσμικού πλαισίου και των τρόπων διαχείρισής τους, καθώς και η ικανότητά τους να εργάζονται συλλογικά έχουν τη δυνατότητα να εξελίσσονται στο πλαίσιο της συμμετοχής τους τόσο στο μάθημα του Πανεπιστημίου όσο και στις σχολικές τάξεις που επισκέπτονται. Αξιοποιώντας τη μεθοδολογία της έρευνας σχεδιασμού (Cobb et al., 2009) και αναλύοντας τους τρόπους εξέλιξης αυτής της συμμετοχής, θα μπορούσαμε να οδηγηθούμε σε βαθύτερη κατανόηση της μάθησης των μελλοντικών δασκάλων καθώς και της βιωσιμότητας των μέσων που τη στηρίζουν.

Ευχαριστώ θερμά το Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών για τη χρηματική υποστήριξη που προσέφερε στην εκπαίδευση των φοιτητών - δασκάλων του Ε.Κ.Π.Α.

Η ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Η μετάβαση του εκπαιδευτικού από την πανεπιστημιακή προετοιμασία (ως μελλοντικού εκπαιδευτικού) στην ανάληψη πλήρων επαγγελματικών υποχρεώσεων (ως εκπαιδευτικού της πράξης) μπορεί να θεωρηθεί σε τρία αλληλοσυνδεόμενα πεδία ή επίπεδα (Winsløw κ.α., 2009): *επιστημολογικό, θεσμικό* και *προσωπικό*.

Σε *επιστημολογικό* επίπεδο, καταρχάς υπάρχουν διαφορές στα μαθηματικά που ο φοιτητής διδάχθηκε στο πανεπιστήμιο και στα σχολικά μαθηματικά. Για παράδειγμα, η αυστηρή μαθηματική απόδειξη στο πλαίσιο ενός αξιωματικού συστήματος αντικαθίσταται στο σχολικό πλαίσιο από μια επιχειρηματολογία συχνά βασισμένη σε διαισθητικές προσεγγίσεις. Και η προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών, αντί να είναι αφηρημένη, βασίζεται στην εμπειρία των μαθητών και σε ρεαλιστικές καταστάσεις. Από την άλλη, η θεωρητική (σε επίπεδο πανεπιστημιακού μαθήματος) προσέγγιση της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών αντικαθίσταται από (ή συντίθεται με) την πρακτική γνώση των συγκεκριμένων μαθητών με τις δυνατότητες και τις δυσκολίες τους. Σχετιζόμενη με τα παραπάνω είναι η μετατόπιση της εστίασης από τα ίδια τα μαθηματικά στη διδασκαλία τους.

Σε *θεσμικό* επίπεδο ο εκπαιδευτικός μετακινείται από την κουλτούρα και τις νόρμες του πανεπιστημίου, στην κουλτούρα του σχολείου. Το τι σημαίνει να είσαι καθηγητής των μαθηματικών προσδιορίζεται στο πλαίσιο του σχολείου, και μπορεί να διαφέρει πολύ από την εικόνα που είχε ο μελλοντικός εκπαιδευτικός όταν ήταν φοιτητής.

Σε *προσωπικό* επίπεδο, ο εκπαιδευτικός μετακινείται από την κοινότητα των φοιτητών σε εκείνη των εκπαιδευτικών και αυτό σηματοδοτεί μια αλλαγή ταυτότητας. Επιπλέον, συχνά αυτή η μετάβαση συμπίπτει με αλλαγές στην προσωπική ζωή, όπως η δημιουργία οικογένειας και η αφετηρία της επαγγελματικής σταδιοδρομίας.

Τα τρία αυτά πεδία της μετάβασης συνδέονται με την έννοια της διάσχισης ορίων (boundary crossing) που υποδηλώνει την ύπαρξη μιας «κοινωνικοπολιτισμικής διαφοράς η οποία οδηγεί σε ασυνέχεια στη δράση και την αλληλεπίδραση» (Akkerman & Bakker, 2011, σελ. 133). Αυτή η διάσχιση ορίων συχνά βιώνεται ως ανασφάλεια μπροστά στο άγνωστο και το καινούργιο ή και ως διάψευση ελπίδων και απογοήτευση.

Συγχρόνως, ανάμεσα στις δύο πλευρές του ορίου που διασχίζεται, υπάρχουν ομοιότητες και συνέχειες, όπως για παράδειγμα η μάθηση και η διδασκαλία των μαθηματικών, ακόμα κι αν το περιεχόμενό τους μετατοπίζεται.

Τις τελευταίες δεκαετίες, αρκετά τμήματα Μαθηματικών έχουν εντάξει στα προγράμματα σπουδών τους μαθήματα σχετικά με τη διδακτική των μαθηματικών και πρακτική άσκηση των φοιτητών σε σχολεία. Έτσι, οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί φαίνεται να έχουν τώρα στο πανεπιστήμιο καλύτερη προετοιμασία σε σύγκριση με παλιότερα. Παρόλα αυτά, οι δυσκολίες μετάβασης στο σχολείο και, πολύ περισσότερο, υιοθέτησης εννοιολογικών προσεγγίσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών, φαίνεται να παραμένουν. Για παράδειγμα, συχνά οι φοιτητές που κάνουν πρακτική άσκηση σε σχολεία επιλέγουν πολύ αφηρημένες ή πολύ αλγοριθμικές προσεγγίσεις στις διδακτικές παρεμβάσεις τους.

Με δεδομένο ότι δεν φαίνεται να υπάρχουν στην Ελλάδα έρευνες για την είσοδο των νέων εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας στο σχολείο, στην παρέμβαση αυτή προσεγγίζω την ελληνική πραγματικότητα κυρίως μέσα από την εμπειρία και τις σχετικές συζητήσεις μου με συναδέλφους και ερευνητές. Στην ελληνική πραγματικότητα, η μετάβαση από το πανεπιστήμιο στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση χαρακτηρίζεται από τους μεγάλους χρόνους αναμονής που συχνά ξεπερνούν τα 10 και 15 χρόνια. Στο διάστημα αυτό, οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί είτε απασχολούνται σε χώρους άσχετους με την εκπαίδευση ή στρέφονται στο χώρο της ιδιωτικής και φροντιστηριακής εκπαίδευσης. Και στις δύο περιπτώσεις οι δυσκολίες μετάβασης αυξάνονται και περιπλέκονται.

Η είσοδος των νέων εκπαιδευτικών στο σχολείο συνήθως συνδέεται με θετικές προθέσεις και διάθεση προσφοράς στη μαθηματική εκπαίδευση. Υπάρχουν παραδείγματα, ιδιαίτερα νέων εκπαιδευτικών που είχαν εμπλακεί είτε σε προπτυχιακό είτε σε μεταπτυχιακό επίπεδο με τη διδακτική των μαθηματικών και την πρακτική της διδασκαλίας, οι οποίοι φαίνεται να εντάσσονται ομαλά στο επάγγελμα με διάθεση να συμβάλλουν ουσιαστικά στην ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης των μαθηματικών από τους μαθητές τους. Ωστόσο, η έλλειψη δομών υποστήριξης και η σχολική καθημερινότητα συχνά δημιουργούν εμπόδια στην επαγγελματική ανάπτυξη αυξάνοντας τις πιθανότητες κυριαρχίας μιας διεκπεραιωτικής προσέγγισης της διδασκαλίας των μαθηματικών ταυτόχρονα με την υιοθέτηση στόχων που εστιάζουν στις δεξιότητες αλγοριθμικού περιεχομένου στους μαθητές.

Στις δυσκολίες αυτές φαίνεται να λειτουργούν πολλαπλασιαστικά οι παρακάτω παράγοντες: α) Η υπάρχουσα κουλτούρα της διδασκαλίας των μαθηματικών ως προετοιμασίας για εξετάσεις, είτε αυτή εντοπίζεται στο σχολείο, είτε στη φροντιστηριακή εκπαίδευση, είτε διαχέεται στην κοινωνία μέσω των οικογενειών των μαθητών. β) Οι συζητήσεις που διεξάγονται στο πλαίσιο κοινοτήτων (συνήθως διαδικτυακών) και εστιάζουν αποκλειστικά σε ασκήσεις και θέματα μαθηματικών, ενώ απουσιάζει ο αναστοχασμός για τη διδασκαλία. γ) Η κουλτούρα διεκπεραίωσης της ύλης που συχνά κυριαρχεί στο σχολείο. Για παράδειγμα, ακόμα και σε καινοτομίες όπως η εισαγωγή ενός νέου προγράμματος σπουδών, οι περισσότερες συζητήσεις από εκπαιδευτικούς περιστρέφονται γύρω από το τι προβλέπεται να διδαχθεί και τι όχι, ενώ απουσιάζει η συζήτηση για τους στόχους και το πώς και γιατί της διδασκαλίας. Μια τέτοια διεκπεραιωτική κουλτούρα εκπαιδεύει τους νεοεισερχόμενους εκπαιδευτικούς στο να μένουν στη λειτουργική – τυπική επιφάνεια της διδασκαλίας στην τάξη χωρίς να αναστοχάζονται για τη διδασκαλία τους (Winsløw κ.α.., 2009, σελ. 94).

Η μετάβαση από το πανεπιστήμιο στο σχολείο δεν μπορεί να μη χαρακτηρίζεται από άλματα και ασυνέχειες, εφόσον αποτελεί διάσχιση ενός ορίου ανάμεσα σε δύο χώρους με διαφορετικές επιστημολογικές, θεσμικές και κοινοτικές διαστάσεις. Ωστόσο, ίσως αυτή η μετάβαση θα μπορούσε να είναι ομαλότερη για τους εκπαιδευτικούς και πιο γόνιμη για τη μαθηματική εκπαίδευση, μέσα από συστηματική προσπάθεια σε δύο πεδία:

1. Η συστηματικότερη σύνδεση της εκπαίδευσης των μελλοντικών εκπαιδευτικών με την πρακτική στην τάξη (και όχι μόνο η παροχή θεωρητικών μαθημάτων διδακτικής) μπορεί να τους προετοιμάσει για την είσοδο στο σχολείο. Η εμπειρία πανεπιστημιακών από την πρακτική άσκηση φοιτητών σε σχολεία της δευτεροβάθμιας δείχνει ότι αυτή η σύνδεση ανοίγει δρόμους για τον αναστοχασμό των φοιτητών για τη διδασκαλία και την επανεξέταση των προσωπικών τους απόψεων.

2. Η διαμόρφωση συλλογικών μορφών αναστοχασμού των εκπαιδευτικών και συζήτησης πάνω στη διδασκαλία τους μπορεί να συμβάλει ουσιαστικά στην επαγγελματική ανάπτυξη, όπως φαίνεται από την διεθνή εμπειρία αξιοποίησης αναστοχαστικών και διαδραστικών προσεγγίσεων όπως το *lesson and learning study* (Wood, 2014). Η κοινότητα των εκπαιδευτικών από ένα ή περισσότερα σχολεία που συζητά για το σχεδιασμό της διδασκαλίας και αναστοχάζεται, ίσως είναι μια βιώσιμη μορφή συλλογικού αναστοχασμού (Stouraitis, 2016). Τέτοιες δομές αν και αναφέρονται στο σύνολο των εν ενεργεία εκπαιδευτικών, θα

μπορούσαν να λειτουργήσουν υποστηρικτικά για την ένταξη των νεοεισερχόμενων εκπαιδευτικών σε μια κουλτούρα εμβάθυνσης στην προβληματική της διδασκαλίας και τη μάθησης των μαθηματικών (Potari, 2013).

ΣΥΝΘΕΣΗ ΚΑΙ ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, οι μεταβάσεις στη μαθηματική εκπαίδευση είναι πολλαπλές και πολυδιάστατες. Και οι τέσσερις εισηγήσεις που προηγήθηκαν είναι, πιστεύουμε, σαφείς σχετικά με αυτή την πολλαπλότητα και πολυπλοκότητα, για τα προβληματικά σημεία αυτών των μεταβάσεων, για το από πού προκύπτουν αυτά τα προβλήματα αλλά και για το ποιοι είναι κάποιοι τρόποι με τους οποίους οι μεταβάσεις μπορούν να γίνουν ομαλότερες. Για παράδειγμα, εντοπίζουμε τις έντονες επιστημολογικές διαφορές στα μαθηματικά από το ένα στο άλλο επίπεδο της εκπαίδευσης αλλά δεν μένουμε εκεί. Εντοπίζουμε διαφορές στη διδασκαλία των μαθηματικών αλλά και διαφορές στο συγκείμενο και στο περικείμενο (θεσμικές και κοινωνικές διαστάσεις) αυτής της διδασκαλίας. Τοποθετούμε σε κεντρική θέση το πώς βιώνουν τη σχέση θεωρίας και πράξης οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί και αναρωτιόμαστε πώς η ετοιμασία τους μπορεί να ενισχύσει αυτή τη σχέση σε βάθος και χρόνου και ποιότητας.

Βλέπουμε τους εκπαιδευτικούς σε όλα τα επίπεδα – και όχι μόνο: πολλές από τις προτάσεις μας είναι συστημικού / θεσμικού χαρακτήρα – σαν κεντρικούς μοχλούς της ομαλοποίησης των μεταβάσεων. Οι προτάσεις μας περιλαμβάνουν, για παράδειγμα: την ενίσχυση / ανάπτυξη υποστηρικτικών δομών συνεργασίας Πανεπιστημίου και σχολείων για την καλύτερη προετοιμασία των εκπαιδευτικών σε όλες τις βαθμίδες (συμπεριλαμβανομένων και των πανεπιστημιακών). Πέρα από την όλο και πιο διαδεδομένη πρακτική των φοιτητών στη σχολική τάξη, εδώ εννοούμε και συλλογικές μορφές επαγγελματικής ανάπτυξης (για τους εκπαιδευτικούς σε όλες τις βαθμίδες). Αν υπάρχει κάτι κοινό στις μελέτες όλων των τύπων μετάβασης στη μαθηματική εκπαίδευση, είναι πως οι εκπαιδευτικοί στην κάθε βαθμίδα δεν έχουν σαφή εικόνα του μαθηματικού αντικειμένου αλλά και του κοινωνικού / παιδαγωγικού πλαισίου μέσα στο οποίο αυτό το μαθηματικό αντικείμενο βιώνεται από τους μαθητές / φοιτητές στις άλλες βαθμίδες. Ένα από τα σημαντικά βήματα προόδου που έχει πετύχει η έρευνα σε αυτό το χώρο τα τελευταία χρόνια είναι να μετακινηθεί από τη μελέτη αυτών των μεταβάσεων απλώς και μόνον ως προς αλλαγές στην περιπλοκότητα του μαθηματικού αντικειμένου – ή απλώς και μόνον ως προς τον εντοπισμό των μαθηματικών δυσχερειών / κενών / λαθών κλπ. που μπορεί να προκύψουν από τη μετάβαση από τη μία βαθμίδα στην άλλη.

Δεδομένου λοιπόν ότι οι μελέτες αυτές αφορούν τόσο τους μετασχηματισμούς του μαθηματικού αντικειμένου από τη μία βαθμίδα στην άλλη, όσο και συστημικά χαρακτηριστικά των μεταβάσεων, ειδικά στην Ελλάδα, δεν μπορεί παρά να παρατηρήσουμε πως η μαθησιακή εμπειρία αλλά και η παιδαγωγική πράξη στη σχολική τάξη είναι άρρηκτα συνδεδεμένες με τις πολύ διαδεδομένες μορφές παράλληλης, γνωστής και ως σκιώδους, παιδείας (φροντιστήριο, ιδιαίτερα μαθήματα). Ακόμα και αν δεχθούμε – ίσως ακριβώς για αυτό το λόγο – πως η φροντιστηριακή τάξη και το ιδιαίτερο μάθημα έχουν πολλές φορές ως αποκλειστικό στόχο την επιτυχία σε εξετάσεις (και διαφέρουν αισθητά ως προς τους στόχους, τις μεθόδους και την επαγγελματική δραστηριότητα εκπαιδευτικών στη σχολική τάξη), ερωτήματα όπως «τι επίπτωση έχει στις διδακτικές προσεγγίσεις ενός εκπαιδευτικού η μετάβαση από χώρους μάθησης, όπως το πανεπιστήμιο, σε χώρους εργασίας, όπως η σχολική τάξη (αλλά και η φροντιστηριακή τάξη, ή το ιδιαίτερο μάθημα);» χρήζουν διερεύνησης. Όπως χρήζει και συστηματικής μελέτης η παρατήρηση πως, στην ελληνική πραγματικότητα, η μετάβαση από το πανεπιστήμιο στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση χαρακτηρίζεται από τους μεγάλους χρόνους αναμονής που συχνά ξεπερνούν τα δέκα και δεκαπέντε χρόνια. Στο διάστημα αυτό, οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί είτε απασχολούνται σε χώρους άσχετους με την εκπαίδευση ή στρέφονται στο χώρο της ιδιωτικής και φροντιστηριακής εκπαίδευσης. Και στις δύο περιπτώσεις τα χαρακτηριστικά της μετάβασης προς τη σχολική τάξη σαφώς αλλάζουν.

Ένα άλλο βήμα που έχει τα τελευταία χρόνια πετύχει η έρευνα σε αυτό το χώρο είναι να διευρύνει τη συζήτηση και πέρα από τη μετάβαση μαθητών προς και από *Μαθηματικά* τμήματα. Τα μαθηματικά θεωρούνται αντικείμενο θεμελιώδες στην εκπαίδευση αποφοίτων σε πολλούς τομείς – σχεδόν όλους αν θεωρήσουμε πως και οι απόφοιτοι στους χώρους όχι μόνο των φυσικών αλλά και των κοινωνικών και ανθρωπιστικών επιστημών οφείλουν να έχουν έστω και βασικές γνώσεις ποσοτικών μεθόδων και χειρισμού ποσοτικών δεδομένων! Ως εκ τούτου η μελέτη των μεταβάσεων στις οποίες αναφερόμαστε εδώ αφορά πολύ μεγαλύτερο πλήθος μαθητευόμενων και διδασκόντων από όσο ίσως υπονοεί η έμφαση ως τώρα στις μεταβάσεις προς και από τα Μαθηματικά τμήματα.

Στην καρδιά των προτάσεών μας βρίσκεται η έντιμη αναγνώριση πως, προς το παρόν, έχουμε δυσκολία συνεργασίας και ουσιαστικής συμμετοχής όλων των εμπλεκομένων, συμπεριλαμβανομένων των μαθητών και φοιτητών, στη συνδιαμόρφωση των κοινοτήτων αλληλοενημέρωσης, στήριξης και συνεργασίας που εισηγούμαστε εδώ. Στο μεγαλύτερο βαθμό, μαθητές, φοιτητές και εκπαιδευτικοί, ο καθένας συχνά από μόνος του, προσπαθεί να «επιβιώσει» εκεί που βρίσκεται και εκεί που θα βρεθεί… Ελπίζουμε πως η μεθοδική παρουσίαση στην οποία στοχεύσαμε εδώ υποδεικνύει αποδοτικές – και συλλογικές – διεξόδους από αυτούς τους απομονωμένους – και απομονωτικούς – μηχανισμούς επιβίωσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bampili, A., Zachariades, T,, & Sakonidis, C. (2017). The transition from high school to university mathematics: a multidimensional process. Στο tbc (Eds.), *Proceedings of the 10th Conference of European Researchers in Mathematics Education* (pp. tbc-tbc). Dublin City University: Ireland.

Boufi, A., Kolovou, A., & Gravemeijer, K. Teachers' problem-solving activity as a support for reconceptualizing their pedagogical reasoning in teaching multiplication. In Karras, K.G., Calogiannakis, P., Wolhuter, C. C., & Andreadakis, N. (Eds.) *Proceedings of the First International Symposium on Education and Teacher Education Worldwide: Current Reforms, Problems and Challenges*, (pp. 119-128). University of Crete: Greece.

Clark, M., & Lovric, M. (2008). Suggestion for a Theoretical Model for Secondary-Tertiary Transition in Mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, *20*(2), 25-37.

Clark, Akkerman, S. F., & Bakker, A. (2011). Boundary crossing and boundary objects. *Review of Educational Research*, *81*(2), 132-169.

Cherif, A. & Wideen, M. (1992). The problems of the transition from high school to university science. *Catalyst 36*(1), 10–18.

Clark, M. & Lovric, M. (2009). Understanding secondary-tertiary transition in mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40*(6), 755–776

Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist*, *31*(3-4), 175-190.

Cobb, P., Zhao, Q., & Dean, C. (2009). Conducting design experiments to support teachers' learning: A reflection from the field. *The Journal of the Learning Sciences*, *18*(2), 165-199.

Deleuze, G., & Guattari, F. (1987). *A Thousand Plateaus: Capitalism and Schizophrenia* (translation and foreword by Brian Massumi). Minneapolis: University of Minnesota Press.

Gueudet, G. (2016) Survey on the State of the Art. Στο Gueudet, G, Bosch, M., diSessa, A.A., Nam Kwon, O., & Verschaffel, L. (eds.). Transitions in Mathematics Education. ICME-13 Topical Surveys (pp. 1-34). Springer.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, *67*, 237–254.

Gueudet, G., Bosch, M., DiSessa, A. A., Kwon, O. N., & Verschaffel, L. (2016). *Transitions in mathematics education*. New York: Springer.

Kajander, A. & Lovric, M. (2005). Transition from secondary to tertiary mathematics: McMaster University experience. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *36*(2–3), 149–160.

Kazemi, E., & Hubbard, A. (2008). New directions for the design and study of professional development: Attending to the coevolution of teachers' participation across contexts. *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 428-441.

Klein, F. (1908/1932). Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. I. Leipzig: B.G. Teubner. Quoted here is the 1932 English translation published in London by Macmillan.

Nardi, E. (1996). *The novice mathematician's encounter with mathematical abstraction: Tensions in concept image construction and formalization.* Doctoral thesis, University of Oxford, UK. Available at https://ora.ox.ac.uk/objects/uuid:19d55975-7af9-4ed4-ab98-be18da31e16.

Nardi, E. (1999). The challenge of teaching first-year undergraduate mathematics: Tutors' reflections on the formal mathematical enculturation of their students. *Nordic Studies in Mathematics Education* 7(2), 29-53.

Nardi, E. (2008). *Amongst mathematicians: Teaching and learning mathematics at university level*. New York: Springer. eBook.

Potari, D. (2013). The relationship of theory and practice in mathematics teacher professional development: an activity theory perspective. *ZDM*, *45*(4), 507-519.

Sdrolias, K.A., & Triandafillidis, T.A. (2008). The transition to secondary school geometry: can there be a "chain of school mathematics"?

Educational Studies in Mathematics, *67*(2), 159-169.

Stouraitis, K. (2016). Decision making in the context of enacting a new curriculum: An activity-theoretical perspective. Στο C. Csíkos, A. Rausch, & J. Szitányi (Επιμ.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Τόμ. IV, σσ. 235-242). Szeged, Hungary: PME.

Tall, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 495–511). New York: Macmillan.

Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E., & Simpson, A. (1999). What Is the Object of the Encapsulation of a Process? *The Journal of Mathematical Behavior*, *18*(2), 223–241.

Winsløw, C., Bergsten, C., Butlen, D., David, M., Gomez, P., Grevholm, B., Li, S., Moreira, P., Robinson, N., Sayac, J., Schwille, J., Tatto, T., White, A., & Wood, T. (2009). First years of teaching. In R. Even & D. L. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers in mathematics* (σσ. 93-101). New York: Springer.

Winsløw, C., & Grønbæk, N. (2014). Klein's double discontinuity revisited: contemporary challenges for universities preparing teachers to teach calculus. *Recherches en Didactique des Mathématiques 34*(1), 59-86.

Wood, K. (2014). Deepening learning through lesson and learning study. In K. Wood, & S. Sithamparam, (Eds.), *Realising Learning: Teachers Professional Development through Lesson and Learning Study*, (pp.1 – 24). London: Taylor and Francis Group.

Van Gennep, A. (2016). *Τελετουργίες Διάβασης. Συστηματική Μελέτη των Τελετών* (μτφ. Θεόδωρος Παραδέλλης). Αθήνα: Εκδόσεις Ηριδανός.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477.

Yerushalmy, M. (2005). Challenging known transitions: Learning and teaching algebra with technology. *For the Learning of Mathematics*, *25*(3), 37–42.

Zhao, Q. (2011). *Reconceptualizing supporting teachers' learning across the settings of professional development and the classroom*. Vanderbilt University.

Φιλίππου, Γ., Πίττα-Πανταζή, Δ., & Χρίστου, Κ. (2003). Από το δημοτικό στο γυμνάσιο: η περίπτωση των μαθηματικών. 2ο Συνέδριο για τα Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση: Τα μαθηματικά στο γυμνάσιο, ΕΚΠΑ - Πανεπιστήμιο Κύπρου (retrieved http://www.math.uoa.gr/me/conf2/papers/filip.pdf). Alcock, L. & Simpson, A. (2002). Definitions: Dealing with Categories Mathematically. *For the learning of Mathematics, 22*(2), 28–34.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΑΞΟΝΑΣ-1: Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΣΤΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΤΑΞΗ

ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΛΟΓΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΕΠΕΙΩΝ ΤΟΥ ΞΕΠΕΡΑΣΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΣΙΑΚΟΥ ΑΔΙΕΞΟΔΟΥ ΜΙΑΣ ΜΕΛΛΟΥΣΑΣ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ζαγοριανάκος Αντώνης

Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

matheart7@math.uoa.gr

Με αφορμή την μελέτη της περίπτωσης μιας φοιτήτριας, υποψήφιας καθηγήτριας Μαθηματικών στην αγγλική δευτεροβάθμια εκπαίδευση, και την κοπιώδη πορεία της προς την απόκτηση 'μαθηματικής αυτοπεποίθησης' θα αναζητήσουμε την γενετική σχέση των μαθηματικών εκφράσεων της φοιτήτριας, και των συνεπειών τους για παγιωμένες αντιλήψεις της. Θα δούμε τις ριζικές συνέπειες που είχε η δράση της σε αυτή την δραστηριότητα για αντιλήψεις της για την μάθηση και την διδασκαλία. Και θα αναλύσουμε φαινομενολογικά τη σχέση της αρχικής εποπτείας με τις νέες αντιλήψεις της, με ευρήματα ενθαρρυντικά για την κατανόηση της μαθησιακής πράξης και για την ευαισθητοποίηση της διδακτικής δράσης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΚΑΙ ΣΤΟΥΣ ΣΤΟΧΟΥΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΑΡΘΡΟΥ

Στόχος του άρθρου είναι να αναδείξει τη σημασία της στοιχειώδους εποπτείας, με αφορμή ένα μαθησιακό επεισόδιο, όχι στη συγκρότηση αφηρημένων, μαθηματικών αντικειμένων—κάτι που έχει συμβεί σε προηγούμενο άρθρο μου (BSRLM, 2013)—αλλά στις συνέπειες που αυτή φάνηκε τελικά πως είχε στην αλλαγή σημαντικών πεποιθήσεων για τη διδασκαλία και τη μάθηση, μιας φοιτήτριας και μέλλουσας καθηγήτριας Μαθηματικών στην αγγλική δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Καθώς ξεκινήσαμε αναφέροντας τον όρο «εποπτεία» διευκρινίζουμε χρησιμοποιώντας τον λεξικογραφικό ορισμό του Σταματάκου, ως «η κατ' αίσθησιν αντίληψις, πράγματος τινός, η συνδυάζουσα όλας τας εξ αυτού **εντυπώσεις** (οπτικάς, ακουστικάς, κ.ά.) εις εν ενιαίον σύνολον και ως τοιούτον παραμένουσα κατατεθημένη εν τη συνειδήσει» (τόμος 1, σ. 82). Αυτή η έννοια της εποπτείας—ως απόρροια ενσώματων 'εντυπωμάτων', «κατατεθημένης εν τη συνειδήσει» και σύμφυτης (ως προς την έρευνα), με την εμφάνιση αφηρημένων, μαθηματικών αντικειμένων, προερχόμενων από ενσώματα, εμπειρικά πρότυπα—αποτελεί ένα θέμα κεντρικού ενδιαφέροντος της έρευνας, μέρος της οποίας αποτελεί το άρθρο αυτό.

Ακολουθώντας την φαινομενολογική προοπτική, η έρευνα χρησιμοποιεί τον αναλυμένο μαθησιακό χρόνο, της μαθησιακής εμπειρίας της Ντιάνα (ψευδώνυμο) σε μια συγκεκριμένη δραστηριότητα, διερευνώντας την ως έναν αποφασιστικό μοχλό των αλλαγών που ακολούθησαν. Θα μελετήσουμε την εμπειρία της φοιτήτριας **ως προς τις συνέπειές της για παγιωμένες αντιλήψεις της,** χαρακτηριστικές για το εκπαιδευτικό σύστημα στο οποίο είχε μεγαλώσει. Μέσω της **φαινομενολογικής** θεωρίας και μεθοδολογίας θα προβληθεί μια νέα οπτική της μαθησιακής εμπειρίας, όπου κυρίαρχη δύναμη συγκρότησης μαθηματικών αντικειμένων είναι η **ενσώματη συνείδηση** (Μερλώ-Ποντύ, 2016)—μακριά από την σχάση μεταξύ αντιληπτικής ζωής και έννοιας (στο ίδιο, σ. 118), την οποία επέφερε ο καντιανισμός μέσω του κονστρουκτιβισμού στην διδακτική των Μαθηματικών (Otte, 1998˙ Roth & Thom, 2008). Θα δοθούν έτσι για δεύτερη φορά (βλ. και Ζαγοριανάκος, 2016) παραδείγματα στην ελληνική βιβλιογραφία για την έμπρακτη χρησιμότητα και την προσβασιμότητα των φαινομενολογικών μεθόδων στην μελέτη γνωσιακών καταστάσεων της διδακτικής των Μαθηματικών. Με αφορμή, σε αυτό το άρθρο—κάτι που άλλωστε αποτελεί το κεντρικό ερευνητικό του ερώτημα—την ανίχνευση και πιστοποίηση της **γενετικής σχέσης** της **εποπτείας ουσίας** της φοιτήτριας με τις **αλλαγές** που ακολούθησαν αμέσως μετά, για παγιωμένες αντιλήψεις της. Ώστε να φωτιστεί η επανασυγκρότηση βασικών της αντιλήψεων για την διδασκαλία και την μάθηση από την οπτική γωνία της συγκρότησης των μαθηματικών της αντικειμένων, η οποία προηγήθηκε.

Δεν θα δοθούν για ευνόητους λόγους χωρικών περιορισμών λεπτομέρειες της θεωρίας και η αναγκαία, για την περίπτωση αυτή, διευκρίνιση επιπλέον όρων. Πιστεύω όμως ότι η ωφέλεια της παρουσίασης αυτής έγκειται πρωτίστως στην ευαισθητοποίηση ως προς τις κατανοήσεις των προθέσεων (αποβλέψεων) των φοιτητριών/φοιτητών μας και των οριζόντων αυτών των προθέσεων, μέσα στην ζώσα μαθησιακή εμπειρία τους της τάξης, της οποίας είμαστε συμμετέχοντες είτε ως διδάσκοντες είτε ως παρατηρητές–ερευνητές, με επιλεγμένο βαθμό συμμετοχής.

ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ–ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Το είδος αναστοχασμού που παρατέθηκε στην προηγούμενη ενότητα διατρέχει ρητά και υπόρρητα την ανάλυση του μαθησιακού επεισοδίου που θα ακολουθήσει. Παρά το γεγονός ότι μια αρκετά διεξοδική περιγραφή του μαθησιακού επεισοδίου έχει ήδη δημοσιευθεί (B.S.R.L.M., Μάρτιος 2013, σσ. 55-60) η προσέγγιση εδώ αφορά σε μια ιδιαίτερη εκλεκτική συγγένεια μεταξύ των ευρημάτων της προηγούμενης δημοσίευσης, όπως θα δούμε παρακάτω.

Η έρευνα είναι μια μελέτη περίπτωσης από μια σειρά μαθημάτων που έλαβαν χώρα το ακαδημαϊκό έτος 2010-11, τα οποία αφορούσαν μια ομάδα δεκατριών φοιτητών, υποψήφιων καθηγητών Μαθηματικών στην αγγλική δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ο τίτλος του μαθήματος ήταν Η φύση της μαθηματικής ανάπτυξης, και εκείνη την χρονιά διενεργήθηκαν είκοσι τρίωρα μαθήματα, τα οποία εστίαζαν σε μία ποικιλία θεμάτων, με έναν από τους κύριους στόχους να είναι η παραγωγή μαθηματικοποιήσιμων γενικεύσεων εκ μέρους των φοιτητριών/φοιτητών.

Οι φοιτήτριες/φοιτητές εργάζονταν σε ομάδες των 3-5 ατόμων, και επιπλέον η δια-ομαδική συνεργασία επιτρεπόταν και ενθαρρύνονταν, χωρίς όμως να θεωρείται επιτακτική. Οι ίδιες/ίδιοι ήταν ελεύθερες/οι να επιλέξουν τον βαθμό της συνεργασίας, της ομαδικότητας, της δια-ομαδικότητας και της όλης εμπλοκής τους. Οι δραστηριότητες που παρουσίαζε ο καθηγητής ήταν ανοικτές ως προς τους τρόπους δράσης και τις στρατηγικές που θα ακολουθούσε καθεμιά και καθένας τους. Από τις είκοσι δραστηριότητες που έλαβαν χώρα εκείνη την χρονιά οι φοιτήτριες/φοιτητές επέλεξαν οκτώ από αυτές να τις παραδώσουν ηλεκτρονικά στον καθηγητή στο τέλος της χρονιάς, προκειμένου να βαθμολογηθούν. Ήταν προφανές ότι επέλεξαν εκείνες τις δραστηριότητες που κατά την κρίση τους είχαν προχωρήσει περισσότερο, καλύτερα, κλπ. και κυρίως εκείνες που θεωρούσαν ότι παρουσίαζαν το μεγαλύτερο αναστοχαστικό ενδιαφέρον επί της μαθηματικής τους διερεύνησης.

Α. Γενικά στοιχεία θεωρίας – μεθοδολογίας

Η αναστοχασμοί των φοιτητών/τριων συνδυάστηκε με τη θεωρητική και μεθοδολογική βάση της έρευνας, δηλαδή με την φαινομενολογία της αντίληψης του Ε. Χούσσερλ και τη ριζική της ανανέωση από τον Μερλώ-Ποντύ (Ζαγοριανάκος, 2016). Χωρίς τους αναστοχασμούς και την *φαινομενολογική στάση*, της οποίας μια γεύση θα πάρουμε εδώ, δεν θα μπορούσε ο κόσμος της φοιτήτριας κατά τη μαθηματική της διερεύνηση να έχει γίνει ορατός (2013). Τα κύρια χαρακτηριστικά της στάσης αυτής είναι η *αναστολή* των *βεβαιοτήτων* και των *δοξασιών* μας για όσα παρατηρούμε, η *παρενθετοποίηση* (bracketing) όσων δεν αφορούν το υπό εξέταση ζήτημα, και η *απόλυτη εστίαση* της προσοχής μας στις εμφανίσεις της υπό εξέταση κατάστασης πραγμάτων. Αυτά σε γενικές γραμμές, καθώς οι λεπτομέρειες θα αναδειχθούν στην ανάλυση που ακολουθεί. Ο χώρος εδώ επίσης δεν επαρκεί για την αναλυτική αποσαφήνιση της διακριτικής ικανότητας που προσφέρει η φαινομενολογία σε σχέση με τον Καντιανής προέλευσης κονστρουκτιβισμό (Otte, 1998˙ Roth & Thom, 2008) για την ανάλυση της μαθηματικής γνωσιακής εμπειρίας, η ίδια όμως η ανάλυση του επεισοδίου θα λειτουργήσει παραδειγματικά ως προς σημαντικές διακρίσεις οπτικής. Θα περιοριστώ στην αναφορά μόνο των απαραίτητων όρων για την κατανόηση της προοπτικής που υιοθετείται σε αυτό το άρθρο, αφήνοντας στην αναγνώστρια ή στον αναγνώστη την ευχέρεια να απευθυνθεί σε άλλα άρθρα για την περαιτέρω μελέτη σημαντικών όρων θεωρίας και μεθοδολογίας (Ζαγοριανάκος, 2016˙ Zagorianakos, 2016).

Β. Η εισαγωγή της δραστηριότητας

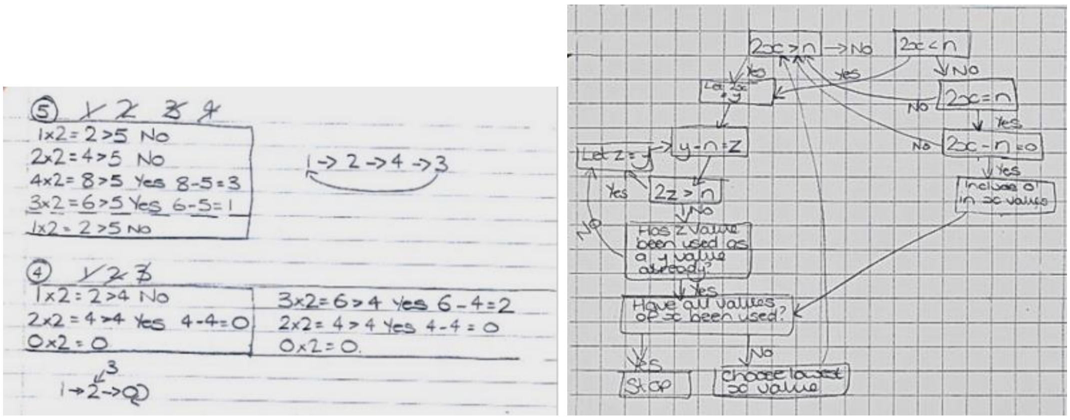
Η δραστηριότητα είχε τον τίτλο «διπλασιαζόμενο μόντουλο» (doubling modulo) και καμία εξήγηση δεν δόθηκε όταν ο καθηγητής την εισήγαγε. Ξεκινώντας από έναν δεδομένο αριθμό, που ο καθηγητής έγραφε στον πίνακα οι φοιτητές προσπαθούσαν να μαντέψουν τον επόμενο αριθμό που θα έγραφε μετά από λίγο στον πίνακα, αν η σωστή απάντηση δεν διδόταν, διαφορετικά, την έγραφε μόλις η σωστή απάντηση δινόταν από κάποια φοιτήτρια/φοιτητή. Όμως ενώ οι αριθμοί φαίνονταν να διπλασιάζονται κάποια στιγμή ένας άσχετος αριθμός εμφανιζόταν, ο οποίος και πάλι διπλασιαζόταν. Η διαδικασία αυτή συνεχιζόταν έως ότου εμφανιζόταν ο αρχικός αριθμός ή (σε πιο εξελιγμένη φάση του γρίφου) ένας αριθμός που είχε ήδη εμφανιστεί (βρόχος – επαναληπτική διαδικασία), οπότε ο καθηγητής σημείωνε στον πίνακα έναν νέο αριθμό, ο οποίος ήταν πάντοτε μικρότερος του αρχικού και άρχιζε πάλι τους διπλασιασμούς από αυτόν. Όταν πάλι ο διπλασιασμένος αριθμός υπερέβαινε τον αρχικό αριθμό ο καθηγητής έγραφε τη διαφορά τους και ξεκινούσε τους διπλασιασμούς από αυτήν, ενώ η όλη διαδικασία επαναλαμβανόταν έως ότου όλοι οι αριθμοί μικρότεροι του αρχικού είχαν εξαντληθεί. Και τότε η όλη διαδικασία άρχιζε με έναν άλλο αρχικό αριθμό. Ο καθηγητής ήθελε οι φοιτητές **να παρατηρήσουν μόνοι τους** ότι η απότομη μεταβολή συνέβαινε όταν ο διπλάσιος αριθμός ήταν ίσος ή υπερέβαινε τον αρχικό αριθμό ή όταν συναντούσαν έναν αριθμό που είχε ήδη εμφανιστεί. Όταν οι φοιτητές άρχισαν να καταλαβαίνουν τους ζήτησε να ασχοληθούν με την διερεύνηση της κατάστασης που περιέγραψε, ζητώντας τους μόνον ένα πράγμα: τις ισχυρότερες δυνατές γενικεύσεις που θα μπορούσαν να αντλήσουν από αυτή την δραστηριότητα.

Γ. Η διερεύνηση της Ντιάνα

Οι φοιτητές ατομικά αλλά και σε ομάδες άρχισαν να διερευνούν διαφορετικές περιπτώσεις αριθμών και να προσπαθούν να βρουν ομοιότητες ή οποιεσδήποτε κανονικότητες, οι οποίες θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε γενικεύσεις. Παραδείγματα από τις ενδιαφέρουσες προσπάθειες των φοιτητών παρέχονται στο άρθρο του 2013 και είναι αδύνατον ακόμη και να περιγραφούν αδρά εδώ, εξ αιτίας των σημαντικών χωρικών περιορισμών. Αυτό όμως που μας ενδιαφέρει εδώ είναι η στάση της Ντιάνα (ψευδώνυμο), μιας συγκεκριμένης φοιτήτριας με ιδιαίτερα χαμηλή πεποίθηση στις δικές της ιδέες και στρατηγικές, ιδιαίτερα μάλιστα στο μάθημα αυτό, όπου οι οδηγίες και η καθοδήγηση γενικότερα από τον καθηγητή απουσίαζαν εντελώς. Όπως μου είχε παραπονεθεί σε μια συνέντευξη, «Τον ρωτώ “το κάνω σωστά ή το κάνω λάθος;” και μου απαντά “Εσύ τι νομίζεις;”».

Έτσι, η μόνη της ελπίδα για να προχωρήσει την δραστηριότητα ήταν οι ιδέες των συμφοιτητών της. Δυστυχώς όμως στην δραστηριότητα αυτή δεν κατάφερε να βρει νόημα στις ιδέες αυτές. Έτσι, η λύση στην οποία κατέφυγε ήταν η περιγραφή του κανόνα της δραστηριότητας, με μια μέθοδο δομημένων ερωταπαντήσεων για κάθε αριθμό, από το 4 έως και το 18 (βλ. παραδείγματα στο αριστερό σχεδιάγραμμα της Εικόνας 1). Αυτή η μέθοδος θύμιζε έντονα την εμπειρική μέθοδο της *δοκιμής–και–βελτίωσης*, την οποία επανειλημμένα χρησιμοποιούσε σε προηγούμενες δραστηριότητες. Σε δική της περιγραφή:

> Καταλάβαινα τον κανόνα και το τι κάναμε αλλά για κάποιο λόγο δεν μπορούσα να βάλω στο κεφάλι μου τα διαγράμματα ροής που έφτιαχναν όλοι οι άλλοι. Άρχιζα να κοιτάζω τον κανόνα που μας είχε δοθεί και ό,τι είχαμε βρει από τους άλλους αριθμούς που είχαμε χρησιμοποιήσει. Αποφάσισα ότι θα χρησιμοποιούσα ένα διάγραμμα ροής και επάνω του έγραψα τους αριθμούς από το 1 έως το ν-1 [βλ. αριστερό σχεδιάγραμμα εικόνας 1]. Κατ’ αυτόν τον τρόπο μπορούσα να δω αν υπήρχε παραπάνω από ένας κύκλος, και αν υπήρχε παραπάνω από ένας κύκλος θα μπορούσα να διαγράφω τους αριθμούς όπως θα προχωρούσα, ώστε να είμαι βέβαιη ότι τους χρησιμοποίησα όλους.



Εικόνα 1. Δομημένα σετ ερωταπαντήσεων (αλγοριθμικά σχεδιάσματα) μεμονωμένων αριθμών αριστερά και ο αρχικός αλγόριθμος της Ντιάνα δεξιά.

Και τότε ουσιαστικά εμφανίστηκε ο αρχικός της αλγόριθμος (εικόνα 1 δεξιά),[2] καθώς η προαναφερθείσα περιγραφή της του «διαγράμματος ροής» αφορά στα δομημένα σετ ερωτήσεων/απαντήσεων (εικόνα 1, αριστερά). Με άλλα λόγια, ήταν η **εποπτεία της ουσίας** των δομημένων σετ των ερωτήσεων/απαντήσεων η οποία έφερε τον γενικό αλγόριθμο στο προσκήνιο,[3] μετασχηματίζοντας έτσι τις ερωτήσεις/απαντήσεις σε πρωτόλεια τοπικών αλγορίθμων. Εδώ ακριβώς έχουμε την **απόβλεψη** της **μετάβασης** από τα εμπειρικά πρότυπα στο αφηρημένο αντικείμενο, μια μετάβαση που προϋποθέτει την *κάρπωση εμπειρικών δομών,* και η οποία γίνεται δυνατή και κατανοητή χάριν της *ενσώματης συνείδησης* ή αλλιώς του *ζωντανού σώματος* (*living body*, Husserl, 1970, σ. 324). Η ενσώματη συνείδηση μετέτρεψε διά της εποπτείας ουσίας τα σετ ερωτήσεων /απαντήσεων σε γενικό αλγόριθμο και έδωσε έτσι τη λύση στο μαθησιακό αδιέξοδο στο οποίο είχε περιέλθει η φοιτήτρια.

Δ. Συνέπειες της διερεύνησης της Ντιάνα στην αλλαγή πεποιθήσεών της – Περαιτέρω διευκρίνιση των στόχων της έρευνας

Αυτό που αποτελεί το κύριο θέμα εξέτασης του παρόντος άρθρου είναι η διερεύνηση των *συνεπειών* της *εποπτείας ουσίας* της μέλλουσας καθηγήτριας Μαθηματικών, καθώς οι λεπτομέρειες της εμφάνισης της *εποπτείας ουσίας* έχουν περιγραφεί σε άλλο άρθρο (Zagorianakos, 2013). Πιο συγκεκριμένα μας απασχολεί εδώ η συγκρότηση του αντικειμένου (του αλγορίθμου) από την φοιτήτρια, όχι από την μαθηματική αλλά από την αντιληπτική σκοπιά (Μερλώ-Ποντύ, 2016). Αυτό που είναι προς διερεύνηση είναι το πως και υπό ποιες συνθήκες το εμπειρικό πρότυπο—τα δομημένα σετ των ερωτήσεων/απαντήσεων και η *δοκιμή–και–βελτίωση* στην οποία βασίστηκαν—αποτέλεσε το υλικό για τον αλγόριθμο (εικόνα 1, δεξιό γράφημα) και το αρτιότερο λογικό διάγραμμα που συγκρότησε ακολούθως η φοιτήτρια και με το οποίο δεν έχουμε λόγο να ασχοληθούμε εδώ περαιτέρω. Όντας υπέρμαχοι της επαναφοράς της συζήτησης στις συνθήκες της ζώσας εμπειρίας, εντός της οποίας διαμείβονται οι σχέσεις που αργότερα κατηγοριοποιούνται επιστημονικά, έχοντας δηλαδή την πρόθεση να φωτίσουμε την *προ-επιστημονική ζωή* των αντικειμένων που συγκροτούνται εντός της τάξης και όχι μόνο, θα δούμε ποιες ήταν οι **καθοριστικές συνέπειες** που είχε η προαναφερθείσα **εποπτεία ουσίας** για τις αλλαγές σημαντικών αντιλήψεων της φοιτήτριας, σε σχέση με την διδασκαλία και την μάθηση. Θα δούμε επίσης την **καταγωγή** των ριζικών αναθεωρήσεων της φοιτήτριας μέσα στην ζώσα εμπειρία της συγκρότησης αυτών των αντικειμένων. Ο φωτισμός μιας τέτοιας προοπτικής της μαθησιακής εμπειρίας πιστεύουμε πως έχει πολλά οφέλη για την βελτίωση της διδασκαλίας και της μάθησης, ως αμφίδρομων και δυνητικά επικοινωνούντων εκφράσεων.

Τα ευρήματα της έρευνας γίνονται εφικτά καθώς το κοίταγμα, το ξεδίπλωμα και η πιστή περιγραφή της ζώσας μαθησιακής εμπειρίας—της φοιτήτριας εν προκειμένω—μας δίνει την δυνατότητα να αντιληφθούμε το αντικείμενο του αλγορίθμου μέσα από την ματιά των αποβλέψεων (προθέσεων) της φοιτήτριας. Αποβλέψεων κυριολεκτικά επιβίωσης από μία κατάσταση όπου ήταν απόλυτα μόνη! Κάποια στιγμή την πλησίασα, καθώς αντιλήφθηκα την κραυγή βοήθειας που εξέπεμπε. Είδα κάποια σετ ερωταπαντήσεων στις σημειώσεις της (εικόνα 1 αριστερά) και επέλεξα να εμπλακώ με άλλη ομάδα, ώστε να μην επηρεάσω την εξέλιξη της διαφαινόμενης στρατηγικής της. Η Ντιάνα, απολύτως μόνη, καθώς δεν μπορούσε να καταλάβει τις στρατηγικές των άλλων όσο και αν προσπαθούσαν να της εξηγήσουν, προχώρησε στην ιδέα της αλγοριθμοποίησης της διατύπωσης της δραστηριότητας (εικόνα 1 δεξιά).

Παραθέτω εδώ ένα απόσπασμα από συνέντευξη που της πήρα, με την δική της περιγραφή του πως αισθάνθηκε μετά την πιστοποίηση της εγκυρότητας της λύσης της από τον καθηγητή αλλά και με μια γενική αποτίμηση των ριζικών αλλαγών που επήλθαν λόγω του μαθήματος αυτού:

> Πήρε πολύ χρόνο και μου πήρε πολύ περισσότερο χρόνο να καταλάβω από όσο πήρε όλους τους άλλους. Αλλά τώρα το έκανα αυτό και είναι ο δικός μου τρόπος, κανείς άλλος δεν φαίνεται να το αντιμετώπισε με αυτό τον τρόπο… Μου αρέσει ο τρόπος μου! [ο αλγόριθμος] Είναι μακρύς δρόμος αλλά μου αρέσει ο τρόπος μου. … Νομίζω πως όταν διδάσκω πρέπει να ξεπεράσω την παρόρμηση να δίνω απαντήσεις… όχι αμέσως. …Για σημαντική χρονική διάρκεια—και δεν είναι μόνο με τα Μαθηματικά αλλά και με άλλα αντικείμενα—ήμουν πολύ προσεκτική όταν έβρισκα μια απάντηση˙ αν η απάντησή μου

> δεν ήταν ίδια με όλων των άλλων συμπέραινα ότι η δική μου είναι λανθασμένη! Γιατί δεν ήταν ίδια με κάποιου άλλου … Νομίζω πως έχω αποκτήσει λίγο περισσότερη αυτοπεποίθηση με αυτό το οποίο κάνω˙ γιατί σκέφτομαι “λοιπόν, αν και δεν έχω την ίδια απάντηση με κάποιου άλλου αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι είναι λάθος, σημαίνει απλώς ότι το σκέφτηκα με διαφορετικό τρόπο”. Επομένως ναι, ήταν καλό για μένα! … Νομίζω πως συνειδητοποίησα από αυτά τα μαθήματα ότι βοηθά τους ανθρώπους περισσότερο αν τους βοηθάς με την κατανόησή τους από το απλώς να τους δώσεις αμέσως μια απάντηση˙ και φυσικά να τους κάνεις να σκεφτούν για αυτό και για το τι κάνουν και γιατί το κάνουν, τα οποία είναι προφανώς πολύ σημαντικά για να θέλει κάποιος να γίνει καθηγητής. (η έμφαση στο κείμενο αφορά έμφαση δική της στην εκφορά του λόγου)

Μπορούμε τώρα να κωδικοποιήσουμε τα ευρήματα αυτής της έρευνας, με βάση και τους αναστοχασμούς της φοιτήτριας.

ΕΥΡΗΜΑΤΑ, ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Τι είναι λοιπόν εκείνο που κατακτήθηκε από την Ντιάνα κατά την συγκρότηση της αλγοριθμικής περιγραφής, του ‘μηχανισμού’ της δραστηριότητας, μετά την καθοριστική αδυναμία της να επικοινωνήσει με τους τρόπους των άλλων και την αποχή του καθηγητή και του υποφαινόμενου ερευνητή από οποιαδήποτε καθοδήγηση; Ας συνοψίσουμε τα ευρήματα της έρευνας που σχετίζονται με τις αλλαγές παγιωμένων αντιλήψεων της Ντιάνα για την μάθηση και την διδασκαλία:

- Η πραγματοποίηση της ριζικής ανατροπής αντιλήψεων που η Ντιάνα διατηρούσε σχετικά με την φύση της μάθησης αφορούσε στην αμεσότητα με την οποία κατανόησε—ως απόρροια της αμεσότητας της εποπτείας ουσίας—ότι δημιουργεί μαθηματική γνώση κάποια/ος ακόμη και χωρίς την παραμικρή βοήθεια, αρκεί να έχει τέτοια απόβλεψη. Γιατί «άμεσο δεν είναι πια το εντύπωμα, το αντικείμενο που αποτελεί ένα με το υποκείμενο, αλλά το νόημα, η δομή, η αυθόρμητη διευθέτηση των μερών» (Μερλώ-Ποντύ, 2016, σ. 126). Η αμεσότητα αποτελεί συγκροτητικό στοιχείο της ίδιας της εποπτείας ουσίας, όπως και κάθε εποπτείας, με την Χουσσερλιανή έννοια (Husserl, 1983˙ Zagorianakos, 2016). Την βλέπουμε εδώ να εξασφαλίζει την ενσώματη συμμετοχή στα αφηρημένα ενεργήματα, και να δίνει την δυνατότητα συγκρότησης όχι μόνο μαθηματικών αντικείμενων αλλά και νέων, τροπικών αντιλήψεων.

- Με τον ίδιο τρόπο συντελέστηκε και η ριζική ανατροπή αντιλήψεων που η Ντιάνα διατηρούσε σχετικά με την φύση της διδασκαλίας, καθώς συνειδητοποίησε, και πάλι μέσω της αμεσότητας της εποπτείας ουσίας της ότι οι μέλλοντες μαθητές της δεν θα είχαν ανάγκη την άμεση ικανοποίηση των αποριών τους, όπως πίστευε προηγουμένως. Κατανόησε για πρώτη φορά και—κυρίως—από 'πρώτο χέρι' ότι οι απορίες τους αποτελούν γόνιμο έδαφος παραγωγής κατανοήσεων (νοήματος) και δεν είναι σε καμία περίπτωση ένα 'κενό'. Κάτι που για πρώτη φορά την έβαλε στη θέση του διαλόγου με τις κατανοήσεις των μαθητών, και 'απέναντι' στην άμεση απόδοση έτοιμων συνταγών και απαντήσεων.

Αυτό που πιστοποιείται συνεπώς, είναι μια **γενετική σχέση** ανάμεσα στον μηχανισμό της εποπτείας ουσίας και σε αυτόν της ριζικής μεταβολής παγιωμένων της αντιλήψεων: ο δεύτερος επέκτεινε εποπτικά, και σε άλλα πεδία, την εποπτεία που έφερε ο πρώτος. Καθοριστικό ρόλο σε αυτό έπαιξε το στοιχείο της **αμεσότητας** στην εμπειρία της συγκρότησης του αλγορίθμου που προηγήθηκε. Πιο συγκεκριμένα:

- Η ανατροπή αντιλήψεων που η Ντιάνα διατηρούσε σχετικά με την φύση της διδασκαλίας και της μάθησης είχε ριζικές διαστάσεις διότι η εμπειρία της εποπτείας ουσίας με την οποία συγκρότησε τον αλγόριθμο περιείχε την απόδειξη που χρειαζόταν για την απόκτηση μιας πεποίθησης που της έλειπε σε αυτό το μάθημα. Της πεποίθησης δηλαδή ότι μπορεί να αναπτύξει αποκλειστικά δικές της λύσεις, δικές της έγκυρες κατανοήσεις και δικές της κατευθύνσεις στην αντιμετώπιση μιας μαθηματικής δραστηριότητας. Με αυτό τον τρόπο η μαθησιακή πρακτική της φοιτήτριας εμπλουτίστηκε καθοριστικά, καθώς με την εναργή (pregnant) συμμετοχή της ενσώματης συνείδησης, ο αλγόριθμός που συγκρότησε έφερε την σφραγίδα της υποκειμενικής της συγκρότησης και των οριζόντων επιβίωσης εντός των οποίων έκανε την εμφάνισή του˙ με αποτέλεσμα την ριζική αναδιάρθρωση προηγούμενων αντιλήψεών της.

- Η κατανόηση της δραστηριότητας από την Ντιάνα βασίστηκε σε ένα εμπειρικό πρότυπο αναπαραγωγής του τρόπου με τον οποίο δόθηκε η δραστηριότητα από τον καθηγητή. Η μέθοδός της επίσης αναπαρήγαγε το εμπειρικό πρότυπο της δοκιμής–και–βελτίωσης, μιας μορφής που επανειλημμένα χρησιμοποιούσε σε προηγούμενες δραστηριότητες του μαθήματος. Η έμφαση στο ποιοι αριθμοί χρησιμοποιήθηκαν και στην διαγραφή όσων έχουν χρησιμοποιηθεί (εικόνα 1, αριστερό σχεδιάγραμμα) την απομάκρυνε από μια διαχείριση του τρόπου με τον οποίο εμφανίζονταν οι επαναλήψεις, του είδους των επαναλήψεων που εμφανίζονταν κάθε φορά κλπ. αλλά ταυτόχρονα την έφερε κοντά σε έναν γενικευμένο τρόπο περιγραφής της ίδιας της διαδικασίας. Ο καθηγητής δεν είχε θέσει κανέναν όρο αναφορικά με την κατεύθυνση της γενίκευσης των φοιτητριών/φοιτητών του. Το απέδειξε καθιστώντας έγκυρο τον τρόπο αντιμετώπισης της δραστηριότητας που μόνο η Ντιάνα ακολούθησε. Αυτό που η Ντιάνα δημιούργησε απέκτησε νόημα και για τους άλλους, μέσω του καθηγητή αλλά παρέμεινε επίσης για αυτήν ο δικός της τρόπος!

Τα παραπάνω ευρήματα μας δίνουν την δυνατότητα να ρίξουμε μια φαινομενολογική ματιά στην συγκρότηση *αφηρημένων*, μαθηματικών αντικειμένων αλλά και *αντιλήψεων* από στοιχειώδη *εμπειρικά* πρότυπα. Και επιπλέον στον ρόλο της *ενσώματης* λειτουργίας μέσα στην *αφηρημένη* συγκρότηση, μέσα από τις συνέπειες που είχε η *αμεσότητα* του τρόπου συγκρότησης των αντικειμένων για θεμελιακές αντιλήψεις της φοιτήτριας.

Η οπτική της μετάβασης από το εμπειρικό στο αφηρημένο, η στιγμή κατά την οποία «ξεκολλάω από την εμπειρία μου και περνάω στην ιδέα» (Μερλώ-Ποντύ, 2016, σ. 145) στηρίχθηκε όπως είδαμε στην θεωρία της *ενσώματης συνείδησης* του ώριμου Husserl (1970, πχ. σ. 124˙ Tito, 1990, σ. 185). Η ωφέλεια αυτής της ανάλυσης έγκειται κατ’ αρχήν στην ευαισθητοποίηση ως προς την κατανόηση των προθέσεων (αποβλέψεων) των μαθητριών/φοιτητριών και των μαθητών/φοιτητών μας. Καθώς και των *οριζόντων* αυτών των προθέσεων (αποβλέψεων), όπως η λειτουργία ‘επιβίωσης’ την οποία η εποπτεία ουσίας της φοιτήτριας κλήθηκε να παίξει. Έτσι, η ‘απόδραση’ της Ντιάνα προς τη δημιουργία μαθηματικού νοήματος γίνεται ορατή ως **ένα ριζικό επίτευγμα της αντίληψής της** με **ευρύτερες συνέπειες**. Και αυτή είναι μια υποστασιοποίηση του μαθησιακού συμβάντος η οποία καθίσταται δυνατή ακριβώς λόγῳ της φαινομενολογικής ματιάς.

Επιπλέον, η αντίληψη του μαθησιακού συμβάντος με αυτόν τον τρόπο μπορεί να μεταφραστεί σε αντίστοιχη σχεδίαση *διδακτικών* και *ερευνητικών* δράσεων, για την οποία περαιτέρω έρευνα είναι αναγκαία. Είτε όμως φροντίσουμε για την ένταξη των οριζόντων των μετεχόντων του μαθήματος στην *διδακτική* μας δράση είτε τους εντάξουμε προσεκτικά στο *αναλυτικό* μας πεδίο η ωφέλεια δεν μπορεί παρά να είναι τόσο ατομική όσο και ομαδική, στο πλαίσιο της τάξης, όσο και ερευνητική, στο πλαίσιο της ανάλυσης των δομών των αλληλεπιδρούμενων ποιοτήτων της μαθησιακής και της διδακτικής πράξης. Δεν θα αρκούμαστε να διαπιστώσουμε ότι η φοιτήτρια ‘απέδρασε’ προς την δημιουργία νοήματος αλλά θα έχουμε την δυνατότητα να την κατανοήσουμε καλύτερα και να σκιαγραφήσουμε τις *ορίζουσες* του νοήματος στις συνέπειες του, όπως στην προκειμένη περίπτωση στην αλλαγή παγιωμένων αντιλήψεων της φοιτήτριας.

Σημειώσεις

1. Γαλλικός τίτλος: Un condamnè à mort s’ est èchapè. Αγγλικός τίτλος: A man escaped.
2. Για περισσότερες λεπτομέρειες, βλέπε Zagorianakos, 2013, σ. 58.
3. Βλέπε Zagorianakos, 2013, για πλήρη περιγραφή της εκτύλιξης της εποπτείας ουσίας της Ντιάνα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ζαγοριανάκος, Α. (2016). Η φαινομενολογική θεωρία και μεθοδολογία στην υπηρεσία μιας νέας οπτικής για την μαθησιακή εμπειρία. *33ο Συνέδριο Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας:* Χανιά.

Μερλώ-Ποντύ, Μ. (2016). *Φαινομενολογία της αντίληψης*. Νήσος: Αθήνα.

Husserl, E. (1970). *The crisis of European sciences and transcendental phenomenology: An introduction to phenomenological philosophy*. Evanston: Northwestern University Press.

Husserl, E. (1983). *Ideas pertaining to a pure phenomenology and to a phenomenological philosophy: First Book.* The Hague: Martinus Nijhoff Publishers.

Otte, M. (1998). Limits of constructivism: Kant, Piaget and Peirce. *Science & Education, 7,* 425–450.

Roth, M. & Thom J. (2009). Bodily experience and mathematical conceptions: from classical views to a phenomenological reconceptualization. *Educational Studies in Mathematics, 70,* 175–189.

Tito, J. M. (1990). *Logic in the Husserlian context.* Illinois: Northwestern University Press.

Zagorianakos, A. (2013). The study of intuitions in one prospective teacher’s constructions of mathematical objects. Smith, C. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 33*(1), 55-60.

Zagorianakos, A. (2016). The Study of the Intuition of Essence of a Prospective Teacher of Mathematics from a Phenomenological Perspective. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education. 15,* 69-94.

ΒΕΛΤΙΩΝΟΝΤΑΣ ΤΑ ΣΥΝΑΙΣΘΗΜΑΤΑ ΜΑΘΗΤΩΝ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ: ΕΝΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΠΕΙΡΑΜΑ

Ζαχαράκη Κωνσταντίνα & Βαμβακούση Ξένια

Πανεπιστήμιο Αθηνών & Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

kon.zacharaki@gmail.com, xvamvak@cc.uoi.gr

Παρουσιάζουμε ένα διδακτικό πείραμα με στόχο τη βελτίωση των συναισθημάτων δύο μαθητών της Α΄ Λυκείου κατά την αποδεικτική διαδικασία και, κατ' επέκταση, της στάσης τους απέναντι στη Γεωμετρία. Υιοθετήσαμε υποδείξεις για τη διδασκαλία που απορρέουν από την έρευνα στο χώρο των συναισθημάτων, με κεντρικούς άξονες την ανταπόκριση στις ιδιαίτερες δυσκολίες που αντιμετώπιζαν οι μαθητές, τη δημιουργία ενός κλίματος στο οποίο οι μαθητές θα ένιωθαν ασφαλείς να εκφράσουν τα συναισθήματά τους και τη δημιουργία ευκαιριών ώστε τα παιδιά να βιώσουν την επιτυχία κατά την αποδεικτική διαδικασία. Η παρέμβαση είχε θετική επίδραση στα συναισθήματα και τις στάσεις των μαθητών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.

Η μαθηματική απόδειξη είναι ο κατεξοχήν τρόπος αξιολόγησης της αλήθειας των μαθηματικών ισχυρισμών (Moutsios-Rentzos & Spyrou, 2013). Ταυτόχρονα η απόδειξη θεωρείται ως «βασικό συστατικό» καθώς και ως «απαραίτητο εργαλείο για την προώθηση της μαθηματικής κατανόησης» (Ball, Hoyles, Jahnke & Movshovitz-Hadar, 2002, σελ. 907).

Ωστόσο, συχνά η στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά γενικά και, πιο συγκεκριμένα, απέναντι στη γεωμετρική απόδειξη, δεν είναι ευνοϊκή (Moutsios – Rentzos & Kalozoumi – Paizi, 2014). Ως στάση θεωρούμε τη συναισθηματική προδιάθεση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά, εν προκειμένω, στη Γεωμετρία, η οποία συνίσταται από συναισθήματα, προσδοκίες και αξίες (Hannula, 2002; Liljedahl, 2005). Στην εργασία αυτή επικεντρωνόμαστε στα συναισθήματα που έχουν σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση των στάσεων, ειδικότερα των μη ευνοϊκών. Πράγματι, οι μη ευνοϊκές στάσεις, σε μεγάλο βαθμό, παγιώνονται από επαναλαμβανόμενα αρνητικά συναισθήματα κατά την ενασχόληση με τα μαθηματικά, εν προκειμένω με την απόδειξη, και δύσκολα μεταβάλλονται (Liljedahl, 2005; Zan, Brown, Evans & Hannula, 2006). Φαίνεται, δε, ότι σε βάθος χρόνου, οι στάσεις και η επιτυχία στα μαθηματικά αλληλοτροφοδοτούνται (Hannula, 2015).

Θεωρείται, λοιπόν, σημαντική η διερεύνηση των συναισθημάτων, ως βασικής συνιστώσας των στάσεων των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά και, άρα, ως σημαντικός παράγοντας που επηρεάζει την εμπλοκή τους με το μάθημα αυτό και τη σχολική τους επίδοση. Ωστόσο, δεν υπάρχει καθολική συμφωνία ως προς το τι ορίζεται ως διακριτό «συναίσθημα». Στην εργασία αυτή, σε συμφωνία και με άλλους ερευνητές (Hannula, 2015; Moutsios – Rentzos & Kalozoumi – Paizi, 2014) αναφερόμαστε στα επτά βασικά συναισθήματα που εκδηλώνονται στις εκφράσεις του προσώπου και μπορούν να γίνουν αντιληπτά, τα οποία είναι: ο φόβος, η θλίψη, ο θυμός, η περιφρόνηση, η αποστροφή, η χαρά-ευτυχία και η έκπληξη (Ekman & Friesen, 1978). Σημειώνουμε ότι, πέρα από το γεγονός ότι υπάρχουν δοκιμασμένες μεθοδολογίες για την αποκωδικοποίηση των συναισθημάτων αυτών από τις εκφράσεις του προσώπου (Moutsios – Rentzos & Kalozoumi – Paizi, 2014) πολλά άλλα συναισθήματα μπορούν να θεωρηθούν εκφάνσεις των βασικών συναισθημάτων σε ένα ειδικό πλαίσιο, ή σύνθεση δύο ή παραπάνω βασικών συναισθημάτων. Για παράδειγμα, το άγχος μπορεί να θεωρηθεί ως φόβος αποτυχίας (Hannula, 2015).

Σημαντικός παράγοντας στη διαμόρφωση των στάσεων των μαθητών απέναντι στην απόδειξη είναι ο/η εκπαιδευτικός που μπορεί να επηρεάσει τόσο την αξία που αποδίδουν οι μαθητές στην απόδειξη (Moutsios-Rentzos & Spyrou, 2013), όσο και τη «συναισθηματική ατμόσφαιρα» κατά την παραγωγή μιας απόδειξης (Hannula, 2015). Ένα σημείο εκκίνησης για τον/την εκπαιδευτικό είναι η διάγνωση μίας αρνητικής στάσης και των αιτιών της, ώστε να σχεδιαστεί μία παρέμβαση που θα έχει σαν στόχο την τροποποίηση των στοιχείων που προκαλούν αρνητισμό στον μαθητή (Zan & Di Martino, 2007). Όσον αφορά τα χαρακτηριστικά των παρεμβάσεων οι οποίες φαίνεται να έχουν θετικό αντίκτυπο στα συναισθήματα και, άρα, στις στάσεις των μαθητών, έχει επισημανθεί ότι το μαθησιακό περιβάλλον πρέπει να ανταποκρίνεται στις ατομικές ανάγκες του μαθητή και να υποστηρίζει την αυτενέργειά του. Επιπλέον, τα έργα που ανατίθενται στο μαθητή πρέπει να είναι συμβατά με τις ικανότητές του και να του παρέχεται θετική ανατροφοδότηση (Perkun & Stephens, 2010). Επίσης, ο/η εκπαιδευτικός που επιδεικνύει θετικά συναισθήματα για τη διαδικασία (π.χ. ενθουσιασμό), μοντελοποιεί τη ρύθμιση των συναισθημάτων του/της για τους μαθητές και τους υποστηρίζει ώστε να ρυθμίσουν τα δικά τους, ενώ παράλληλα, φαίνεται και να επηρεάζει θετικά τα συναισθήματα των ίδιων (Hannula, 2015). Τέλος, η δημιουργία κλίματος που επιτρέπει την έκφραση των συναισθημάτων και την αναζήτηση βοήθειας από τους συμμαθητές και τον/την εκπαιδευτικό φαίνεται να έχει θετική επίδραση στα συναισθήματα και, άρα, στις στάσεις των μαθητών (De Corte, Depaepe, Op 't Eynde & Verschaffel, 2011; Hannula, 2015).

Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε ένα διδακτικό πείραμα (Steffe & Thompson, 2000), με βασική θεωρητική παραδοχή ότι τα συναισθήματα των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης κατά την εμπλοκή τους με τη γεωμετρική απόδειξη επηρεάζουν την εξέλιξη και ολοκλήρωση της αποδεικτικής διαδικασίας, καθώς και τη γενικότερη στάση τους απέναντι στη Γεωμετρία. Στόχοι του πειράματος ήταν ο εντοπισμός των παραγόντων που προκαλούν θετικά ή αρνητικά συναισθήματα και η διερεύνηση των συνθηκών υπό τις οποίες η επίδραση των αρνητικών συναισθημάτων μπορεί να εξασθενήσει. Δύο ήταν οι βασικές μας υποθέσεις, συγκεκριμένα ότι: α) σε ένα μεγάλο βαθμό, τα αρνητικά συναισθήματα των μαθητών προκαλούνται από την αίσθηση αδυναμίας να ανταπεξέλθουν στις απαιτήσεις της γεωμετρικής απόδειξης και β) μια παρέμβαση με τα χαρακτηριστικά που αναφέρθηκαν παραπάνω θα προκαλέσει αλλαγή στα συναισθήματα (και, άρα, στις στάσεις των μαθητών απέναντι στη Γεωμετρία) προς το ευνοϊκότερο.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ.

Οι συμμετέχοντες ήταν δύο μαθητές της Α΄ τάξης ενιαίου λυκείου (16 ετών), ο Κώστας και ο Νίκος (ψευδώνυμα). Επρόκειτο για δύο δίδυμα αγόρια που φοιτούσαν σε λύκειο (δημόσιο) της Ανατολικής Αττικής, τα οποία γνώριζε η πρώτη συγγραφέας. Και οι δύο ήταν επιμελείς μαθητές, με καλή σχολική επίδοση, αλλά αντιμετώπιζαν δυσκολίες με το μάθημα των μαθηματικών. Ειδικότερα, εξέφραζαν απαρέσκεια και φόβο για το μάθημα της Γεωμετρίας. Κάθε παιδί συμμετείχε σε δύο ατομικές συνεντεύξεις, πριν και μετά το διδακτικό πείραμα, στις οποίες διερευνήθηκαν οι αντιλήψεις και οι στάσεις του σχετικά με τη γεωμετρική απόδειξη.

Οι παρεμβάσεις (συνολικά 4, διάρκειας 1,5-2 ωρών η κάθε μία) σχεδιάστηκαν με στόχο να αντιμετωπιστούν συγκεκριμένες δυσκολίες που αντιμετώπιζαν τα παιδιά (βλ. και Perkun & Stephens, 2010). Για το σκοπό αυτό πριν ξεκινήσουν οι παρεμβάσεις, η ερευνήτρια που τις πραγματοποίησε (πρώτη συγγραφέας) ζήτησε από τους μαθητές να αναζητήσουν και προσκομίσουν 5 αποδείξεις τις οποίες θα μπορούσαν να χαρακτηρίσουν ως εξής: 1. Ήταν εύκολη – Δεν είχα κάποιο πρόβλημα. 2. Δυσκολεύτηκα – Δεν τα κατάφερα. 3. Δυσκολεύτηκα – Δεν προσπάθησα καν. 4. Δυσκολεύτηκα – Τα κατάφερα. 5. Ήταν ενδιαφέρουσα. Προτρέχοντας λίγο, αναφέρουμε ότι δύο δυσκολίες γενικού τύπου που αντιμετώπιζαν τα παιδιά ήταν α) οι άγνωστοι όροι στην εκφώνηση του προβλήματος και β) η κατασκευή σύνθετου σχήματος. Επιπλέον και τα δύο παιδιά θεωρούσαν εξ ορισμού δύσκολα τα προβλήματα της κατηγορίας «Σύνθετα Θέματα» του σχολικού βιβλίου και απέφευγαν συστηματικά να εμπλακούν με την επίλυσή τους. Στη διάρκεια της κάθε παρέμβασης, τα παιδία έλυναν συνεργατικά 2-4 ασκήσεις επιλεγμένες από το σχολικό βιβλίο, ή ειδικά σχεδιασμένες, ώστε να ανακύπτουν οι συγκεκριμένες δυσκολίες.

Η ερευνήτρια υιοθέτησε και ακολούθησε τις υποδείξεις για τη διδασκαλία που αναφέρθηκαν στην εισαγωγή (De Corte et al., 2011; Hannula, 2015; Perkun & Stephens, 2010; βλ. και Harel & Sowder, 2007) και λειτούργησε υποστηρικτικά, τόσο σε γνωστικό, όσο και σε συναισθηματικό επίπεδο. Συγκεκριμένα, η ερευνήτρια έστρεφε την προσοχή των μαθητών στις συγκεκριμένες δυσκολίες και υποδείκνυε στρατηγικές με τις οποίες θα μπορούσαν οι μαθητές να τις αντιμετωπίσουν αυτόνομα (π.χ. «Ποιος είναι ο όρος που δεν ξέρεις; Μπορείς να τον ερμηνεύσεις από τα συμφραζόμενα;»). Βοηθούσε τους μαθητές να ρυθμίσουν τη συναισθηματική τους κατάσταση (π.χ. «Αυτή είναι πράγματι μια δύσκολη άσκηση, μην απογοητεύεσαι, μπορείς να τα καταφέρεις», «Θα σας πω απλά ότι μπορείτε. Από εκεί και πέρα, μη σας τρομάζει καθόλου το σχήμα, ξεκινήστε βήμα-βήμα», «Μην αγχώνεστε! Σκεφτείτε ήρεμα, σε ποιο σχήμα έχω μόνο δύο παράλληλες πλευρές;», «Ας σταματήσουμε 5 λεπτά, να χαλαρώσουμε λίγο και μετά ξαναπιάνουμε την άσκηση»). Προέτρεπε τα παιδιά να αναζητήσουν ο ένας τη βοήθεια του άλλου («Για να δούμε, μήπως έχει ο Νίκος κάποια ιδέα;»). Έδινε θετική ανατροφοδότηση (π.χ., «Το σχήμα σας είναι σχεδόν τέλειο! Προσέξτε όμως, εδώ οι ημιευθείες μοιάζουν να είναι κάθετες στο ευθύγραμμο τμήμα. Μήπως αυτό σας μπερδέψει αργότερα;»). Φρόντιζε στο κλείσιμο της κάθε συνάντησης τα παιδιά να ασχοληθούν με προβλήματα που ήταν στο πλαίσιο των τρεχόντων δυνατοτήτων τους. Και, τέλος, δημιούργησε ένα κλίμα στο οποίο τα παιδιά ένιωθαν ασφαλή να εκφράζουν τα συναισθήματά τους και να συζητήσουν γι’ αυτά.

Οι παρεμβάσεις πραγματοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους 2014-2015, στην οικία των μαθητών. Μετά από άδεια από τους συμμετέχοντες και τους γονείς τους, οι συνεντεύξεις πριν και μετά τις παρεμβάσεις ηχογραφήθηκαν, ενώ οι παρεμβάσεις βιντεοσκοπήθηκαν. Χρησιμοποιήθηκε μία κάμερα, η οποία εστίαζε στα πρόσωπα των δύο μαθητών καθώς και στα χέρια τους, προκειμένου να καταγραφούν και να αναλυθούν τα συναισθήματα τους. Οι συνεντεύξεις απομαγνητοφωνήθηκαν και οι παρεμβάσεις απομαγνητοσκοπήθηκαν.

Για την καταγραφή των συναισθημάτων των μαθητών κατά την αποδεικτική διαδικασία, αξιοποιήθηκαν κατά κύριο λόγο οι εκφράσεις του προσώπου των μαθητών και επικουρικά οι χειρονομίες και οι λεκτικές εκφράσεις τους (Moutsios – Rentzos & Kalozoumi – Paizi, 2014). Για την απεικόνιση των συναισθημάτων, κατασκευάστηκαν διαγράμματα, στον οριζόντιο άξονα των οποίων αναπαρίσταται ο χρόνος (διάρκεια της κάθε παρέμβασης), ενώ στον κατακόρυφο η ένταση του παρατηρούμενου συναισθήματος (για μια παρόμοια προσέγγιση, βλ. Op 't Eynde & Hannula, 2006). Πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι η απεικόνιση αυτή δεν αντιστοιχεί σε ακριβή κλίμακα μέτρησης και έχει έντονο υποκειμενικό-ερμηνευτικό χαρακτήρα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ.

Στην πρώτη συνέντευξη, οι μαθητές ανέφεραν ότι διατηρούσαν αρνητική στάση απέναντι στα μαθηματικά και στους εκπαιδευτικούς του κλάδου, ενώ είχαν και ιδιαίτερα χαμηλή αυτοπεποίθηση όσον αφορά τις μαθηματικές τους ικανότητες. Και για τους δύο μαθητές, τα αρνητικά συναισθήματα που έχουν, κατά δήλωσή τους, επί σειρά ετών βιώσει στα σχολικά μαθηματικά, επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο εμπλέκονται στην επίλυση γεωμετρικού προβλήματος:

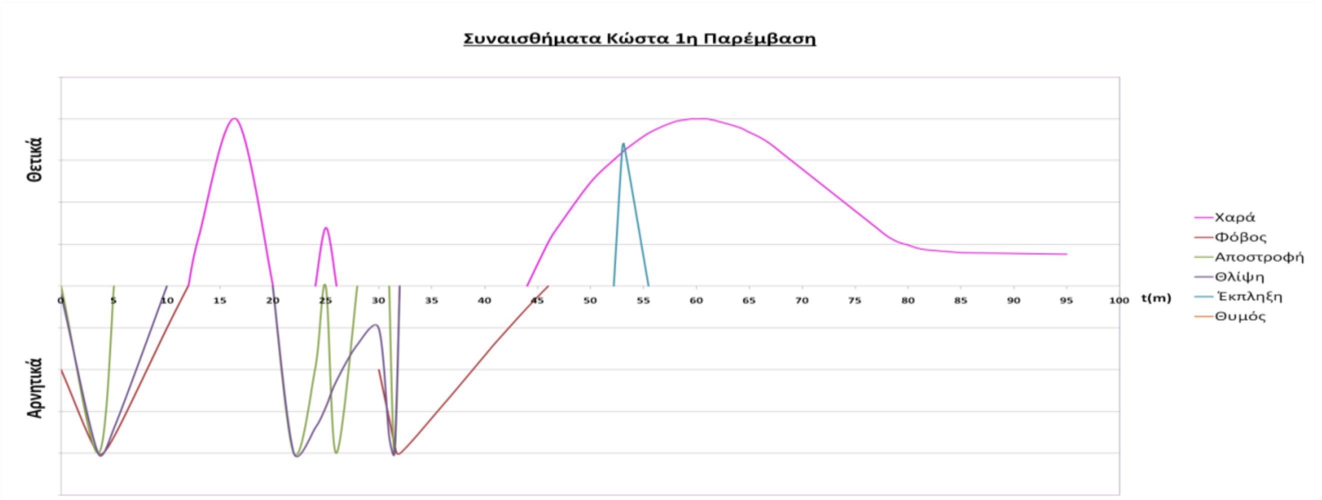
Κώστας: Αν δω Σύνθετα Θέματα (*κατηγορία ασκήσεων αυξημένης δυσκολίας σχολικού βιβλίου*) ή κάποιο δύσκολο σχήμα, αυθυποβάλλομαι και δεν την προσπαθώ. Απογοητεύομαι αλλά το αποδέχομαι ότι οι δυνάμεις μου και οι γνώσεις μου μπορεί να μη φτάνουν σε ένα επίπεδο τόσο καλό.

Νίκος: Παρατήρησα το σχήμα και είπα αποκλείεται να τη λύσω. Ήταν η ψυχολογία μου λίγο χάλια. Από την αρχή έλεγα δε θα τη λύσω και νομίζω αυτό είναι που με έκανε να μην την λύσω τελικά… Απογοητεύομαι πάντα όταν δεν τα καταφέρνω.

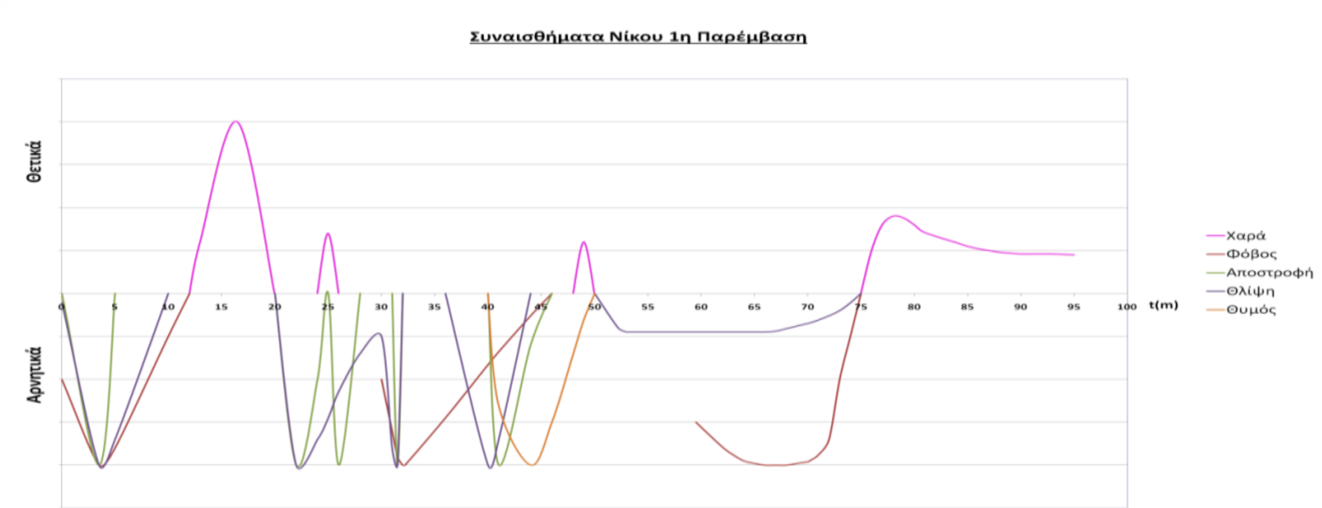
Ωστόσο, και στα δύο παιδιά και, ιδιαίτερα, για το Νίκο, είναι εμφανής η σύνδεση και των θετικών συναισθημάτων (που συνήθως συνοδεύουν μια επιτυχία) με τη διάθεση περαιτέρω εμπλοκής με τη γεωμετρία:

Νίκος: Όταν τελικά την έλυσα χάρηκα πολύ, ένιωσα ικανοποίηση. Κατάφερα κάτι επιτέλους… Πήρα θάρρος να προσπαθήσω κάτι πιο δύσκολο.

Στη διάρκεια της πρώτης παρέμβασης, τα συναισθήματα των μαθητών κατά την αποδεικτική διαδικασία ήταν, κατά κύριο λόγο, αρνητικά, όπως φαίνεται στα Σχήματα 1 και 2. Τονίζουμε το γεγονός ότι και τα δύο αγόρια διακατέχονται από αρνητικά συναισθήματα από την αρχή της διαδικασίας, πριν ακόμα εμπλακούν στην επίλυση των γεωμετρικών προβλημάτων, ενώ φαίνεται ότι η συνάντηση κλείνει με θετικά συναισθήματα.



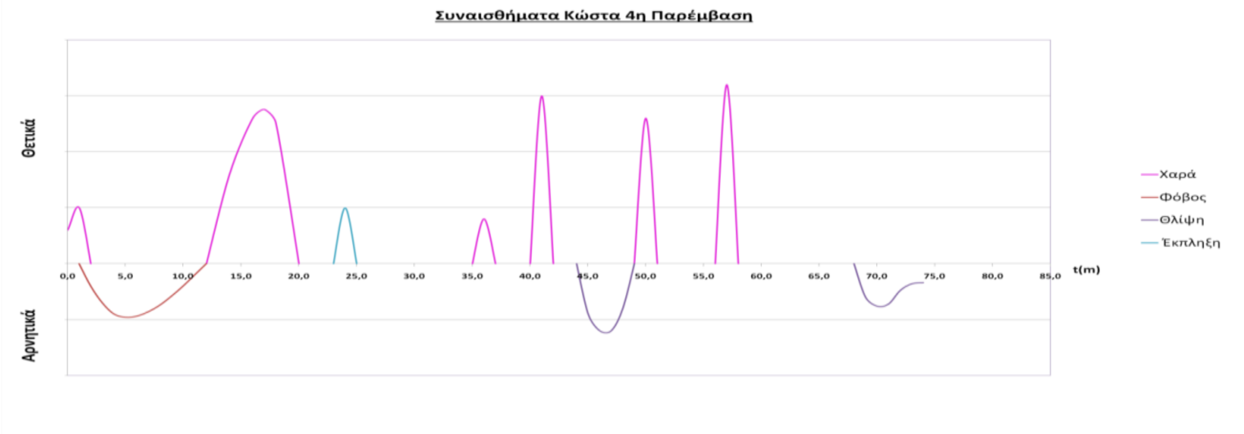
Σχήμα 1. Συναισθήματα Κώστα – 1η παρέμβαση



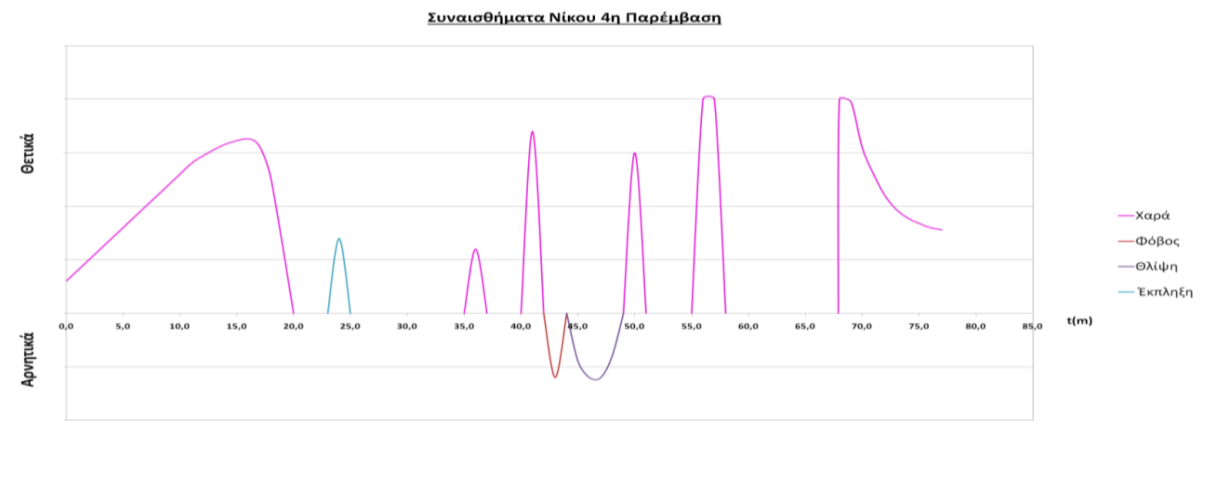
Σχήμα 2. Συναισθήματα Νίκου – 1η παρέμβαση

Στη διάρκεια των επόμενων δύο παρεμβάσεων, καθώς αποκτούν στρατηγικές αντιμετώπισης των δυσκολιών που τους εμπόδιζαν να ξεκινήσουν την αποδεικτική διαδικασία (δηλ., κατανόηση της εκφώνησης και κατασκευή του σχήματος), οι μαθητές δοκιμάζουν να αποδείξουν επιτυχώς και τα θετικά συναισθήματα αυξάνονται. Αισθάνονται ασφαλείς να εκφράσουν τα συναισθήματά τους, συχνά αστειευόμενοι γι’ αυτά (π.χ., «Είναι πολύ δύσκολο, μου φαίνεται ότι θα κλάψω!», «Θα αυτοκτονήσω!», «Γιατί μας τυραννάς έτσι;»). Το γεγονός αυτό, μαζί με τη συστηματική υποστήριξη της ερευνήτριας, τους αποφορτίζει και τους επιτρέπει να συνεχίσουν την προσπάθεια.

Σταδιακά, τα δυο αγόρια φαίνεται να αποκτούν μεγαλύτερο έλεγχο της διαδικασίας, αξιολογώντας οι ίδιοι τις ιδέες τους, συνεργαζόμενοι μεταξύ τους. Ενισχύουν ο ένας την αυτοπεποίθηση του άλλου (π.χ., «Πες τι σκέφτεσαι! Και την άλλη φορά νόμιζες ότι ήταν λάθος, αλλά ήταν σωστό»). Συγκρίνοντας με τα συναισθήματα των παιδιών κατά διάρκεια της τελευταίας παρέμβασης (Σχήμα 3 και 4), είναι εμφανής η αλλαγή προς το καλύτερο στα συναισθήματα που βιώνουν.



Σχήμα 3. Συναισθήματα Κώστα – 4η παρέμβαση



Σχήμα 4. Συναισθήματα Νίκου – 4η παρέμβαση

Η βελτίωση αυτή τεκμηριώνεται και από τη δεύτερη συνέντευξη.

Νίκος: Πιστεύω ότι στην αρχή ήμουν λίγο αρνητικός… Κατάλαβα ότι τίποτα δεν είναι ακατόρθωτο… Πιστεύω ότι η Γεωμετρία πλέον είναι το αγαπημένο μου μάθημα… Έχουν αλλάξει πολλά… Νιώθω πολύ όμορφα, επιτέλους μπορώ να λύσω Γεωμετρία… Τώρα που τα καταφέρνω νιώθω πολύ καλά με τον εαυτό μου… Με βοήθησαν πολύ όλα όσα κάναμε μαζί. Καταφέραμε επιτέλους να λύσουμε Σύνθετα Θέματα. Με βοήθησες εσύ η ίδια να αλλάξω τη γνώμη μου για τη Γεωμετρία. Μου άρεσε που σε όλο αυτό συνεργάστηκα με τον αδερφό μου.

Κώστας: Νομίζω ότι οι αποδείξεις μας οργανώνουν μία πορεία μέσα στο μυαλό μας, πού να πάμε και τι να δούμε. Μπορώ και οργανώνω τη σκέψη μου… Πλέον νιώθω πιο άνετα ακόμα και με τα Σύνθετα Θέματα. Το έχω παρατηρήσει και στο σχολείο. Παλιά καθόμουν στην καρέκλα μου και απλώς κοίταγα στον πίνακα, τώρα πλέον ξέρω και συμμετέχω πολύ… έχουν αλλάξει πολλά. Όλα είναι πολύ πιο κατανοητά. Τώρα ξέρω ότι οι γνώσεις μου επαρκούν για να λύσω Μαθηματικά… Είναι ωραίο να βλέπεις τον εαυτό σου να μπορεί να αποδεικνύει τόσο δύσκολα προβλήματα, δε θα σου απαντούσα έτσι πριν τρεις μήνες (πριν την έναρξη των παρεμβάσεων).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ.

Σχεδιάσαμε ένα διδακτικό πείραμα με στόχο τη βελτίωση των συναισθημάτων των μαθητών κατά τη διάρκεια της αποδεικτικής διαδικασίας και, κατ' επέκταση, της στάσης τους απέναντι στη Γεωμετρία (Hannula, 2002, 2015). Υιοθετήσαμε υποδείξεις για τη διδασκαλία που απορρέουν από την έρευνα στο χώρο των συναισθημάτων (De Corte et al., 2011; Hannula, 2015; Perkun & Stephens, 2010; βλ. και Harel & Sowder, 2007). Κεντρικό μας μέλημα ήταν η ανταπόκριση στις ιδιαίτερες δυσκολίες που αντιμετώπιζαν οι μαθητές, η δημιουργία ενός κλίματος στο οποίο οι μαθητές θα ένιωθαν ασφαλείς να εκφράσουν και να επεξεργαστούν τα συναισθήματά τους, και η δημιουργία ευκαιριών στα παιδιά να βιώσουν την αίσθηση του ελέγχου και την επιτυχία κατά την αποδεικτική διαδικασία.

Η συστηματική ενασχόληση με γεωμετρικά προβλήματα που παρουσίαζαν τις συγκεκριμένες δυσκολίες που αντιμετώπιζαν οι μαθητές, με υποστήριξη σε γνωστικό και συναισθηματικό επίπεδο, φάνηκε επωφελής για τους μαθητές. Αναπτύσσοντας στρατηγικές αντιμετώπισης των δυσκολιών αυτών, οι μαθητές ξεπέρασαν την αίσθηση αδυναμίας, η οποία συνοδευόταν από συναισθήματα φόβου και αποστροφής, και τους εμπόδιζε να εμπλακούν στην αποδεικτική διαδικασία. Οι επιτυχίες που βίωσαν, τροφοδότησαν, με τη σειρά τους, θετικά συναισθήματα για την αποδεικτική διαδικασία. Επιπλέον, σε συμφωνία με την ανάλυση του Hannula (2006, 2015), τα θετικά συναισθήματα πυροδότησαν μια αλλαγή στάσης απέναντι στη Γεωμετρία προς το ευνοϊκότερο. Αξίζει να σημειωθεί ότι και οι δύο μαθητές είχαν πολύ καλή επίδοση στις προαγωγικές εξετάσεις της Α΄ Λυκείου, όπου έγραψαν 17 και 18.

Καταλήγοντας, θα θέλαμε να παρατηρήσουμε ότι η έρευνα που παρουσιάσαμε στην εργασία αυτή αφενός αναδεικνύει τη σημασία των συναισθημάτων στον τρόπο με τον οποίο εμπλέκονται οι μαθητές με τα μαθηματικά, εν προκειμένω με τη γεωμετρική απόδειξη. Αφετέρου, αναδεικνύει το γεγονός ότι η αλλαγή της στάσης των μαθητών προς το ευνοϊκότερο, παρά το γεγονός ότι είναι δύσκολη (Liljedahl, 2005; Zan, Brown, Evans & Hannula, 2006) είναι εφικτή. Πρέπει να σημειωθεί, ωστόσο, ότι τα αποτελέσματα αυτά προέρχονται από ένα πολύ ειδικό δείγμα: δύο μόνο μαθητές και με ιδιαίτερη σχέση μεταξύ τους (δίδυμα αδέλφια). Απαιτείται περεταίρω έρευνα για να τεκμηριωθεί κατά πόσο και υπό ποιες συνθήκες μπορούν οι αρχές για τη διδασκαλία που υιοθετήθηκαν στην παρούσα έρευνα, να είναι εφαρμόσιμες και παραγωγικές στο πλαίσιο της τάξης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N. & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The Teaching of Proof. *ICM, 3* (1–3), 907-920.

De Corte, E., Depaepe, F., Op ‘t Eynde, P. & Verschaffel. L. (2011). Students’ self-regulation of emotions in mathematics: an analysis of meta-emotional knowledge and skills. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 43*(4), 483-496.

Ekman, P., & Friesen, W. V. (1978). *Facial action coding system: a technique for the measurement of facial movement*. Palo Alto, Calif.: Consulting Psychologists Press.

Hannula, M.S. (2002). Attitude Towards Mathematics: Emotions, Expectations And Values. *Educational Studies In Mahtematics, 49*, 25-46.

Hannula, M. S. (2006). Motivation In Mathematics: Goals Reflected In Emotions. *Educational Studies in Mathematics 63*, 165–178.

Hannula, M. S. (2015). Emotions In Problem Solving. In S.J. Cho (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 269-288). Cham, Germany: Springer.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Towards comprehensive perpectives on the learning and teaching of proof. In F.K.Lester (Ed.), *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 805-842). USA: NCTM.

Liljedahl, P. G. (2005). Mathematical discovery and affect: the effect of AHA! Experiences on undergraduate mathematics students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *36*(2-3), 219-234.

Moutsios-Rentzos, A., & Spyrou, P. (2013). The Need For Proof In Geometry: A Theoretical Investigation Through Husserl’s

Phenomenology. In Lindmeier, A. M. & Heinze, A. (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International* (vol. 3, pp. 329-336). Kiel, Germany: PME

Moutsios-Rentzos, A., & Kalozoumi-Paizi, F. (2014). Odysseus' proving journeys to proof: an investigation on cognitive and affective realities. Proceedings of CIEAEM 66. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics), 24*(1), 290-296.

Op 't Eynde, P., & Hannula, M. S. (2006). The Case Study of Frank. *Educational Studies in Mathematics*, *63*, 123–129. Springer.

Pekrun, R. & Stephens, E. J. (2010). Achievement emotions: A control value approach. *Social and Personality Psychology Compass, 4*(4), 238-255.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Zan, R., Brown, L., Evans, J., & Hannula, M. S. (2006). Affect In Mathematics Education: An Introduction. *Educational Studies in Mathematics 63*: 113–121

Zan, R., & Di Martino, P. (2007). Attitude Toward Mathematics: Overcoming The Positive/Negative Dichotomy. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *3*(1), 157-168.

ΟΙ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ: Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΡΙΑΔΑΣ

Καράβη Θωμαΐς, Σαμαρτζής Πέτρος, Γρίδος Παναγιώτης

ΠΜΣ Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών ΕΚΠΑ

thomaiskaravi@gmail.com, pisah_one@hotmail.com, p.gridos@hotmail.com

Η παρούσα έρευνα μελετά τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τη δημιουργικότητα στη διδασκαλία των μαθηματικών. Εστιάσαμε σε δύο καθηγητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με διαφορετικά χρόνια πρακτικής. Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν, αναλύθηκαν με τη βοήθεια του μοντέλου των Lev- Zamir και Leikin (2013) και της Διδακτικής Τριάδας (Jaworski, 1994). Οι αντιλήψεις των καθηγητών για τη δημιουργικότητα στη διδασκαλία των Μαθηματικών συγκλίνουν και έχουν στόχο να γίνουν οι ίδιοι και οι μαθητές τους δημιουργικοί, επιλέγοντας τις κατάλληλες διδακτικές πρακτικές. Η διδακτική τριάδα δείχνει ότι η μαθηματική πρόκληση προς τους μαθητές είναι κεντρική στο σχεδιασμό δημιουργικού μαθήματος.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η δημιουργικότητα είναι ένα σημαντικό χαρακτηριστικό, προσωπικό και κοινωνικό, που δίνει ώθηση στην ανθρώπινη πρόοδο και εξέλιξη (Leikin & Pitta – Pantazi, 2013). Διάφορες απόψεις αναφέρουν ότι ο εκπαιδευτικός έχει περιορισμένες δημιουργικές ιδέες (Bolden, Harries & Newton, 2010), ενώ παράλληλα αντιμετωπίζει πρόβλημα στην εύρεση κατάλληλων δραστηριοτήτων οι οποίες θα εκθέσουν τους μαθητές σε καταστάσεις δημιουργικότητας (Jaworski & Potari, 2009). Μέχρι στιγμής έχουν διενεργηθεί ορισμένες έρευνες όσον αφορά στη μαθηματική δημιουργικότητα (Kattou, Kontoyianni, & Christou, 2009; Leikin, Subotnik, Pitta-Pantazi, Singer, & Pelczer, 2012), ωστόσο απουσιάζουν έρευνες που να συνδέουν την δημιουργικότητα στη διδασκαλία των Μαθηματικών με την διδακτική πρακτική. Επομένως, στοχεύοντας στο να αναπτυχθεί η ικανότητα των εκπαιδευτικών να διδάσκουν μαθηματικά με δημιουργικότητα αλλά και να προωθούν την δημιουργικότητα προς τους μαθητές πρέπει να διερευνήσουν ποιες είναι οι αντιλήψεις τους για αυτή αλλά και πώς οι αντιλήψεις αυτές εντάσσονται στο πλαίσιο της διδασκαλίας τους μέσω των διδακτικών πρακτικών που υιοθετούν.

Ερευνητικό πρόβλημα της εργασίας αποτέλεσε το ποιες είναι οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τη δημιουργικότητα στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Στην παρούσα εργασία μελετήθηκαν (α) ποιες διδακτικές πρακτικές ακολουθούν οι εκπαιδευτικοί προκειμένου να εισάγουν τις αντιλήψεις τους για τη δημιουργικότητα στη διδασκαλία των μαθηματικών στο επίπεδο της πρακτικής και (β) πως ερμηνεύονται οι διδακτικές πρακτικές που προέκυψαν από τον προσδιορισμό των αντιλήψεων τους για τη δημιουργικότητα στη διδασκαλία των Μαθηματικών.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Δημιουργικότητα στη διδασκαλία των μαθηματικών

Δεν υπάρχει μοναδικός τρόπος για να οριστεί ή να προσδιορισθεί η μαθηματική δημιουργικότητα (Leikin, 2009). Ένας κοινά αποδεκτός ορισμός για το τι είναι δημιουργικότητα προτείνεται από τον Torrance (1967, 1974), και βασίζεται σε τέσσερα στοιχειώδη χαρακτηριστικά: την ευχέρεια, την ευελιξία, την πρωτοτυπία και την επεξεργασία (Lev – Zamir & Leikin, 2013). Η ευχέρεια αναφέρεται στη ροή των ιδεών, στη δημιουργία συνδέσεων, και στην χρήση βασικών γνώσεων. Η ευελιξία συνδέεται με την εναλλαγή των ιδεών, την προσέγγιση ενός προβλήματος με πολλούς τρόπους, και την παραγωγή πολλαπλών λύσεων. Η πρωτοτυπία, αφορά τον καινοτόμο τρόπο σκέψης και την παραγωγή νέων πνευματικών ή καλλιτεχνικών επιτευγμάτων. Τέλος, η επεξεργασία σχετίζεται με την ικανότητα περιγραφής, μετάδοσης και γενίκευσης των ιδεών.

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό της δημιουργικότητας από τον Torrance, οι Lev - Zamir και Leikin (2011) σχεδίασαν ένα μοντέλο που εφαρμόζεται στον προσδιορισμό των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών για τη δημιουργικότητα στη διδασκαλία των μαθηματικών. Το μοντέλο αναφέρεται στη δημιουργικότητα στα μαθηματικά, στη διδασκαλία και στη μάθηση, και προτείνει διακρίσεις μεταξύ των παιδαγωγικών και μαθηματικών αντιλήψεων, όπως επίσης και μεταξύ των αντιλήψεων με κατεύθυνση τη δημιουργικότητα του εκπαιδευτικού και με κατεύθυνση τη δημιουργικότητα του μαθητή.

Αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τη δημιουργικότητα στη διδασκαλία των μαθηματικών		
	Αντιλήψεις με κατεύθυνση τον εκπαιδευτικό	*Αντιλήψεις με κατεύθυνση τον μαθητή*

Ευελιξία	*Μαθηματική ευελιξία*: ο εκπαιδευτικός μετατρέπει την μαθηματική ιδέα ή λύνει ένα πρόβλημα με πολλούς τρόπους *Παιδαγωγική ευελιξία*: ο εκπαιδευτικός μετατρέπει το εκπαιδευτικό περιβάλλον, ρυθμίζει την προγραμματισμένη πορεία μάθησης στις ανάγκες των μαθητών και στις απαντήσεις τους	*Μαθηματική ευελιξία*: οι μαθητές παράγουν διαφορετικές λύσεις για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα
Πρωτοτυπία	*Μαθηματική πρωτοτυπία*: ο εκπαιδευτικός παράγει μαθηματικές ασκήσεις έξω από το σχολικό βιβλίο, παρέχει λύσεις σε μαθηματικά προβλήματα έξω από το πρόγραμμα σπουδών *Παιδαγωγική πρωτοτυπία*: ο εκπαιδευτικός δημιουργεί νέα (για εκείνον) εκπαιδευτικά περιβάλλοντα, και νέες ιδέες με στόχο να κάνει το μάθημα ευχάριστο και ενδιαφέρον για τους μαθητές και να ενισχύσει την μαθηματική αιτιολόγηση των μαθητών	*Μαθηματική πρωτοτυπία*:οι μαθητές παράγουν νέες (για τους ίδιους) ιδέες και νέα προβλήματα, ανακαλύπτουν νέα στοιχεία, προτείνουν σπάνιες λύσεις σε ένα πρόβλημα
Επεξεργασία	Δεν προσδιορίστηκε	Οι μαθητές γενικεύουν τις μαθηματικές τους ιδέες και ανεβάζουν το επίπεδο της μαθηματικής συζήτησης

Εικόνα 1. Το μοντέλο για τον προσδιορισμό των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών για τη δημιουργικότητα στη διδασκαλία των μαθηματικών (Lev - Zamir & Leikin, 2011)

Διδακτική τριάδα

Η διδακτική τριάδα χρησιμοποιείται σαν εργαλείο για τον σχεδιασμό και την ανάλυση μιας διδασκαλίας (Potari & Jaworski, 2002). Το εργαλείο αυτό προέκυψε από εθνογραφική μελέτη που διερευνούσε τη διδασκαλία των μαθηματικών σε μικρό αριθμό καθηγητών των μαθηματικών (Jaworski, 1994). Η μελέτη αυτή οδήγησε στον προσδιορισμό των γενικών χαρακτηριστικών της διερευνητικής διδασκαλίας και στον σχηματισμό μιας θεωρητικής κατασκευής, της διδακτικής τριάδας, που συνδέει τα γενικευμένα χαρακτηριστικά των τριών πεδίων δράσεων που φάνηκε να εμπλέκονται οι καθηγητές: τη διαχείριση της μάθησης, την ευαισθησία προς τους μαθητές και την μαθηματική πρόκληση (Potari & Jaworski, 2002). Σύμφωνα με τις Potari και Jaworski, η διαχείριση της μάθησης περιγράφει το ρόλο του καθηγητή στην οργάνωση του μαθησιακού περιβάλλοντος της τάξης. Περιλαμβάνει την ενορχήστρωση της τάξης, τον προγραμματισμό ασκήσεων και δραστηριοτήτων, και τη διαμόρφωση των νορμών που ισχύουν στην τάξη του. Η ευαισθησία συνδέεται με το βαθμό στον οποίο γνωρίζει ο εκπαιδευτικός τους μαθητές του και ενδιαφέρεται για τις ανάγκες τους. Σχετίζεται με τον τρόπο που ο εκπαιδευτικός αλληλεπιδρά με τις ομάδες μαθητών, αλλά και με κάθε μαθητή ξεχωριστά. Η μαθηματική πρόκληση περιγράφει τις ευκαιρίες μάθησης που προσφέρονται στους μαθητές, προκειμένου να ενεργοποιηθεί η μαθηματική σκέψη και δραστηριότητα. Σε αυτό το πεδίο δίνεται έμφαση στις ασκήσεις που δίνει ο καθηγητής, στις ερωτήσεις που κάνει στους μαθητές και στην έμφαση του για τη μεταγνωστική διαδικασία. Τα τρία αυτά πεδία φαίνεται να είναι στενά συνδεδεμένα σε κάθε διδασκαλία.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στην παρούσα εργασία, προκειμένου να διερευνηθεί το ερευνητικό ερώτημα που αναφέρθηκε χρησιμοποιήθηκε ως μέθοδος η μελέτη περίπτωσης. Μελετήθηκαν δύο καθηγητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Η καθηγήτρια ασχολείται με την εκπαίδευση περίπου 28 χρόνια και εργάζεται στη δημόσια δευτεροβάθμια εκπαίδευση τα τελευταία 10 χρόνια. Ο δεύτερος καθηγητής βρίσκεται στο χώρο της εκπαίδευσης περίπου 10 χρόνια και τον τελευταίο χρόνο εργάζεται στην ιδιωτική δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Και οι δύο καθηγητές φοιτούν στο πρώτο έτος του ΠΜΣ Διδακτικής των Μαθηματικών και οι νέες γνώσεις σε συνδυασμό με τις προηγούμενες εμπειρίες κρίθηκαν σημαντικές προκειμένου να διερευνηθούν.

Τα δεδομένα της έρευνας συλλέχτηκαν από ημιδομημένες συνεντεύξεις που σχεδιάστηκαν με βάση το μοντέλο των Lev - Zamir και Leikin και περιείχαν ερωτήσεις ανοικτού τύπου. Ο σχεδιασμός των συνεντεύξεων βασίστηκε σε δύο άξονες. Ο πρώτος άξονας περιείχε ερωτήσεις που αφορούσαν τα προσωπικά στοιχεία του κάθε συνεντευξιαζόμενου, ενώ ο δεύτερος άξονας χωριζόταν σε δύο κατευθύνσεις. Στην πρώτη κατεύθυνση οι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να αναφέρουν μια άσκηση από το σχολικό βιβλίο ή δική τους την οποία θεωρούν δημιουργική, να αιτιολογήσουν γιατί την θεωρούν δημιουργική ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο και να προσδιορίσουν τι θεωρούν γενικά δημιουργικότητα στα Μαθηματικά. Η συγκεκριμένη κατεύθυνση σχεδιάστηκε με σκοπό την εις βάθος ανίχνευση των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών σχετικά με την δημιουργικότητα στα Μαθηματικά. Η δεύτερη κατεύθυνση αφορούσε τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με την δημιουργικότητα στη διδασκαλία των Μαθηματικών και ζητήθηκε από τους εκπαιδευτικούς να προσδιορίσουν τα χαρακτηριστικά μιας δημιουργικής διδασκαλίας και να τα αιτιολογήσουν με κάποιο παράδειγμα δημιουργικού μαθήματος, να αναφέρουν σε τι διαφέρει η τυπική από τη δημιουργική διδασκαλία και να σχολιάσουν κατά πόσο η δημιουργικότητα αποτελεί στόχο της διδασκαλίας τους.

Στην ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν το μοντέλο των Lev – Zamir και Leikin (2013) και η Διδακτική Τριάδα (Jaworski, 1994). Η ανάλυση έγινε σε δύο επίπεδα. Στο πρώτο, τα δεδομένα από τις συνεντεύξεις κατηγοριοποιήθηκαν με βάση το μοντέλο των Lev – Zamir και Leikin (2013) με στόχο να προσδιοριστούν οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τη δημιουργικότητα στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Στο δεύτερο επίπεδο ανάλυσης, τα δεδομένα, όπως κατηγοριοποιήθηκαν στο πρώτο επίπεδο, ερμηνεύτηκαν με χρήση της Διδακτικής Τριάδας ως αναλυτικό πλαίσιο προκειμένου να γίνει εμβάθυνση στη φύση των αντιλήψεων περί δημιουργικότητας στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Ερευνήθηκαν πτυχές της Διδακτικής Τριάδας στο επίπεδο εντοπισμού της δημιουργικότητας των Μαθηματικών στο επίπεδο της πρακτικής.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Παρά τη διαφορά στα χρόνια διδασκαλίας των δύο καθηγητών σε επίπεδο τάξης, παρατηρήθηκε συμφωνία στις αντιλήψεις τους σε σχέση με τη δημιουργικότητα στη διδασκαλία των Μαθηματικών και στις διδακτικές πρακτικές που ακολουθούν όταν στοχεύουν σε δημιουργική διδασκαλία.

Η μαθηματική ευελιξία έγκειται για τους καθηγητές στην προσπάθεια να βοηθήσουν τους μαθητές να λύνουν ένα πρόβλημα με πολλούς τρόπους και με διάφορα μέσα. Για παράδειγμα, η καθηγήτρια αναφέρει:

«Αν ρωτήσω γιατί το άθροισμα γωνιών τριγώνου είναι 180^o, δημιουργικό είναι να ειπωθεί ότι μέτρησα τις γωνίες με μοιρογνωμόνιο, τις πρόσθεσα και βρήκα 180^o, δημιουργικό είναι να σκεφτούν την απόδειξη με τις εντός εναλλάξ γωνίες.»

Κατά τη διάρκεια του μαθήματος, αναφέρουν ότι γίνεται προσπάθεια να δίνονται τα προβλήματα με διάφορους τρόπους, όπως με παρουσίασή τους στον πίνακα, σε φύλλο εργασίας τυπικά και λεκτικά με διάφορους τρόπους, στοχεύοντας στην προσαρμογή του περιεχομένου στο επίπεδο των μαθητών.

Η παιδαγωγική ευελιξία εντοπίζεται όταν οι ανάγκες των μαθητών έρχονται σε πρώτη θέση στις προτεραιότητες των εκπαιδευτικών. Όσο χρόνο και αν έχουν αφιερώσει στον σχεδιασμό ενός μαθήματος, αναπροσαρμόζουν τη διδασκαλία ανάλογα με τα ζητήματα που φέρουν οι μαθητές.

«Όσο και αν έχω προετοιμάσει το μάθημα ή το φύλλο εργασίας ή έχω στο μυαλό μου κάποια πράγματα που θέλω να πω,…, προσαρμόζομαι ανάλογα με τις ανάγκες που δημιουργούνται μέσα στην τάξη.»

Στη συνέχεια, αναφέρουν ότι το μάθημα διαφέρει από τάξη σε τάξη και από μαθητή σε μαθητή και έτσι διαφορετικές διδακτικές προσεγγίσεις εμφανίζονται κάθε φορά.

Οι εκπαιδευτικοί συνδέουν τη δημιουργικότητα και συγκεκριμένα την μαθηματική πρωτοτυπία στη διδασκαλία των μαθηματικών με την ανακάλυψη της γνώσης και αυτό γίνεται με την αναπροσαρμογή του περιεχομένου της ύλης σε ειδικά διαμορφωμένα φύλλα εργασίας. Η ροή της ύλης αλλάζει φέρνοντας νωρίτερα θέματα που βρίσκονται πιο μετά, προκαλώντας έτσι ενδιαφέρουσες μαθηματικές συζητήσεις. Δίνοντας παράδειγμα από το σχολικό βιβλίο, η καθηγήτρια, αναφέρει:

«Δεν έχουν διδαχθεί οι μαθητές τα δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου, τα άφησα και πήγα κατευθείαν εδώ για να γίνει ενδιαφέρουσα συζήτηση.»

Στο επίπεδο της πρακτικής, κατά τη διάρκεια του μαθήματος, επιλέγουν να καλούν τους μαθητές στον πίνακα και τους αφήνουν να κάνουν υποθέσεις και να παραθέτουν ιδέες, στοχεύοντας στο να ανακαλύπτουν από μόνοι τους τις μαθηματικές γνώσεις.

Η παιδαγωγική πρωτοτυπία φαίνεται να εμφανίζεται σαν την έμπνευση που προκαλείται και καθοδηγείται στα μαθήματα. Για να δημιουργηθούν συνθήκες που ευνοούν την ανάπτυξη της προσπαθούν να κατανοήσουν τις ανάγκες των μαθητών, να τους θέτουν κατάλληλες ερωτήσεις και να φέρνουν νέες ιδέες στο μάθημα που προκύπτουν από τη συνεχή τους επιμόρφωση. Αναφέρουν:

> «Ό,τι θεωρώ δημιουργικό έχει περάσει μέσα από το φίλτρο των μαθητών. Προσπαθείς να οδηγήσεις τα πράγματα έτσι ώστε να πέσεις πάνω στη δυσκολία που θα αντιμετωπίσουν οι μαθητές… είμαστε δύο διαφορετικές οντότητες που κάνουν μάθημα η μία σε σχέση με την άλλη.»

Τέλος, η επεξεργασία εμφανίζεται ως η ιδέα ότι οι μαθητές πρέπει να γενικεύσουν τις μαθηματικές ιδέες. Από τη συζήτηση μέσα στην τάξη, η καθηγήτρια, θεωρεί ότι αναδύονται σημαντικά αποτελέσματα που οδηγούν τους μαθητές στη δημιουργία γενικών συμπερασμάτων κάτι που δεν θα ήταν εφικτό αν έκανε τη διδασκαλία χωρίς οι μαθητές να συμμετέχουν σε αυτή. Ο καθηγητής αναφέρει:

> «Δημιουργικότητα είναι η ικανότητα του μαθητή για αφαίρεση και γενίκευση…αν θες να βγάλεις την ύλη τότε δεν έχεις στο μυαλό σου να κάνεις δημιουργικό μάθημα»

Με τους όρους της Διδακτικής Τριάδας, κυρίως βλέπουμε την προσπάθεια των καθηγητών να εισάγουν μαθηματική πρόκληση στις δημιουργικές διδακτικές τους πρακτικές. Η μαθηματική πρόκληση, ωστόσο, εισάγεται μέσω της ευαισθησίας προς τους μαθητές. Για παράδειγμα, όταν αναφέρονται στη μαθηματική ευελιξία, οι καθηγητές, δίνουν έμφαση στο πλήθος των λύσεων που προσφέρει ο μαθητής και στα διάφορα μέσα που χρησιμοποιεί για να οδηγηθεί στη λύση. Φαίνεται ότι έτσι οδηγούν τους μαθητές σε ενεργοποίηση της μαθηματικής τους σκέψης και αυτό συνδέεται με τη μαθηματική πρόκληση της Διδακτικής Τριάδας. Αρκετές φορές, η μαθηματική πρόκληση δεν έρχεται απομονωμένη στο επίπεδο της πρακτικής αλλά μέσω της ευαισθησίας προς τους μαθητές. Για παράδειγμα στην παιδαγωγική πρωτοτυπία, οι καθηγητές προκειμένου να επιλέξουν κατάλληλα τις δραστηριότητες που θα προκαλέσουν τους μαθητές, λαμβάνουν υπόψιν τις ανάγκες των μαθητών και βάσει αυτού σχεδιάζουν τα μαθήματα τους.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκαν δύο καθηγητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με διαφορετικά έτη διδασκαλίας ο καθένας. Οι καθηγητές προσαρμόζουν τις διδακτικές τους πρακτικές ανάλογα με τις προϋπάρχουσες εμπειρίες και τις νέες ιδέες που αποκτούν από τη συνεχή τους επιμόρφωση. Οι αντιλήψεις των καθηγητών για τη δημιουργικότητα στη διδασκαλία των Μαθηματικών συγκλίνουν, παρά τη διαφορά στα χρόνια εμπειρίας. Έχουν σαν κεντρικό στόχο να γίνονται οι ίδιοι δημιουργικοί φέρνοντας κατάλληλες διδακτικές πρακτικές μέσα στην τάξη αλλά και να γίνονται οι μαθητές δημιουργικοί αναπτύσσοντας νέες, για αυτούς, μαθηματικές δεξιότητες. Για να επιτύχουν αυτούς τους στόχους, σχεδιάζουν προβλήματα που λύνονται με πολλούς τρόπους και διάφορα μέσα, αναπροσαρμόζουν την ύλη ώστε να προκαλέσουν ενδιαφέρουσες συζητήσεις, διαμορφώνουν φύλλα εργασίας και δίνουν χώρο στους μαθητές να αναπτύξουν τις σκέψεις και να γενικεύσουν τις γνώσεις τους.

Ακόμη, ερμηνεύθηκαν οι αντιλήψεις των καθηγητών και οι διδακτικές πρακτικές που επιλέγουν προκειμένου να εισάγουν τη δημιουργικότητα των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους με τους όρους της Διδακτικής Τριάδας. Η μαθηματική πρόκληση και η ευαισθησία προς τους μαθητές κατέχουν κεντρική θέση στις διδακτικές πρακτικές. Η μαθηματική πρόκληση εισάγεται μέσω της επιθυμίας των καθηγητών να ανεβάσουν το επίπεδο των Μαθηματικών που διδάσκουν και να δώσουν κίνητρο στους μαθητές να γίνουν δημιουργικοί χρησιμοποιώντας στο σύνολο τις μαθηματικές γνώσεις που κατέχουν. Η μαθηματική πρόκληση πολλές φορές δεν εισάγεται στην τάξη απομονωμένη αλλά με φίλτρο ευαισθησίας προς τους μαθητές. Οι καθηγητές πρώτα κατανοούν τις ανάγκες των μαθητών και τις δυσκολίες που πιθανόν αντιμετωπίζουν και πάνω σε αυτές σχεδιάζουν δημιουργικές δραστηριότητες. Οι αντιλήψεις για δημιουργική διδασκαλία δεν εμφανίζονται αποκομμένες από το επίπεδο της πρακτικής και ερμηνεύονται μέσω της Διδακτικής Τριάδας με τον όρο της μαθηματικής πρόκλησης. Ωστόσο η μαθηματική πρόκληση συνδέεται με την ευαισθησία προς τους μαθητές παρέχοντας έτσι περιβάλλον που επιτρέπει σε κάθε μαθητή να αναπτύξει δημιουργικότητα στα μαθηματικά ανάλογα με το επίπεδο και τις ανάγκες του.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bolden, D. S., Harries, A. V., & Newton, D. P. (2010). Pre-service primary teachers’ conceptions of creativity in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 73(2), 143–157.

Jaworski, B. (1994). Investigating mathematics teaching: *A constructivism enquiry*. London: Falmer press.

Jaworski, B., & Potari, D. (2009). Bridging the macro-micro divide: Using an activity theory model to capture complexity in mathematics teaching and its development. *Educational Studies in Mathematics*, 72, 219–236

Kattou, M., Kontoyianni, K., & Christou, C. (2009). Mathematical creativity through teachers’ perceptions. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd conference of the International Group for the Psychology of*

Mathematics Education (Vol. 3, pp. 297–304). Thessaloniki, Greece: PME.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students*, 129–145

Leikin, R., & Pitta-Pantazi, D. (2013). Creativity and mathematics education: The state of the art, *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 45, 159-166

Leikin, R., Subotnik, R., Pitta-Pantazi, D., Singer, F. M., & Pelczer, I. (2013). International survey on teachers' perspectives on creativity in mathematics education. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 45, 309-324

Lev-Zamir, H., & Leikin, R. (2011). Creative mathematics teaching in the eye of the beholder: Focusing on teachers' conceptions. *Research in Mathematics Education*, 13, 17–32

Lev-Zamir, H., & Leikin, R. (2013). Saying vs. doing: Teachers' conceptions of creativity in elementary mathematics teaching. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 45(4), 295-308

Potari, D., & Jaworski, B. (2002). Tackling complexity in mathematics teacher development: Using the teaching triad as a tool for reflection and enquiry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(4), 351–380

Η ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΤΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΟΥ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΕΣ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Κασκαντάμης Μιχάλης *, Διονυσία Μπακογιάννη **

*Εκπαιδευτικός, Ζάννειο Πειραματικό Γυμνάσιο Πειραιά, ** Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

mijalis.atenas@gmail.com, dbakogianni@math.uoa.gr

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται το διάσημο πρόβλημα με τα νοσοκομεία (Kahneman and Tversky, 1972) που έχει χρησιμοποιηθεί για να διερευνηθεί κατά πόσο οι άνθρωποι λαμβάνουν υπόψη τους το μέγεθος του δείγματος προκειμένου να αξιολογήσουν ένα στατιστικό αποτέλεσμα. Η χρήση μιας παραλλαγής αυτού του προβλήματος σε 49 μαθητές Γ' Γυμνασίου έδειξε διαφοροποιήσεις στον τύπο συλλογισμού των μαθητών πριν και μετά τη διδασκαλία των πιθανοτήτων. Επιπλέον, οι δικαιολογήσεις των μαθητών αναδεικνύουν επιμέρους συλλογιστικές που αναπτύσσουν οι μαθητές, άλλοτε επιβεβαιώνοντας και άλλοτε φωτίζοντας περαιτέρω τα ευρήματα προηγούμενων ερευνών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μεταβλητότητα και το μέγεθος του δείγματος αποτελούν δύο θεμελιώδης έννοιες της στατιστικής, και μέσα από τις σύγχρονες προσεγγίσεις στη στατιστική εκπαίδευση δίνεται ιδιαίτερη έμφαση σε αυτές. Συγκεκριμένα, η διδασκαλία της στατιστικής σήμερα εστιάζει στην ανάπτυξη ικανοτήτων όπως η αναγνώριση και η μέτρηση της μεταβλητότητας με στόχο την πρόβλεψη, την εξήγηση και τον έλεγχο μέσα σε αβέβαιες καταστάσεις, καθώς και στην κατανόηση της σχέσης ανάμεσα στο δείγμα και τον πληθυσμό όταν προσπαθεί κανείς να βγάλει συμπεράσματα από δεδομένα με κάποιο βαθμό βεβαιότητας (NCTM, 2000).

Ο τρόπος σκέψης των μαθητών γύρω από την έννοια της μεταβλητότητας και του μεγέθους του δείγματος διερευνάται από τους ερευνητές της στατιστικής εκπαίδευσης τόσο για τον προσδιορισμό κατάλληλων μοντέλων για την ανάπτυξη της στοχαστικής σκέψης, αλλά και γενικότερα για την ανάπτυξη της μάθησης και της διδασκαλίας της στατιστικής. Μέσα από αυτού του τύπου τη διερεύνηση έχουν αναπτυχθεί και αξιοποιηθεί διάφορα ερευνητικά εργαλεία για την παραγωγή δεδομένων γύρω από τον τρόπο που σκέφτονται οι μαθητές. Ένα από αυτά τα εργαλεία είναι το πρόβλημα με τα νοσοκομεία (ΠΝ) (βλ. Εικόνα 1) που πρωτο-χρησιμοποίησαν στη δουλειά τους οι

Kahneman και Tversky (1972) για να διερευνήσουν το ρόλο και την αξιοπιστία που αποδίδουν οι άνθρωποι σε μικρά δείγματα. Το αποτέλεσμα της έρευνας τους έδειξε ότι οι άνθρωποι εμπιστεύονται την αξιοπιστία των μικρών δειγμάτων και λαμβάνουν αποφάσεις μέσα σε στοχαστικά πλαίσια αγνοώντας το νόμο των μεγάλων αριθμών. Στη συνέχεια το ΠΝ χρησιμοποιήθηκε από πολλούς ερευνητές προκειμένου να διερευνήσουν περεταίρω ζητήματα σκέψης, διαισθητικές αντιλήψεις και παρανοήσεις μαθητών για τις έννοιες της μεταβλητότητας και του μεγέθους του δείγματος (π.χ. Fischbein & Schnarch, 1997) αλλά και τον τρόπο που επιχειρηματολογούν γύρω από τις επιλογές τους σε στοχαστικά πλαίσια (π.χ. Sharma 1997; Watson and Moritz 2000). Μια πιο πρόσφατη δουλειά των Lee, Starling, & Gonzalez (2014), αναδεικνύει τη δυναμική του ΠΝ, πέρα από ερευνητικό εργαλείο, ως διδακτικό εργαλείο, και προτείνει τη αξιοποίηση του σε συνδυασμό με προσομοιώσεις τυχαίων καταστάσεων σε υπολογιστή για τη ανάπτυξη του στοχαστικού συλλογισμού από μαθητές Γυμνασίου.

Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιούμε το ΠΝ προκειμένου να μελετήσουμε συλλογιστικές που αναπτύσσουν οι μαθητές Γ’ Γυμνασίου τόσο σε ένα πρώτο διαισθητικό επίπεδο, αλλά και αμέσως μετά την διδασκαλία των πιθανοτήτων. Συγκεκριμένα προσπαθούμε να απαντήσουμε στο ερευνητικό ερώτημα:

- Τι συλλογιστικές αναπτύσσουν οι μαθητές όταν απαντούν σε ένα πρόβλημα που σχετίζεται με το μέγεθος του δείγματος και πώς αυτές διαφοροποιούνται μετά τη διδασκαλία των πιθανοτήτων;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Οι Kahneman και Tversky (1972) χρησιμοποίησαν το εξής πρόβλημα:

> «Σε μία πόλη υπάρχουν δύο νοσοκομεία, ένα μεγάλο στο οποίο γεννιούνται περίπου 45 μωρά την ημέρα, και ένα μικρό στο οποίο γεννιούνται περίπου 15 μωρά την ημέρα. Όπως είναι γνωστό, περίπου το 50% των μωρών είναι αγόρια. Παρόλα αυτά, το ακριβές ποσοστό διαφέρει από ημέρα σε ημέρα. Κάποιες φορές ξεπερνά το 50%, ενώ κάποιες είναι μικρότερο. Κάθε νοσοκομείο καταγράφει για διάστημα ενός χρόνου τις ημέρες κατά τις οποίες είχαμε περισσότερες από 60% γεννήσεις αγοριών. Ποιο νοσοκομείο πιστεύετε ότι κατέγραψε τις περισσότερες τέτοιες ημέρες? (α) Το μεγάλο (β) Το μικρό (γ) Το ίδιο και τα δύο νοσοκομεία» (Kahneman & Tversky, 1972).

Το πρόβλημα αυτό αρχικά στόχευε στη διερεύνηση του κατά πόσο οι άνθρωποι λαμβάνουν υπόψη τους το μέγεθος του δείγματος προκειμένου να κάνουν εκτίμηση πιθανότητας. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η πλειοψηφία των ερωτηθέντων θεώρησαν ότι τα δύο νοσοκομεία έχουν ίδια πιθανότητα να καταγράψουν 60% γεννήσεις αγοριών. Αυτό το αποτέλεσμα οι ερευνητές το συνέδεσαν με την *ευρετική της αντιπροσωπευτικότητας*, δηλαδή την εξήγηση ότι οι άνθρωποι υπερεκτιμούν την αντιπροσωπευτικότητα ενός δείγματος, αποδίδοντας σε μεγαλύτερη ομοιότητα με τον πληθυσμό από τον οποίο προέρχεται. Αργότερα, οι Fischbein και Schnarch (1997) χρησιμοποίησαν, μεταξύ άλλων έργων, μια παραλλαγή του ΠΝ για να διερευνήσουν την εξέλιξη των διαισθήσεων που έχουν οι μαθητές γύρω από έννοιες πιθανοτήτων. Παίρνοντας δείγματα μαθητών από το Δημοτικό έως τα πρώτα έτη τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, έδειξαν ότι όσο οι μαθητές προχωρούν σε μεγαλύτερες τάξεις, όπου ο ντετερμινιστικός τρόπος σκέψης ισχυροποιείται μέσα στα σχολικά μαθηματικά, οι διαισθήσεις των μαθητών γύρω από έννοιες πιθανοτήτων τους οδηγεί σε λάθος κατεύθυνση. Συγκεκριμένα, στις μικρότερες τάξεις το ποσοστό των μαθητών που απάντησαν ότι είναι ίδια η πιθανότητα ξεκίνησε από 10% για να φτάσεις στους φοιτητές το 89% και από τους μαθητές επιπέδου Γ’ Γυμνασίου μόνο ένας έδωσε τη σωστή απάντηση, γεγονός που έκανε τους ερευνητές να υποθέσουν ότι καθώς οι μαθητές μεγαλώνουν ηλικιακά τείνουν να επικεντρώνονται σε ισοδύναμους λόγους, ίσως ως αποτέλεσμα της διδασκαλίας στους λόγους και τα ποσοστά.

Πέρα από τις μελέτες που εστίασαν στις επιλογές των μαθητών μέσα σε στοχαστικά πλαίσια, το ΠΝ χρησιμοποιήθηκε από ερευνητές που είχαν ως στόχο να διερευνήσουν το συλλογισμό των μαθητών, να φωτίσουν το σκεπτικό της επιλογής τους και να διακρίνουν πιθανόν πώς αυτό αναπτύσσεται. Για παράδειγμα, οι Watson και Moritz (2000) χρησιμοποίησαν μια παραλλαγή του ΠΝ εστιάζοντας όχι τόσο στην επιλογή των μαθητών αλλά στον τρόπο που αιτιολόγησαν για αυτή. Με αυτόν τον τρόπο είδαν ότι η επιλογή του μεγάλου δείγματος έκρυβε από πίσω μια προσθετική αντίληψη, ότι δηλαδή αφού αυτό είχε μεγαλύτερο μέγεθος, θα είχε και μεγαλύτερη πιθανότητα. Επιπλέον, είδαν ότι όσοι σε πολλούς από εκείνους που έδιναν ίδια πιθανότητα στις δύο περιπτώσεις οι αιτιολογήσεις εστίαζαν στο ότι η διαδικασία είναι τυχαία, άρα δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα. Το αποτέλεσμα αυτό σχετίζεται με μία ευρετική που ο Konold (1989) ονόμασε *προσέγγιση του αποτελέσματος* (outcome approach). Σύμφωνα με τον Konold οι άνθρωποι συχνά δεν βλέπουν ένα αποτέλεσμα ως αποτέλεσμα μιας δοκιμής σε ένα τυχαίο πείραμα, αλλά το εξετάζουν ως μεμονωμένο αποτέλεσμα, έτσι άλλες φορές θεωρούν σίγουρο κάτι που είναι απλά πιο πιθανό και άλλες φορές κρίνουν ότι δεν μπορούν να βγάλουν κανένα συμπέρασμα.

Η μελέτη των αιτιολογήσεων των μαθητών γύρω από τις επιλογές τους στο ΠΝ βοήθησε τους ερευνητές να διαμορφώσουν θεωρητικά πλαίσια που περιγράφουν τις συλλογιστικές και τις κατανοήσεις των μαθητών. Στην έρευνα των Watson και Moritz (2000) που αναφέραμε προηγούμενα, οι ερευνητές ανέπτυξαν ένα πλαίσιο τριών βαθμίδων για το στατιστικό εγγραμματισμό των μαθητών (όπου, *βαθμίδα 1*: ανάπτυξη μιας βασικής στατιστικής ορολογίας, *βαθμίδα 2*: ανάπτυξη κατανόησης της στατιστικής γλώσσας και των στατιστικών εννοιών όταν είναι ενσωματωμένες στο πλαίσιο μιας ευρύτερης κοινωνικής συζήτησης και *βαθμίδα 3*: ανάπτυξη μιας στάσης αμφισβήτησης γύρω από ισχυρισμούς που γίνονται χωρίς κατάλληλα στατιστικά εργαλεία). Παρόμοια, εστιάζοντας στις κατανοήσεις των μαθητών γύρω από την έννοια της δειγματικής διασποράς (sampling variation), η Sharma (1997) κατηγοριοποίησε τον τρόπο σκέψης των μαθητών σε τρεις κατηγορίες: *μη στατιστικός* (αιτιολογήσεις με βάση εμπειρίες ή πεποιθήσεις), *μερικώς στατιστικός* (απαντήσεις που περιείχαν λανθασμένη χρήση κανόνων ή διαισθήσεων όπως η ισοπιθανότητα ή η προσέγγιση του αποτελέσματος) και *στατιστικός* (απαντήσεις που λάμβαναν υπόψη την πιθανότητα και τι θα συμβεί μακροπρόθεσμα).

Τέλος σε πιο πρόσφατες ερευνητικές αναφορές, όπως για παράδειγμα των Lee et.al (2014), σχολιάζεται η δυναμική του ΠΝ ως διδακτικό εργαλείο. Οι ερευνητές αυτοί υποστηρίζουν ότι μέσα από τη χρήση του στην τάξη των μαθηματικών θα διευκολυνθούν οι μαθητές να οικοδομήσουν ιδέες σχετικά με την κατανόηση της μεταβλητότητας, την επίδραση του μεγέθους του δείγματος και το Νόμο των Μεγάλων Αριθμών, θα ενθαρρυνθούν στην ανάπτυξη στατιστικών συλλογισμών και θα αναγνωρίσουν εννοιολογικές συνδέσεις ανάμεσα στη στατιστική και τις πιθανότητες. Ειδικότερα, η διδασκαλία και η μάθηση των πιθανοτήτων και η ανάπτυξη εννοιολογικής κατανόησης γύρω από τυχαίες καταστάσεις φαίνεται να χρειάζεται ισχυρότερες συνδέσεις με εμπειρικά δεδομένα και στατιστικό τρόπο σκέψης καθώς με αυτόν τον τρόπο οι έννοιες των πιθανοτήτων γίνονται πιο εύκολα προσβάσιμες και πιο ξεκάθαρες (Chernoff et.al., 2016).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το πρόβλημα

Το πρόβλημα που χρησιμοποιήθηκε είναι το πρόβλημα με τα νοσοκομεία (Π.Ν.) που πρωτοχρησιμοποίησαν οι Kahneman and Tversky (1972). Το πρόβλημα δόθηκε στους μαθητές σε δύο φάσεις με ελαφρώς διαφορετική διατύπωση σε καθεμία από αυτές (Διατύπωση Ι, Διατύπωση ΙΙ). Συγκεκριμένα, τα βασικά σημεία διαφοροποίησης των δύο διατυπώσεων που δόθηκαν σε σχέση με το αρχικό είναι: (α) προστέθηκε η επιλογή δ προκειμένου να διερευνηθούν επιπλέον απαντήσεις που σχετίζονται γύρω από την αδυναμία πρόβλεψης σε καταστάσεις αβεβαιότητας (β) τα μεγέθη στα δύο νοσοκομεία έγιναν 10 και 100 από 15 και 45 αντίστοιχα καθώς και η απόκλιση από το 50% έγινε 70% από 60% στο αρχικό ΠΝ προκειμένου να είναι πιο ξεκάθαρες οι διαφοροποιήσεις για τους μαθητές και (γ) δόθηκαν στους μαθητές οι απόλυτες συχνότητες όπως στην παραλλαγή του Π.Ν. από τους Fischbein and Schnarch (1997). Επιπλέον, στο αρχικό ΠΝ φαίνεται η διαδικασία τήρησης αρχείων να διαρκεί 1 χρόνο κάτι που διατηρήθηκε στην Διατύπωση Ι αλλά άλλαξε στη Διατύπωση ΙΙ σε τριάντα χρόνια. Στην Εικόνα 1 παρακάτω παρουσιάζεται η τελική διατύπωση που δόθηκε στους μαθητές.

Σε μία πόλη υπάρχουν δύο νοσοκομεία, ένα μικρό Α στο οποίο γεννιούνται 10 μωρά κάθε μέρα και ένα μεγάλο Β στο οποίο γεννιούνται 100 μωρά κάθε μέρα. Η πιθανότητα να γεννηθεί ένα αγόρι είναι 50%, παρ' όλα αυτά υπάρχουν ημέρες όπου περισσότερα από το 50% των παιδιών που γεννήθηκαν να είναι αγόρια και ημέρες όπου λιγότερα από το 50% των παιδιών που γεννήθηκαν να είναι αγόρια. Και στα δύο νοσοκομεία κρατούνται αρχεία διάρκειας 30 ετών για τον αριθμό των αγοριών καθώς και για τον αριθμό των κοριτσιών που γεννιούνται κάθε μέρα. Εξετάζοντας τα αρχεία των 30 ετών και από τα δύο νοσοκομεία, σε ποιο από τα αυτά αναμένουμε ότι θα υπάρχουν περισσότερες ημέρες κατά τις οποίες κατά τις οποίες ο συνολικός αριθμός των αγοριών που γεννήθηκαν ήταν μεγαλύτερος από 70% των γεννήσεων ανά ημέρα για το κάθε νοσοκομείο, δηλαδή περισσότερα από 7 αγόρια για το μικρό νοσοκομείο και περισσότερα από 70 αγόρια για το μεγάλο νοσοκομείο.

α) Στο μεγάλο νοσοκομείο υπάρχουν περισσότερες τέτοιες ημέρες κατά τις οποίες περισσότερα από το 70% των μωρών που γεννήθηκαν είναι αγόρια.

β) Στο μικρό νοσοκομείο υπάρχουν περισσότερες τέτοιες ημέρες κατά τις οποίες περισσότερα από το 70% των μωρών που γεννήθηκαν είναι αγόρια.

γ) Ο αριθμός των ημερών θα είναι περίπου ο ίδιος και στα δύο νοσοκομεία.

δ) Δεν μπορούμε να ξέρουμε

Εικόνα 1. Το πρόβλημα με τα νοσοκομεία – Διατύπωση ΙΙ

Το πλαίσιο της έρευνας

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε 107 μαθητές Γ' Γυμνασίου ενός πειραματικού σχολείου πριν και κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των πιθανοτήτων. Αφιερώθηκαν συνολικά 4 διδακτικές ώρες. Οι βασικές φάσεις της έρευνας καθώς και μια σύντομη περιγραφή των έργων με τα οποία ενεπλάκησαν οι μαθητές, παρουσιάζονται συνοπτικά στον Πίνακα 1 που ακολουθεί. Το σκεπτικό της αλληλουχίας των έργων ήταν να διερευνηθεί σε πρώτη φάση η διαισθητική αντιμετώπιση του ΠΝ από τους μαθητές και στη συνέχεια να παρατηρηθούν πιθανές μετατοπίσεις του συλλογισμού των μαθητών όταν αυτοί εμπλακούν πιο συστηματικά με τις έννοιες γύρω από τις πιθανότητες.

Χρονολογική αλληλουχία		Βασικές δράσεις στις οποίες ενεπλάκησαν οι μαθητές	Σκεπτικό/στόχευση από τη μεριά των ερευνητών	Διδακτικοί/Ερευνητικοί πόροι που αξιοποιήθηκαν
ΦΑΣΗ Ι (ατομικά απαντήσεις σε διάρκεια 30 λεπτών, πριν τη διδασκαλία των πιθανοτήτων)		Απάντηση στο ΠΝ	Οι μαθητές να σκεφτούν το ΠΝ και να επιχειρηματολογήσουν σχετικά με την απάντησή τους	Γραπτό ερωτηματολόγιο
$1^{η}$ διδακτική ώρα (δ.ω.)		Πείραμα τύχης (Π.Τ.)	Οι μαθητές να εμπλακούν με πειράματα τύχης, να διαμορφώσουν έναν δειγματικό χώρο και να κάνουν εικασίες για το αποτέλεσμα. Εμπειρική προσέγγιση του Νόμου των Μεγάλων Αριθμών	Λογισμικό ChanceMaker[1] Ρίψη νομίσματος Λογισμικό Fathom[2]
ΦΑΣΗ ΙΙ (συζήτηση στην ηλεκτρονική τάξη)	$2^{η}$ (δ.ω.)	Παρακολούθηση βίντεο ενός Π.Τ. και σύνδεση με το πείραμα ρίψης νομισμάτων (βλ. $1^{η}$ δ.ω.)	Οι μαθητές να κάνουν εννοιολογικές συνδέσεις με τις σχετικές υποκρυπτόμενες μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες	Galton board[3] Τρίγωνο Pascal
	$3^{η}$ (δ.ω.)	Πείραμα τύχης	Οι μαθητές να εμπλακούν με τη μελέτη της επίδρασης του μεγέθους του δείγματος στη μεταβλητότητα των δεδομένων που παράγονται από το Π.Τ.	Λογισμικό Fathom
	$4^{η}$ (δ.ω.)	Συζήτηση πάνω στο Π.Ν. και προσομοίωση αυτού σε λογισμικό	Επικύρωση των απαντήσεων που δόθηκαν στο Π.Ν.	Λογισμικό Fathom

Πίνακας 1. Περιγραφή των έργων στις δύο φάσεις της έρευνας

Δεδομένα

Τα δεδομένα της έρευνας είναι οι γραπτές απαντήσεις των μαθητών στην Φάση Ι της έρευνας (βλ. Πίνακα 1) καθώς και οι γραπτές απαντήσεις που προέκυψαν από τη συζήτηση των μαθητών στην ηλεκτρονική τάξη του μαθήματος. Η συζήτηση στην ηλεκτρονική τάξη ενεργοποιήθηκε μετά την $1^{η}$ διδασκαλία και διήρκησε μέχρι την ολοκλήρωση της $4^{ης}$ διδακτικής ώρας. Στη συζήτηση είχαν τη δυνατότητα να συμμετέχουν όλοι οι μαθητές, να παρακολουθούν τις απαντήσεις που είχαν δοθεί από τους συμμαθητές τους και να δίνουν μια δική τους απάντηση ή να διαφοροποιούν μία προηγούμενη απάντησή τους.

Ανάλυση των δεδομένων

Για την ανάλυση των δεδομένων εστιάσαμε μόνο στους 49 μαθητές που απάντησαν και στις δύο φάσεις της έρευνας. Αν στη φάση ΙΙ συμμετείχαν με περισσότερες από μία απαντήσεις, λάβαμε υπόψη την πιο πρόσφατη χρονολογικά. Οι απαντήσεις της κάθε φάσης κωδικοποιήθηκαν αρχικά με βάση τις τρεις κατηγορίες συλλογιστικής που ορίζει η Sharma (1997), δηλαδή *μη στατιστικές*, *μερικώς στατιστικές* και *στατιστικές* απαντήσεις. Στην κατηγορία *μη στατιστικές* αντιστοιχίσαμε απαντήσεις οι οποίες δεν χρησιμοποιούν όρους στατιστικής ή πιθανοτήτων, εστιάζουν κυρίως σε αριθμητικά δεδομένα ή/και δεν διαφαίνεται καθαρά κάποιο σκεπτικό πίσω από την απάντηση που δίνουν. Στην κατηγορία *μερικώς στατιστικές* αντιστοιχίσαμε απαντήσεις στις οποίες φαίνεται οι μαθητές να αναγνωρίζουν κάποιες βασικές στοχαστικές ιδέες (π.χ. την έννοια του τυχαίου, τη μεταβλητότητα) αλλά είτε τεκμηριώνουν λανθασμένα είτε εστιάζουν σε λάθος σημεία. Στην κατηγορία *στατιστικές* αντιστοιχίσαμε απαντήσεις στις οποίες διατυπώνονται ορθά επιχειρήματα και φαίνεται να γίνονται αντιληπτές οι κεντρικές ιδέες του προβλήματος, δηλαδή η επίδραση του μεγέθους του δείγματος και η ύπαρξη μεταβλητότητας. Σε δεύτερο επίπεδο προσπαθήσαμε να διακρίνουμε τα κυρίαρχα επιχειρήματα όπως εμφανίζονται μέσα σε κάθε κατηγορία. Τέλος, παρατηρήσαμε στα αποτελέσματα των δύο φάσεων μετακινήσεις και διαφοροποιήσεις τόσο σε σχέση με τις τρεις κατηγορίες συλλογιστικής αλλά και σε σχέση με τα επιχειρήματα που χρησιμοποίησαν οι μαθητές.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στον Πίνακα 2 συνοψίζονται οι απαντήσεις των μαθητών στις τέσσερις επιλογές του ΠΝ (βλ. Εικ. 1). Οι γραμμές του πίνακα περιγράφουν τους κωδικούς που σχετίζονται με τους τύπους συλλογισμού και τις δικαιολογήσεις που δόθηκαν για τις αντίστοιχες επιλογές των μαθητών όπως αναδείχθηκαν στην Φάση Ι της έρευνας, ενώ οι στήλες δίνουν τις αντίστοιχες πληροφορίες όπως αυτές διαμορφώθηκαν στην Φάση ΙΙ. Έτσι για παράδειγμα διαβάζοντας την πρώτη γραμμή του πίνακα βλέπουμε ότι 8 μαθητές έδωσαν στη Φάση Ι την απάντηση Α δείχνοντας μέσα από τη δικαιολόγηση τους μια προσθετική εστίαση (Π.Ε.) που τους κατέταξε στον μη στατιστικό τύπο συλλογισμού (τύπος 1). Βλέπουμε επίσης ότι για παράδειγμα 3 από τους 8 στη Φάση ΙΙ μετακινήθηκαν στην απάντηση Γ δικαιολογώντας βασιζόμενοι στα ποσοστά (Ποσ.) παραμένοντας σε μη στατιστική συλλογιστική (τύπος 1).

			ΦΑΣΗ ΙΙ								
	Τύποι συλλογιστικής ανά επιλογή		Α1	Β1	Β3	Γ1	Γ2		Δ1		Πλήθος μαθητών στη Φάση Ι
		Δικαιολογήσεις μαθητών	Π.Ε.	Δ.Α.	Μ.Δ.	Ποσ.	Ο.Π.	Αν. Μετ.	Κ.Σ.	Α.Π.	
ΦΑΣΗ Ι	Α1	Π.Ε.	1			3	1		2	1	8
	Β1	Δ.Α.	1	2			2	1	2		10
	Β3	Μ.Δ.			2						
	Γ1	Π.Ε.				4	1	1			14
		Ποσ.			3			2		3	
	Δ1	Κ.Σ.			1	2	1		3	1	17
		Α.Π.			2	3	2			2	
	Πλήθος μαθητών στη Φάση ΙΙ		2	10		23			14		49

1. Οι συντομεύσεις που υπάρχουν στον πίνακα αναφέρονται στις δικαιολογήσεις που έδωσαν οι μαθητές και περιγράφονται ακολούθως:

Π.Ε.: Προσθετική εστίαση, **Ε.Δ.Τ.**: Έκταση και διαφορά από τη μέση τιμή, **Α.Σ.**: Εστίαση στις απόλυτες συχνότητες, **Ποσ.**: Εστίαση στα ποσοστά, **Α.Π.**: Αδυναμία πρόβλεψης μακροπρόθεσμα, **Αν.Μετ.**: Στοιχεία ότι αναγνωρίζει τη μεταβλητότητα χωρίς να φαίνεται ξεκάθαρα η κατανόηση άλλων εννοιών, **Ο.Π.**: Εστίαση στο όριο πιθανότητας παραβλέποντας την επίδραση του μεγέθους του δείγματος, **Μ.Δ.**: Αναγνώριση της επίδρασης του μεγέθους του δείγματος, **Κ.Σ.**: Δεν φαίνεται καμία συλλογιστική ή ρητά εκφρασμένη άποψη και επιπλέον όπου **Xi:** Μαθητές οι οποίοι έδωσαν την απάντηση X του ΠΝ (δηλ. Α ή Β ή Γ ή Δ) και τους

Πίνακας 2. **Σύνοψη αποτελεσμάτων από τις απαντήσεις των 49 μαθητών στο ΠΝ**

Μη στατιστική προσέγγιση του προβλήματος.

Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 2, σχεδόν όλοι οι μαθητές (47 μαθητές) στη Φάση Ι της έρευνας, όπως ήταν αναμενόμενο, δικαιολόγησαν χωρίς να κάνουν φανερά χρήση εργαλείων από τη στατιστική και τις πιθανότητες, αλλά οι δικαιολογήσεις σε κάθε επιλογή ανέδειξαν διαφορετικές αφετηρίες συλλογισμού.

Συγκεκριμένα, οι μαθητές που έδωσαν την απάντηση Α για το μεγάλο νοσοκομείο, επιχειρηματολόγησαν ότι εφόσον στο Α γίνονται περισσότερες γεννήσεις, θα έχουμε περισσότερες γεννήσεις αγοριών (π.χ. «*Από τη στιγμή που στο μεγάλο νοσοκομείο γεννιούνται περισσότερα άτομα, το ποσοστό αγοριών θα είναι μεγαλύτερο*»). Αυτή η δικαιολόγηση που φανερώνει μια προσθετική εστίαση (περισσότερες γεννήσεις, άρα περισσότερα αγόρια), είναι ο μόνος τύπος δικαιολόγησης που δόθηκε από όλους όσους επέλεξαν Α τόσο στην πρώτη όσο και στη δεύτερη φάση της έρευνας. Επιπρόσθετα, οι περισσότεροι από τους μαθητές που επέλεξαν το Β (8 στους 10) έδωσαν μη στατιστική δικαιολόγηση εστιάζοντας στην έκταση και τη διαφορά των τιμών από την μέση τιμή (Ε.Δ.Τ.), όπως για παράδειγμα: «*από τη στιγμή που στο μικρό νοσοκομείο γεννιούνται 10 μωρά την ημέρα είναι πιο εύκολο να γεννηθούν 7 ή περισσότερα αγόρια από τη στιγμή που το 50% είναι 5 αγόρια. Είναι πιο* *σύνηθες να γεννηθούν 2 παραπάνω αγόρια για να περάσουν το 50% στο μικρό νοσοκομείο παρά στο μεγάλο νοσοκομείο που το 50% είναι 50 αγόρια και το 70% 70 αγόρια.*», δηλαδή αναγνωρίζει ότι θα χρειαστεί να καλύψει μία έκταση 2 τιμών (δηλ. 6,7) ή 20 τιμών (δηλ. 51, 52,…,70) αντίστοιχα στο μικρό ή το μεγάλο νοσοκομείο. Ακόμα, οι μαθητές που έκαναν την επιλογή Γ εστιάζουν σε μεγάλο βαθμό στα ποσοστά (Ποσ.), όπως για παράδειγμα: «*αφού μετριούνται στις % τότε θα είναι λογικά τα ίδια*». Ενώ, και σε αυτήν την περίπτωση διακρίναμε προσθετική εστίαση (Π.Ε.) που εδώ ενισχύει το συμπέρασμα περί ισοπιθανότητας, όπως για παράδειγμα: «*Από τη στιγμή που στο μικρό νοσοκομείο γεννιούνται 10 μωρά, έστω το ένα μπορεί να κάνει τη διαφορά και να αλλάξει το ποσοστό, από την άλλη, στο μεγάλο νοσοκομείο το 1 μωρό δεν θα κάνει τη διαφορά αλλά αφού είναι περισσότερα θα έχει αυτόματα και παραπάνω πιθανότητες να αλλάξει*». Τέλος την απάντηση Δ, που αποτέλεσε προσθήκη στην αυθεντική διατύπωση του ΠΝ, φάνηκε να την επιλέγουν μαθητές οι οποίοι δήλωσαν μέσω αυτής την αδυναμία τους να απαντήσουν στο πρόβλημα «*Πιστεύω ότι είναι το δ) επειδή δεν είναι επαρκή τα στοιχειά που μας δίνονται*» ή «*στις πιθανότητες μπορεί να είναι όλες οι απαντήσεις δυνατές*».

Μετά τη διδασκαλία των πιθανοτήτων η ντετερμινιστική προσέγγιση του προβλήματος εξακολούθησε να είναι κυρίαρχη (30 από τους 49). Όπως φαίνεται και στον πίνακα, παρότι οι περισσότεροι μαθητές άλλαξαν την αρχική επιλογή τους, σε πολλές περιπτώσεις βλέπουμε ότι το είδος των δικαιολογήσεων που χρησιμοποίησαν οι μαθητές παρέμεινε σε ένα μη στατιστικό τύπο συλλογιστικής. Για παράδειγμα ένας μαθητής μετακινήθηκε από τη επιλογή Α και μια προσθετική εστίαση στη δικαιολόγηση του στην επιλογή Γ χωρίς όμως και πάλι να αναγνωρίζονται στοχαστικά στοιχεία στον τρόπο που δικαιολογεί αλλά μόνο μία εστίαση στα ποσοστά: «*… το κλάσμα 7/10 (μικρό νοσοκομείο) είναι ισοδύναμο με το 70/100*».

Μερικώς στατιστική προσέγγιση του προβλήματος.

Η μερικώς στατιστική προσέγγιση του προβλήματος απουσιάζει στη Φάση Ι της έρευνας. Παρόλα αυτά, αυτός ο τρόπος συλλογιστικής φάνηκε να αναπτύσσεται περίπου στους μισούς από τους μαθητές που έδωσαν την απάντηση Γ στη Φάση ΙΙ. Συγκεκριμένα, βλέπουμε ότι η απάντηση Γ είναι εκείνη στην οποία μετακινήθηκαν σε μεγάλο βαθμό όσοι διαφοροποιήθηκαν από την αρχική τους απάντηση. Επιπλέον, συνδέεται κυρίως με δικαιολογήσεις στις οποίες φαίνεται ο μαθητής να αναγνωρίζει την ιδέα της μεταβλητότητας ή να χρησιμοποιεί στη δικαιολόγηση του την οριακή τιμή πιθανότητας χωρίς όμως να φαίνεται να συνειδητοποιεί την επίδραση του μεγέθους δείγματος, όπως για παράδειγμα ο μαθητής που έγραψε: «*όσες περισσότερες επαναλήψεις κάνουμε, τόσο οι πιθανότητες εξισορροπούν στο 50%. Δηλαδή αφού έχουμε τον ίδιο αριθμό επαναλήψεων σε κάθε νοσοκομείο πιστεύω μετά από 30 έτη οι μέρες που τα αγόρια στα 2 νοσοκομεία θα ήταν πάνω από το 70% είναι περίπου ίδιες*».

Στατιστική προσέγγιση του προβλήματος.

Η προσέγγιση αυτή αφορά συνολικά 8 μαθητές από τους 49 που μελετήθηκαν στην παρούσα έρευνα και από τους οποίους μόνο δύο είχαν εξ' αρχής αυτού του τύπου την προσέγγιση απαντώντας: «*Σκέφτηκα πως όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των μωρών που γεννιούνται τόσο λιγότερες είναι οι πιθανότητες να είναι πάνω από 70% καθώς γνωρίζουμε πώς η πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι είναι 50%. Αντίθετα είναι πιο πιθανό σε λιγότερα μωρά το 70% να είναι αγόρια.*». Όλοι όσοι προσέγγισαν στατιστικά το πρόβλημα ήταν μαθητές που τελικά μετακινήθηκαν στην ορθή απάντηση Β έδωσαν παρόμοια δικαιολόγηση με την παραπάνω όπου φαίνεται ότι οι μαθητές αναγνωρίζουν την επίδραση του μεγέθους δείγματος.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σε σχέση με το ερευνητικό μας ερώτημα, τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι ξεκινούν από μη στατιστικό συλλογισμό, έχοντας όμως διαφορετικές αφετηρίες προσέγγισης τόσο σε σχέση με την απάντηση που δίνουν αλλά και σε σχέση με την αιτιολόγηση στην ίδια απάντηση. Όσον αφορά, τις απαντήσεις που έδωσαν σε σχέση με το πρόβλημα, τα ευρήματα της παρούσας εργασίας συμφωνούν με τα ευρήματα παλαιότερων ερευνών, ότι οι περισσότεροι μαθητές αποδίδουν ίδια πιθανότητα στα δύο νοσοκομεία (π.χ. Fischbein & Schnarch, 1997; Watson & Moritz, 2000). Παρόλα αυτά η παρούσα μελέτη έδωσε στοιχεία για την ιδιαίτερη αφετηρία γύρω από τη συλλογιστική τους. Συγκεκριμένα, είδαμε ότι ακόμα και οι μαθητές που έδωσαν την σωστή απάντηση στη Φάση Ι, ξεκινώντας από μη στατιστική συλλογιστική μετακινήθηκαν σε άλλες απαντήσεις άλλοτε παραμένοντας σε μη στατιστικό συλλογισμό και άλλοτε μεταπηδώντας σε μερικώς στατιστικό συλλογισμό. Επίσης, φάνηκε ότι η μετακίνηση στη σωστή απάντηση και σε στατιστικό συλλογισμό είναι ιδιαίτερα απαιτητική και μόνο λίγοι μαθητές έφτασαν σε αυτό το σημείο. Η προσθήκη της επιλογής Δ στο πρόβλημα έδωσε μια νέα κατεύθυνση στους μαθητές, διαχωρίζοντας τελικά εκείνους που αποδίδουν στα δύο νοσοκομεία την ίδια πιθανότητα, από εκείνους που θεωρούν ότι δεν μπορεί κανείς να προβλέψει σε ένα πλαίσιο πιθανοκρατικό, αναδεικνύοντας την προσέγγιση του αποτελέσματος (Konold, 1989).

Τέλος, φάνηκε ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ στατιστικής και πιθανοτήτων είναι σημαντική για την υποστήριξη της κατανόησης εννοιών όπως η μεταβλητότητα που είναι κυρίαρχη στις δύο περιοχές. Διδακτικά, είναι σημαντικό να μην αντιμετωπίζεται η κάθε περιοχή ξεχωριστά αλλά να αξιοποιούνται προβλήματα όπως το ΠΝ που υποστηρίζουν την αλληλοσυμπληρωματικότητα τους.

1. Το λογισμικό ChanceMaker είναι σχεδιασμένο για διερεύνηση ιδεών γύρω από τις πιθανότητες (http://www.nuffieldfoundation.org/uncertainty-1).
2. Το Fathom είναι ένα δυναμικό ψηφιακό εργαλείο κατάλληλο για τη διδασκαλία της στατιστικής (http://fathom.concord.org/)
3. Το GaltonBoard είναι ισόμορφο πείραμα της ρίψης νομισμάτων (https://www.youtube.com/watch?v=p65aYYuAz-s).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Chernoff, E. J., Paparistodemou, E., Bakogianni, D., & Petocz, P. (2016). Guest Editorial Paper. Special Issue: Research on learning and teaching probability within statistics. *Statistics Education Research Journal, 16(2).*

Fischbein, E., and Schnarch, D. (1997). "The Evolution with Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions," *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 96-105.

Kahneman, D., and Tversky, A. (1972). "Subjective Probability: A Judgment of Representativeness," *Cognitive Psychology*, 3, 430-454.

Konold, C. (1989). “An Outbreak of Belief in Independence?” In C. Maher, G. Goldin & B. Davis (eds.), *The Proceedings of the Eleventh Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol II (pp. 203-209), Rutgers, Rutgers University Press.

Lee, H. S., Starling, T. T., & Gonzalez, M. D. (2014). Using data to motivate the use of empirical sampling distributions. *Mathematics Teacher*, *107(6)*, 465-469.

Noll, J. and Sharma, S. (2014). Qualitative meta-analysis on the hospital task: Implications for research. *Journal of Statistics Education*, 22(2), 1–26.

National Council of Teachers of Mathematics. (NCTM). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM, 2000

Sharma, S. (1997). "Statistical Ideas of High School Students: Some Findings from Fiji" Unpublished doctoral thesis. Waikato University, Hamilton, New Zealand.

Watson, J.M.& Moritz, J.B. (2000). "Developing Concepts of sampling," *Journal for Research in Mathematics Education*, *31(1)*, 44-70.

ΟΙ ΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΑ ΠΡΟΣΩΠΙΚΑ «ΠΙΣΤΕΥΩ» ΤΩΝ ΦΟΙΤΗΤΡΙΩΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΉΣ ΑΓΩΓΗΣ ΤΟΥ ΤΕΙ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Κασσώτη Όλγα και Κλιάπης Πέτρος

2ο Δημοτικό Τριανδρίας, 12η Περιφέρεια Π.Ε. Θεσσαλονίκης

okassoti@gmail.com pkliapis@gmail.com

Στην παρούσα έρευνα μελετώνται, κάποιοι από τους παράγοντες που σχετίζονται με τις στάσεις και τα προσωπικά «πιστεύω» των φοιτητριών του Τμήματος Προσχολικής Αγωγής του ΤΕΙ Θεσσαλονίκης για τη μαθηματική εκπαίδευση γενικά και για την αξία της διδασκαλίας των μαθηματικών σε παιδιά προσχολικής ηλικίας. Εξετάζεται ακόμη ο αντίκτυπος της στάσης και των πιστεύω τους στη διδακτική πρακτική που υιοθετούν στα μαθηματικά.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.

Από τη στιγμή που γεννιούνται τα παιδιά, αρχίζουν εξερευνώντας τον κόσμο με τις αισθήσεις τους να διαμορφώνουν αντιλήψεις που συνδέονται με μαθηματικές έννοιες (ταξινομήσεις, μοτίβα, προβολικές σχέσεις στο χώρο κ.α.). Έρευνες καταδεικνύουν ότι τα βρέφη και τα προνήπια είναι ικανά και πρόθυμα να 'μάθουν' μαθηματικά και κάνουν ερωτήσεις μαθηματικών εννοιών πολύ πριν φοιτήσουν στο νηπιαγωγείο (Piasta, Pelatti, & Miller, 2014. Seo & Ginsburg, 2004).

Αν και τα παιδιά προσπαθούν ακόμη και χωρίς τη βοήθεια των ενηλίκων, οι εμπειρίες τους αυτές γίνονται πιο στοχευμένες και πιο πλούσιες μέσω της αλληλεπίδρασης με τους ενήλικους που τα παιδαγωγούν. Εκτός από την οικογενειακή διαπαιδαγώγηση, η οργανωμένη πολιτεία οφείλει να φροντίζει και την προσχολική αγωγή των παιδιών. Σύμφωνα με πρόσφατη έρευνα (Διανέωσις, 2017) τονίζεται ότι «Η επένδυση στην προσχολική αγωγή είναι ίσως η καλύτερη επένδυση που μπορεί να κάνει ένα κράτος. Αντιμετωπίζει αποτελεσματικά τις ανισότητες, αποδίδει σημαντικά κέρδη στην οικονομία, βοηθά τη λειτουργία της οικογένειας, έχει ευεργετικά αποτελέσματα στην εξέλιξη των παιδιών.» Ειδικότερα, η παραπάνω έρευνα καταγράφει 30,3% βελτίωση στα μαθηματικά και την κατανόηση κειμένου σε παιδιά ηλικίας 15 ετών τα οποία είχαν συμμετάσχει σε προγράμματα προσχολικής αγωγής για τουλάχιστον 1 χρόνο (Διανέωσις όπ.π.)

ΟΙ ΣΤΑΣΕΙΣ ΤΑ ΠΡΟΣΩΠΙΚΑ «ΠΙΣΤΕΥΩ» ΚΑΙ Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ

Η στάση είναι ένα σύνθετο ψυχο-κοινωνικό φαινόμενο που αναφέρεται στο άτομο και τη σχέση του με το κοινωνικό περιβάλλον. Σύμφωνα με τον Allport, πρόκειται για μια διανοητική και νευροφυσιολογική κατάσταση του ατόμου, η οποία ασκεί δυναμική επίδραση επάνω του και το προετοιμάζει να αντιδράσει με ιδιαίτερο τρόπο σε ερεθίσματα που δέχεται (Allport, 1968). Η στάση, λοιπόν, λειτουργεί ως οργανωτής της σχέσης του ατόμου με το κοινωνικό περιβάλλον, καθώς καθορίζει αν το άτομο θα ενεργήσει θετικά και θα υποστηρίξει μια προσπάθεια, αν θα αισθάνεται ότι έχει κίνητρα για να συμμετάσχει σε μια διαδικασία ή αν, αντίθετα, θα την απαξιώσει και θα μείνει στο περιθώριό της (Celik, 2017).

Στη διδασκαλία των μαθηματικών, έχει διαπιστωθεί μια πολύ ισχυρή σχέση μεταξύ της στάσης των εκπαιδευτικών απέναντι στα μαθηματικά και τα προσωπικά «πιστεύω» τους (Maasepp & Bobis, 2014. Shilling-Traina & Stylianides, 2013. Thiel, 2010). Αν και δεν έχουν καταλήξει σε έναν ενιαίο ορισμό του τι ακριβώς είναι τα προσωπικά «πιστεύω» των εκπαιδευτικών, οι ερευνητές έχουν αναπτύξει διάφορους ορισμούς εργασίας (Handal & Herrington, 2003. Philipp, 2007). Οι Handal και Herrington (2003), για παράδειγμα, παρομοιάζουν τα προσωπικά «πιστεύω» με φίλτρα μέσω των οποίων ερμηνεύονται νέες γνώσεις και εμπειρίες. Ο Philipp (2007) συγκρίνει τα προσωπικά «πιστεύω» με φακούς που διαμορφώνουν την εικόνα του κόσμου που βλέπουμε. Στη βάση του ότι τα προσωπικά «πιστεύω» επηρεάζουν τις αντιλήψεις και τις κρίσεις των εκπαιδευτικών πολλοί ερευνητές διαπιστώνουν ότι επηρεάζουν επίσης σημαντικά τις πρακτικές των εκπαιδευτικών της προσχολικής εκπαίδευσης (Celik, 2017. Schillinger, 2016). Οι (Koballa & Crawley, 1985) δείχνουν τον τρόπο που σχετίζονται οι στάσεις, τα προσωπικά «πιστεύω» και η συμπεριφορά σε έναν εκπαιδευτικό: Ο εκπαιδευτικός κρίνει την ικανότητά του στη διδασκαλία των μαθηματικών ως μη ικανοποιητική (προσωπικό «πιστεύω») και συνεπώς αναπτύσσει μια αντιπάθεια για τη διδασκαλία μαθηματικών (στάση). Το αποτέλεσμα είναι ένας εκπαιδευτικός που αποφεύγει όσο είναι δυνατόν τη διδασκαλία των μαθηματικών (συμπεριφορά).

Στην ελληνική προσχολική εκπαίδευση για τα μαθηματικά ο «Οδηγός Νηπιαγωγού» θεωρεί σημαντικό οι εκπαιδευτικοί να διαμορφώνουν ένα πλαίσιο που ενθαρρύνει τη δημιουργικότητα, την αυτενέργεια και την ανάπτυξη της πρωτοβουλίας των παιδιών και να τους παρέχουν σε καθημερινή βάση ευκαιρίες για να διερευνούν προοδευτικά μαθηματικές ιδέες (Δαφέρμου, Κουλούρη, & Μπασαγιάννη, 2006). Επιπλέον το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών του 2011 μετέφερε την έμφαση της εκπαιδευτικής πράξης στη διαπραγμάτευση του μαθηματικού νοήματος στην τάξη. Κεντρικός στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης δεν είναι πια η τυπική μάθηση εννοιών και διαδικασιών, αλλά η ανάπτυξη ενός τρόπου σκέψης που αξιοποιεί χαρακτηριστικά της μαθηματικής επιστήμης (ΙΕΠ, 2014). Ενώ όμως τα ΠΣ των μαθηματικών για την προσχολική εκπαίδευση και οι έρευνες αναγνωρίζουν τη σπουδαιότητα ανάπτυξης μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών από τις μικρότερες ηλικίες, οι προσπάθειες των εκπαιδευτικών να τις εφαρμόσουν όπως καταγράφουν οι έρευνες, εμποδίζονται από τις στάσεις και τα προσωπικά «πιστεύω» τους για τα μαθηματικά με αποτέλεσμα οι διδακτικές τους συμπεριφορές να είναι προβληματικές και η εκπαίδευση των νηπίων να περιορίζεται ακόμα σε φτωχές ή απλοϊκές δραστηριότητες που δεν υποστηρίζουν την προτεινόμενη από τα προγράμματα ανάπτυξη (Chen & McCray, 2013. Polly & Hannafin, 2011. Schillinger, 2016. Καπλάνη & Τζεκάκη, 2014). Οι εκπαιδευτικοί συχνά δυσκολεύονται να οργανώσουν μια σειρά δραστηριοτήτων και να θέσουν μια ποικιλία ερωτημάτων στα παιδιά ή δεν είναι σε θέση να βοηθήσουν τους μαθητές τους να αξιοποιήσουν πλήρως τις δραστηριότητες μοντελοποίησης και διερεύνησης, περιορίζοντας τη χρήση τους σε εξάσκηση δεξιοτήτων δευτερευούσης σημασίας (Βαμβακούσση & Καλδρυμίδου, 2015). Άλλες φορές, δίνουν βήμα προς βήμα κατευθύνσεις ή διαδικασίες σε μια προσπάθεια να βοηθήσουν τους μαθητές ή να δημιουργήσουν μια καθαρά γνωστική δραστηριότητα με λεπτομερείς οδηγίες για τα ακριβή βήματα που απαιτούνται για την ολοκλήρωση της ώστε «βγει» το μάθημα μέσα στο διαθέσιμο χρόνο (Polly κ. ά., 2016).

Όλες οι παραπάνω διδακτικές πρακτικές και αδυναμίες έχουν σαν αποτέλεσμα οι εκπαιδευτικοί της προσχολικής αγωγής, στην πλειοψηφία των διδασκαλιών τους, να διδάσκουν έννοιες που οι περισσότεροι από τους μαθητές τους έχουν ήδη κατακτήσει και οι μαθητές να ολοκληρώνουν την προσχολική αγωγή με ανεπαρκή γνώση των βασικών μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων και να συνεχίζουν να αντιμετωπίζουν δυσκολίες στα μαθηματικά σε όλη τη διάρκεια της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Brendefur, Johnson, Thiede, Strother, & Severson, 2017. Polly, κ. ά., 2016).

Η ΠΑΡΟΥΣΑ ΕΡΕΥΝΑ

Θέλοντας να μελετήσουμε τους παράγοντες που σχετίζονται με τις στάσεις και τα προσωπικά «πιστεύω» των φοιτητριών του Τμήματος προσχολικής Αγωγής του ΤΕΙ Θεσσαλονίκης θέσαμε τα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα. Ποιες είναι οι στάσεις και τα προσωπικά «πιστεύω» των παιδαγωγών α) γενικά για τα μαθηματικά β) για τη χρησιμότητα των μαθηματικών στα νήπια και γ) πόσο ικανές αισθάνονται οι παιδαγωγοί της προσχολικής στο να σχεδιάσουν και να εφαρμόσουν μαθηματικές δραστηριότητες.

Το ερευνητικό εργαλείο

Από τους ερευνητές έγινε προσαρμογή του Early Math Beliefs and Confidence Survey (EM-BCS) (Chen, McCray, Adams, & Leow, 2014) το οποίο εξετάζει 3 ομάδες παραγόντων: Στάσεις και πιστεύω γενικά για τα μαθηματικά, στάσεις και πιστεύω για τη χρησιμότητα των μαθηματικών στα νήπια και, στάσεις και πιστεύω για τις απαιτήσεις της μαθηματικής διδασκαλίας από τον εκπαιδευτικό.

Το τελικό ερωτηματολόγιο το οποίο δόθηκε στις φοιτήτριες ήταν τύπου Likert, αποτελούμενο από 30 ερωτήσεις/δηλώσεις στις οποίες οι φοιτήτριες βαθμολογούν από 1 ως 5 τις στάσεις και τα πιστεύω τους: για τα μαθηματικά, τη χρησιμότητα τους στα νήπια ηλικίας 0-5 ετών και για τις απαιτήσεις της μαθηματικής διδασκαλίας από τις ίδιες. Οι ερωτήσεις βαθμολογήθηκαν ως «1 διαφωνώ, 2 διαφωνώ μερικώς, 3 δεν έχω γνώμη 4 συμφωνώ μερικώς, 5 συμφωνώ». Η ελάχιστη βαθμολογία που μπορεί να ληφθεί στο σύνολο των ερωτήσεων είναι 30, με αντίστοιχη μέγιστη βαθμολογία το 150.

Η Διαδικασία Συλλογής των Δεδομένων

Στην έρευνα συμμετείχε το σύνολο των φοιτητριών του Στ΄ εξαμήνου (N=120) του Τμήματος Προσχολικής Αγωγής του ΤΕΙ Θεσσαλονίκης οι οποίες παρακολούθησαν το μάθημα «Μαθηματικές Έννοιες και Φυσικές Επιστήμες στην Προσχολική Αγωγή». Ο σχεδιασμός και η προπαρασκευή της έρευνας έγιναν κατά το χρονικό διάστημα Απρίλιος Μάιος 2017, ενώ η συμπλήρωση των ερωτηματολογίων έγινε πριν την έναρξη των εξετάσεων του μαθήματος τον Ιούνιο του 2017.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ

Μετά τη συλλογή ακολούθησε Διερευνητική Ανάλυση Παραγόντων (exploratory factor analysis) του συνόλου των μεταβλητών με το πρόγραμμα SPSS. Στη ΔΑΠ, ο ερευνητής δεν έχει προσδοκίες για τον αριθμό ή τη φύση των μεταβλητών καθώς η μέθοδος αυτή επιτρέπει να διερευνηθούν οι κύριες διαστάσεις για να δημιουργηθεί μια θεωρία ή ένα μοντέλο από ένα σχετικά μεγάλο σύνολο λανθανόντων κατασκευών που συχνά αντιπροσωπεύεται από ένα σύνολο αντικειμένων (Henson & Roberts, 2006. Thompson, 2004). Η ΔΑΠ, έγινε με τη μέθοδο της περιστροφής (rotation), καθώς αυτή είναι η πλέον ενδεδειγμένη μέθοδος

(Thomson όπ. π. σ. 385) και έγιναν δεκτοί παράγοντες με τιμή χαρακτηριστικής ρίζας (eigenvalue) μεγαλύτερη του 1.00, ενώ συμμετείχαν οι μεταβλητές με φορτίο μεγαλύτερο του 0,30 (Hair, Black, Babbin, & Anderson, 2014 σ.118)

Παραγοντική ανάλυση (στο σύνολο των ερωτήσεων)

Η ερμηνεία των παραγόντων συνεπάγεται ότι ο ερευνητής εξετάζει, με βάση τα κριτήρια που τέθηκαν, ποιες μεταβλητές συμμετέχουν σε έναν παράγοντα και δίνει στον παράγοντα αυτό ένα όνομα ή ένα θέμα. Με άλλα λόγια, η όλη διαδικασία είναι μια αναζήτηση για την εύρεση αυτών των παραγόντων που μαζί εξηγούν την πλειοψηφία των απαντήσεων που δόθηκαν. Η όλη διαδικασία, φυσικά είναι θεωρητική και επαγωγική που βασίζεται σε ρεαλιστικά (pragmatic) κριτήρια τα οποία ορίζει ο ερευνητής με βάση τη συστηματική διαδικασία που ορίζεται σε παρόμοιες προσεγγίσεις (Thomson, όπ. π. σ. 396. Hair, όπ. π. σ. 111).

Με βάση τα παραπάνω, από την παραγοντική ανάλυση μεταξύ του συνόλου των μεταβλητών, προέκυψαν 5 παράγοντες, οι οποίοι ερμηνεύουν το 50,7% της συνολικής διακύμανσης (α 20,2%, β 10,4%, γ 8,3%, δ 6,1% και ε 5,7%). Ποσοστό το οποίο θεωρείται ικανοποιητικό για έρευνες στις ανθρωπιστικές επιστήμες (Hair, όπ π. σ.108).

Ο πρώτος παράγοντας (βλ. παράρτημα πίν. 1 στήλη 1) εκφράζει μια ομάδα (20,2% του συνόλου) με απόλυτα θετική στάση για τα μαθηματικά γενικά, για τη χρησιμότητα των μαθηματικών στα νήπια, ενώ θεωρούν πως δεν θα έχουν δυσκολίες οι ίδιες στο να διδάξουν μαθηματικά καθώς έχουν και την επιστημονική γνώση και την ικανότητα να το κάνουν. Είναι σημαντικό πως στη συγκεκριμένη ομάδα δεν εκφράζεται καμία επιφύλαξη για τα μαθηματικά και τη χρησιμότητά τους ενώ σε όλες τις ερωτήσεις που δήλωναν δυσκολίες στην προετοιμασία ή τη διεξαγωγή της διδασκαλίας η συγκεκριμένη ομάδα εκφράστηκε αρνητικά. Επίσης οι παιδαγωγοί της συγκεκριμένης ομάδας είναι οι μόνες που αισθάνονται άνετα να σχεδιάζουν και να εφαρμόζουν στα μαθήματα της εβδομάδας, στην τάξη, δραστηριότητες που σχετίζονται με θέματα μαθηματικών (π.χ. αριθμοί, κανονικότητες, έννοιες χώρου, μετρήσεις) να μαζεύουν και να χρησιμοποιούν για τις δραστηριότητες πολλά είδη υλικών (π.χ. μπλοκ, παιχνίδια, κιβώτια).

Ο δεύτερος παράγοντας (βλ. παράρτημα πίν. 1 στήλη 2) εκφράζει μια ομάδα (10,4% του συνόλου) που είναι θετικά διακείμενες στο να διδάξουν μαθηματικά καθώς θεωρούν ότι στα παιδιά της προσχολικής αγωγής θα πρέπει να διδάσκονται περισσότερα μαθηματικά. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούν βιβλία για να πάρουν ιδέες για δραστηριότητες, οι ιστορίες που επιλέγουν να πουν στα νήπια συμπεριλαμβάνουν και λίγα μαθηματικά. Ωστόσο επειδή δεν έχουν αρκετές επιστημονικές γνώσεις, ούτε υλικό, θεωρούν το σχεδιασμό και την εφαρμογή μαθηματικών δραστηριοτήτων δύσκολη δουλειά, ενώ πρόσθετο εμπόδιο είναι ο χρόνος καθώς για τα μαθηματικά απαιτείται περισσότερος χρόνος και δεν υπάρχει αρκετός χρόνος μέσα στη μέρα για να κάνουν Μαθηματικά.

Ο τρίτος παράγοντας (βλ. παράρτημα πίν. 1 στήλη 3) εκφράζει μια ομάδα (8,3% του συνόλου) που θεωρούν πως αισθάνονται μεν άνετα να κάνουν μαθηματικές δραστηριότητες στην τάξη της προσχολικής, συζητούν ιδέες και θέματα διδασκαλίας των Μαθηματικών με άλλους εκπαιδευτικούς αλλά εκφράζουν την απόλυτη άποψη πως τα μαθηματικά δεν είναι χρήσιμα στα νήπια. Συγκεκριμένα, σε όλες τις ερωτήσεις/δηλώσεις της αντίστοιχης κατηγορίας με θετικό περιεχόμενο (π.χ. Στα παιδιά της προσχολικής αγωγής θα πρέπει να διδάσκονται περισσότερα μαθηματικά) απάντησαν αρνητικά, ενώ στις αντίστοιχες με αρνητικό περιεχόμενο (π.χ. Τα μικρά παιδιά δεν ενδιαφέρονται για τα μαθηματικά) απάντησαν θετικά.

Ο τέταρτος παράγοντας (βλ. παράρτημα πίν. 1 στήλη 4) εκφράζει μια ομάδα (6,1% του συνόλου) που εκφράζουν μια ξεκάθαρη επιστημονική επάρκεια για να διδάξουν μαθηματικά καθώς έχουν τις επιστημονικές γνώσεις, δεν φοβούνται ότι τα παιδιά μπορεί να τους κάνουν μια ερώτηση σχετικά με τα μαθηματικά που δεν μπορούν να απαντήσουν, ούτε είναι δύσκολη δουλειά ο σχεδιασμός και η εφαρμογή μαθηματικών δραστηριοτήτων. Ωστόσο, δεν θεωρούν πως ταιριάζει η διδασκαλία των μαθηματικών στα παιδιά προσχολικής ηλικίας καθώς οι δραστηριότητες στα μαθηματικά στην προσχολική αγωγή συμβάλλουν μεν στην κοινωνικοποίηση των νηπίων δεν συμβάλλουν όμως στην ενίσχυση του ενδιαφέροντος των παιδιών για τα μαθηματικά στις επόμενες βαθμίδες. Τέλος παρά την επιστημονική τους επάρκεια δεν αισθάνονται άνετα χρησιμοποιώντας όργανα, όπως, μεζούρες, χάρακες και ζυγαριές όταν διδάσκουν μαθηματικά.

Ο πέμπτος παράγοντας (βλ. παράρτημα πίν. 1 στήλη 5) εκφράζει μια ομάδα (5,7% του συνόλου) που ενώ συζητούν ιδέες και θέματα διδασκαλίας των μαθηματικών με άλλους εκπαιδευτικούς και χρησιμοποιούν το διαδίκτυο για να βρουν ιδέες σχετικά με μαθηματικές δραστηριότητες, δεν επιλέγουν να πουν στα νήπια ιστορίες που να συμπεριλαμβάνουν μαθηματικά. Όμως θεωρούν σημαντικό για την τάξη τους να έχει ένα χώρο Μαθηματικών που τα νήπια να μπορούν να εξερευνούν ελεύθερα, όχι μέσα από οργανωμένες δραστηριότητες, καθώς θεωρούν ότι οι δραστηριότητες δεν συμβάλλουν στην ενίσχυση του ενδιαφέροντος των παιδιών για τα μαθηματικά στις επόμενες βαθμίδες.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Από την ανάλυση των παραγόντων που προηγήθηκε γίνεται φανερό πως, με βάση την ομαδοποίηση των απαντήσεών τους στους 5 παράγοντες που καταγράφηκαν, οι μελλοντικές παιδαγωγοί που θα στελεχώσουν τους βρεφονηπιακούς σταθμούς εκφράζουν σοβαρές επιφυλάξεις τόσο για την αξία των μαθηματικών στα παιδιά ηλικίας 0 ως 5 ετών όσο και για τη δική τους επάρκεια και ικανότητα να ανταποκριθούν στις ανάγκες της διδασκαλίας των μαθηματικών. Καθώς στην Ελλάδα οι φορείς που παρέχουν προσχολική αγωγή λειτουργούν ανεξάρτητα και ασυντόνιστα, ενώ δεν υπάρχει πλαίσιο και πρόγραμμα εκπαίδευσης για την προσχολική ηλικία (δηλαδή 0-5, ηλικία πριν τη φοίτηση στην υποχρεωτική εκπαίδευση), επειδή δεν θεωρούνται μέρος του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος (Νικολαΐδης, 2017). Δεν υπάρχει πρόβλεψη για τη μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών στους βρεφονηπιακούς σταθμούς με κατευθύνσεις για τις παιδαγωγούς και, φυσικά, δεν υπάρχει καμία αξιολόγηση για τα αποτελέσματα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, οι παιδαγωγοί να διαμορφώνουν το ημερήσιο πρόγραμμα απασχόλησης των παιδιών σύμφωνα με τις κατευθύνσεις του ιδιοκτήτη του παιδικού σταθμού ή τις δικές τους προτιμήσεις.

Καθώς οι παιδικοί σταθμοί και τα νηπιαγωγεία είναι θεσμοί με παρόμοια στόχευση, θεωρούμε ότι θα πρέπει να υπάρξει πρόβλεψη για την ανάπτυξη προγράμματος/εγχειριδίου δραστηριοτήτων για παιδαγωγούς παιδικών σταθμών, κατ' αντιστοιχία με το πρόγραμμα σπουδών του Νηπιαγωγείου για την καλλιέργεια βασικών αξιών και δεξιοτήτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Allport, G. (1968). The historical background of modern social psychology. Στο G. Lindzey (Επιμ.), *Handbook of social psychology* (pp. 3-56). London: Wesley.

Brendefur, J. L., Johnson, E. S., Thiede, K. W., Strother, S., & Severson, H. H. (2017). Developing a Multi-Dimensional Early Elementary Mathematics Screener and Diagnostic Tool: The Primary Mathematics Assessment. [journal article]. *Early Childhood Education Journal*.

Celik, M. (2017). Examination of the Relationship between the Preschool Teachers' Attitudes towards Mathematics and the Mathematical Development in 6-Year-Old Preschool Children. *Journal of Education and Learning, 6* (4), 49 - 56.

Chen, J.-Q., McCray, J., Adams, M., & Leow, C. (2014). A Survey Study of Early Childhood Teachers' Beliefs and Confidence about Teaching Early Math. *Early Childhood Education Journal, 42*, 367-377.

Chen, J. Q., & McCray, J. (2013). A survey study of early childhood teachers' beliefs and confidence about teaching early math. *Early Math Collaborative Working Paper No.2*. http://earlymath.erikson.edu

Hair, J. F., Black, W. C., Babbin, B. J., & Anderson, R. E. (2014). *Multivariate data analysis. 7th ed*. Essex: Pearson Education Limited.

Handal, B., & Herrington, A. (2003). Mathematics teachers' beliefs and curriculum reform. *Mathematics Education Research Journal, 15* (1), 59-69.

Henson, R. K., & Roberts, J. K. (2006). Use of Exploratory Factor Analysis in Published Research: Common Errors and Some Comment on Improved Practice. *Educational and Psychological Measurement, 66* (3).

Koballa, T. R., & Crawley, F. E. (1985). The influence of attitude on science teaching and learning. *School Science and Mathematics, 85*, 222-232.

Maasepp, B., & Bobis, J. (2014). Prospective primary teachers' beliefs about mathematics. *Mathematics Teacher Education and Development, 16* (2), 89-107.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. Στο K. F. Lester (Επιμ.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). Reston, VA: NCTM.

Piasta, S., Pelatti, C., & Miller, H. (2014). Mathematics and Science Learning Opportunities in Preschool Classrooms. *Early Education and Development, 25* (4), 445-468.

Polly, D., & Hannafin, M. J. (2011). Examining how learner-centered professional development influences teachers' espoused and enacted practices. *Journal of Educational Research, 104*, 120–130.

Polly, D., Martin, C., McGee, J., Wang, C., Lambert, R., & Pugalee, D. (2016). Designing Curriculum-Based Mathematics Professional Development for Kindergarten Teachers. *Early Childhood Education J. 45* (5), 659-669.

Schillinger, T. (2016). *Mathematical Instructional Practices and SelfEfficacy of Kindergarten Teachers.* PhD, Walden University, Florida.

Seo, K., & Ginsburg, H. (2004). What is developmentally appropriate in early childhood mathematics education? Lessons from new research. Στο D. Clements, J. Sarama & A. DiBiase (Επιμελητές), *Engaging* *young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. (pp. 91-104). N.J.: Erlbaum.

Shilling-Traina, L., & Stylianides, G. (2013). Impacting prospective teachers' beliefs about mathematics. *ZDM Mathematics Education*, *45*, 393-407.

Thiel, O. (2010). Teachers' attitudes towards mathematics in early childhood education. *European Early Childhood Education Research Journal*, *18* (1), 105-115.

Thompson, B. (2004). *Exploratory and confirmatory factor analysis: understanding concepts and applications*. Washington, DC: American Psychological Association.

Βαμβακούσση, Ξ., & Καλδρυμίδου, Μ. (2015). *Σχεδιασμός δραστηριοτήτων για τη διδασκαλία κανονικοτήτων από μελλοντικές νηπιαγωγούς: Δυσκολίες και προβλήματα*. 6ο Πανελλήνιο Συνέδριο της Εν.Ε.Δι.Μ. Μαθηματικά ΜΕ διάκριση και ΧΩΡΙΣ διακρίσεις (pp. 208-218). Θεσσαλονίκη.

Δαφέρμου, Χ., Κουλούρη, Π., & Μπασαγιάννη, Ε. (2006). *Οδηγός Νηπιαγωγού*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Διανέωσις. (2017). Η Προσχολική Αγωγή Στην Ελλάδα. Ανακτήθηκε από: http://www.dianeosis.org/research/preschool_education/

ΙΕΠ. (2014). *Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση. Οδηγός για τον εκπαιδευτικό «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων»*. Αθήνα: ΙΕΠ/ ΕΣΠΑ 2007-13\ Ε.Π. Ε& ΔΒΜ\Α.Π. 1-2-3 «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) -Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, Οριζόντια Πράξη».

Καπλάνη, Ι., & Τζεκάκη, Μ. (2014). *Ανάλυση και σύνθεση σχημάτων στην πρώιμη παιδική ηλικία*. 5ο Πανελλήνιο Συνέδριο της Εν.Ε.Δι.Μ. Τα Μαθηματικά στο Σχολείο και στην Καθημερινή ζωή (pp. 1-11). Φλώρινα. (CD-ROM)

Νικολαΐδης, Η. (2017). Γιατί Η Ελλάδα Πρέπει Να Επενδύσει Στην Προσχολική Αγωγή. http://www.dianeosis.org/2017/02/prosxoliki_agogi/

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Μεταβλητές	Παράγοντες				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1. Οι δραστηριότητες στα μαθηματικά της προσχολικής συμβάλλουν στην ενίσχυση του ενδιαφέροντος των παιδιών για τα μαθηματικά στις επόμενες εκπαιδευτικές βαθμίδες.	,285	,090	**-,411**	**-,305**	**-,494**

2. Αισθάνομαι άνετα να σχεδιάζω και να εφαρμόζω στην τάξη δραστηριότητες που σχετίζονται με θέματα μαθηματικών (π.χ. αριθμοί, κανονικότητες, έννοιες χώρου, μετρήσεις).	**,407**	,093	,215	,063	-,131
3. Στα παιδιά της προσχολικής αγωγής θα πρέπει να διδάσκονται περισσότερα μαθηματικά.	,113	**,386**	**-,487**	,104	-,163
4. Είναι σημαντικό για την τάξη μου να έχει ένα χώρο Μαθηματικών που τα νήπια να εξερευνούν ελεύθερα.	,213	,158	-,289	,134	**,527**
5. Λόγω των απαιτήσεων των υπόλοιπων αντικειμένων, δεν υπάρχει αρκετός χρόνος μέσα στη μέρα για Μαθηματικά.	-,014	**,453**	,187	-,063	-,249
6. Οι Μαθηματικές δραστηριότητες βοηθούν τα νήπια να προσεγγίζουν τη μάθηση βιωματικά.	**,561**	,232	**-,308**	-,137	,223
7. Συζητώ ιδέες και θέματα διδασκαλίας των Μαθηματικών με άλλους εκπαιδευτικούς.	**,513**	,081	**,430**	,112	,312
8. Χρησιμοποιώ πολλά είδη υλικών στην τάξη (π.χ. μπλοκ, παιχνίδια, κιβώτια) για μαθηματικές δραστηριότητες.	**,655**	,143	,202	-,096	,096
9. Η προετοιμασία για τη διδασκαλία των Μαθηματικών απαιτεί περισσότερο χρόνο από άλλα μαθήματα.	-,233	**,628**	,007	,006	-,021
10. Χρησιμοποιώ βιβλία Μαθηματικών για να πάρω ιδέες για δραστηριότητες Μαθηματικών για νήπια.	**,337**	**,601**	,171	-,016	,273
11. Αισθάνομαι άνετα να κάνω Μαθηματικές δραστηριότητες στην τάξη της προσχολικής.	**,613**	,100	**,332**	,241	-,151
12. Οι δραστηριότητες που σχετίζονται με τις φυσικές επιστήμες βελτιώνουν τις μαθημ. δεξιότητες των νηπίων.	**,348**	,255	-,132	,003	,113
13. Δεν νομίζω πως ταιριάζει η διδασκαλία των Μαθηματικών στα παιδιά προσχολικής ηλικίας.	**-,492**	,055	**,361**	**,318**	-,090
14. Οι δραστηριότητες που σχετίζονται με τα Μαθηματικά βελτιώνουν τις γλωσσικές δεξιότητες των νηπίων.	,153	**,510**	**-,518**	**,348**	-,172
15. Δεν έχω αρκετές επιστημονικές γνώσεις για να διδάξω Μαθηματικά σε μικρά παιδιά.	**-,495**	**,388**	-,059	**-,514**	,025
16. Δεν αισθάνομαι άνετα χρησιμοποιώντας όργανα, όπως, μεζούρες, χάρακες και ζυγαριές όταν διδάσκω μαθηματικά.	**-,687**	,171	-,190	,315	,180
17. Αισθάνομαι άβολα να μιλάω με νήπια για μαθηματικά (π.χ. υποθέσεις, προβλέψεις, μετρήσεις).	**-,660**	,226	-,056	,262	-,018
18. Χρησιμοποιώ το διαδίκτυο για να βρω ιδέες σχετικά με μαθηματικές δραστηριότητες για νήπια.	,280	,172	,053	**-,380**	**,301**
19. Τα μικρά παιδιά δεν μπορούν να μάθουν μαθηματικά πριν μάθουν να διαβάζουν.	**-,309**	**,454**	**,310**	,019	-,119
20. Παίρνω ιδέες για μαθηματικές δραστηριότητες από πράγματα που κάνουν, λένε και ρωτούν τα νήπια.	**,541**	,181	-,262	,101	,230
21. Οι δραστηριότητες που σχετίζονται με τα μαθηματικά είναι πολύ δύσκολες για τα μικρά παιδιά.	**-,492**	,280	**,460**	-,172	-,194
22. Οι ιστορίες που επιλέγω να πω στα νήπια συμπεριλαμβάνουν και λίγα μαθηματικά.	**,400**	**,398**	,078	,262	**-,490**
23. Οι δραστηριότητες που σχετίζονται με τα μαθηματικά συμβάλλουν στην κοινωνικοποίηση των νηπίων.	,081	**,450**	**-,309**	**,354**	-,021

24. Μου αρέσει να κάνω μαθηματικές δραστηριότητες με παιδιά προσχολικής ηλικίας.	**,504**	,211	,260	-**,377**	-,053
25. Φοβάμαι ότι τα παιδιά μπορεί να μου κάνουν μια ερώτηση σχετικά με τα μαθηματικά που δεν μπορώ να απαντήσω.	-**,437**	**,389**	-,181	-**,450**	,197
26. Ο σχεδιασμός και η εφαρμογή μαθηματικών δραστηριοτήτων είναι δύσκολη δουλειά.	-**,504**	**,306**	-,030	-**,385**	-,201
27. Τα μικρά παιδιά δεν ενδιαφέρονται για τα μαθηματικά.	-,268	,292	**,580**	,250	,182
28. Δεν έχω αρκετά υλικά για να κάνω μαθ. δραστηριότητες.	-**,532**	**,394**	,081	,098	**,305**
29. Προσπαθώ να συμπεριλάβω και μαθηματικές δραστηριότητες στα μαθήματα της εβδομάδας.	**,721**	,191	,219	-,023	-,267
30. Μαζεύω υλικά και αντικείμενα που μπορώ να χρησιμοποιήσω στη διδασκαλία των μαθηματικών.	**,451**	,236	,160	-,060	,185

Πίνακας 1: οι παράγοντες με τις μεταβλητές και τα φορτία τους

Η ΜΕΛΕΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Κουκουλάκης Χαράλαμπος* και Ξενοφώντος Κωνσταντίνος**

*32ο Λύκειο Θεσσαλονίκης και **Πανεπιστήμιο Λευκωσίας

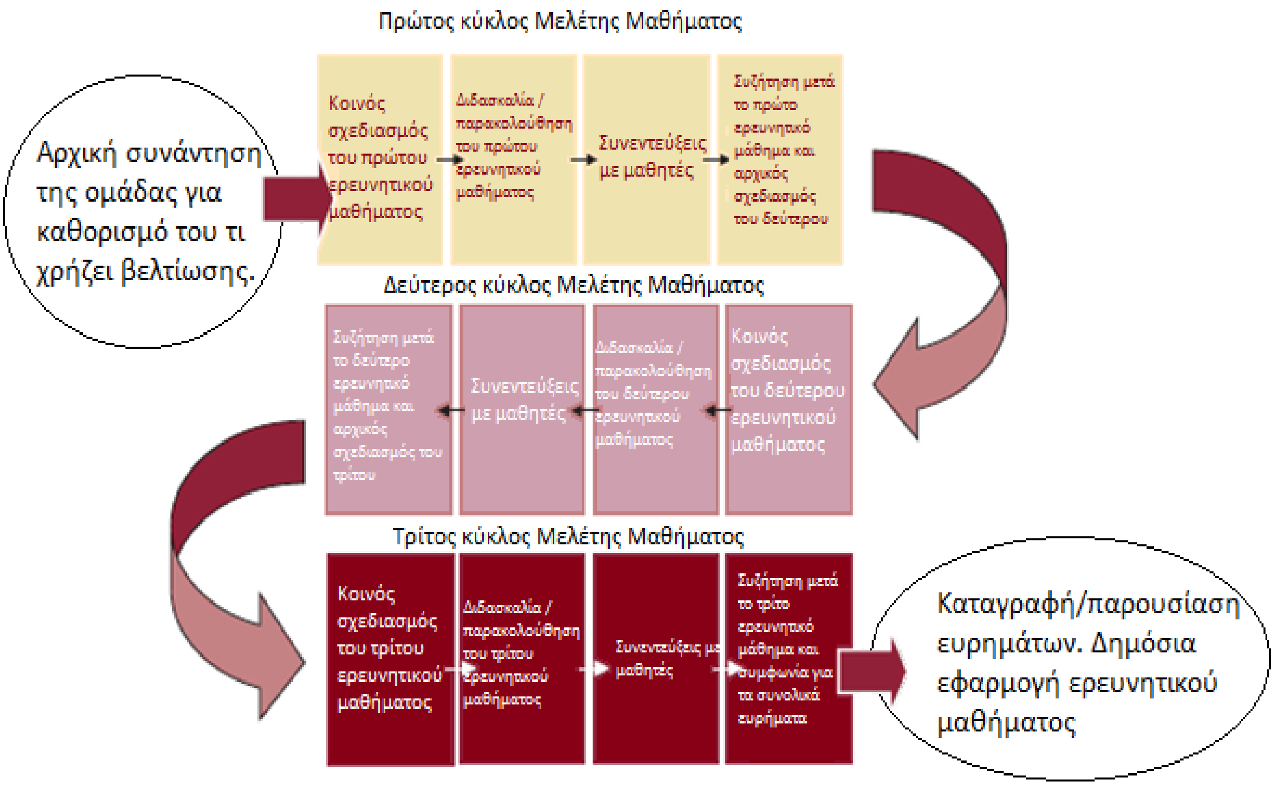
*xkou2009@gmail.com , **xenofontos.c@unic.ac.cy

Η επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών συνήθως λαμβάνει χώρα κατ' εντολή από πάνω προς τα κάτω, έχει ευκαιριακό χαρακτήρα, δεν πραγματοποιείται μέσα στην τάξη και δεν ανοίγει τις πόρτες των αιθουσών ταυτόχρονα σε πολλούς εκπαιδευτικούς. Τα παραπάνω ώθησαν έναν εκπαιδευτικό να ηγηθεί μιας ομάδας άλλων δύο συναδέλφων, εφαρμόζοντας στο ελληνικό λύκειο ένα ιαπωνικό μοντέλο, τη Μελέτη Μαθήματος, ως πλαίσιο για επαγγελματική ανάπτυξη. Στο άρθρο αυτό αποτυπώνονται (α) οι δυσκολίες στην εφαρμογή του εν λόγω μοντέλου, (β) τα οφέλη και (γ) τα μειονεκτήματα που παρατηρήθηκαν από την εφαρμογή στο ελληνικό συγκείμενο.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας στην Ελλάδα έχει περάσει από διάφορα στάδια τα τελευταία 40 χρόνια. Πολλά προγράμματα που προτείνονται και εφαρμόζονται είναι ξεκομμένα από την πραγματικότητα της τάξης και τις πλείστες φορές αποτελούν εμβόλιμες παρεμβάσεις που, δυστυχώς, δεν έχουν μακροπρόθεσμα οφέλη. Κι όμως, η επαγγελματική ανάπτυξη είναι (ή θα έπρεπε να είναι) μία διαδικασία η οποία, ανάμεσα στα άλλα, περικλείει και άτυπες μαθησιακές ευκαιρίες που επιτρέπουν στους εκπαιδευτικούς να αναστοχάζονται συνεργατικά μέσα από επαγγελματική δέσμευση, αλλά και διάθεση για προσωπική ανάπτυξη (Bubb & Earley, 2007). Λαμβάνοντας υπόψη τα πιο πάνω, το παρόν άρθρο παρουσιάζει ευρήματα από μια ερευνητική προσπάθεια εφαρμογής της Μελέτης Μαθήματος (Lesson Study, εφεξής ΜΜ), ενός μοντέλου επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών που έχει τις ρίζες του στην Ιαπωνία. Συγκεκριμένα, μέσα από το μάθημα των μαθηματικών, εξετάζονται τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα: (α) Ποιες είναι οι δυσκολίες εφαρμογής της ΜΜ στο ελληνικό συγκείμενο; (β) Ποια οφέλη εντοπίζουν οι εκπαιδευτικοί από την εφαρμογή της ΜΜ; (γ) Ποια μειονεκτήματα παρατηρούνται από την εφαρμογή της ΜΜ;

Η ΜΜ είναι μια ζωντανή προσέγγιση επαγγελματικής ανάπτυξης που τοποθετεί τους εκπαιδευτικούς στο κέντρο της επαγγελματικής δραστηριότητας, εδράζεται στη μεταξύ τους συνεργασία, έχει ενδοσχολικό και ερευνητικό προσανατολισμό, εστιάζει στη μάθηση συγκεκριμένων μαθητών μέσω των πρακτικών των εκπαιδευτικών, έχει αναστοχαστικό χαρακτήρα και τέλος δεν είναι αποσπασματική, αλλά συνεχιζόμενη (Murata, 2010). Η ΜΜ μπορεί να περιγραφεί ως μία πορεία από το σχεδιασμό στην παρατήρηση ενός μαθήματος και κατόπιν στη συζήτηση πάνω σε αυτό (Fernandez & Yoshida, 2004). Ειδικότερα, μια ομάδα εκπαιδευτικών συνεργάζεται για τον ενδελεχή σχεδιασμό ενός μαθήματος, ένας απ’ αυτούς παρουσιάζει το μάθημα, ενώ οι υπόλοιποι παρατηρούν εν δράσει την πορεία των μαθητών. Ακολούθως, η ομάδα συζητά για το μάθημα και δημιουργεί ένα αναθεωρημένο σχέδιο μαθήματος. Στη συνέχεια διδάσκουν τη νέα έκδοση (προαιρετικό) και μοιράζονται τις σκέψεις τους πάνω σε αυτή. Η ΜΜ στην παρούσα έρευνα ακολούθησε τα βήματα της ευρωπαϊκής της εκδοχής, όπως διατυπώνονται από τον Dudley (2014).



Γράφημα 1: Η διαδικασία της ΜΜ (Dudley, 2014).

Πληθώρα ερευνών εξετάζει τις δυσκολίες υλοποίησης του μοντέλου, τα οφέλη και τα μειονεκτήματά του (π.χ. Yoshida, 2012). Εντούτοις, στον ελλαδικό χώρο, η έρευνα σχετικά με την προσέγγιση αυτή είναι ελλιπής (Σιώπη κ.ά., 2011).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η εφαρμογή πραγματοποιήθηκε σε Δημόσιο Γενικό Λύκειο. Η ομάδα της αποτελούνταν από τον πρώτο συγγραφέα και άλλους δύο μαθηματικούς, στους οποίους εδώ δίνονται τα ψευδώνυμα Μανώλης και Γιάννης, με 30 και 13 έτη υπηρεσίας αντίστοιχα. Η διαδικασία εντάχθηκε σε επιμορφωτικό πρόγραμμα εκπαιδευτικών της Σχολικής Περιφέρειας και πραγματοποιήθηκε εντός δύο μηνών κατά το σχολικό έτος 2016-17. Ειδικότερα, σχεδιάστηκαν και διεξήχθηκαν τρεις μονόωρες διδασκαλίες με 12, 8 και 10 εκπαιδευτικούς-παρατηρητές να συμμετέχουν στην κάθε μία. Αρχικά σχεδιάστηκε η 1η έκδοση του μαθήματος σχετικά με τη διερεύνηση της έννοιας της πυκνότητας και της διαδοχικότητας στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών, σημειώνοντας τις υποθετικές απαντήσεις από άριστους, μέτριους, και αδύναμους μαθητές, καθώς και τους πιθανούς τρόπους με τους οποίους θα συνέχιζε σε κάθε περίπτωση η συζήτηση μέσα στην τάξη. Κατόπιν, πραγματοποιήθηκε τρίωρη συνάντηση στο σχολείο, με την εξής οργάνωση: ο Χαράλαμπος έκανε μία 45λεπτη παρουσίαση της ΜΜ στους εκπαιδευτικούς-παρατηρητές, ακολουθούμενη από την ωριαία διδασκαλία του μαθήματος (με την παρουσία όλων των εκπαιδευτικών και του συμβούλου σε ρόλο παρατηρητών) και μία τελική συζήτηση με όλους τους συμμετέχοντες πάνω στη διδασκαλία που προηγήθηκε. Ακολούθως, η ομάδα των τριών βρέθηκε για να αξιολογήσει τις παρατηρήσεις που διατυπώθηκαν από τους συναδέλφους, αλλά και τις προσωπικές παρατηρήσεις και αναθεώρησε το μάθημα. Αυτή η διαδικασία επαναλήφθηκε άλλες δύο φορές, οπότε ολοκληρώθηκε ο τριπλός κύκλος της ΜΜ, σε τρεις διαφορετικές τάξεις της Α΄ Λυκείου. Η όλη παρέμβαση έκλεισε με ευρεία ενημέρωση άλλων 20 καθηγητών μαθηματικών της περιφέρειας. Τα ερευνητικά δεδομένα συγκεντρώθηκαν μέσω λεπτομερούς περιγραφής των σταδίων της έρευνας, βιντεοσκοπήσεις των μαθημάτων και ηχογραφήσεις των συναντήσεων της ομάδας των τριών εκπαιδευτικών, καθώς και χρήσης αναστοχαστικού ημερολογίου. Η θεματική ανάλυση των δεδομένων (Miles & Huberman, 1994) έφερε στην επιφάνεια ζητήματα που αφορούν τις δυσκολίες κατά την εφαρμογή του μοντέλου της ΜΜ, τα παιδαγωγικά του οφέλη, και τα μειονεκτήματά του.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Δυσκολίες κατά την εφαρμογή του μοντέλου

Αρχικά, λόγω της πρώτης φοράς πραγματοποίησης της παρέμβασης, δυσκολία αποτέλεσε το γεγονός ότι ο πρώτος συγγραφέας έπρεπε να συνδυάσει ταυτόχρονα τρεις ρόλους: του επιμορφωτή τόσο της ομάδας

ΜΜ όσο και της ευρύτερης ομάδας των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στην παρατήρηση του μαθήματος, του μέλους της ομάδας ΜΜ, αλλά και του διευκολυντή (facilitator) της διαδικασίας. Ακολούθως, ανέκυψαν οι εξής δυσκολίες:

α) Η εμπιστοσύνη των συναδέλφων απέναντι στη διαδικασία και στο πρόσωπο του συναδέλφου-επιμορφωτή.

> Χαρ.: Οι συνάδελφοι θα παρατηρούν τη μάθηση των μαθητών και τις αλλαγές στα συμφωνηθέντα [στο σχεδιασμό του μαθήματος] από τον εκπαιδευτικό που κάνει το μάθημα.
>
> Γ.: Εσύ το λες αυτό. Οι άλλοι 10 που θα έρθουν, θα παρατηρήσουν εσένα! [το διδάσκοντα].
>
> Μ.: Σου μιλάω γιατί και εσύ δεν ήξερες κάποια πράγματα στην αρχή και μπερδεύτηκες... Και τι να μου κάνεις εμένα τώρα; Επαγγελματική ανάπτυξη σε μία [διδακτική] ώρα;… Εγώ δεν θεωρώ ότι επειδή θα κάνω [το ερευνητικό] μάθημα θα έχω επαγγελματική ανάπτυξη!... Μπήκαμε στο παιχνίδι για να σε βοηθήσουμε, όχι για εμάς!

Οι Darling-Hammond και Richardson (2009) αναφέρονται σε έρευνες που υποστηρίζουν ότι ο σχηματισμός μιας επαγγελματικής κοινότητας εκπαιδευτικών είναι γεμάτος από συγκρούσεις, σιωπές και παρεξηγήσεις.

β) Ύπαρξη φόβου της δημόσιας έκθεσης και των ενδεχόμενων αρνητικών κριτικών.

Το ζήτημα αυτό επισημαίνεται τόσο από το Μανώλη όσο και από το Γιάννη. Χαρακτηριστικά, ο Γιάννης αναφέρει πως «άμα δεν κάνεις ένα expert-lesson, θα σχολιαστεί, θα σε κρίνει ο άλλος, σε άλλο επίπεδο».

γ) Η εμμονή στο αναλυτικό πρόγραμμα και στην περπατημένη.

Το ακόλουθο απόσπασμα είναι από το ημερολόγιο του πρώτου συγγραφέα:

> Χωρίς να έχουμε συνεννοηθεί από πριν, όλοι, αβίαστα, ξεκινήσαμε να παίρνουμε ως βάση για το σχεδιασμό του μαθήματος το αναλυτικό, ούτε καν άλλα εξωσχολικά βοηθήματα.

Υπήρχε έλλειψη εξοικείωσης με την κριτική και ερευνητική προσέγγιση του προγράμματος σπουδών, ώστε να προκύψουν χρήσιμες συνέπειες για τη μάθηση των μαθητών και τη διδασκαλία (Akiba & Wilkinson, 2016). Χαρακτηριστική είναι η ακόλουθη δήλωση του Μανώλη, ο οποίος εκφράζει δυσπιστία προς τις ερωτήσεις ανοικτού τύπου:

> Ο σχεδιασμός του μαθήματος ήταν δύσκολος γιατί είχε προδιαγραφές: ανοικτές ερωτήσεις. Εγώ έκανα ποτέ τέτοιο μάθημα; Όχι! Πώς θα βγει η

ύλη; Πάρτο-φάτο. Στο [καθημερινό] μάθημα έτσι είναι! Κάποιοι [μάλιστα] δεν βάζουν [καν] ερωτήσεις, κάποιοι κάνουν παρουσίαση, σεμινάριο.

Αλλά και ο Γιάννης, θίγει ένα φαινόμενο που συχνά απαντάται μέσα στις τάξεις:

Φοβάμαι ότι δε θα βγάλουμε κανένα συμπέρασμα [από τη μάθηση των μαθητών] και θα τα παρατήσουν… Δεν έχουν μάθει να δουλεύουν ανοικτά προβλήματα… Ο έλληνας μαθητής έχει στο μυαλό του μια μεθοδολογία για να λύνει εξίσωση, μια μεθοδολογία για να λύνει ανίσωση. Ξαφνικά θα πάει το μυαλό του εκεί; [να σκεφτεί ανοικτά]. Το μυαλό του θα πάει πρώτα στη μεθοδολογία!

Η επιρροή ενός "άτυπου φροντιστηριακού τρόπου σκέψης" στη διδασκαλία, δυσκολεύει την επεξεργασία ανοικτών ερωτήσεων:

Μ.: Προσπαθώ να τους δείξω ότι πρέπει να ξέρουν θεωρία, τους ορισμούς, τις παρατηρήσεις και τα μαθηματικά σε βάθος. Περιττό να σου πω ότι δεν παρακολουθούν, άμα δεν τους κάνεις θέματα. Διαπίστωσα ότι από το φροντιστήριο τα ξέρανε όλα με συνταγές. Τι μας λες κύριε για θεωρία; Εμείς πρέπει να λύσουμε ασκήσεις! Θέλοντας και μη, είτε δούλευες στα φροντιστήρια, είτε όχι, τα φροντιστήρια σε επηρεάζουν στη καθημερινότητα σου, είναι από πάνω σου! Οπότε συμβιβάζεσαι. Το φροντιστήριο θα βάλει 100 ψηφίδες. Εγώ θα βάλω άλλες 100 και ό,τι βγει καλό.

Όπως, επίσης, και η περιρρέουσα κοινωνική ατμόσφαιρα:

Γ.: οι γονείς [των μαθητών] μπορεί να αντιδράσουν. Μας βάζεις κάποια θέματα *γενικά* [ανοικτά]. Τα παιδιά μας θα πάνε να δώσουν [συγκεκριμένες] εξετάσεις!

δ) Η άρνηση μιας μερίδας μαθητών να συμμετάσχουν στη διαδικασία παρά την παρουσία του Συμβούλου και αρκετών εκπαιδευτικών.

Όπως σημειώνεται στο ημερολόγιο του πρώτου συγγραφέα,

9 από τους 21 γονείς δήλωσαν ότι δεν επιτρέπουν στα παιδιά τους να παρακολουθήσουν το μάθημα λόγω της βιντεοσκόπησης.

ε) Η μη πρότερη εμπειρία οργανωμένης παρατήρησης και η μη κατανόηση του πρωτοκόλλου παρατήρησης εκ μέρους των εκπαιδευτικών.

Γ: Θέλω να δω ένα βίντεο, να δω πώς γίνεται η παρατήρηση. Εγώ αγχώνομαι πώς γίνεται, έχει βαβούρα, δεν μπορείς να παρατηρήσεις ένα άτομο! Να πάμε κοντά τους ή όχι; Να τους μιλήσουμε και αν ναι, πώς να επέμβουμε;

Οφέλη

Οι εκπαιδευτικοί,

α) ανακάλυψαν συγκεκριμένες αδυναμίες στο γνωστικό υπόβαθρο των μαθητών.

> Παρατηρητής: Μου έκανε εντύπωση η δυσκολία των παιδιών να χειριστούν κλάσματα. Στην 1η δραστηριότητα τα παιδιά τα μετέτρεψαν σε δεκαδικούς και ασχολήθηκαν μόνο με αυτό. Δεν έφτιαξαν καθόλου ισοδύναμα κλάσματα. Διδάσκω συνέχεια σε Λύκειο. Είχα την εντύπωση ότι τα παιδιά στο Γυμνάσιο ασχολούνται πολύ με κλάσματα», αλλά δεν είναι έτσι!

β) έκαναν θετικές διαπιστώσεις για αδύναμους μαθητές.

> Μ.: Μία [αδύναμη] μαθήτρια είχε μία πολύ καλή ιδέα για συζήτηση (ότι το 3,1/8 και 3,2/8 είναι μεταξύ των κλασμάτων 3/8 και 5/8), αλλά δεν είχε το θάρρος να την πει δημόσια.

γ) κατανόησαν καλύτερα τον τρόπο μάθησης των μαθητών.

> Μ.: Εγώ ως συνήθως τα χρόνια τα πολλά που δουλεύω, η διδασκαλία που κάνω είναι δασκαλοκεντρική… το *αν* κατάλαβε ένας μαθητής ένα αντικείμενο, φαίνεται μέσα από την εφαρμογή της θεωρίας, αλλά το *πώς* μαθαίνει ένας μαθητής, αυτό δεν το είχα προσεγγίσει άλλη φορά… είδαμε μέσα από το μάθημα πόσο διαφορετικά μπορεί να σκέφτεται ο κάθε μαθητής. Που αυτό εδώ γενικά το ξέρουμε και από τη ζωή μας και την επιστήμη μας, αλλά δεν το απολαμβάνουμε, ή δεν το εισπράττουμε, ή δεν το λαμβάνουμε υπόψη μας όταν κάνουμε το μάθημα.

Και αλλού:

> Παρατηρητής: Όχι η δική σου απάντηση [του διδάσκοντα], αλλά από τη συζήτηση των συμμαθητών του, προήλθε η μάθησή του.

δ) έλαβαν θετικά τις παρατηρήσεις των συναδέλφων σχετικά με τον τρόπο διδασκαλίας τους.

> Μ.: Η εξέλιξη, η ανατροφοδότηση, είναι μια ωραία διαδικασία, γιατί έχεις τις παρατηρήσεις, βλέπεις τι έχει γίνει. Είναι χαρά, γιατί παίρνεις πληροφορίες από το πραγματικό επίπεδο.

ε) καλλιέργησαν μια πολυεπίπεδη συνεργασία μέσα σε οργανωμένο πλαίσιο.

> Γ.: Κάνοντας τα ίδια πράγματα συνέχεια [διδάσκοντας με τον ίδιο τρόπο], θεωρείς τον εαυτό σου ότι είσαι ο top, διότι το κάνεις [το μάθημα] μόνος σου, κάνεις το μονόλογό σου και βγαίνεις και λες: “α, ρε συ, ποιος είμαι!”. Και οι μαθητές από κάτω, λένε: δεν καταλαβαίνω τίποτα! [το λένε σε συναδέλφους σου!]. Δεν έχεις κάποιον [άλλον εκπαιδευτικό], να σε

ευθυγραμμίζει, να σε εξομαλύνει… Η μοναξιά μέσα στις αίθουσες μπορεί να φέρει αυθαιρεσίες.

Παρατηρητής: συζήτηση μεταξύ των συναδέλφων υπάρχει στο διάλλειμα. Δεν έχω συναντήσει συναδέλφους που να μην λένε έκανα αυτό, εκείνο κτλ. Και νομίζω ότι είναι ουσιαστική η κουβέντα έστω και στο 5λεπτο του διαλλείματος. Εσείς, δημιουργήσατε *το πλαίσιο*. Βάλατε συγκεκριμένα πλαίσια, διοχετεύσατε σε *τυπικά σχήματα* αυτήν την κουβέντα. Και νομίζω ότι αυτό έχει κάτι να προσφέρει.

Μ.: καλλιεργείς ένα σπόρο συνεργασίας-επαγγελματικού προσδιορισμού και ανάπτυξης στους εκπαιδευτικούς που το παρακολουθούν. Σε όσα σχολεία έχω πάει, ποτέ δεν έχω συζητήσει για συγκεκριμένο μάθημα… να ακούσουμε [άλλους], να [το] συνθέσουμε… Ποτέ άλλοτε δεν βιντεοσκοπήθηκε μάθημα και δεν υπήρξε τέτοια συνεργασία εκπαιδευτικών!

στ) έθεσαν θέματα κατά τη διάρκεια των συναντήσεων που δημιούργησαν γόνιμο προβληματισμό.

«Πώς μαθαίνουν οι μαθητές μας;», «Μπορούν οι διδακτικοί στόχοι να απευθύνονται σε όλους τους μαθητές ή να υπάρχουν τάξεις με επίπεδα μαθητών;», «Κάτω από ποιες προϋποθέσεις βοηθάνε οι νέες τεχνολογίες;»

Επιγραμματικά, η μεταφορά της νοοτροπίας ή πρακτικών που γνωρίστηκαν μέσα από τη ΜΜ στην καθημερινή πρακτική της διδασκαλίας, αποτελεί σημαντικό όφελος (Chokshi & Fernandez, 2004).

Μειονεκτήματα

Η διαδικασία της ΜΜ,

α) *είναι χρονοβόρα.*

Απαιτείται πολύς χρόνος από τους εκπαιδευτικούς και μάλιστα απογευματινός. Επιπλέον, η διδασκαλία μέσω της ΜΜ απαιτεί περισσότερο χρόνο σε σχέση με τη μετωπική διδασκαλία, οπότε η κάλυψη της πολλής ύλης στενεύει τα χρονικά περιθώρια,

Χαρ: Δυσκολευτήκαμε να βρούμε χρόνο για τις μεταξύ μας συναντήσεις.

Μ.: Κάναμε μια ώρα μόνο για τη διαδοχικότητα των ρητών, ενώ χρειάζονται 4 για ολόκληρη την παράγραφο της Διάταξης. Οι ώρες αυτές όμως, δεν είναι με τη ΜΜ, είναι καθοδηγούμενες και δασκαλοκεντρικές, με την πρώτη χρειάζονται περισσότερες.

β) οδηγεί στη ψυχική εξουθένωση των συμμετεχόντων.

Γ.: είναι πιο εύκολο να διδάξεις μετωπικά, έχεις περισσότερο χρόνο στη διάθεσή σου και δεν έχεις τόση κούραση που προκύπτει από τη βαβούρα όταν έχεις ομάδες ή πολλή συζήτηση μέσα στην τάξη.

γ) εμποδίζεται από το υπάρχον θεσμικό πλαίσιο.

Παρατηρητής: Είναι ενδιαφέρουσα διαδικασία σε πειραματικό επίπεδο, αλλά νομίζω δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην πράξη. Στην πράξη, νομίζω, έτσι όπως λειτουργεί το σύστημα, μπαίνεις στην τάξη και τα λες, δεν μπορείς να πηγαίνεις τόσο αργά. Εσείς θέλατε να πείτε τρία πράγματα, είπατε τα δύο, κατάλαβαν το ένα. [Αν πάμε έτσι] ένα κεφάλαιο θα κάνουμε όλο και όλο!

Μ.: δεν μπορείς να βρίσκεις εύκολα συναδέλφους ως παρατηρητές, όποτε θέλεις.

Παρ' όλη την αποτελεσματικότητα του μοντέλου ως εργαλείο επαγγελματικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών, οι Hunter και Back (2011) επιβεβαιώνουν τα παραπάνω μειονεκτήματα εξαιτίας του εντατικού ρυθμού.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Παρ' όλες τις δυσκολίες που έλαβαν χώρα «πίσω από τη βιτρίνα», η παρέμβαση ήταν πετυχημένη εξαιτίας της *πρωτοτυπίας* της κατά κύριο λόγο και λιγότερο της ενεργούς συμμετοχής των εκπαιδευτικών στη βαθιά κατανόηση του τρόπου σκέψης των μαθητών. Ο λόγος ίσως έγκειται στο ότι απαιτείται η υιοθέτηση μιας κουλτούρας διδασκαλίας διαφορετικής από αυτήν που έχουμε συνηθίσει στο εξετασιοκεντρικό σύστημα εκπαίδευσης του Λυκείου, που ενισχύει τη στείρα μεθοδολογία και απομνημόνευση. Λόγω της πρώτης επαφής τους με τη ΜΜ, οι εκπαιδευτικοί δεν μπήκαν στο βάθος της ουσίας της παρέμβασης, για το πώς να παρατηρήσουν τη μάθηση των μαθητών, αλλά περισσότερο έμειναν στη γνώση και εφαρμογή της διαδικασίας (Bocala, 2015). Αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με τον Parks (2009), στην έρευνα του οποίου διαπιστώθηκε ότι, παρόλο που οι συμμετέχοντες εξήραν τη σημασία της συνεργασίας, εντούτοις οι διαθέσεις τους δεν μεταφράστηκαν σε βαθιές εξερευνήσεις στις πρακτικές διδασκαλίας. Είναι αλήθεια ότι, κατά τους Sam, White και Mon, (2005), η επιτυχία ή η αποτυχία του μοντέλου, επηρεάζεται από τη δέσμευση των συμμετεχόντων. Η θετική προαίρεση, αλλά ελλιπής δέσμευση, αποτελεί μία σημαντική δυσκολία. Οι Akiba και Wilkinson (2016) υποστηρίζουν ότι η πίεση από τα προγράμματα των εκπαιδευτικών είναι τέτοια που δεν τους προσφέρει τη δυνατότητα να ασχοληθούν επαρκώς με τη ΜΜ, μία διεργασία που έχει συνεχιζόμενο χαρακτήρα. Αυτό φάνηκε στην παρούσα έρευνα όπου η παρέμβαση σε ένα μόνο μέρος της παραγράφου της Διάταξης των αριθμών (την πυκνότητα και διαδοχικότητα των αριθμών) αύξησε το χρόνο που το αναλυτικό πρόγραμμα προέβλεπε για τη συγκεκριμένη παράγραφο. Αναφορικά με τα μειονεκτήματά του μοντέλου, η έρευνα βρίσκεται σε συμφωνία με προηγούμενες έρευνες, ως προς τη μεγάλη κατανάλωση χρόνου που απαιτεί (Chokshi & Fernandez, 2004), την παροχή χρόνου εργασίας πέρα από το συνηθισμένο ωράριο (Ylonen & Norwich, 2013) και την εμμονή του εκπαιδευτικού συστήματος στο να θεωρεί το Λύκειο ως χώρο προετοιμασίας για τις εξετάσεις (Verhoef et al, 2014). Για την αδυναμία καθημερινής εφαρμογής της διαδικασίας, κάνουν λόγο και οι Roorda και de Vries (2016) στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση του ολλανδικού πλαισίου. Στην περίπτωσή μας, για το χειρισμό των χρονικών περιορισμών, λήφθηκε υπόψη η πρόταση των Chokshi και Fernandez (2004) για ανάληψη εργασιών των εκπαιδευτικών πριν από τις κοινές συναντήσεις, που εν προκειμένω, αυτό επιτεύχθηκε με την ανταλλαγή ηλεκτρονικών μηνυμάτων για καλύτερη συνεννόηση.

Κλείνοντας, αναφέρουμε ότι η παρούσα έρευνα έρχεται να συμπληρώσει προηγούμενες προσπάθειες δημιουργίας κοινοτήτων μάθησης των εκπαιδευτικών στον ελληνικό χώρο (π.χ. Σιώπη κ.ά., 2011) και συνεισφέρει στην κατανόηση της εφαρμογής της ΜΜ που διεξάγεται γενικότερα σε παγκόσμιο επίπεδο. Επιπλέον, συνεισφέρει στη συζήτηση που γίνεται αυτήν την περίοδο για την επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών σε επίπεδο ηγεσίας του Υπουργείου Παιδείας. Εντούτοις, χρειάζονται περισσότερες και πιο συστηματικές προσπάθειες, κάτι που θα μπορούσε να αποτελέσει το αντικείμενο μελλοντικών ερευνητικών δράσεων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Akiba, M., & Wilkinson, B. (2016). Adopting an international innovation for teacher professional development: State and district approaches to lesson study in Florida. *Journal of Teacher Education, 67*(1), 74-93.

Bocala, C. (2015). From experience to expertise: The development of teachers' learning in lesson study. *Journal of Teacher Education, 66*(4), 349-362.

Bubb, S., & Earley, P. (2007). *Leading and managing continuing professional development* (2nd ed.). London: Paul Chapman.

Chokshi, S., & Fernandez, C. (2004). Challenges to importing Japanese lesson study: Concerns, misconceptions, and nuances. *Phi Delta Kappan, 85*(7), 520.

Darling-Hammond, L., & Richardson, N. (2009). Research review/teacher learning: What matters? *Educational Leadership, 66*(5), 46-53.

Dudley, P. (2014) (Ed). *Lesson Study: Professional learning for our time.* London: Routledge.

Fernandez, C., & Yoshida, M. (2004). *Lesson study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hunter, J., & Back, J. (2011). Facilitating Sustainable Professional Development through Lesson Study. *Mathematics Teacher Education and Development, 13*(1), 94-114.

Miles, M., & Huberman, A. (1994). *Qualitative Data Analysis* (2nd ed.). California: Sage Publications Inc.

Murata, A. (2010). Teacher learning with lesson study. In P. Peterson, E. Baker, & B. McGaw. (Eds.). *International Encyclopedia of Education*, volume 7 (pp. 575-581). Oxford: Elsevier.

Parks, A. N. (2009). Collaborating about what? An instructor's look at preservice lesson study. *Teacher Education Quarterly, 36*(4), 81-97.

Roorda, G., & de Vries, S. (2016). *Lesson Study: does it affect activating behaviors of mathematics teachers?* Paper presented at WALS 2016, Exeter, United Kingdom.

Sam, L. C., White, A. L., & Mon, C. C. (2005). Promoting mathematics teacher collaboration through lesson study: What can we learn from two countries' experience. In *Proceedings of the 8th International Conference of The Mathematics Education into the 21st Century Project: Reform, Revolution and Paradigm Shifts in Mathematics Education* (pp. 135-139).

Σιώπη, Κ., Χατζηγούλα, Α., Μαναρίδης, Α., Σακονίδης, Χ., Πόταρη, Δ. (2011). Δράσεις εξέλιξης μιας κοινότητας διερεύνησης εκπαιδευτικών και ερευνητών στα μαθηματικά: η Μελέτη Μαθήματος. *Πρακτικά 4ου Συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ* (σ. 421-429).

Verhoef, N., Tall, D., Coenders, F., & van Smaalen, D. (2014). The complexities of a lesson study in a Dutch situation: Mathematics teacher learning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 12*(4), 859-881.

Ylonen, A., & Norwich, B. (2013). Professional learning of teachers through a Lesson Study process in England: contexts, mechanisms and outcomes. *International journal for lesson and learning studies*, *2*(2), 137-154.

Yoshida, M. (2012). Mathematics lesson study in the United States: Current status and ideas for conducting high quality and effective lesson study. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, *1*(2), 140-152.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΑΓΧΟΣ, ΨΥΧΟΛΟΓΙΚΟΣ ΧΡΟΝΟΣ & ΧΡΟΝΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ: ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Μερατζής Παύλος

Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

paulmeratzis@gmail.com

Το παρών άρθρο είναι μία σύνοψη της διπλωματικής εργασίας με τίτλο «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΑΓΧΟΣ, ΨΥΧΟΛΟΓΙΚΟΣ ΧΡΟΝΟΣ & ΧΡΟΝΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ: Τεχνικές Διαχείρησης», η οποία εκπονήθηκε στα πλαίσια του ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών του ΕΚΠΑ. Επιβλέπων καθηγητής και εισηγητής της εργασίας αυτής ήταν ο κ. Σπύρου Παναγιώτης. Σκοπός της εργασίας ήταν η εξέταση του μαθηματικού άγχους και άγχους εξέτασης σε σχέση με τον ψυχολογικό χρόνο και την εκτίμηση της χρονικής διάρκειας μέσα στην διδασκαλία και την εξέταση των Μαθηματικών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Έχει παρατηρηθεί ότι όταν τα άτομα καταλαμβάνονται από αρνητικά στερεότυπα σχετικά με την αναμενόμενη απόδοσή τους ή όταν βρίσκονται σε μία εξεταστική κατάσταση που είναι ιδιαίτερα κρίσιμη για το μέλλον τους, ένα αγχογόνο περιβάλλον μπορεί να αντιστρέψει την επιτυχία τους κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (Beilock, 2008).

Οι περισσότερες έρευνες υπογραμμίζουν ότι οι περιβαλλοντικές συνθήκες που ευνοούν το μεγάλο άγχος δημιουργούν στους υποψήφιους ανησυχίες για την κατάσταση και τις συνέπειές μίας αποτυχίας, παράμετρος που έχει βρεθεί να ανταγωνίζεται την λειτουργία της εργασιακής μνήμης (working memory), εκείνου, δηλαδή, του τμήματος της μνημονικής ικανότητας που διαχειρίζεται τις αποθηκευμένες πληροφορίες και είναι διαθέσιμο για επίδοση. Κατά συνέπεια, η απόδοση των ατόμων που βασίζεται περισσότερο στην εργασιακή μνήμη για την επιτυχή εκτέλεση των μαθηματικών ασκήσεων, είναι αναμενόμενο να μειώνεται αντιστρόφως ανάλογα όταν αυξάνεται η περιβαλλοντική πίεση (Beilock, 2008).

Η επίδραση του περιβάλλοντος και του άγχους των εξετάσεων σε συνάρτηση με τον περιορισμένο χρόνο που δίδεται για την επίλυση κάποιων ιδιαίτερα απαιτητικών υπολογιστικά ασκήσεων έχει βρεθεί ότι επηρεάζουν σε κάθε περίπτωση την τελική επίδοση των μαθητών. Αντίθετα, συγκεκριμένες διδακτικές πρακτικές μπορούν να διευκολύνουν τους μαθητές στην εξέταση, όπως για παράδειγμα η εξάσκηση σε τέτοιο βαθμό και με τέτοιο τρόπο ώστε η επίλυσή τους να μην απαιτεί πλέον δύσκολους υπολογισμούς που επιδρούν στην αύξηση του άγχους (Beilock et al., 2004). Οι καθηγητές, καλλιεργώντας σχέσεις με τους μαθητές και διαμορφώνοντας ένα θετικό ψυχολογικό κλίμα στις τάξεις, δημιουργούν υψηλό αίσθημα αυτάρκειας στους μαθητές και καλύτερες συνθήκες μάθησης και διδασκαλίας (Ματσαγγούρας, 2002).

Παράλληλα, απαιτείται διερεύνηση της σχέσης μεταξύ μαθηματικού άγχους, χρονικής διάρκειας και ψυχολογικού χρόνου. Ελάχιστες είναι οι έρευνες που εντοπίζουν τη δυσκολία του μαθητή στην αντίληψη του χρόνου και της διάρκεια του, καθώς και τη μετατροπή της χρονικής πίεσης σε ψυχολογική. Το τελευταίο έχει σαν συνέπεια μαθηματικά λάθη και λανθασμένες εκτιμήσεις στην χρονική διάρκεια.

Μία διάσταση του χρόνου, η οποία προσεγγίζει και μπορεί πιθανόν να ερμηνεύσει τη βίωσή του ως αγχωτικό γεγονός είναι και η σχέση του χρόνου με τα συναισθήματα. Σύμφωνα με την ψυχαναλυτική ερμηνεία, το κοινό στοιχείο μεταξύ χρόνου και συναισθημάτων είναι ότι και τα δύο αντλούν την προέλευσή τους από τις πρώιμες εμπειρίες έντασης και αναμονής.

Στην έρευνα, των Suck και Holling (1997) για το στρες που προκαλείται από την αναμονή, υποστηρίζεται ότι σύμφωνα με τις γνωστικές θεωρίες ερμηνείας του άγχους, το στρες που προκαλείται από την αναμονή συνδέεται με δύο στοιχεία. Αυτά είναι: το ψυχολογικό κόστος της αναμονής και η πιθανότητα διασποράς κατά τις διαφορετικές περιόδους αναμονής.

Αναδρομική Εκτίμηση Χρονικής Διάρκειας (Retrospective Time Estimation)

Σύμφωνα με τον Ornstein (1969), η αναδρομική εκτίμηση της χρονικής διάρκειας ακολουθεί την υπόθεση του μεγέθους χωρητικότητας της μνήμης, δηλαδή είναι μία συνάρτηση του μεγέθους και χώρου που καταλαμβάνουν τα γεγονότα ή τα αποσπάσματα στη μνήμη. Αντίθετα, το μοντέλο αλλαγών περιεχομένου (Block, 1990) είναι μία εναλλακτική προσέγγιση της αναδρομικής εκτίμηση της χρονικής διάρκειας, που αποδίδει την εκτίμηση στο ποσό των επιτρεπόμενων από τη μνήμη αλλαγών περιεχομένου.

Εκτίμηση Προσδοκώμενης Χρονικής Διάρκειας (Prospective time estimation)

Η εκτίμηση της προσδοκώμενης χρονικής διάρκειας ορίζεται ως μία κατάσταση όπου ένα άτομο γνωρίζει καθόλη τη διάρκεια ενός γεγονότος ότι θα κληθεί να εκτιμήσει τη χρονική του διάρκεια (Zakay & Block, 2004) και εκτιμά τον χρόνο βάση των μονάδων υποκειμενικού χρόνου που έχουν μετρηθεί. Είναι μία συσσώρευση της βιωμένης διάρκειας (Block, 1990). Αυτή η λειτουργία απαιτεί διεργασίες απαιτούμενης προσοχής που γίνονται μαζί με την επεξεργασία μη-χρονικών πληροφοριών (Pouthas & Perbal, 2004). Λόγω της δυϊκότητας αυτής καταναλώνονται περισσότεροι πόροι προσήλωσης και άρα χρησιμοποιείται περισσότερος χώρος στη μνήμη.

Μέσα σε αυτόν τον χώρο της μνήμης είναι αποθηκευμένες σαν αντικείμενα οι πληροφορίες, προσδίδοντας χωρικότητα σε αυτές. Πώς όμως μπορούν οι μαθητές να διαχειριστούν τις πληροφορίες μέσα στον χρόνο και σε συγκεκριμένα χρονικά πλαίσια; Τι εργαλεία διαχείρισης και μέτρησης του χρόνου έχουν αναπτύξει ή μπορούν να δοθούν-αναπτυχθούν ώστε να ελέγχεται η διάρκεια επίλυσης ενός προβλήματος;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Ακολουθεί μία ποιοτική έρευνα. Στο πείραμα συμμετείχαν έξι άτομα. Τέσσερα αγόρια και 2 κορίτσια. Τα 3 αγόρια ήταν απόφοιτοι Γ’ Λυκείου και μόλις είχαν τελειώσει με τις Πανελλαδικές εξετάσεις. Οι εναπομείναντες ήταν μαθητές που προετοιμάζονταν το καλοκαίρι για την επερχόμενη χρονιά της Γ’ Λυκείου και τις Πανελλαδικές εξετάσεις. Η επιλογή τους έγινε τυχαία μέσα από μία λίστα μαθητών που είχαν μέτρια προς καλή επίδοση στα Μαθηματικά.

Έγινε διαχωρισμός των μαθητών σε 2 τμήματα, στους απόφοιτους και στους τελειόφοιτους. Αυτό έγινε για να γίνει διαχωρισμός του παράγοντα άγχους για τις Πανελλήνιες εξετάσεις, το οποίο διακατέχει περισσότερο τους τελειόφοιτους (Μπιτσιάνης, 2011). Το πείραμα πραγματοποιήθηκε από τον ίδιο τον συγγραφέα σε 2 διαφορετικές ημέρες την περίοδο του καλοκαιριού.

Το πείραμα είχε να κάνει με την θεωρία πινάκων και την επίλυση συστημάτων, και χωρίστηκε σε 2 ενότητες. Έτσι, συνδυάζεται κάτι γνωστό, για όλους τους μαθητές, με κάτι άγνωστο. Η πρώτη ενότητα ήταν το μάθημα και η δεύτερη τα διαγωνίσματα. Το μάθημα χωρίσθηκε σε πέντε υποενότητες. Η ενότητα των διαγωνισμάτων χωρίστηκε-κατακερματίστηκε σε 4 μικρότερα διαγωνίσματα, αντί για ένα ενιαίο με τέσσερα θέματα.

Χρησιμοποιήθηκαν τα παρακάτω ερωτηματολόγια για τη μέτρηση άγχους:

Το STAI-T, που μετρά το χαρακτηριστικό άγχος (Spielberger, 1989)

Το STAI-S, που μετρά το παρών άγχος (Spielberger, 1989)

Το TAI, που μετρά το άγχος εξέτασης (Spielberger, 1980).

Το AMAS, που μετρά το Μαθηματικό Άγχος. (Eden, Heine & Jacobs, 2013)

Σκοπός αυτού είναι η δυνατότητα εύρεσης συσχετισμών μεταξύ άγχους, εκτίμησης της χρονικής διάρκειας και του ψυχολογικού χρόνου (Lueck, 2007).

Πριν την έναρξη του πειράματος, ζητείται από τους μαθητές να συμπληρώσουν τα ερωτηματολόγια STAI-T, TAI και AMAS. Στο τέλος κάθε υποενότητας του μαθήματος, ζητούνται από τον κάθε μαθητή εντυπώσεις/σχόλια και αναδρομική χρονική εκτίμηση της διάρκειας της υποενότητας. Στο τέλος του μαθήματος ζητείται εκτίμηση όλης της διάρκειας και εντυπώσεις. Το ίδιο γίνεται και στην ενότητα των διαγωνισμάτων. Μεταξύ μαθήματος και διαγωνισμάτων δίνεται το STAI-S, για να μετρηθεί το άγχος τη στιγμή που ξεκινούν τα διαγωνίσματα. Όλες οι ζητούμενες εκτιμήσεις είναι αναδρομικές. Δυστυχώς υπάρχει ο φόβος να εκληφθούν κάποιες σαν εκτιμήσεις προσδοκώμενου χρόνου (Block, 1990), εάν οι μαθητές μπουν στη διαδικασία «να βρουν το σωστό» χρονικό διάστημα που πέρασε.

Ακολουθούν οι συνεντεύξεις. Οι βασικές ερωτήσεις σχετίζονται με τον χαρακτηρισμό των ενοτήτων και υποενοτήτων σε ενδιαφέρουσες και λιγότερο ενδιαφέρουσες, καθώς και με τη διάταξη και χαρακτηρισμό της ψυχολογικής διάρκειας κάθε ενότητας/υποενότητας (Wearden, 2016). Τέλος, έγιναν ερωτήσεις γύρω από την εμπειρία των μαθητών σχετικά με τη Γ' Λυκείου, το άγχος που βίωσαν και τη χρονική διάρκειά της, απευθύνονται προς αυτούς.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Παρατηρείται συχνά από τους μαθητές η χρήση ενός μηχανισμού αυτορρύθμισης των χρονικών εκτιμήσεων, ο οποίος βασίζεται στο πώς νιώθει ο μαθητής όταν πέρναγε ο χρόνος, πώς τον ένιωσε να περνά και τι εκτίμηση θα έκανε (Block, 1990). Φάνηκε έντονα στη διάρκεια του πειράματος, καθώς αναπροσάρμοζαν τις εκτιμήσεις τους, όπως επίσης στις συνεντεύξεις στο τέλος, όπου περιγράφηκε ο μηχανισμός αυτός. Επίσης παρατηρούνται μηχανισμοί αυτορρύθμισης, για καλύτερες εκτιμήσεις, μέσα από ομαδική συζήτηση και καταγραφή της πραγματικής χρονικής διάρκειας μετά το πέρας κάθε διαγωνίσματος.

Μέσα από την ανάλυση των δεδομένων προκύπτει πως δεν υπάρχει σταθερή αντιστοιχία μεταξύ χρονικών εκτιμήσεων και ψυχολογικού χρόνου. Επίσης, το ενδιαφέρον που προξενεί κάποια ενότητα δεν έχει καθαρή επίδραση στον ψυχολογικό χρόνο ή το άγχος που βιώνουν οι μαθητές. Αποκλίσεις στην εκτίμηση χρονικής διάρκειας παρατηρούνται σε διαφορετικές ενότητες του μαθήματος και των διαγωνισμάτων.

Φαίνεται πως οι μαθητές με τις υψηλότερες συνολικές βαθμολογίες στα TAI (40+/80) και AMAS (18+/45) βιώνουν το μάθημα να περνάει πιο γρήγορα από ότι τα διαγωνίσματα. Οι μαθητές αυτοί είχαν και τις υψηλότερες συνολικές βαθμολογίες στο STAI-S. Από τις συνεντεύξεις προέκυψε ότι ήταν μαθητές που δεν ήθελαν να εμπλακούν πολύ.

Από την άλλη, οι μαθητές που είχαν συνολική βαθμολογία στο STAI-S περίπου 30/80, καθώς και ανάλογη σε AMAS ή TAI, βίωσαν γρήγορα το πέρας των διαγωνισμάτων και υπερεκτιμούσαν τις διάρκειες των υποενοτήτων και διαγωνισμάτων. Αυτοί οι μαθητές εμπλέκονταν προσωπικά στην επίλυση. Ήθελαν οπωσδήποτε να βρίσκουν τη λύση σε ένα πρόβλημα, αγχώνονταν για να πετύχουν και τους ενδιέφερε η σωστή απάντηση. Αυτές οι σκέψεις των μαθητών κατά την εμπλοκή τους στη λύση προβλημάτων προκαλούν άγχος και στρες (Putwain, 2008) και έρχονται σε αντίφαση με τη συνολική βαθμολογία των μαθητών στα ερωτηματολόγια.

Προκύπτει πως οι μαθητές ανταποκρίνονται και αισθάνονται διαφορετικά στο μάθημα και στα διαγωνίσματα βάση των αποτελεσμάτων των ερωτηματολογίων. Πιθανόν, τα ερωτηματολόγια αυτά να βοηθούν τον εκπαιδευτικό στο να αξιολογεί καλύτερα το πώς θα διαχειριστεί έναν μαθητή, ώστε να δημιουργήσει καλύτερες και πιο ευχάριστες συνθήκες μάθησης μέσα στη διδακτική διαδικασία των Μαθηματικών.

Όλοι οι μαθητές βίωσαν τον χρόνο να περνά αργά σε καταστάσεις που τους άγχωναν και βίωναν προσμονή του πέρατος (να δοθεί το διαγώνισμα, να τελειώσει το μάθημα, «βαριέμαι», «να λύσω άσκηση»). Ο εκπαιδευτικός πρέπει να έχει στο νου του κάποιες καταστάσεις, οι οποίες δημιουργούν αρνητικά συναισθήματα στο μαθητή.

Στην προετοιμασία για τη Γ΄ Λυκείου φαίνεται να υπάρχει έντονο άγχος. Μέσα από τις συνεντεύξεις φάνηκε ότι οι μαθητές κρατάνε απόλυτα τον χρόνο που έχει περάσει από την έναρξη της καλοκαιρινής προετοιμασίας. Προσμένουν το πέρας αυτής, όπως και κάθε μέρας μαθημάτων.

Μέσα από τις συνεντεύξεις με τους αποφοίτους, φαίνεται ότι το πέρας του χρόνου κατά τη διάρκεια της Γ' Λυκείου υπολογίζεται καταγράφοντας σαν χρονικές στιγμές αναφοράς τις ενότητες των Μαθηματικών και την έναρξη των προσομοιωτικών διαγωνισμάτων. Επίσης, η εναρμόνιση μέσα σε μία ρουτίνα, κάνει τον χρόνο να κυλά πιο γρήγορα.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συνοψίζοντας, μπορούμε να διακρίνουμε δύο μηχανισμούς μέτρησης του χρόνου από τους μαθητές. Ο ένας σχετίζεται με την καταγραφή της χρονικής στιγμής διαφόρων γεγονότων και της διάρκειάς τους, γνωστός και ως *Time-Tagging* (Friedman, 1990). Αυτός εφαρμόζεται σε μεγάλα διαστήματα με αλλαγές στο γνωστικό περιεχόμενο. Αυτά μπορεί να είναι μία διδακτική ώρα ή μία διδακτική χρονιά. Ο άλλος έχει να κάνει με την εκτίμηση της διάρκειας ενός γεγονότος (διδακτική ώρα, διαδικασία κλπ), βάση της προϋπάρχουσας εμπειρίας της χρονικής διάρκειας αυτού, της γνωστικής δυσκολίας του, του βιωθέντα ψυχολογικού χρόνου και της ψυχολογικής κατάστασης (Block, 1990; Sucala, Scheckner & David, 2011).

Μία άλλη σημαντική παρατήρηση είναι η διαφοροποίηση του ψυχολογικού χρόνου από την εκτίμηση της χρονικής διάρκειας (Block, 1990; Lueck, 2007). Υπήρξαν πολλές φορές αντιφάσεις μεταξύ της εκτίμησης της χρονικής διάρκειας ενός γεγονότος και του ψυχολογικού χρόνου που πέρασε. Ο ψυχολογικός χρόνος βασίζεται στην συναισθηματική κατάσταση και στα προκληθέντα συναισθήματα (Hornik, 1992), ενώ η χρονική εκτίμηση κυρίως στην πολυπλοκότητα και πληθικότητα των απαιτούμενων νοητικών διεργασιών (Zakay, Block & Tsal, 1999). Όσο αυτές αυξάνονται, τόσο το χρονικό διάστημα τείνει να υπερεκτιμάται (Block, 1990).

Οι αποκλίσεις στις αναδρομικές εκτιμήσεις που παρατηρούνται πιθανόν να οφείλονται στο ότι οι μεμονωμένες ενότητες είναι μικρότερες σε διάρκεια και οι μαθητές μπαίνουν στη διαδικασία να διαχειριστούν, καταγράψουν και θυμηθούν περισσότερες πληροφορίες σε μικρό χρονικό διάστημα. (Zakay, Block, Tsal, 1999). Η χρονική εκτίμηση εξαρτάται από την προηγούμενη εμπειρία πάνω στο αντικείμενο (Block, 1990) και από το βιωθέν στρες.

Από το 2ο μέρος του πειράματος, δηλαδή την ενότητα των διαγωνισμάτων, φάνηκε έντονα η επίδραση που είχαν τα διαγωνίσματα πάνω στην καταγραφή του χρόνου.

- Όταν αντιμετωπίζουν μία εξέταση, λόγω ψυχολογικών και στρεσογόνων παραγόντων, οι μαθητές κλείνονται στην χωρικότητα των πληροφοριών που πρέπει να ανακτήσουν από τη μνήμη τους για την επίλυση του εκάστοτε προβλήματος. Δεν φαίνεται να έχουν συσχετίσει κάποια χρονικότητα (π.χ. μία εκτίμηση απαιτούμενου χρόνου). Είναι αποθηκευμένες σε ένα μέρος στη μνήμη. Οι μαθητές χάνονται κατά την προσπέλαση της μνήμης. Δεν έχουν αίσθηση της διάρκειας προσπέλασης, ούτε πληροφορίες για τον απαιτούμενο χρόνο εφαρμογής της ανακτώμενης πληροφορίας.

- Σε κατάσταση στρες μειώνονται οι διαθέσιμοι πόροι προσήλωσης (Hancock & Weaver, 2005) και σε συνδυασμό με την προσπάθεια επίλυσης ενός προβλήματος/άσκησης (διαχείριση χωρικών πληροφοριών) δεν μπορεί να δοθεί προσοχή στη μέτρηση του χρόνου (Zakay, 2014). Έτσι, η οποιαδήποτε εκτίμηση γίνεται βάση δυσκολίας (Sucala, Scheckner & David, 2011).
- Η ελλιπής εμπειρία της χρονικής διάρκειας των ζητούμενων μεθόδων (Campbell, 1990) για την αντιμετώπιση του κάθε διαγωνίσματος και η στρέβλωση του χρόνου από το στρες (Hancock, 1986) *καθιστά δύσκολη την εκτίμηση της χρονικής διάρκειας*.
- Μέσα από τη συζήτηση, οι μαθητές αποκτούν αίσθηση-εμπειρία της διάρκειας και αναπροσαρμόζουν τις χρονικές εκτιμήσεις τους, μετά από κάθε διαγώνισμα, πιο κοντά στην πραγματική διάρκεια.

Χωρίς το πλεονέκτημα των διαδικασιών (π.χ. μέθοδος επίλυσης), το αναδρομικά εκτιμώμενο χρονικό διάστημα φαντάζει μεγαλύτερο, και κατά τη διάρκειά του, περισσότεροι πόροι προσήλωσης απαιτούνται, άρα λιγότεροι μένουν για οποιαδήποτε άλλη γνωστική ενέργεια ή τη μέτρηση του χρόνου (Wood, Quinn & Kashy, 2002). Η καλή αντίληψη της απαιτούμενης διάρκειας των διαδικασιών έχει ως αποτέλεσμα την πιο διαυγή ανάκληση του γεγονότος αυτού (Hancock & Weaver, 2005).

Τα σχολικά μαθηματικά απαρτίζονται σε μεγάλο βαθμό από διαδικασίες-μεθοδολογίες. Επομένως, είναι απαραίτητη η δημιουργία βασικών διαδικασιών και η μέτρηση αυτών, ώστε ο μαθητής να μην χάνεται στη χωρικότητά τους, αλλά να μπορεί να διαχειριστεί τον χρόνο του, ώστε να μειωθεί και το στρες ή άγχος που μπορεί να έχει (Misra & MacKean, 2000), καθώς επίσης να αυξήσει και την απόδοσή του (Greenberger, Strasser, Cummings & Dunham, 1989).

Μέσα από τις συνεντεύξεις προκύπτει ότι ο κατακερματισμός ενός διαγωνίσματος είναι κάτι που βοήθησε στην καλύτερη αντιμετώπιση αυτού.

- Οι εξεταζόμενοι το αντιμετωπίζουν σαν «ασκησούλες», αντί για διαγωνίσματα. Μπορούν να διαχειριστούν καλύτερα τον χρόνο τους και να συγκεντρωθούν πιο εύκολα, αφού λιγότεροι πόροι προσήλωσης απαιτούνται (Hancock & Weaver, 2005), μειώνοντας την πιθανότητα λάθους (Spielberger, Anton & Bedell, 1976).

- Πέραν αυτού, η ψυχολογία τους άλλαξε και δεν ένιωθαν την πίεση ενός μεγάλου διαγωνίσματος. Μειώνεται το στρες, και έρχονται αντιμέτωποι με το μαθηματικό άγχος αντί του άγχους εξέτασης (Zeidner, 1998).
- Τέλος φαίνεται λιγότερος ο εκτιμώμενος απαιτούμενος προσδοκώμενος χρόνος, αφού είναι λιγότερες οι γνωστικές λειτουργίες που απαιτούνται (Zakay & Block, 2004).

Έχοντας στο νου μικρότερο πλήθος πληροφοριών προς επεξεργασία μπορούν να ληφθούν καλύτερες αποφάσεις και να μειωθεί το άγχος (Bawden & Robinson, 2009).

Από ότι φαίνεται, η καθημερινή ρουτίνα συμβάλει θετικά στο γρήγορο και, μερικές φορές, ευχάριστο πέρας της Γ' Λυκείου. Αυτό επιβεβαιώνεται από τις συνεντεύξεις. Οι μαθητές επιβεβαιώνουν ότι είχαν ένα σταθερό πρόγραμμα σε καθημερινή βάση. Σε αυτό αποδίδουν το γρήγορο πέρας της Γ' Λυκείου. Άλλωστε, η εμπλοκή σε μία ρουτίνα κάνει τους ανθρώπους να εκτιμούν αναδρομικά τη χρονική διάρκεια από την έναρξη σαν μικρότερη από την πραγματική, πιθανόν λόγω της έλλειψης αλλαγών στην καθημερινότητάς τους (Avni-Bahad & Ritov, 2003).

Εν τέλει, η προσμονή για τις Πανελλαδικές εξετάσεις είναι κάτι που τους κάνει να βιώνουν τον χρόνο να κυλά πολύ αργά και ακόμα περισσότερο προς το τέλος βιώνουν έντονα την προσμονή αυτή. Αυτό είναι επίφοβο, αφού πολλοί πόροι προσήλωσης καταναλώνονται για αυτό, και σε συνδυασμό με το άγχος που καταναλώνει ακόμα περισσότερους, καθιστά αμφισβητήσιμη την αποδοτικότητά τους σε γνωστικό επίπεδο.

ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η έρευνα αυτή απευθύνεται κυρίως σε εκπαιδευτικούς. Το να ευρεθούν και να δοθούν στους καθηγητές των Μαθηματικών εργαλεία για το χειρισμό της ψυχολογίας των μαθητών είναι σημαντικό. Η διδακτική διαδικασία των Μαθηματικών δεν πρέπει να είναι ψυχολογικά αποτρεπτική για τους μαθητές, αλλά να τους κάνει να νιώθουν ευχάριστα, προκαλώντας ενδιαφέρον και αποβάλλοντας πιθανούς στρεσογόνους παράγοντες.

Είναι σημαντικό ο καθηγητής να κάνει τον μαθητή να αισθάνεται ευχάριστα και ότι ο χρόνος ρέει γρήγορα, κατά τη διάρκεια της διδακτικής ώρας. Αυτό είναι εφικτό γεμίζοντας τη διδακτική ώρα με γνωστές στους μαθητές πληροφορίες, κατά προτίμηση μικρής έκτασης. Επίσης, μία σημαντική τεχνική, η οποία προέκυψε από το πείραμα, είναι η προσωπική εμπλοκή των μαθητών στη διδακτική διαδικασία, ώστε να αποβάλλουν κάθε άλλη σκέψη που τους αποπροσανατολίζει ή τους στρεσάρει. Τέλος, τα ερωτηματολόγια που χρησιμοποιήθηκαν θα μπορούσαν να συμβάλλουν στην καλύτερη διαχείριση της ψυχολογίας των μαθητών.

Συνήθως οι μαθητές «δεν έχουν αρκετό χρόνο» για να κάνουν Μαθηματικά. Έτσι ο εκπαιδευτικός πρέπει να συνδράμει στην ανάπτυξη τεχνικών διαχείρισης του χρόνου τους. Αυτές οι τεχνικές μπορεί να γίνονται εν γνώσει των μαθητών ή και χωρίς να το καταλαβαίνουν. Μία τεχνική είναι η χρονομέτρηση κάποιων σημαντικών διαδικασιών και η αύξηση, με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού, της ταχύτητας περάτωσής τους. Μία άλλη τεχνική είναι η απόκτηση εμπειρίας της διάρκειας μέσα από τη συζήτηση σχετικά με αυτή. Επίσης, ο εκπαιδευτικός μπορεί να βοηθήσει τον μαθητή στο να αναπτύξει ικανότητα κατακερματισμού προβλημάτων-ασκήσεων σε απλές χρονομετρημένες διαδικασίες, πράγμα που μειώνει, όπως φάνηκε από το πείραμα, το άγχος και το στρες του μαθητή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ματσαγγούρας, Η. (2002) *Θεωρία και Πράξη της Διδασκαλίας, Στρατηγικές Διδασκαλίας,* Αθήνα: Gutenberg.

Μπιτσιάνης Α. (2011) . *Σχολική μάθηση και επιτυχία χωρίς άγχος*. Εκδόσεις Μεταίχμιο

Avni-Babad, D., & Ritov, I. (2003). Routine and the perception of time. *Journal of Experimental Psychology: General*, *132*(4), 543.

Bawden, D., & Robinson, L. (2009). The dark side of information: overload, anxiety and other paradoxes and pathologies. *Journal of information science*, *35*(2), 180-191.

Beilock, S. L., Kulp, C. A., Holt, L. E., & Carr, T. H. (2004). More on the fragility of performance: choking under pressure in mathematical problem solving. *Journal of Experimental Psychology: General*, *133*(4), 584.

Beilock, S. L. (2008). Math performance in stressful situations. *Current Directions in Psychological Science*, *17*(5), 339-343.

Block, R. A. (1990). Models of psychological time. In: *R. A. Block (Ed.), Cognitive models of psychological time* (pp. 1-35). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Campbell, S. S. (1990). Circadian rhythms and human temporal experience. *Cognitive models of psychological time*, 101-118.

Eden, Chiara, Angela Heine, Arthur M. Jacobs. (2013). Mathematics anxiety and its development in the course of formal schooling—a review. *Psychology* 4.06, 27.

Friedman, W. J. (1990). About time: *Inventing the fourth dimension*. Cambridge, Mass: MIT Press.

Greenberger, D. B., Strasser, S., Cummings, L. L., Dunham, R. B. (1989). The impact of personal control on performance and satisfaction. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, *43*(1), 29-51.

Hancock, P.A. (1986). The effect of skill on performance under an environmental stressor. Aviation, Space, and Environmental Medicine, 57, 59–64.

Hancock, P. A., & Weaver, J. L. (2005). On time distortion under stress. Theoretical issues in ergonomics science, 6(2), 193-211.

Hornik, J. (1992). Time estimation and orientation mediated by transient mood. Journal of Socio-Economics, 21(3), 209-227.

Lueck, M. D. (2007). Anxiety levels: do they influence the perception of time. *UW-L Journal of Undergraduate Research*, *10*, 1-5.

Misra, Ranjita, Michelle McKean. (2000). College students' academic stress and its relation to their anxiety, time management, and leisure satisfaction. *American Journal of Health Studies* 16.1: 41.

Ornstein. R. E. (1969). *Oll the experience of time.* Harrnondsworth. Middlesex. England. Penguin.

Pouthas, V., & Perbal, S. (2004). Time perception depends on accurate clock mechanisms as well as unimpaired attention and memory processes. *Acta neurobiologiae experimentalis*, *64*(3), 367-386.

Putwain, D. W. (2008). Deconstructing test anxiety. *Emotional and Behavioural Difficulties*, *13*(2), 141-155.

Spielberger C.D., Anton, W.D., Bedell, J. (1976). The nature and treatment of test anxiety. In: M. Zuckerman & C.D. Spielberger (Eds.), *Emotions and anxiety: New concepts, methods, and applications* (pp.317-345). New York: Eribaum/Wiley.

Spielberger, Charles Donald, Hector P. Gonzalez. (1980). *Preliminary professional manual for the test anxiety inventory:("test attitude inventory"): Tai*. Consulting psychologists press

Spielberger, Charles Donald. (1989). *State-trait anxiety inventory: a comprehensive bibliography*. Consulting Psychologists Press

Sucala, Madalina, Bari Scheckner, Daniel David. (2011). Psychological time: interval length judgments and subjective passage of time judgments. *Current psychology letters. Behaviour, brain & cognition* 26.2, 2010.

Suck, R., Holling, H. (1997). Stress Caused by waiting: a theoretical evaluation of a Mathematical Model, Journal of Mathematical Psycology, 41 (3), 280-286.

Wearden, J. H. (2016). *Psychology of Time Perception*. Palgrave Macmillan.

Wood, W., Quinn, J. M., Kashy, D. A. (2002). Habits in everyday life: thought, emotion, and action. *Journal of personality and social psychology,83*(6), 1281.

Zakay, D., Block, R. A., Tsal, Y. (1999). Prospective duration estimation and performance. In: D. Gopher, & A. Koriat (Eds.), *Attention and Performance XVII: Cognitive Regulation of performance: Interaction of theory and application* (pp. 557-580). Cambridge, MA: The MIT Press.

Zakay, D., Block, R. A. (2004). Prospective and retrospective duration judgments: An executive-control perspective. *Acta neurobiologiae experimentalis*, *64*(3), 319-328.

Zakay, D. (2014). Psychological time as information: The case of boredom. *Frontiers in psychology, 5.*

Zeidner, M. (1998). Test anxiety. *Corsini Encyclopedia of Psychology*.

ΔΕΠ-Υ ΚΑΙ ΕΛΛΕΙΜΜΑΤΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Νικολόπουλος Γιάννης

Μαθηματικός – Ειδικός Παιδαγωγός, Master Special Education,
Επιμορφωτής Εκπαιδευτικών στην Ελληνογερμανική Αγωγή

johnikol@yahoo.gr

Τα Ελλείμματα στα Μαθηματικά δυσκολεύουν την επίδοση στο σχολείο και στη ζωή ενώ πηγάζουν από τις ακόλουθες αιτίες: 1)«Χάσιμο» μαθημάτων που επιφέρει την ύπαρξη κενών στην Μαθηματική Αλυσίδα. 2)Ακατάλληλη Διδασκαλία. 3)Δυσαριθμησία αλλά επίσης δεν είναι αμελητέος και ο ρόλος της Δυσλεξίας. 4)Μειονεξία στην Αισθητηριακή Μνήμη (οπτική ή ακουστική) που μειώνει, την εισροή πληροφοριών προς την Εργαζόμενη Μνήμη. 5)Μειωμένη χωρητικότητα στην Εργαζόμενη Μνήμη. 6)Το Άγχος των Μαθηματικών και 7)Την Ελλειμματική Προσοχή-Παρορμητικότητα η οποία περιορίζει την συλλογή πληροφοριών, όπως επίσης δυσκολεύει την ενδελεχή μελέτη δεδομένων-ζητουμένων, για την επίλυση κυρίως προβλημάτων.

ΤΙ ΕΙΝΑΙ Η ΔΕΠ-Υ;

Αναζητούμε την αιτία της ΔΕΠΥ (Διαταραχή Ελλειμματικής Προσοχής με Υπερκινητικότητα), όπου τον πρώτο λόγο έχουν οι γενετικοί παράγοντες. Η αναζήτηση αυτή στοχεύει, στο να προσδιορίσουμε τις πλευρές της Διαταραχής και πως εκφράζονται στη μαθησιακή διαδικασία, έτσι ώστε να δομήσουμε την εκπαιδευτική μας παρέμβαση. Γιατί δεν πρέπει να μας διαφεύγει ότι κάθε παιδί είναι ένα ξεχωριστό παιδί. Θα εστιάσουμε στην ανασκόπηση της παγκόσμιας βιβλιογραφίας και θα σταθούμε στα βασικά σημεία της διατύπωσης του DSM-V (Diagnostic and Statistical Manual-V), όπου ορίζει ότι: Η ADHD (Attention Deficit Hyperactivity Disorder) είναι μια νευροαναπτυξιακή διαταραχή που προσδιορίζεται από την αλλοίωση και ελάττωση του επίπεδου της προσοχής … όπως επίσης την αποδιοργάνωση, την υπερκινητικότητα και την παρορμητικότητα APA (American Psychiatric Association). Εμφανίζεται σαν δυσκολία στη συγκέντρωση της προσοχής και αυτή η συνιστώσα επηρεάζει την μαθησιακή διαδικασία. Παρουσιάζεται στο 5-7% των παιδιών αλλά υπάρχουν διαφορές ποσοστού ανάμεσα στα αγόρια και στα κορίτσια με αναλογία 3-1 ή ακόμη και 4-1, σε βάρος των αγοριών. Η Απροσεξία/Αποδιοργάνωση συνεπάγεται την αδυναμία να εστιάσουν και επίσης να παραμείνουν στην εργασία ή στο διάβασμα για αρκετό και αναγκαίο διάστημα χρόνου. Επίσης σημειώνουμε την υπερδραστηριότητα, την νευρικότητα, όπως και την ανεξέλεγκτη παρόρμηση να υπεισέρχονται στις δραστηριότητες των άλλων, που σχετίζεται με την συμπεριφορά. Η ΔΕΠΥ συνδέεται επίσης και με το άγχος των Μαθηματικών. Μήπως το στρες επηρεάζει την Προσοχή και δυναμώνει την Παρορμητικότητα;

ΆΓΧΟΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ Η ΔΕΠ-Υ;

Έρευνες έχουν επισημάνει ότι η διάγνωση της ΔΕΠΥ φαίνεται να αποτελεί στρεσογόνο παράγοντα για τα άτομα που την βιώνουν, τα οποία περιγράφουν τα μαθητικά τους χρόνια σαν συνεχή προσπάθεια, για να ανταπεξέλθουν με γονείς, συμμαθητές και δασκάλους όπου νιώθουν συχνά απομονωμένοι και με χαμηλή αυτοεκτίμηση (Shattell et al., 2008; Travell & Visser, 2006). Πολλά από τα συμπτώματα της διαταραχής όπως η δυσκολία συγκέντρωσης και προσοχής, η υπερκινητικότητα και οι ελλιπείς οργανωτικές δεξιότητες, δημιουργούν συχνά στα παιδιά αυτά απογοήτευση, θυμό και απελπισία, συναισθήματα που με τη σειρά τους συμβάλλουν στο καθημερινό άγχος που συνοδεύει τη διαταραχή (Θεοδωρίτση & Αντωνίου, 2016).

Πρέπει να επισημάνουμε, τον ιδιαίτερο ρόλο των στρεσογόνων παραγόντων, για παράδειγμα του «Άγχους των Μαθηματικών», σε συνδυασμό με τους παράγοντες της ΔΕΠ-Υ, ότι είναι αρνητικό «κοκτέιλ» για την αντιμετώπιση των Μαθηματικών Προβλημάτων; Συνεπής με τις υποθέσεις μας σε σχέση με την ψυχολογική επίδραση του στρες, η ομάδα με ΔΕΠ-Υ παρουσίασε σημαντικά μεγαλύτερο το υποκειμενικό στρες (Lackschewitz et al., 2008). Στην συνέχεια και σε νέα διεξαχθείσα έρευνα έχουμε συμπερασματικά το εύρημα ότι, η Ελλειμματική Προσοχή συσχετίζεται με υψηλότερο αντιληπτό και καταμετρημένο άγχος, που συμπληρώνει προηγούμενες έρευνες που κατέδειξαν δεσμούς μεταξύ της διάγνωσης ΔΕΠ-Υ και υψηλότερων των φυσιολογικών και υποκειμενικών στρες (Combs et al., 2015). Σε έρευνες έχει αποδειχθεί ότι το «Άγχος των Μαθηματικών» σε μαθητές, ειδικά αυξημένο μάλιστα, όταν συμμετέχουν σε τεστ/εξετάσεις, όπου παρατηρούμε σημαντικό στρες και άνοδο (συγκέντρωση) της κορτιζόλης που ανιχνεύεται στο σίελο και τα επίπεδα στον σίελο συσχετίζονται με τα επίπεδα της ελεύθερης μορφής της στο πλάσμα. Εδώ διαφαίνεται ότι η ΔΕΠ-Υ επηρεάζει το Άγχος και σε αλληλεπίδραση το Άγχος δυναμώνει την ΔΕΠ-Υ. Αυτά τα συγκεκριμένα δείγματα αντιμετωπίσαμε στη μελέτη περίπτωσης που αναφερόμαστε αναλυτικά παρακάτω. Οι Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά έχουν σχέση με την ΔΕΠ-Υ; Η νευρολογική βάση της διαταραχής στηρίζεται στην πρώιμη εμφάνιση της διαταραχής, στη σχετική επιμονή της στον χρόνο, καθώς και στη σχέση με άλλες αναπτυξιακές διαταραχές, όπως μαθησιακές δυσκολίες (Παπαδάτος, 2010).

ΔΕΠ-Υ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ

Τα Ελλείμματα στα Μαθηματικά έχουν αρκετές αιτίες, οι εκτιμήσεις για τον ρόλο της ΔΕΠ-Υ στα μαθηματικά κινούνται σε υψηλά ποσοστά. Αλλά οι εκτιμήσεις συνύπαρξης των Δυσκολιών Μάθησης σε περιπτώσεις παιδιών με ΔΕΠ-Υ ποικίλουν σε μεγάλο βαθμό (Smith & Adams, 2006).

Οι Δυσκολίες στα Μαθηματικά δεν είναι μία ομοιόμορφη διαταραχή. Οι μαθητές με αυτή τη διαταραχή μπορεί να εκδηλώσουν μία σειρά από διαφορετικά λάθη στα Μαθηματικά, ενώ υπάρχουν διαφορές όσον αφορά στον τύπο και τη σοβαρότητα της διαταραχής (Ardila & Rosselli, 2002). Επίσης, σύμφωνα με τα στοιχεία υπολογίζεται ότι οι Δυσκολίες στα Μαθηματικά επηρεάζουν το 5%−8% του σχολικού πληθυσμού (Jitendra, 2005), συγκεκριμένα αναφέρεται ότι η πραγματικότητα είναι περίπου 5-8% των σπουδαστών που έχουν Ελλείμματα στην Μνήμη Εργασίας ή Γνωστικά που σχετίζονται με την ικανότητα να αποκτήσουν, να κατανοήσουν και να εφαρμόσουν μαθηματική γνώση και δεξιότητα (Geary, 2004). Ο μηχανισμός της προσοχής διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη της λεγόμενης αυτοματοποιημένης αναγνωστικής ικανότητας (Willcutt et al., 2010), επίσης ταυτόχρονα θα πρέπει να συνεκτιμώνται τυχών αναγνωστικά προβλήματα των μαθητών όχι μόνο στο επίπεδο της αποκωδικοποίησης των λέξεων αλλά και της κατανόησης αυτών, αφού ομαλή ανάγνωση σημαίνει ομαλή λειτουργία και των δύο επιμέρους λειτουργιών οι οποίες τις συνθέτουν (Πόρποδας, 2003). Άρα τονίζουμε η δυσαναγνωσία, έχει αρνητική επίδραση στην κατανόηση και αποκωδικοποίηση μαθηματικών προβλημάτων.

Στην παρούσα ανακοίνωση θα σταθούμε σε μελέτη περίπτωσης παιδιού με ΔΕΠΥ. Στον συγκεκριμένο μαθητή είχε διαπιστωθεί ο μικτός τύπος τόσο Ελλειμματική Προσοχή όσο και Υπερκινητικότητα, εφαρμόσαμε διετή Εκπαιδευτική Παρέμβαση και είδαμε πολύ θετικά αποτελέσματα. Για να γίνει σαφές όταν ξεκινήσαμε το παιδί φοιτούσε στην Β΄ γυμνασίου και παρουσίαζε τις εξής αδυναμίες: Ελλείμματα στα Μαθηματικά, ειδικά στα Μαθηματικά εκτός Μοτίβου, επίσης Δυσκολίες στην Ανάγνωση, πιο συγκεκριμένα στην αποκωδικοποίηση & κατανόηση των λέξεων/εννοιών, Ικανοποιητική Μνήμη Εργασίας, Έντονη περιπλάνηση του νου (mind-wandering), Περιορισμένη εστίαση (focus) και Έντονο στρες (άγχος) σε όλα τα τεστ και ειδικότερα των μαθηματικών. Εδώ να σημειώσουμε ότι αν και υπήρχε διαγνωσμένη Υπερκινητικότητα δεν επιδρούσε αρνητικά στην Μάθηση. Σύμφωνα με ορισμένες μάλιστα ερευνητικές μαρτυρίες και μελέτες, η διαταραχή ελλειμματικής προσοχής σε σύγκριση με την υπερκινητικότητα είναι περισσότερο καθοριστική και συνυφασμένη με τα μαθησιακά προβλήματα του παιδιού (Stevenson et al., 2005).

Αρχίζουμε την Εκπαιδευτική Δραστηριότητα στις αρχές της Β΄ γυμνασίου σημειώνουμε ότι ξεκινήσαμε στο Τμήμα Ένταξης με κάλυψη ελλειμμάτων και σε συνεννόηση με τον συνάδελφο Μαθηματικό της σχολικής τάξης, αποφασίσαμε να γράψει 'μικρά' καλά προετοιμασμένα τεστ, έτσι ώστε μαζί με την ψυχολογική ενθάρρυνση να αποκτήσει την αυτοεκτίμηση. Εδώ να σταθούμε στην έννοια 'μικρά τεστ' για να το διευκρινίσουμε.

Βασική Παιδαγωγική Αρχή για τα εν λόγω παιδιά είναι να μοιράζουμε τις μεγάλες εργασίες σε μικρότερες. Αυτό συνιστά μία από τις πιο σημαντικές τεχνικές διδασκαλίας και προσπαθήστε ώστε οι εργασίες για το σπίτι να στηρίζονται στην ποιότητα και όχι στην ποσότητα (Hallowell & Ratey, 1995). Έτσι το συγκεκριμένο παιδί εξεταζόταν σε δύο ισοδύναμα 'μικρά τεστ' των 20-25 min σε δύο διαδοχικές μέρες, ισάξια σε κλίμακα βαθμού δυσκολίας. Για παράδειγμα και στα δύο τεστ ασκήσεις και προβλήματα εξισώσεων 2ου βαθμού (Διακρίνουσα). Στο (Α), είχε κλασματική εξίσωση που κατάληγε μετά την απαλοιφή των παρονομαστών και τις πράξεις σε Διακρίνουσα και απλό πρόβλημα του στυλ: «Να βρεθεί ο αριθμός όταν το μισό του τετραγώνου του είναι ίσο με το διπλάσιό του» και στο (Β) τεστ, εξίσωση ελλιπής που λύνεται με παραγοντοποίηση και σύνθετο βιωματικό πρόβλημα σαν την 1η εφαρμογή του βιβλίου της Γ΄ γυμνασίου με τον υπολογισμού του εμβαδού της πισίνας, που κατάληγε σε Διακρίνουσα.

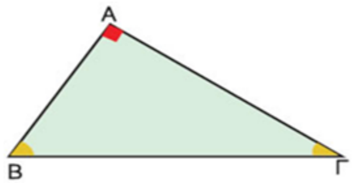
Είχαμε προσέξει στο μαθησιακό προφίλ του μαθητή Ελλείμματα στην Ανάγνωση (Δυσαναγνωσία). Έτσι επιμείναμε αρκετά στην εκπαιδευτική μας παρέμβαση στην κατανόηση εκφράσεων σε σχέση με τα μαθηματικά προβλήματα, για παράδειγμα: «Ένας αριθμός μειωμένος κατά επτά» αντιστοιχεί στο 'x-7'. Η λέξη μειώνω ή ελαττώνω ή αφαιρώ ή περιορίζω κ.τ.λ. έχουν την ίδια αποκωδικοποίηση της αφαίρεσης (-). Σημειώσεις σε σχέση με:

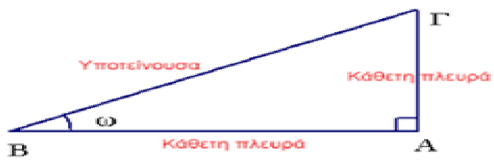
Β' γυμνασίου, λάθη όταν είχε αρνητικά πρόσημα σε πολλαπλασιασμό, πρόσθεση: (-3) • (-4) με (-3)+(-4) σε σχέση με θετικό/αρνητικό πρόσημο.

Γ' γυμνασίου, κατανόηση στα αντίστοιχα μονώνυμα σε πολλαπλασιασμό, πρόσθεση: $(-3bx)\bullet(-4bk)=+12b^2xk$ αντίστοιχα $(-3bx)+(-4bx)= -7bx$.

Δυσκολίες στις πράξεις κλασμάτων στην αρχή της Β' γυμνασίου σε σχέση με τις πράξεις πολλαπλασιασμού, πρόσθεσης αναγκαιότητα ή μη για ομώνυμα, άνεση στις αντίστοιχες πράξεις κλασμάτων με την δυσκολία των μεταβλητών. Τελική κατανόηση του ΕΚΠ με αριθμούς και αλγεβρικές παραστάσεις. Σημειώσαμε παραπάνω ότι διευκολύνεται όταν υπάρχουν μοτίβα, θέλουμε να τονίσουμε ότι κατανόησε το Πυθαγόρειο Θεώρημα, τα Εμβαδά, τις Ταυτότητες, τα Συστήματα επίσης τις Παραγοντοποιήσεις, ενώ εξακολουθεί να έχει δυσκολίες στα σύνθετα προβλήματα.

Από το δημοτικό και την Α΄ γυμνασίου είχε διδαχθεί όπως όλοι οι μαθητές ότι κάνουμε τις πράξεις κάθετα, αυτό είναι πολύ αρνητική διδασκαλία που δεν εκριζώνεται εύκολα από τα παιδιά. Όταν οι εκπαιδευτικοί και ειδικά οι δάσκαλοι ορίζουν την έννοια της λέξης ΚΑΘΕΤΑ τότε πάντα εννοούν την λέξη ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΑ. Έτσι οι μαθητές όταν βλέπουν τα ορθογώνια τρίγωνα και καλούμε να ονοματίσουν τις κάθετες πλευρές δυσκολεύονται.





Εικόνα 1: Ορθογώνια Τρίγωνα σε διαφορετική τοποθέτηση.

Στο πρώτο σχήμα ο μαθητής μας δεν έβλεπε για καιρό καμία κάθετη πλευρά αφού για αυτόν η κάθετη αντιστοιχούσε στην κατακόρυφη ενώ στο δεύτερο δεν κατανοούσε ότι η πλευρά ΑΒ ήταν κάθετη. Για να αναλαμβάνουμε τις ευθύνες μας, όταν συγχέουμε τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ με το ΣΤΑΥΡΟΛΕΞΟ!

Επίσης η διδασκαλία της «αφηρημένης» έννοιας της Συνάρτησης: ψ = α•x παίρνει σάρκα και οστά στη σύνδεσή της με την Φυσική, Νόμος του Ohm: V=R•I ή Νόμος της Βαρύτητας: B=m•g. Εφαρμόσαμε επίσης την δια-επιστημονική εκπαιδευτική παρέμβαση με θετικά αποτελέσματα τόσο στα Μαθηματικά (συναρτήσεις) όσο και στους νόμους της Φυσικής.

ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΗ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΔΙΕΤΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ

Καταρχάς ο μαθητής είχε σοβαρή βελτίωση στα μαθήματα, από ένα μέτριο στην Α’ γυμνασίου Μ.Ο.=14 έφτασε να ολοκληρώσει την Γ’ γυμνασίου με Μ.Ο. =18. Μέτρηση 1η). Η μεγάλη άνοδος στην σχολική επίδοση, άλλωστε η σχολική υποεπίδοση ήταν η αρχή της διάγνωσης. Μέτρηση 2η). Η σημαντική Ενίσχυση της Αυτοεκτίμησης που την εκφράζει ο μαθητής μας λέγοντας: «Νόμιζα ότι δεν τα καταφέρνω, σήμερα πιστεύω ότι όλα τα μπορώ». Αυτές είναι αντικειμενικές στην πράξη ‘μετρήσεις’ αρκετά πιο αξιόπιστες από τα διάφορα τεστ ή ψυχομετρικά εργαλεία. Εδώ αξίζει να σημειώσουμε ότι έδωσε εξετάσεις και απέκτησε Proficiency στα Αγγλικά.

Αφομοίωσε στην πράξη την «Βιωματική Επαλήθευση». Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι ο εν λόγω μαθητής παρουσίαζε μια σχετικά καλή εικόνα στο ξεκίνημα των ασκήσεων ή των προβλημάτων, με καλύτερη απόδοση στην γεωμετρία. Στη γεωμετρία μάλιστα πραγματοποιούσε την καταγραφή δεδομένων-ζητουμένων, αντιλαμβανόταν το δοσμένο σχήμα (σημείωνε τα δεδομένα στο σχήμα) αλλά σχεδόν προς το τέλος είχε παραιτηθεί και στην τελική ευθεία κυριαρχούσαν τα λάθη. Με την «Διδασκαλία στην Πράξη» μέσα από την ζωή και την καθημερινότητα κερδίζαμε σε τακτά χρονικά διαστήματα περίπου σε κάθε βδομάδα μια επιπλέον μικρή (2 ή 3 min) χρονική διάρκεια προσοχής, βέβαια υπήρχαν και ορισμένες παλινωδίες. Σχεδόν πάντα, ο μαθητής παρουσίαζε σημάδια κόπωσης, οπότε γινόταν άμεση προγραμματισμένη μετακίνηση από το τετράδιο ή τον πίνακα στον Η/Υ με αισθητή βελτίωση του χρόνου ενεργού συμμετοχής. Εφαρμόσθηκε Διδασκαλία Πολυαισθητηριακή με βάση τις διαφάνειες (Power Point). Η βιωματική διδασκαλία, όπως πλέον προσφέρεται με την αξιοποίηση των ΤΠΕ και εξελιγμένων λογισμικών συνεισφέρει θεαματικές βελτιώσεις στη διεργασία διδασκαλίας/μάθησης. Τα τελευταία χρόνια εφαρμόζεται και έχει γίνει ολικά αποδεκτό, ότι η αξιοποίηση της υπολογιστικής, ψηφιακής τεχνολογίας στη διδασκαλία μπορεί να οδηγήσει σε μια ποιοτική βελτίωση του μαθησιακού περιβάλλοντος (Osborne & Hennessy, 2003).

Επίσης έγιναν προσπάθειες από τους εκπαιδευτικούς για «Ένταξη» μέσα στην τάξη. Να τονίσουμε ακόμη, ότι το άγχος του περιοριζόταν αισθητά, όταν η διαδικασία της μάθησης στην τάξη ήταν ομαδοσυνεργατική. Στο σημείο αυτό πρέπει να ακούσουμε την άποψη του παιδιού, όπου διατείνεται ότι: «όταν λειτουργεί στην ομάδα το βάρος (εννοεί το άγχος) του, μεταβιβάζεται στις πλάτες όλων, και τον ξελαφρώνει». Βέβαια πρέπει να σημειώσουμε ότι ο δίχρονος δρόμος ήταν δύσβατος, είχε δυσκολίες, στροφές, πισωγυρίσματα και συνεχή αναστοχασμό για να διορθώσουμε και να τροποποιήσουμε την εκπαιδευτική μας δραστηριότητα. Η μεγάλη βελτίωση οφείλετε επίσης στο γεγονός ότι βρισκόμασταν όλη σχεδόν η «ομάδα» πολύ κοντά στον μαθητή (μαθηματικός τάξης, μαθηματικός ΕΑΕ και γονείς με ενδιαφέρον). Εφαρμόσθηκε η «απαγωγική μέθοδος», όπου ψάχναμε στα καθημερινά γεγονότα να βρούμε εκείνα τα στοιχεία που να τεκμηριώνουν ή να απορρίπτουν την αρχική σκέψη και την εκπαιδευτική παρέμβαση που σχεδιάσαμε. Κρατήθηκε επίσης ημερολόγιο έναρξης και λήξης ενοτήτων.

ΝΟΜΟΣ ΚΑΙ ΜΝΗΜΟΝΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ποια είναι η διαφορά ανάμεσα στον μαθηματικό νόμο και στον μνημονικό κανόνα; Για παράδειγμα ($\boldsymbol{\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\bullet\beta\bullet\gamma\bullet}$**συνΑ**) των συνημίτονων ισχύει σε κάθε τρίγωνο, επίσης αποδεικνύεται και είναι στην ουσία η γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Το Θεώρημα του Πυθαγόρα, η Ταυτότητα του Euler, οι Τύποι υπολογισμού των Εμβαδών, οι Τύποι υπολογισμού των Όγκων κ.τ.λ. είναι θέσφατα και πρέπει να αναλύονται στους μαθητές και επίσης να εφαρμόζονται στην πράξη. Αρκετές φορές και ιδιαίτερα σε μαθητές με μαθησιακά ελλείμματα προσπαθούμε να τους δώσουμε ένα τέχνασμα, ένα μνημονικό κανόνα έτσι το: «χωρίζω γνωστούς-αγνώστους» είναι μνημονικός κανόνας, στηρίζεται βέβαια σε νόμο: «προσθέτουμε στα δύο μέλη μιας ισότητας τον ίδιο αριθμό (αν α=β τότε α+γ = β+γ)». Δηλαδή ο μνημονικός κανόνας είναι μια μέθοδος, ένα τέχνασμα μια οποιαδήποτε τεχνική που βοηθά στη διατήρηση ή στην εύκολη ανάκτηση μιας πληροφορίας. Ο μνημονικός κανόνας στόχο έχει να μεταφράσει τις πληροφορίες σε μια μορφή που ο εγκέφαλος μπορεί να διατηρήσει ευκολότερα, ιδιαίτερα όταν σχετίζεται με την καθημερινότητα, αντίθετα με τον νόμο που είναι αυστηρά θεμελιωμένος.

Επίσης παράδειγμα Μνημονικού Κανόνα: Πόσες μέρες έχουν διατροφή οι στρατιώτες σε ένα φυλάκιο, αν από 60 μειωθούν λόγω Χριστουγεννιάτικης άδειας κατά 15. Και γνωρίζουμε ότι η σίτιση για τους αρχικούς 60 ήταν επαρκής για ένα 20ήμερο?

Χ(στρατιώτες)	45	60
Ψ (μέρες τροφής)	Άγνωστος Χ	20

Πίνακας 1: Κατάταξη με αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

Ποσά αντίστροφα, δηλαδή σαν λογική μειώνονται οι στρατιώτες αυξάνουν οι μέρες διατροφής ή αυξάνονται οι στρατιώτες και μειώνονται οι μέρες διατροφής. Για τα αντίστροφα ποσά επιλέγουμε τον πολλαπλασιασμό κατακόρυφα. Μνημονικός κανόνας, οι λέξεις αντίστρο**φα** και κατακόρυ**φα** τελειώνουν σε **(φα)** (Νικολόπουλος, 2015). Τέτοιες διδακτικές πρακτικές, σε καμία περίπτωση δεν αποτελούν βέβαια επιστημονικές δραστηριότητες, όμως είναι αποτελεσματικές στα Μαθηματικά Προβλήματα (World Problems).

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ποιες είναι οι αναγκαίες Εκπαιδευτικές Παρεμβάσεις σε παιδιά με ΔΕΠΥ για να αντιμετωπισθούν Ελλείμματα στη Α/βάθμια αλλά και στη Β/βάθμια εκπαίδευση, που σχετίζονται για τα Μαθηματικά; Για να παρέμβουμε και να βελτιώσουμε την ακαδημαϊκή επίδοση, πρέπει να εντοπίσουμε ποια είναι εκείνα τα χαρακτηριστικά που μειώνουν την δυνατότητα πρόσληψης της πληροφορίας και επεξεργασίας αυτής. Η ελλειμματική προσοχή, όπως επίσης η απερισκεψία είναι ανασταλτικοί παράγοντες της μάθησης. Ενώ για την Εργαζόμενη Μνήμη, είναι απαραίτητη η εστίαση και παραμονή της προσοχής στις πληροφορίες (δεδομένα), ώστε να γίνει η επεξεργασία. Η παρακάτω δραστηριότητα επίλυση εξίσωσης διδάχθηκε στον μαθητή μας στην Β΄ γυμνασίου σε κίνηση με την χρήση διαφανειών (Power Point). Ας ξεκινήσουμε από την επίλυση εξίσωσης. Στην έννοια της εξίσωσης, λέξη κλειδί αποτελεί η μεταβλητή (X) ή αλλιώς ο άγνωστος (X), εδώ πρέπει να κατανοήσουν οι μαθητές/τριες, ότι το συγκεκριμένο γράμμα αποτελεί ένα μοναδικό αριθμό (λύση) που επαληθεύει την εξίσωση.

Αναγνώριση της εξίσωσης, από την αναζήτηση, τον εντοπισμό του αγνώστου X και προσδιορισμός του βαθμού της, π.χ. $3\cdot X^1+4=10$.

Τέχνασμα στη εξίσωση 1ου βαθμού : «χωρίζω γνωστούς - αγνώστους»

Βιωματική/εννοιολογική αντίληψη της εξίσωσης σαν μια ζυγαριά. Κατανόηση των δύο μελών, όπως οι δύο βραχίονες μιας ζυγαριάς.

Ζυγαριά & Εξίσωση	
Βασική τακτική: Χωρίζω γνωστούς από αγνώστους.	Συμπέρασμα: Η μοναδική λύση επαληθεύει την εξίσωση.
X+3=5 X=5-3 άρα X=2	Το X=2 επαληθεύει την εξίσωση, δηλαδή: 2+3=5 άρα 5=5
X-4=5 X=5+4 άρα X=9	Το 9 επαληθεύει την εξίσωση, δηλαδή: 9-4=5 άρα 5=5
3·X=12 X=12:3 άρα X=4	Το 4 επαληθεύει την εξίσωση, δηλαδή: 3·4=12 άρα 12=12

Πίνακας 2: Επίλυσης των εξισώσεων, π.χ.: X+3 = 5, X-4=5 & 3·X=12.

Η δεύτερη στήλη δείχνει την λογική, την βάση της εξίσωσης. Λέμε π.χ. στα παιδιά από πόσα σοκολατάκια πρέπει να βγάλουμε 4 σοκολατάκια για να μείνουν 5. Βέβαια στα παιδιά συνήθως διδάσκουμε την πρώτη στήλη αλλά κακώς, διδάσκουμε μόνο το κόλπο, το τέχνασμα, δηλαδή έχουμε (+) πάμε στο άλλο μέλος και το κάνουμε (-). Επίσης έχουμε (-) πάμε στο άλλο μέλος και το κάνουμε (+), όπως αντίστοιχα τον πολλαπλασιασμό τον μετατρέπουμε σε διαίρεση και την διαίρεση την μετατρέπουμε σε πολλαπλασιασμό. Αναγκαίος ο παράλληλος συνδυασμός διδασκαλίας και των δύο στηλών. Επίσης πρέπει να επιμένουμε στην επαλήθευση που δείχνει βιωματικά την ουσία της εξίσωσης και του αγνώστου. Η διδασκαλία με την παραπάνω ζυγαριά αν παρουσιασθεί σε διαφάνειες θα τραβήξει την μέγιστη δυνατή προσοχή των παιδιών που έχουν την μειονεξία της Ελλειμματικής Προσοχής. Οι μαθητές με ΜΔΜ ειδικά λόγω ΔΕΠ-Υ έχουν ιδιαίτερα αδυναμίες σε θέματα που απαιτούν τον βηματισμό και την σειρά για την επίλυση προβλημάτων.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Όταν η διδασκαλία είναι δυσνόητη, και επαναλαμβανόμενη τα παιδιά με ΔΕΠΥ προσανατολίζονται στο να «φύγουν» από την αίθουσα διδασκαλίας και να ταξιδεύουν στις σκέψεις τους. Να τονίσουμε ότι τις τελευταίες 2-3 δεκαετίες τα αρνητικά πλεονάζουν στην παιδαγωγική και διδακτική σε σχέση με την πρακτική-υλική σύνδεση των Μαθηματικών. Παράδειγμα είναι η «ελαχιστοποίηση» της Στερεομετρίας που γίνεται κατανοητή λόγω της σύνδεσης της με την πράξη και με τον υλικό κόσμο που μας περιβάλει.

Για να αναγνωρίζουμε και κάτι θετικό, σημειώνουμε ότι στο βιβλίο της Γ΄ Γυμνασίου των Μαθηματικών, υπάρχουν εφαρμογές της καθημερινότητας που συνδέουν την φυσική με την εξίσωση δευτέρου βαθμού, η διδασκαλία είναι στη ‘διακριτική ευχέρεια’ των εκπαιδευτικών και των συμβούλων.

Η βιωματική διδασκαλία, όπως πλέον προσφέρεται με την αξιοποίηση των ΤΠΕ και εξελιγμένων λογισμικών, μπορεί να συνεισφέρει θεαματικές βελτιώσεις στη διεργασία διδασκαλίας/μάθησης. Έχοντας για εργαλεία, εικόνα και ήχο στα βίντεο ή στις διαφάνειες (Power Point), επιτυγχάνουμε την συγκέντρωση και διάρκεια της προσοχής, που είναι καθοριστική στην ολοκλήρωση μιας εκπαιδευτικής δραστηριότητας. Τα παιδιά με ΔΕΠ-Υ, που έχουν καλή νοημοσύνη μπορούν να βελτιώσουν την επίδοση τους, αλλά χρειάζεται ένας διαφορετικός τρόπος διδασκαλίας. Στην εισήγηση θέλουμε να τονίσουμε την αντίθεση μας με αρκετούς «ειδικούς» που δηλώνουν ότι η ΔΕΠ-Υ είναι χάρισμα, είναι προσόν, όχι βέβαια, η ΔΕΠΥ είναι μια διαταραχή και σαν τέτοια θέλει την ανάλογη αντιμετώπιση. Η εκπαιδευτική παρέμβαση ειδικά στα Μαθηματικά έχει θεαματικά αποτελέσματα, αυτό είναι το θετικό για τους γονείς και κυρίως για τα παιδιά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ardila, A. & Rosselli, M. (2002). Acalculia and Dyscalculia. *Neuropsychology Review, 12*, 4.

Geary, D. (2004). *Mathematics and learning disabilities. Journal of learning disabilities, 37*, pp. 4–15.

Combs, M., Canu, W., Broman-Fulks, J., Rocheleau, C., and Nieman, D. (2015). *Journal of Attention Disorder. Vol 19* (5). Article Perceived Stress and ADHD.

Θεοδωρίτση, Ι. & Αντωνίου, Α. Σ. (2016). Τα Δευτερογενή Συμπτώματα της ΔΕΠ-Υ και η επίδρασή τους στην καθημερινότητα του παιδιού και της οικογενείας του. Athens: *EOS Journal of Scientific and Educational Research, Volume 4*, Section 2.

Hallowell, M.E. & Ratey, J.J. (1995). *Answers to Distraction*. New York: Pantheon books.

Jitendra, A. (2005). Mathematics assessment: Introduction to the special issue. *Assessment for Effective Intervention, 30* (2), 1-2.

Νικολόπουλος, Γ. (2015). *ΓΥΜΝΑΣΙΟ: Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά.* https://www.specialeducation.gr (Ιστοσελίδα της ΠΕΕΠ).

Lackschewitz, H., Hutherb, G., Kroner-Herwiga, B. (2008). Physiological and psychological stress responses in adult with attention-deficit/hyperactivity disorder *Psychoneuroendocrinology* (2008) 33.

Osborne, J. & Hennessy, S. (2003). *Literature Review in Science Education and the Role of ICT: Promise, Problems and Future Directions*, NESTA futurelab series, Bristol.

Παπαδάτος, Γ. (2010). *Ψυχικές Διαταραχές και μαθησιακές δυσκολίες παιδιών και εφήβων*. Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Πόρποδας, Κ. (2003). *Διαγνωστική Αξιολόγηση και Αντιμετώπιση Μαθησιακών Δυσκολιών στο Δημοτικό Σχολείο*. Έκδοση στο πλαίσιο υλοποίησης του έργου ΕΠΕΑΕΚ 2000-2012.

Shattell, M. M., Bartlett, R. & Rowe, T. (2008). "I Have always felt different" The experience of Attention-Deficit/Hyperactive Disorder in Childhood. *Journal of Pediatric Nursing, 23*, 49-57.

Smith, T.J., & Adams, G. (2006). The effect of comorbid ADHD and learning disabilities on parent-reported behavioral and academic outcomes of children. *Learning Disabilities Quarterly, 29*, 101-112.

Stevenson, J., Langley, K., Ray, H., Payton, A., Worthington, J., Ollier, W., et al., (2005). Attention –Deficit Hyperactivity Disorder with Reading Disabilities. Preliminary genetic findings on the involvement of the ADR2Agene. *Journal of child Psychology and Psychiatry, 46*, 1081-1088.

Travell, C. & Visser, J. (2006). "ADHD does bad stuff to you"; Young people's and parent's experiences and perceptions of attention deficit hyperactivity disorder(ADHD). *Emotional and Behavioral Difficulties, 11*.

Willcutt, E.G., Doyle, A. E., Nigg, J. T., Stephen, V., Faraone, S. V. & Pennington, B.F. (2005). Validity of the executive function theory of attention-deficit/ hyperactivity disorder: A meta-analytic review. *Biological Psychiatry, 57*.

Willcutt E.G., Betjemann R.S., McGrath LM, Chhabildas NA, Olson RK, De Fries JC, et al. (2010) *Etiology and neuropsychology of comorbidity between RD and ADHD: the case for multiple-deficit models*.

ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΜΑΘΗΤΩΝ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΡΟΛΟ ΤΩΝ ΑΞΙΩΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΟΡΙΣΜΩΝ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Παπαγεωργίου Μαρία[1] και Τζεκάκη Μαριάννα[2]

1ο Γενικό Λύκειο Σταυρούπολης[1], Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο[2] Θεσσαλονίκης

mardpap@yahoo.gr και tzekaki@auth.gr

Η παρούσα μελέτη αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας όπου επιχειρείται η διδακτική προσέγγιση της αξιωματικής θεμελίωσης από μαθητές της Α΄ Λυκείου. Στη συγκεκριμένη εργασία διερευνάται η δυνατότητα βελτίωσης της κατανόησης που έχουν 43 μαθητές για το ρόλο των αξιωμάτων και των ορισμών στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. Οι μαθητές συμμετείχαν σε ειδικά σχεδιασμένη διδακτική παρέμβαση και εξετάστηκαν με ερωτηματολόγια πριν και μετά την παρέμβαση. Τα αποτελέσματα παρουσιάζουν τις τροποποιήσεις στην κατανόηση για τον ρόλο των αξιωμάτων και των ορισμών που παρουσίασαν οι μαθητές μετά τη διδακτική παρέμβαση.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία παρέχει τη δυνατότητα στους μαθητές να προσεγγίσουν μια μαθηματική θεωρία και να ανιχνεύσουν τον τρόπο οργάνωσης της μαθηματικής γνώσης σε ένα σύστημα. Τη συμβολή της γεωμετρίας στην κατανόηση της ανάπτυξης μαθηματικών θεωριών αναγνωρίζουν, όπως αναφέρουν οι Herbst, et al. (2010), διακεκριμένοι μαθηματικοί όπως ο Usiskin και ο Poincare. Ο Usiskin επισημαίνει ότι η Γεωμετρία αποτελεί παράδειγμα ενός μαθηματικού συστήματος αξιωμάτων, ορισμών και θεωρημάτων. Ο Poincare τονίζει την απλότητα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που την καθιστά πιο κατανοητή από τις υπόλοιπες αν και κάθε γεωμετρία αποτελεί μια μαθηματική θεωρία.

Η παραπάνω θέση υποστηρίζεται τόσο στο νέο πρόγραμμα σπουδών της Α΄ Λυκείου που εφαρμόζεται από το 2011 στα σχολεία της Ελλάδος όσο και στα νέο πρόγραμμα για το Λύκειο που συντάχθηκε το 2015 στο πλαίσιο του προγράμματος «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών». Ειδικότερα στο πρώτο αναφέρεται ότι η Θεωρητική Γεωμετρία μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αποκτήσουν μια αίσθηση της οικοδόμησης μιας μαθηματικής θεωρίας (Φ.Ε.Κ. Β΄ 1168, σ.16674). Στο δεύτερο, ως ένας από τους δύο κύριους στόχους της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο, καθορίζεται η παρουσίαση της Αξιωματικής Θεμελίωσης (ως τρόπου οργάνωσης της ανθρώπινης γνώσης). Ως ένας από τους βασικούς σκοπούς της Μαθηματικής Εκπαίδευσης αναφέρεται η μύηση και η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Στα χαρακτηριστικά που διακρίνουν τους μαθητές που είναι ικανοί για μαθηματική σκέψη σημειώνεται και η ανάπτυξη της κατανόησης της διαφοράς μεταξύ των ορισμών, αξιωμάτων και θεωρημάτων.

Το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών εστιάζεται στις δυσκολίες κατανόησης που συναντούν οι μαθητές στο μάθημα της Γεωμετρίας και στις διαδικασίες της (Nikoloudakis, 2010). Οι Hershkowitz, et al όπως αναφέρει η Ιγγλέζου (2014) παρουσιάζουν πλήθος ερευνών που καταγράφουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση του ρόλου των δομικών στοιχείων ενός μαθηματικού συστήματος όπως των αξιωμάτων, των ορισμών και των θεωρημάτων.

Κάποιοι άλλοι ερευνητές σχεδίασαν διδακτικές παρεμβάσεις σε μαθητές Λυκείου αναφορικά με το ρόλο των αξιωμάτων, ορισμών και θεωρημάτων στη Γεωμετρία, επικεντρώνοντας σε δύο βασικούς στόχους: την ανάπτυξη της ικανότητας κατασκευής οικονομικών ορισμών για γεωμετρικές έννοιες και την κατανόηση της φύσης και του ρόλου των αξιωμάτων, ορισμών και απόδειξης (De Villiers, 1996). Ο Θωμαΐδης (2000) σχεδίασε παρέμβαση και εξέτασε την αναγνωστική ικανότητα μαθητών στην κατανόηση βασικών αρχών της ανάπτυξης της αξιωματικής θεωρίας. Η Grigoriadou (2012) στην διδακτορική της διατριβή αναπτύσσει διδασκαλία τριών σταδίων, όπου στο τρίτο στάδιο οι μαθητές αρχίζουν να βλέπουν την αξιωματική δομή της Ευκλείδειας γεωμετρίας κατανοώντας την ανάγκη ύπαρξης των αξιωμάτων – θεωρημάτων.

Αντίστοιχα, η παρούσα έρευνα επιδίωξε το σχεδιασμό διδακτικής παρέμβασης για την προσέγγιση της δομής του αξιωματικού συστήματος από μαθητές της Α΄ Λυκείου. Συγκεκριμένα, ο κεντρικός ερευνητικός στόχος της έρευνας, μέρος της οποίας αποτελεί η συγκεκριμένη παρουσίαση, είναι να διερευνηθεί σε ποιο βαθμό μια κατάλληλη διδακτική παρέμβαση μπορεί να βελτιώσει την κατανόηση των μαθητών για το ρόλο των αξιωμάτων και των ορισμών, στη δομή του αξιωματικού συστήματος.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ο Duval στο Boero (2007) παρουσιάζει τη θεώρηση του για την ανάλυση της γνωστικής πολυπλοκότητας της λειτουργίας ενός συλλογισμού η οποία αποτελεί πλαίσιο αναφοράς της έρευνας για τον ρόλο των προτάσεων στο αξιωματικό σύστημα. Σε αυτήν, αναπτύσσει τις εννοιολογικές διαστάσεις μιας πρότασης. Μία από τις τρεις διαστάσεις που διακρίνει είναι η θέση (“*status*”) της πρότασης. Ο ίδιος ορίζει ως θέση την ειδική λειτουργία που έχει κάθε πρόταση σε σχέση με άλλες προτάσεις σε έναν συλλογισμό ή μια απόδειξη. Διαχωρίζει τον ρόλο κάθε πρότασης σε δύο επίπεδα. Στο τοπικό επίπεδο οργάνωσης μιας πρότασης που αποκαλεί λειτουργική θέση *(“operating status”*) και στο ανώτερο επίπεδο οργάνωσης που αποκαλεί θεωρητική θέση (“*theoretical status”*). Το τοπικό, αναφέρεται στο πιθανό ρόλο που μπορεί να έχει μία πρόταση σε ένα συλλογισμό. Το θεωρητικό, στο ρόλο που μπορεί να έχει μία πρόταση στο πλαίσιο μιας θεωρίας και στην οργάνωση αυτής μέσα σε ένα σύνολο προτάσεων όπως αξίωμα, ορισμός θεώρημα και εικασία.

Σχετικά με τον θεωρητικό ρόλο των αξιωμάτων ο De Villiers (1996) αναφέρει ότι τα αξιώματα είναι απαραίτητα σημεία εκκίνησης σε ένα μαθηματικό σύστημα (“necessary starting points”). Ενώ οι Jahnke και Wambach (2013) υποστηρίζουν ότι τα αξιώματα όπως και οι ορισμοί είναι γενικές προτάσεις και εξαιτίας αυτού μπορούμε να παράγουμε από αυτές άλλες γενικές προτάσεις. Σύμφωνα με τις θέσεις των παραπάνω και για το σκοπό της έρευνας αναγνωρίζονται δύο διαστάσεις για το θεωρητικό ρόλο των αξιωμάτων: ο ρόλος τους ως απαραίτητα σημεία εκκίνησης με στόχο την αποφυγή κυκλικών συλλογισμών (τη χρήση μιας πρότασης στην απόδειξη ενός θεωρήματος και απόδειξη της αντίστοιχης πρότασης με τη βοήθεια του προηγούμενου θεωρήματος), καθώς και ο ρόλος τους ως θεμέλια πάνω στα οποία στηρίζεται η παραγωγή των υπολοίπων προτάσεων.

Ο Freudenthal όπως αναφέρει ο De Villiers (1998), στην περιγραφική διαδικασία θεσμοθέτησης ενός ορισμού, υποστηρίζει ότι ένας ορισμός περιγράφει συνοπτικά ένα ήδη γνωστό αντικείμενο ξεχωρίζοντας κάποιες χαρακτηριστικές ιδιότητες. Οι Mariotti και Fischbein (1997) δηλώνουν ότι μέσω των ορισμών εισάγεται ένα αντικείμενο ή ένα στοιχείο. Παράλληλα σημειώνουν ότι κατά τον De Villiers οι ορισμοί παράγουν ταξινομήσεις των γεωμετρικών αντικειμένων με βάση καλά ορισμένες γεωμετρικές ιδιότητες αυτών. Ο De Villiers (1998) χρησιμοποιεί τον όρο συστηματοποίηση της υπάρχουσας γνώσης προσδιορίζοντας τον ρόλο των ορισμών. Με βάση τις θέσεις των προηγούμενων ερευνητών σχετικά με τον θεωρητικό ρόλο των ορισμών, στην παρούσα έρευνα θα εξεταστούν οι ακόλουθες τρεις διαστάσεις: ο ρόλος τους (1) ως θεμέλια, βάσεις των νέων ορισμών και των νέων ιδιοτήτων, (2) ως περιγραφή-εισαγωγή ενός γνωστού γεωμετρικού αντικειμένου αλλά και (3) της δημιουργίας ταξινόμησης με στόχο τη συστηματοποίηση με παραγωγικό τρόπο των νέων ιδιοτήτων που προκύπτουν από τις ιδιότητες που περιγράφουν την έννοια που ορίζεται.

Η ανάλυση των διαστάσεων της έννοιας «κατανόησης» γίνεται υπό το πρίσμα της θεωρίας των Wiggins και Tighe η οποία αναλύει πτυχές της κατανόησης. Στις θέσεις τους αναφέρονται στα έξη "πρόσωπα" της κατανόησης ως ακολούθως: της εξήγησης, της ερμηνείας, της εφαρμογής, της προοπτικής, της ενσυναίσθησης και της αυτογνωσίας (Κολέζα, 2013). Τα τρία πρώτα αξιοποιήθηκαν ιδιαίτερα για τις ανάγκες της έρευνας και με την έννοια αυτή αποτέλεσαν τα αναλυτικά ερευνητικά ερωτήματα της. Από τα ερωτήματα αυτά, τα οποία αφορούσαν το σύνολο της διδακτικής παρέμβασης, στην παρούσα έρευνα παρουσιάζουμε μόνο τη διάσταση της ερμηνείας επιδιώκοντας να απαντήσουμε στο ακόλουθο ερώτημα:

-Σε ποιο βαθμό μπορούν οι μαθητές να περιγράψουν λεκτικά ή με παραδείγματα ή με οποιοδήποτε είδος αναπαράστασης τι είναι αξίωμα, ορισμός και ποιος ο ρόλος τους στην αποδεικτική διαδικασία;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η έρευνα, όπως αναφέρθηκε, αποτελεί τμήμα μιας ευρύτερης που πραγματοποιήθηκε κατά το σχολικό έτος 2016-2017. Στην έρευνα αυτή μελετήθηκε η βελτίωση στην κατανόηση που παρουσιάζουν οι μαθητές μετά από παρέμβαση για το ρόλο των αξιωμάτων, ορισμών, θεωρημάτων και της απόδειξης στη δομή του αξιωματικού συστήματος. Παράλληλα καταγράφηκαν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην προσπάθεια τους να αποδείξουν τα θεωρήματα στην ενότητα των παραλλήλων ευθειών. Συμμετείχαν οι 43 μαθητές δύο τμημάτων της Α΄ Λυκείου του 1ου Γ.Ε.Λ Σταυρούπολης οι οποίοι προέρχονταν από τρία διαφορετικά Γυμνάσια της περιοχής. Η παρέμβαση πραγματοποιήθηκε μετά τη διδασκαλία των τριών πρώτων κεφαλαίων της Γεωμετρίας της Α΄ Λυκείου σε 8 διδακτικές ώρες και σε διάστημα τριών βδομάδων.

Για τη μέτρηση της κατανόησης σχετικά με το ρόλο των ορισμών και των αξιωμάτων σχεδιάστηκαν δύο ερωτηματολόγια τα οποία αποτελούνται από τέσσερα μέρη. Το 1ο και 2ο μέρος αντιστοιχούν στη διάσταση της ερμηνείας μίας από τις διαστάσεις της έννοιας της κατανόησης, Συγκεκριμένα, στο 1ο μέρος ζητείται από τους μαθητές να περιγράψουν με λόγια ή με παράδειγμα τι είναι αξίωμα και ποιος ο ρόλος του (αντίστοιχα ορισμός-θεώρημα-απόδειξη). Στο 2ο μέρος δίνονται προτάσεις και ζητείται να χαρακτηριστεί το είδος τους. Το 3ο και 4ο μέρος σχετίζονται με τις δύο άλλες διαστάσεις της κατανόησης του ρόλου των ορισμών και αξιωμάτων που διερευνήθηκαν αλλά δεν θα αναλυθούν στην παρούσα εργασία. Τα δύο ερωτηματολόγια πριν και μετά, ως προς το 1ο και 2ο μέρος είναι ακριβώς ίδια.

Στη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης τα παιδιά εργάστηκαν σε ομάδες και ενεπλάκησαν σε παιγνιώδεις δραστηριότητες που ομαδοποιούνται σε τέσσερις ενότητες. Οι τρείς ενότητες δραστηριοτήτων βρίσκονται σε αντιστοιχία με τις τρεις διαστάσεις της έννοιας κατανόησης. Στην 1η ενότητα δραστηριοτήτων με τίτλο «χαρακτηρίζοντας προτάσεις» παρουσιάζονται οι αποδείξεις προτάσεων. Οι προτάσεις που συνιστούν κάθε απόδειξη είναι γραμμένες και τοποθετημένες μέσα στο κείμενο σε πλαίσια. Κάθε ομάδα χαρακτηρίζει τις προτάσεις και τις αντιγράφει σε καρτέλες διαφορετικών χρωμάτων. Στις κίτρινες τα αξιώματα, στις μωβ τους ορισμούς, στις θαλασσί τα θεωρήματα και στις πράσινες τις άλλες προτάσεις. Στη συνέχεια τοποθετούν σε ένα χαρτόνι τις καρτέλες με τη σειρά από προτάσεις που (κατά την κρίση τους) απαρτίζουν την απόδειξη της πρότασης της κάθε δραστηριότητας. Στο τέλος κάθε δραστηριότητας φωτογραφίζεται το έργο κάθε ομάδας και αναρτάται στην e-class. Έτσι όταν δεν βρίσκονται στο σχολείο έχουν πρόσβαση στα έργα όλων των ομάδων της τάξης τους και στις σωστές απαντήσεις των δραστηριοτήτων. Στη 2η ενότητα δραστηριοτήτων με τίτλο «αναζητώντας τη σωστή σειρά» κάθε ομάδα δοκιμάζει να βάλει τις προτάσεις που είναι αναγκαίες για μια απόδειξη στη σωστή διαδοχή. Οι δραστηριότητες της 3ης ενότητας σχετίζονται με τη διάσταση της εξήγησης. Η 4η ενότητα δραστηριοτήτων με τίτλο «χαρτογραφώντας τις συνδέσεις των προτάσεων» στοχεύει στην ανίχνευση του θεωρητικού ρόλου των αξιωμάτων-ορισμών-θεωρημάτων. Δίνονται τυπωμένα σε καρτέλες των τριών χρωμάτων τα αξιώματα, οι ορισμοί και τα θεωρήματα που χρησιμοποιήθηκαν στην ενότητα των παραλλήλων. Κάθε ομάδα τοποθετεί τις καρτέλες σε χαρτόνι και προσπαθεί να συνδέσει με γραμμές τις προτάσεις ώστε να φαίνεται ποιες από αυτές συμμετείχαν στην απόδειξη των θεωρημάτων της ενότητας.

Όπως αναφέρθηκε προηγούμενα, οι μαθητές εξετάστηκαν πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση με δύο ερωτηματολόγια. Η συμπλήρωση του δεύτερου πραγματοποιήθηκε έξι βδομάδες μετά την παρέμβαση. Στη παρούσα εργασία, για λόγους έκτασης, θα παρουσιαστούν μόνο τα αποτελέσματα για μία από τις τρεις διαστάσεις της έννοιας κατανόησης σχετικά με τον ρόλο των αξιωμάτων και των ορισμών, τη διάσταση της περιγραφής, όπως καταγράφεται από τις απαντήσεις που δόθηκαν πριν και μετά τη παρέμβαση στο 1ο μέρος των ερωτηματολογίων.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στην ερώτηση που αφορά τι θεωρούν οι μαθητές ότι είναι αξίωμα, πριν τη παρέμβαση 5 απαντήσεις στις 43 χαρακτηρίστηκαν ως σωστές (πχ. «συμβάσεις των επιστημόνων») ή σχεδόν σωστές («δεχόμαστε, φαίνονται αληθείς αλλά δεν μπορούν να αποδειχτούν»), ενώ μετά τη παρέμβαση 27 από τις 43 ανήκουν σε αυτές τις δύο κατηγορίες. Παρατίθενται ενδεικτικές απαντήσεις των μαθητών μετά την παρέμβαση που εντάχθηκαν στην κατηγορία σωστές και σχεδόν σωστές απαντήσεις:

…είναι μία πρόταση που συμφωνούν όλοι οι επιστήμονες πως ισχύει.

…είναι κάτι που δεχόμαστε ότι ισχύει χωρίς να χρειάζεται απόδειξη.

…ισχυρισμοί που δεχόμαστε ως αληθείς αλλά δεν μπορούμε να αποδείξουμε.

Απαντήσεις στις οποίες δινόταν σωστή περιγραφή αλλά λάθος παράδειγμα ή σημειωνόταν η έκφραση «δεν έχει αποδειχθεί ακόμα» εκτιμήθηκαν ως μερικώς σωστές. Τέτοιες απαντήσεις έδωσαν 10 μαθητές στους 43 πριν τη παρέμβαση ενώ μετά 9 στους 43 (όχι οι ίδιοι).

Ο πίνακας 1 που ακολουθεί συνοψίζει τις 43 απαντήσεις στο τι είναι αξίωμα

ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΑΞΙΩΜΑ	ΠΡΙΝ	ΜΕΤΑ
Σωστές και σχεδόν σωστές απαντήσεις	5	27
Μερικώς σωστές απαντήσεις	10	9
Απαντήσεις με παράδειγμα	2	
Μη κατανόηση της σημασίας	9	3
Δεν ξέρω/κενό	17	4

Πίνακας 1: Κατανομή των απαντήσεων στην ερώτηση «τι νομίζετε ότι είναι το αξίωμα (παραδοχή) στη Γεωμετρία;».

Σχετικά με το ρόλο του αξιώματος, πριν τη παρέμβαση 11 στους 43 μαθητές έδωσαν σωστές απαντήσεις. Από αυτούς οι 10 αναγνώρισαν το λειτουργικό ρόλο των αξιωμάτων, με 7 να τονίζουν τη χρήση τους στη λύση ασκήσεων. Τέλος 1 μαθητής αναγνώρισε το θεωρητικό ρόλο των αξιωμάτων στη θεμελίωση της Γεωμετρίας. Μετά τη παρέμβαση σημειώθηκαν σημαντικές μεταβολές. Σωστές απαντήσεις έδωσαν 31 στους 43 μαθητές. Από αυτούς οι 28 αναγνώρισαν το λειτουργικό ρόλο. Οι 11 έκαναν αναφορά στη χρήση του αξιώματος ως εργαλείου μέσα σε οποιαδήποτε απόδειξη ενώ οι 17 εστίασαν στη χρήση μόνο στη λύση των ασκήσεων. Το θεωρητικό ρόλο ως θεμέλια σημείωσαν 3 μαθητές. Ακολουθούν ενδεικτικές απαντήσεις των μαθητών με αναφορά στα αξιώματα ως θεμέλια, η πρώτη πριν τη παρέμβαση και οι υπόλοιπες μετά:

...λειτουργεί ως κάτι το σίγουρο που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να προβούμε σε νέα αποτελέσματα και συμπεράσματα.

...αποτελούν τα θεμέλια, πάνω στα οποία χτίζεται και αναπτύσσεται η Γεωμετρία.

...τα αξιώματα είναι η βάση πολλών θεωρημάτων.

Ακολουθεί πίνακας που αφορά στις απαντήσεις για το ρόλο του αξιώματος

ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ ΑΞΙΩΜΑΤΟΣ	ΠΡΙΝ	ΜΕΤΑ
Απαντήσεις με αναφορά στο θεωρητικό ρόλο (θεμέλιο- βάση- εκκίνηση)	1	3
Απαντήσεις με αναφορά στο λειτουργικό ρόλο	10	28
Μη κατανόηση του ρόλου	10	5
Δεν ξέρω/κενό	22	7

Πίνακας 2: Κατανομή των απαντήσεων στην ερώτηση «ποιος νομίζετε ότι είναι ο ρόλος του αξιώματος στη Γεωμετρία;»

Ελάχιστες μεταβολές σημειώθηκαν στην κατανόηση του τι είναι ο ορισμός αφού αρχικά18 μαθητές στους 43, στη συνέχεια 20 στους 43 αναφέρουν ότι με τον ορισμό περιγράφεται ένα γεωμετρικό αντικείμενο. Με παράδειγμα απαντά 1 μαθητής πριν και 1 μετά (όχι ο ίδιος). Παρατίθενται κάποιες απαντήσεις που αναφέρουν ότι ο ορισμός περιγράφει ένα αντικείμενο, 2 πριν τη παρέμβαση και 1μετά:

…ερμηνεύει κάτι με σαφήνεια και χωρίς περιθώριο αμφισβήτησης, όταν δείχνω την πραγματική του «φύση».

...το σύνολο των βασικών αρχικών ιδιοτήτων που ερμηνεύουν ένα φαινόμενο, ένα μέρος ή έναν κλάδο της.

…είναι η περιγραφή και η οριοθέτηση κάποιων πραγμάτων.

Ο επόμενος πίνακας παρουσιάζει τις απαντήσεις στο τι είναι ορισμός

ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΟΡΙΣΜΟΣ	ΠΡΙΝ	ΜΕΤΑ
Απαντήσεις ότι περιγράφει	18	20
Απαντήσεις με παράδειγμα	1	1
Μη κατανόηση της σημασίας	21	20
Δεν ξέρω/κενό	3	2

Πίνακας 3: Κατανομή των απαντήσεων στην ερώτηση «τι νομίζετε ότι είναι ο ορισμός στη Γεωμετρία;»

Σημαντικές μεταβολές σημειώθηκαν όμως, στην κατανόηση για το ρόλο του ορισμού, με 31 μαθητές στους 43 να δίνουν σωστή απάντηση μετά την παρέμβαση ενώ πριν ήταν μόνο 22. Αξιοσημείωτο είναι ότι 4 μαθητές εκτός από το λειτουργικό αναγνώρισαν και το θεωρητικό ρόλο, με 2 να αναφέρονται στο θεωρητικό ως θεμέλιο, 1 ως περιγραφή και 1 ως περιγραφή και ταξινόμηση. Ακολουθούν κάποιες ενδεικτικές απαντήσεις των μαθητών για το θεωρητικό ρόλο ταξινομεί-διακρίνει-θεμέλια, με τις δύο πρώτες πριν τη παρέμβαση και οι υπόλοιπες μετά:

> …με τους ορισμούς επικρατεί τάξη και λογική, η Γεωμετρία μετατρέπεται σε επιστήμη.
>
> …βοηθάει να κατανοήσουμε αυτούς τους όρους ευκολότερα, να τους ξεχωρίσουμε μεταξύ τους και να καταλάβουμε τις διαφορές ορισμένων απ' αυτούς.
>
> …μας δίνει τις βάσεις, μας διευκολύνει στο να κατανοήσουμε και στη συνέχεια να αποδείξουμε.
>
> …έχει το σημαντικότερο ρόλο, σε αυτόν βασίζονται όλα.

Ο πίνακας 4 παρουσιάζει τις απαντήσεις για το ρόλο του ορισμού

ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ	ΠΡΙΝ	ΜΕΤΑ
Απαντήσεις για θεωρητικό ρόλο. (ταξινομεί- διακρίνει- θεμέλια)	4	7
Απαντήσεις για θεωρητικό ρόλο. (περιγράφει-εισάγει)	9	9
Απαντήσεις για λειτουργικό ρόλο (εργαλείο)	9	21
Μη κατανόηση του ρόλου	16	9
Δεν ξέρω/κενό	5	3

Πίνακας 4: Κατανομή των απαντήσεων στην ερώτηση «ποιος νομίζετε ότι είναι ο ρόλος του ορισμού στη Γεωμετρία;»

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Από τα προηγούμενα αποτελέσματα γίνεται φανερό ότι παρατηρήθηκαν αρκετές βελτιώσεις στους μαθητές μετά την διδακτική παρέμβαση ως προς την κατανόηση του λειτουργικού ρόλου των αξιωμάτων (πιν. 1 και 2) και των ορισμών (πιν. 3 και 4). Έτσι οι μαθητές εμφανίζονται να είναι ως ένα βαθμό σε θέση να παρουσιάσουν με κάποιο τρόπο τη λειτουργία των δύο αυτών στοιχείων αλλά όχι απαραίτητα να εισαχθούν στη θεωρητική τους διάσταση. Οι περισσότεροι από αυτούς δεν φαίνεται να προσεγγίζουν εύκολα το θεωρητικό ρόλο των ορισμών και των αξιωμάτων και να εισέρχονται έτσι ουσιαστικά στην κατανόηση της αξιωματικής θεμελίωσης της Γεωμετρίας.

Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με τα ευρήματα από το πείραμα USEME (De Villiers, 1996) όπως και την έρευνα Grigoriadou (2012) στα οποία επίσης παρατηρήθηκαν βελτιώσεις στους μαθητές. Στις συγκεκριμένες έρευνες παρουσιάστηκαν καλύτερα αποτελέσματα καθώς πραγματοποιήθηκαν σε μεγαλύτερη διάρκεια και ειδικά σε μαθητές με αυξημένο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά και εκτός του σχολικού ωραρίου (Grigoriadou, 2012). Αντίθετα η έρευνα που παρουσιάσαμε έγινε σε μικρό χρονικό διάστημα και με περιορισμένο αριθμό δραστηριοτήτων.

Ωστόσο, όλα τα παραπάνω είναι ενδεικτικά του ότι οι μαθητές θα ήταν σε θέση να προσεγγίσουν τη φύση της αξιωματικής διαδικασίας μέσα από κατάλληλα διαμορφωμένες δραστηριότητες για ικανό χρονικό διάστημα. Οι μαθητές στην αρχή του Λυκείου δεν εμφανίζονται να κατανοούν τη φύση και το ρόλο των ορισμών και των αξιωμάτων, στοιχεία που είναι αναντίρρητα απαραίτητα για την απόκτηση επίγνωσης του περιεχομένου και της λειτουργίας των Μαθηματικών όπως και για την ανάπτυξη μαθηματικού τρόπου απόδειξης και επεξεργασίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Boero, P. (2007). *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice.* Sense Publishers

De Villiers, M. (1996, October). The future of secondary school geometry. *In Slightly adapted version of Plenary presented at the SOSI Geometry Imperfect Conference* (pp. 2-4).

De Villiers, M.D. (1998). To teach definitions or teach to define? In Olivier, A. &Newstead, K. (Eds). *Proceedings of PME 22* (Vol 2, 248-255).(Available http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/define.htm)

Grigoriadou, O. (2012). *Reasoning in geometry. How first learning to appreciate the generality of arguments helps students come to grips with the notion of proof.* (Doctoral dissertation, University of Amsterdam).

Herbst, P., González, G., Hsu, H. Y., Chen, C., Weiss, M., & Hamlin, M. (2010).*Instructional situations and students' opportunities to reason in the high school geometry class. Manuscript.*Deep Blue at the University of Michigan, http://hdl.handle.net/2027.42/78372.

Jahnke, H. N., &Wambach, R. (2013). Understanding what a proof is: a classroom-based approach. *ZDM, 45(3),* 469-482.

Mariotti, M. A., &Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 34(3),* 219-248.

Nikoloudakis, E. (2010).A proposed model to teach Geometry to first-year senior High School students. *International J. Mathematics Education, 2, 17-45.* Athens.

Θωμαΐδης,Γ., (2000). Η κατανόησητης αξιωματικής θεμελίωσης και η αποδεικτική ικανότητατων μαθητών στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. ΣτοΜ. Κούρκουλος κ.ά. [Επιμ.]. *Πρακτικά 2ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών, (σ.σ.127-136).* Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Κρήτης (Ρέθυμνο).

Ιγγλέζου, Α. (2014). *Επιστημολογική και Διδακτική Ανάλυση του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Ελλάδα*. (Διπλωματική Εργασία, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών)

Κολέζα,Ε. (2013).*Φιλοσοφία ενός Π. Σ. για τα ΜαθηματικάΕργαστήριο Έρευνας στη Διδασκαλία των Μαθηματικών Παιδαγωγικό τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστήμιο Πάτρας*, http://www.mathlab.upatras.gr/

Υπουργείο Παιδείας Δια Βίου Μάθησης & Θρησκευμάτων: *Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Α΄ Τάξης Γενικού Λυκείου.* Φ.Ε.Κ. Β΄ 11688, σ.16674, 8 Ιουνίου 2011.

Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων: «ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών» ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ «ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ» https://repository.edulll.gr/.../2/1798_ΠΣ_ΓΕΛ_ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ_ΕΞΩΦΥΛΛΟ.pdf

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΘΗΚΗΣ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΑ ΜΑΤΙΑ ΕΝΟΣ ΠΡΩΤΟΕΤΗ ΦΟΙΤΗΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Παπαδάκη Εύη και Κουρουνιώτης Χρήστος

Πανεπιστήμιο Κρήτης

evi.papadaki@math.uoc.gr, chrisk@uoc.gr

Η έννοια της γραμμικής θήκης είναι μια από τις πρώτες αφηρημένες έννοιες που συναντούν οι φοιτητές σε ένα μάθημα Γραμμικής Άλγεβρας. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται οι σκέψεις και η χρήση της έννοιας από έναν πρωτοετή φοιτητή Μαθηματικών την περίοδο μετάβασης από το εισαγωγικό μάθημα Γραμμικής Άλγεβρας στο πρώτο μάθημα αφηρημένης Γραμμικής Άλγεβρας. Χρησιμοποιώντας το θεωρητικό εργαλείο εννοιακή εικόνα – εννοιακός ορισμός (Tall & Vinner, 1981) μελετάμε τα βασικά χαρακτηριστικά της εννοιακής εικόνας του φοιτητή για τη γραμμική θήκη όπως εξελίσσεται τη μεταβατική αυτή περίοδο.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια η διδασκαλία της Γραμμικής Άλγεβρας σε προπτυχιακό επίπεδο προσελκύει όλο και περισσότερο το ενδιαφέρον των ερευνητών της εκπαίδευσης. Η Γραμμική Άλγεβρα βρίσκει πολλές εφαρμογές στα μαθηματικά και σε άλλες επιστήμες, όμως η διδασκαλία της αποδεικνύεται απαιτητική τόσο για τους καθηγητές όσο και για τους φοιτητές. Οι δυσκολίες που παρατηρούνται αποδίδονται εν μέρει στο φορμαλισμό με τον οποίο διδάσκεται συνήθως το μάθημα, την έλλειψη εξοικείωσης σε αποδεικτικές διαδικασίες καθώς και ελλείψεις σε έννοιες της λογικής και της θεωρίας συνόλων (Dorier et al., 2000; Hillel, 2000). Ο Harel (2000) προτείνει τρεις αρχές στη μάθηση της Γραμμικής Άλγεβρας και τονίζει την ανάγκη για προγράμματα σπουδών προσαρμοσμένα στις ανάγκες των φοιτητών που να συμβάλλουν στην κατανόηση των αφηρημένων εννοιών της.

Ιδιαίτερα η έννοια της γραμμικής θήκης φαίνεται να δυσκολεύει αρκετά τους φοιτητές. Ο Carlson (1993) αναφέρει ότι εάν οι δυσκολίες στις ιδέες του υπόχωρου, της γραμμικής θήκης και της γραμμικής εξάρτησης /ανεξαρτησίας δεν αντιμετωπιστούν εγκαίρως δημιουργούν εμπόδια. Οι Stewart και Thomas (2009) παρατηρούν ότι η πλειοψηφία των φοιτητών που διδάχτηκε την έννοια της γραμμικής θήκης με έμφαση στη συμβολική γλώσσα, τους πίνακες και τους ορισμούς, δεν εμφανίζει ξεκάθαρη κατανόηση της έννοιας καθώς και ότι κανένας φοιτητής στο συγκεκριμένο δείγμα δεν ανέφερε τη γραμμική θήκη ως το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων. Ακόμα, οι ίδιοι αναφέρουν ότι οι φοιτητές παρουσίαζαν αρκετές δυσκολίες στη σύνδεση της έννοιας με την έννοια της βάσης. Τέλος, οι Wawro et al. (2012) προτείνουν τη διδασκαλία της έννοιας διαισθητικά και όχι μέσα από την επίλυση συστημάτων και παρουσιάζουν μια προσέγγιση στη διδασκαλία της έννοιας μέσα από μια σειρά από ρεαλιστικές μαθηματικές δραστηριότητες.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στην παρούσα εργασία εξετάζεται η κατανόηση ενός πρωτοετή φοιτητή μαθηματικών μέσα από τη σκοπιά της θεωρίας των Tall και Vinner (1981) εννοιακή εικόνα και εννοιακός ορισμός. Η θεωρία αυτή αποτελεί ένα στέρεο θεωρητικό πλαίσιο (EMS, 2014) και έχει χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν από πολλούς ερευνητές κυρίως για έννοιες του Απειροστικού Λογισμού. Στα πλαίσια της Γραμμικής Άλγεβρας, οι Warwo et al. (2011) εξετάζουν την έννοια του υπόχωρου μέσα από την παραπάνω θεωρία.

Η εννοιακή εικόνα (concept image) είναι μια δυναμική δομή που περιλαμβάνει όλες τις νοερές εικόνες που έχει το άτομο για μια συγκεκριμένη έννοια. Σύμφωνα με τους Tall και Vinner το άτομο ανακαλεί τμήματα της εικόνας του για την επίλυση προβλημάτων (evoked concept image). Η εννοιακή εικόνα μπορεί να περιέχει τμήματα που βρίσκονται σε σύγκρουση και αν ανακληθούν ταυτόχρονα προκαλούν γνωστικές συγκρούσεις. Οι Bingolbali και Monaghan (2008) παρατηρούν ότι οι εννοιακές εικόνες σχετίζονται στενά με τον τρόπο διδασκαλίας και το κύριο αντικείμενο σπουδών.

Ο εννοιακός ορισμός (concept definition) είναι το σύνολο των λέξεων που προσδιορίζουν την έννοια. Σε αυτή την εργασία υιοθετούμε τη διάκριση μεταξύ προσωπικού και τυπικού εννοιακού ορισμού. Μέρος της εννοιακής εικόνας ενός ατόμου είναι και η εννοιακή εικόνα του ορισμού (concept definition image), το σύνολο δηλαδή των νοερών εικόνων (αν υπάρχουν) που σχετίζονται με τον προσωπικό εννοιακό ορισμό.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Στην εργασία αυτή μελετάμε την κατανόηση της έννοιας της γραμμικής θήκης ενός πρωτοετή φοιτητή Μαθηματικών σε ελληνικό πανεπιστήμιο. Στο συγκεκριμένο πρόγραμμα περιλαμβάνονται δύο υποχρεωτικά μαθήματα Γραμμικής Άλγεβρας, με τίτλους “Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα” [1] και “Γραμμική Άλγεβρα Ι” τα οποία προσφέρονται στο Α΄ και Β΄ εξάμηνο σπουδών αντίστοιχα. Η διδασκαλία των μαθημάτων γίνεται μέσα από 4 ώρες διαλέξεων και ένα δίωρο εργαστήριο προβλημάτων κάθε εβδομάδα.

Η γραμμική θήκη συνδέεται άμεσα με την έννοια του διανυσματικού υποχώρου, του γραμμικού συνδυασμού και την έννοια της βάσης. Είναι λοιπόν μια από τις πιο κεντρικές έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας. Στο μάθημα "Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα" δεν δίνεται έμφαση στον όρο "γραμμική θήκη" καθώς η έννοια παρουσιάζεται πιο συχνά περιφραστικά, ως "ο υπόχωρος που παράγεται από τα διανύσματα w_1, …, w_n". Στα πλαίσια του συγκεκριμένου μαθήματος στόχος είναι η εξοικείωση των φοιτητών με την έννοια σε χώρους R^n. Στο μάθημα "Γραμμική Άλγεβρα Ι" ο ορισμός της παραγωγής υποχώρου δίνεται στις πρώτες εβδομάδες του μαθήματος, αυτή τη φορά σε αφηρημένους διανυσματικούς χώρους, με περισσότερες λεπτομέρειες και παραδείγματα, χωρίς όμως να αναφέρεται στις σημειώσεις ο όρος "γραμμική θήκη", (Κουρουνιώτης, 2014; Κουρουνιώτης 2016).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα εργασία εντάσσεται σε μία ευρύτερη μελέτη που βρίσκεται σε εξέλιξη με στόχο τη δημιουργία δραστηριοτήτων που θα μπορούσαν να εμπλουτίσουν τις εικόνες των φοιτητών σχετικά με την έννοια της γραμμικής θήκης. Έναυσμα για την μελέτη της εννοιακής εικόνας του φοιτητή, τον οποίο θα καλούμε με το ψευδώνυμο Βύρωνας, αποτέλεσε η απάντηση που έδωσε σε ένα από τα θέματα της εξέτασης του μαθήματος "Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα".

Η μελέτη της συγκεκριμένης περίπτωσης αναμένεται να δώσει περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την κατανόηση της έννοιας και την επιχειρηματολογία που χρησιμοποιεί ο φοιτητής στην επίλυση σχετικών προβλημάτων. Η απάντηση του Βύρωνα διέφερε αρκετά από τις υπόλοιπες και κρίθηκε πως έπρεπε να εξεταστεί περισσότερο. Αυτό οδήγησε στη δημιουργία των παρακάτω ερωτημάτων τα οποία επιθυμούμε να εξετάσουμε σε αυτή την εργασία:

- Πώς συνδέεται η εννοιακή εικόνα του Βύρωνα για την γραμμική θήκη με την εικόνα του για την έννοια της βάσης;
- Πως διαμορφώνεται η εικόνα του για την έννοια της γραμμικής θήκης μετά την εισαγωγή του αξιωματικού ορισμού του διανυσματικού χώρου;

Η μελέτη έγινε σε δύο φάσεις. Αρχικά, έγινε ανάλυση της γραπτής απάντησης που έδωσε στις εξετάσεις του εισαγωγικού μαθήματος. Η δεύτερη φάση της έρευνας ήταν μια ημιδομημένη συνέντευξη που πραγματοποιήθηκε ένα μήνα αφότου είχε ξεκινήσει το μάθημα "Γραμμική Άλγεβρα Ι" και περιλάμβανε ερωτήσεις που εξέταζαν την εννοιολογική κατανόηση και τη μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων.

Η συλλογή των δεδομένων έγινε τηρώντας τον κώδικα δεοντολογίας της έρευνας του Πανεπιστημίου Κρήτης. Η συμμετοχή στην έρευνα ήταν εθελοντική και ο φοιτητής έδωσε γραπτή συναίνεση για την συμμετοχή του.

ΑΝΑΛΥΣΗ

Αρχικά, παρουσιάζουμε τα δεδομένα που συλλέχτηκαν από τη γραπτή απάντηση του Βύρωνα. Η ερώτηση που τέθηκε στους φοιτητές που εξετάζονταν στο μάθημα ήταν η εξής:

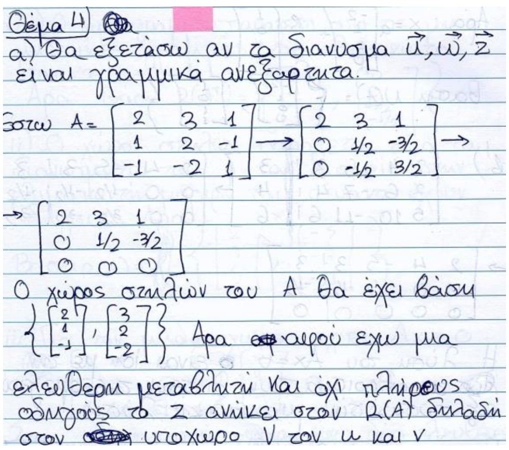
> “Εξετάστε αν το διάνυσμα z=(1, –1, 1) ανήκει στο χώρο V που παράγεται από τα διανύσματα u=(2, 1, –1) και w=(3, 2, –2).”

Η παραπάνω ερώτηση εξετάζει την ικανότητα των φοιτητών να ελέγχουν πότε ένα διάνυσμα ανήκει στον χώρο που παράγεται από κάποια διανύσματα και έχει διαδικαστικό χαρακτήρα. Υπάρχουν διαφορετικοί τρόποι να προσεγγίσει κάποιος το συγκεκριμένο πρόβλημα. Σημειώνουμε ακόμα ότι τα διανύσματα u και w τυχαίνει να είναι γραμμικά ανεξάρτητα οπότε αποτελούν και μία βάση του υποχώρου V.

Στην απάντηση του Βύρωνα παρατηρείται αρκετά μεγάλη απόκλιση στη συλλογιστική που ακολουθεί σε σχέση με τα υπόλοιπα δεδομένα που συλλέχτηκαν. Ακολουθώντας βήμα-βήμα τη γραπτή απάντηση μπορούμε να παρατηρήσουμε κάποια βασικά σημεία των συλλογισμών του. Ξεκινώντας σημειώνει:

> “Θα εξετάσω αν τα διανύσμα[τα] u, w, z είναι γραμμικά ανεξάρτητα”.

Αυτή η αρχική προσέγγιση συμφωνεί με αυτήν πολλών άλλων απαντήσεων. Επισημαίνουμε πως εάν δειχθεί ότι τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αυτό δίνει αρνητική απάντηση στο ερώτημα. Δεν



Θέμα 4)

α) Θα εξετάσω αν τα διανυσμα $\vec{u}, \vec{\omega}, \vec{z}$ είναι γραμμικά ανεξαρτητα.

$$\text{Έστω } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο χώρος στηλών του A θα έχει βάση $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ Άρα αφού έχω μια ελευθερη μεταβλητή και όχι πλήρους οδηγούς το z ανήκει στον R(A) δηλαδή στον υποχωρο V του u και v

Εικόνα 2 Η απάντηση του Βύρωνα

ισχύει όμως το αντίστροφο: εάν τα 3 διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα το z μπορεί και να μην ανήκει στον υπόχωρο που παράγεται από τα u και w. Για να απαντηθεί το ερώτημα θα πρέπει να δειχθεί ότι το z μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των u και w.

Στη συνέχεια ο Βύρωνας δημιουργεί έναν πίνακα A με στήλες τα διανύσματα u, w και z, και εκτελεί απαλοιφή Gauss. Η μεθοδολογία που ακολουθεί έως αυτό το σημείο θεωρείται αναμενόμενη. Μετά την απαλοιφή Gauss προκύπτει μία μηδενική γραμμή στον πίνακα. Σε αυτό το σημείο ο Βύρωνας φαίνεται να εγκαταλείπει τον αρχικό του στόχο "θα εξετάσω εάν τα διανύσματα u, w, z είναι γραμμικά ανεξάρτητα", (που όπως επισημάναμε δεν θα οδηγούσε σε απάντηση του ερωτήματος) και επικεντρώνεται στο χώρο στηλών R(A) του πίνακα A τον οποίο ταυτίζει με τον χώρο V.

Ο Βύρωνας παρατηρεί ότι τα διανύσματα u και w (το οποίο αναφέρει ως v πιθανόν λόγω απροσεξίας) αποτελούν βάση του χώρου στηλών, και άρα το z που ανήκει στο χώρο στηλών από την κατασκευή του πίνακα, ανήκει στον υπόχωρο V.

Η εύρεση βάσης για το χώρο στηλών ενός πίνακα είναι μία διαδικασία στην οποία οι φοιτητές έχουν εξοικειωθεί μέσα από τα εργαστήρια προβλημάτων του μαθήματος. Αυτό που έχει ενδιαφέρον είναι η χρήση αυτής της διαδικασίας στα πλαίσια ενός πιο γενικού προβλήματος όπως το παραπάνω. Αυτή η προσέγγιση διαφέρει από την προσέγγιση των περισσοτέρων φοιτητριών ή φοιτητών που απάντησαν με επάρκεια το ερώτημα, οι οποίοι υπολόγισαν τους συντελεστές του συγκεκριμένου γραμμικού συνδυασμού.

Μέσα από την απάντηση του Βύρωνα παρατηρούμε ότι ο φοιτητής φαίνεται αρκετά εξοικειωμένος τόσο με τη διαδικασία όσο και με την έννοια του χώρου στηλών και της βάσης. Η έννοια της βάσης περιέχει στον ορισμό της την έννοια της γραμμικής θήκης από την άποψη ότι τα διανύσματα μίας βάσης παράγουν το ζητούμενο υπόχωρο. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι ο φοιτητής αντιλαμβάνεται την έννοια της παραγωγής μέσα στο πλαίσιο της έννοιας της βάσης. Αυτό που δεν μπορεί να γίνει άμεσα αντιληπτό είναι η κατανόηση του για την έννοια της παραγωγής υπόχωρου ως ξεχωριστό αντικείμενο.

Με στόχο να μελετήσουμε περισσότερο την εικόνα του Βύρωνα για τη γραμμική θήκη πραγματοποιήθηκε μία συνέντευξη, ένα μήνα αφότου ξεκίνησε η διδασκαλία του μαθήματος "Γραμμική Άλγεβρα Ι". Παρακάτω παρουσιάζουμε τα βασικότερα σημεία της συνέντευξης.

Μέσα από την συζήτηση ο φοιτητής δίνει δύο διαφορετικές ερμηνείες για την έννοια. Η πρώτη μπορεί χαρακτηριστεί ως μέρος της εννοιακής εικόνας του ορισμού.

Ερευνήτρια: Τι σημαίνει ότι τα w1, w2, ..., wn παράγουν τον υπόχωρο… V;

Φοιτητής: Ότι ένα διάνυσμα που ανήκει σε αυτό το μεγάλο V, μπορεί να γραφτεί a1w1 και μπλα μπλα μπλα anwn (γράφει v∈V, v=a1w1+ … +anwn) αυτό μου έρχεται εμένα στο μυαλό.

Το κυρίαρχο στοιχείο σε αυτή την εικόνα είναι ότι κάθε διάνυσμα του V μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός αυτών των στοιχείων. Παρατηρούμε ακόμα ότι αναφέρεται στην έκφραση ενός διανύσματος ως γραμμικό συνδυασμό κάποιων άλλων και όχι στην έννοια ονομαστικά.

Σε επόμενο χρόνο, δόθηκε στον φοιτητή ένα απόσπασμα από τις σημειώσεις του μαθήματος "Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα" και του ζητήθηκε να αναφέρει ποια στοιχεία θεωρεί πιο σημαντικά ή χρησιμοποιεί πιο άμεσα. Ο Βύρωνας σημειώνει και πάλι το κομμάτι του ορισμού που αναφέρεται στην παραπάνω ιδιότητα, πράγμα που ενισχύει την άποψη ότι όσα ανέφερε αποτελούν εικόνα μέρος της προσωπικής του εικόνας για τον ορισμό.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η δεύτερη, διαισθητική, ερμηνεία που δίνει στην έννοια της γραμμικής θήκης.

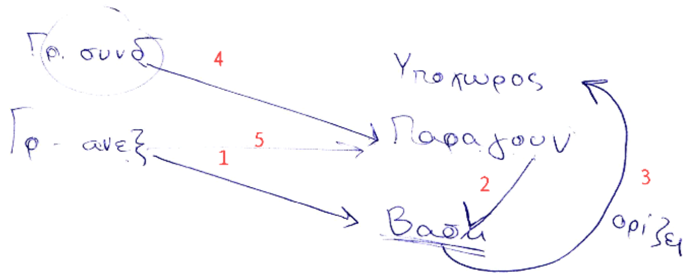
Φοιτητής: […] Στο παράγουν… εμ… είναι σαν να έχεις, πως το λένε, εμ, σαν να έχεις εργαλεία. Και παίρνεις τα εργαλεία και φτιάχνεις, έχεις ένα εργαλείο, ξέρω γω, που είναι ένα διάνυσμα παίρνεις κι άλλο ένα εργαλείο και αν τα βάλεις στη σωστή σειρά, ξέρω γω, θα σου φτιάξει ένα … σπίτι, θα φτιάξει κάτι μεγαλύτερο. Εε, έτσι το σκέφτομαι εγώ το παράγουν. […]

Η εικόνα αυτή του φοιτητή φαίνεται να περιέχει περισσότερα στοιχεία για την έννοια. Ο Βύρωνας παρομοιάζει τα διανύσματα της γραμμικής θήκης με εργαλεία τα οποία συνδυάζονται για να φτιάξουν "κάτι μεγαλύτερο", "ένα σπίτι", τον υπόχωρο. Φαίνεται ακόμα να κατανοεί τα στοιχεία του υπόχωρου ως τους "συνδυασμούς" αυτών των "εργαλείων".

Εξετάζοντας πιο προσεκτικά και τις δύο παραπάνω εικόνες, παρατηρείται ότι κομμάτι της εικόνας του φοιτητή για την έννοια αποτελεί ότι κάθε διάνυσμα γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των w_1, w_2, … , w_n δεν φαίνεται όμως τόσο καθαρά και το ότι ο υπόχωρος είναι ακριβώς όλα τα διανύσματα που είναι γραμμικοί συνδυασμοί των παραπάνω. Ανάλογη παρατήρηση κάνουν οι Stewart και Thomas (2009).

Με στόχο την πληρέστερη κατανόηση των εικόνων του φοιτητή για την έννοια της γραμμικής θήκης ζητήθηκε από το Βύρωνα να φτιάξει ένα σχεδιάγραμμα που να περιγράφει πώς συνδέονται οι έννοιες γραμμικός συνδυασμός, γραμμική ανεξαρτησία, διανυσματικός υπόχωρος, γραμμική θήκη και βάση.

Φοιτητής: […] Η βάση… χρειάζεται γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Πάντα! *(βέλος 1)* Ας ξεκινήσουμε από εκεί. Και τι χρειάζεται; Εε… να παράγουν αυτά τα διανύσματα να δίνουν ένα… Η βάση θέλει και αυτό *(βέλος 2)*. Εε… η βάση ορίζει έναν υπόχωρο. Πάντα. Δηλαδή ορίζει (*γράφει "ορίζει", βέλος 3)*. Ο γραμμικός συνδυασμός ουσιαστικά είναι το "παράγουν" *(βέλος 4)*. Αλλά ο γραμμικός συνδυασμός, δηλαδή αφού είναι το παράγουν… δηλαδή… μπορείς πάντα να ξεκινάς από εδώ, να βρεις ότι κάτι παράγει, και επειδή… και αυτό εδώ το βελάκι *(βέλος 5)*. Τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα μπορούν να παράγουν κάτι, που αυτό το κάτι είναι μια βάση.



Εικόνα 2 Σχεδιάγραμμα Βύρωνα

Παρατηρώντας τον συλλογισμό του Βύρωνα, είναι φανερό ότι η κεντρική έννοια είναι η έννοια της βάσης. Η έννοια της παραγωγής δρα ως βοηθητική για τον ορισμό μιας βάσης. Δεν υπάρχει βέλος που να συνδέει τη λέξη "παράγουν" με τη λέξη "υπόχωρος" στο σχήμα, οι δύο έννοιες συνδέονται έμμεσα μέσω της βάσης. Σε αντιδιαστολή με τη μελέτη των Stewart και Thomas (2009) σε φοιτητές που διδάχτηκαν την έννοια με έμφαση στον ορισμό και τους πίνακες, ο Βύρωνας δεν φαίνεται να αντιμετωπίζει ιδιαίτερο πρόβλημα στη σύνδεση της έννοιας με αυτήν της βάσης.

Η σχέση αυτή ανάμεσα στην έννοια της γραμμικής θήκης και της βάσης παρατηρείται επίσης όταν ο φοιτητής σημειώνει τα κεντρικά στοιχεία της παραγωγής υποχώρου στο απόσπασμα των σημειώσεων. Καθώς διαβάζει τις σημειώσεις, ο Βύρωνας υπογραμμίζει την εισαγωγική πρόταση:

> "Ο χώρος στηλών ενός πίνακα είναι ο υπόχωρος του R^m που αποτελείται από τα διανύσματα που γράφονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των στηλών του πίνακα. Λέμε ότι οι στήλες του πίνακα παράγουν το χώρο στηλών."

Το απόσπασμα συνδέεται άμεσα με τη συλλογιστική που ακολούθησε στην επίλυση του ερωτήματος στο διαγώνισμα. Για τα παραπάνω αναφέρει:

Φοιτητής: Το πρώτο… είναι το ρεζουμέ… είναι το πολύ πρακτικό κομμάτι […] Εε, εντάξει αυτό όπως το λέει, εγώ το χρησιμοποιώ κυρίως για να βρω μια βάση. Το λέγαμε γενικά στο προηγούμενο μάθημα. Όταν θα θέλω να το πάρω σε πιο γενικά… θα το πάω έτσι. Πια! (δείχνει το απόσπασμα του ορισμού)

Από το συγκεκριμένο απόσπασμα ο Βύρωνας φαίνεται να αναγνωρίζει πως η έννοια της γραμμικής θήκης είναι πιο γενική από αυτή της βάσης, κάτι που δεν ήταν ξεκάθαρο από όσα είχαν ειπωθεί προηγουμένως. Ο Βύρωνας δίνει αρκετή έμφαση στο ότι πλέον επιλέγει να χρησιμοποιεί τη συνθήκη του γραμμικού συνδυασμού στην επίλυση προβλημάτων. Πράγμα που σημαίνει ότι έχει αρχίσει να αντιλαμβάνεται πλέον την έννοια ως ξεχωριστό αντικείμενο και όχι απλά σαν εργαλείο. Αυτό επαληθεύεται και από τον τρόπο προσέγγισης των προβλημάτων που του δόθηκαν. Λόγω περιορισμένου χώρου δεν θα γίνει ανάλυση των απαντήσεων που έδωσε, παρ' όλο που παρουσιάζουν κάποιο ενδιαφέρον.

Τέλος, ο Βύρωνας δίνει μια εξήγηση για το λόγο που επιλέγει πλέον την παραπάνω προσέγγιση:

Φοιτητής: […] Όταν μαθαίνεις να σκέφτεσαι λίγο πιο γενικά, δεν είναι όλα σαν τον Rn, δεν μεταφράζονται όλα σε πίνακα. […] δεν είναι αναγκαστικό, ας πούμε τις πραγματικές συναρτήσεις να τις βάλεις σε έναν πίνακα, οπότε πρέπει να δουλέψεις πιο πολύ με αυτό το κομμάτι για να αποδείξεις αυτό που θέλεις. Αυτός είναι ο λόγος, ο κύριος που… γιατί δεν τα μεταφράζεις όλα σε πίνακα πια. […]

Η πεποίθηση ότι δεν μεταφράζονται όλα σε πίνακα χαρακτηρίζει την εξέλιξη την εννοιακής του εικόνας για τη γραμμική θήκη ως εκείνη την στιγμή. Επισημαίνεται ότι στην περίπτωση των διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης είναι δυνατό, και αρκετές φορές χρήσιμο, να "μεταφραστεί" το ζητούμενο σε πίνακα, με την επιλογή μίας βάσης. Οι Warwo et al. (2011) κάνουν λόγο για γνωστικές συγκρούσεις που μπορεί να προκύψουν στην κατανόηση της έννοιας του υποχώρου και οι οποίες μπορούν να συνδεθούν με τη "μετάφραση" μέσω ισομορφισμών των αφηρημένων διανυσμάτων σε διανύσματα του $\mathbb{R}$n. Στην πορεία του μαθήματος οι φοιτητές έρχονται σε επαφή με αυτή την ιδέα, για πρακτικούς λόγους χωρίς όμως ιδιαίτερη εμβάθυνση.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από τις απαντήσεις του φοιτητή παρατηρούμε δύο εικόνες για την έννοια της γραμμικής θήκης ενός συνόλου διανυσμάτων. Η πρώτη, που εστιάζει στην ιδιότητα ότι κάθε διάνυσμα του υποχώρου μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του συνόλου, μπορεί να χαρακτηριστεί ως εννοιακή εικόνα του ορισμού. Ο Βύρωνας ανακαλεί την παραπάνω ιδιότητα για να περιγράψει τι σημαίνει η έννοια "παράγουν" και την αναγνωρίζει ως βασικό στοιχείο του ορισμού. Η δεύτερη εικόνα, που αντιλαμβάνεται τα διανύσματα του συνόλου ως εργαλεία, αντικατοπτρίζει τον τρόπο με τον οποίο "αποκωδικοποιεί" την έννοια. Η εικόνα αυτή περιλαμβάνει πολλά στοιχεία του ορισμού εκφρασμένα με απλό τρόπο. Η αντίληψη των διανυσμάτων ως εργαλεία πιθανόν πηγάζει από τη σχέση έννοιας με την έννοια της βάσης και εξηγεί σε ένα βαθμό τον τρόπο που συνδέει ο φοιτητής τις παραπάνω έννοιες και την έννοια του υποχώρου.

Οι απαντήσεις του Βύρωνα στη συνέντευξη βοηθούν στην ανάλυση της απάντησης που έδωσε στην τελική εξέταση του μαθήματος. Η σύνδεση των εικόνων της γραμμική θήκης και της έννοιας της βάσης του επέτρεψαν να εκμεταλλευτεί το γεγονός ότι τα διανύσματα που παράγουν τον ζητούμενο υπόχωρο είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Είναι πιθανόν να μην επέλεγε την ίδια μεθοδολογία αν τα διανύσματα ήταν γραμμικά εξαρτημένα καθώς ο ίδιος επισημαίνει ότι τη συγκεκριμένη μεθοδολογία τη χρησιμοποιεί για εύρεση βάσης.

Όπως φάνηκε από τη συνέντευξη, μετά από μόλις ένα μήνα διαλέξεων του μαθήματος "Γραμμική Άλγεβρα Ι", ο φοιτητής επιλέγει πλέον να προσεγγίζει παρόμοια προβλήματα χρησιμοποιώντας την εικόνα του ορισμού καθώς τη θεωρεί πιο κατάλληλη να εφαρμοστεί όταν η μετατροπή των δεδομένων του προβλήματος σε πίνακα δεν είναι άμεση. Ακόμα φαίνεται πως αρχίζει να βλέπει την έννοια της γραμμικής θήκης περισσότερο ως αντικείμενο.

Από την ανάλυση των απαντήσεων ενδιαφέρον έχει το γεγονός ότι ο φοιτητής δεν παρουσιάζει ξεκάθαρα ως μέρος της εικόνας του την ιδιότητα ότι ο διανυσματικός υπόχωρος που παράγεται από τα διανύσματα $w_1,\ldots,w_n$ είναι όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί τους. Αντίστοιχη παρατήρηση έγινε και από τους Stewart και Thomas (2009). Ακόμα δεν παρατηρήθηκαν γεωμετρικές εικόνες σχετικά με την έννοια. Δεν μπορούμε όμως να συμπεράνουμε με βεβαιότητα ότι τα παραπάνω στοιχεία δεν αποτελούν μέρος της εικόνας του φοιτητή καθώς είναι πιθανό οι ερωτήσεις που του τέθηκαν να μην προσέφεραν την αφορμή ανάδειξης των συγκεκριμένων πτυχών.

Από τις απαντήσεις του Βύρωνα στην συνέντευξη αναδείχτηκε ακόμα η πεποίθηση του ότι δεν "μεταφράζονται" όλα σε πίνακα. Στα πλαίσια αυτής της συνέντευξης δεν εξετάστηκε περισσότερο το συγκεκριμένο στοιχείο. Είναι όμως μια πεποίθηση που φαίνεται να μοιράζονται πολλοί φοιτητές του τμήματος, όπως παρατηρήθηκε μέσα από τα εργαστήρια του μαθήματος "Γραμμική Άλγεβρα Ι" και έχει ενδιαφέρον να μελετηθεί μεθοδευμένα και συστηματικά.

Τα παραπάνω ευρήματα αναδεικνύουν τη συνεισφορά μιας πλούσιας σε συνδέσεις εικόνα μιας έννοιας στην παραγωγή ευρηματικών απαντήσεων από την πλευρά των φοιτητών. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η σύνδεση της έννοιας της παραγωγής υποχώρου με το χώρο στηλών και τη διαδικασία εύρεσης βάσης, επιτρέπει στο φοιτητή να παρακάμψει προσωρινές αδυναμίες και παρανοήσεις που παρατηρήθηκαν και να δώσει σωστή και ολοκληρωμένη απάντηση σε ένα ερώτημα το οποίο αρχικά είχε προσεγγίσει με μια λιγότερο κατάλληλη παρατήρηση.

Σημείωση

1. Το συγκεκριμένο εξάμηνο, η πρώτη συγγραφέας συμμετείχε στην επίβλεψη του εργαστηρίου προβλημάτων, ενώ ο δεύτερος συγγραφέας παρέδιδε τις διαλέξεις στο ένα τμήμα του μαθήματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bingolbali, E., & Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics*, *68*(1), 19-35.

Carlson, D. (1993). Teaching Linear Algebra: Must the Fog Always Roll In? *College Mathematics Journal*, *24*(1), 29-40.

Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). The obstacle of formalism in linear algebra. In J.L. Dorier (ed.) *On the teaching of linear algebra* (pp. 85-124). Springer Netherlands.

Education Committee of the EMS (2014, September). Solid Findings: Concept images in students' mathematical reasoning. *Newsletter of the EMS*, 93, 50-52.

Harel, G. (2000). Three principles of learning and teaching mathematics. In J.L. Dorier (ed.) *On the teaching of linear algebra* (pp. 177-189). Springer Netherlands.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J.L. Dorier (ed.) *On the teaching of linear algebra* (pp. 191-207). Springer Netherlands.

Stewart, S., & Thomas, M. O. (2009). A framework for mathematical thinking: The case of linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40*(7), 951-961.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Wawro, M., Sweeney, G. F., & Rabin, J. M. (2011). Subspace in linear algebra: investigating students' concept images and interactions with the formal definition. *Educational Studies in Mathematics*, *78*(1), 1-19.

Wawro, M., Rasmussen, C., Zandieh, M., Sweeney, G. F., & Larson, C. (2012). An inquiry-oriented approach to span and linear independence: The case of the magic carpet ride sequence. *PRIMUS*, *22*(8), 577-599.

Κουρουνιώτης, Χ. (2014). *Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα* [πανεπιστημιακές σημειώσεις]. Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ηράκλειο. http://math.uoc.gr/~chrisk/GLA-Notes.pdf

Κουρουνιώτης, Χ. (2016). *Γραμμική Άλγεβρα Ι* [πανεπιστημιακές σημειώσεις]. Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ηράκλειο. http://math.uoc.gr/~chrisk/LinAlg-Notes.pdf

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΙΣ: ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ ΣΤ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Παπαδόπουλος[1]Error! Bookmark not defined. Ιωάννης και Ελευθεριάδης[2] Ιωάννης

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Α. Π. Θ.

[1]ypapadop@eled.auth.gr [2]ioannice@eled.auth.gr

Στην εργασία αυτή μαθητές της Στ' Δημοτικού υπολογίζουν αριθμητικές παραστάσεις που εμπλέκουν τη χρήση παρενθέσεων και εξετάζονται οι αντιλήψεις τους για το ρόλο και τη χρήση τους. Τα ευρήματα αναδεικνύουν τον ισχυρό ρόλο που φαίνεται να διαδραματίζει το πλαίσιο με το οποίο σχετίζεται η παράσταση καθώς επιβάλλει τον τρόπο ανάλυσης των παραστάσεων ακόμη και όταν δεν είναι μαθηματικά ορθή μια τέτοια προσέγγιση. Επίσης, αποτυπώνονται μια σειρά από άλλες προσεγγίσεις που ακολουθούν οι μαθητές στον υπολογισμό των αριθμητικών παραστάσεων με το ενδιαφέρον να εστιάζεται σε αυτήν που βασίζεται στη δυαδική φύση των πράξεων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.

Στα Μαθηματικά η χρήση των παρενθέσεων παρουσιάζει τόσο μια εννοιολογική όσο και μια διαδικαστική-αλγοριθμική πτυχή. Η πρώτη σχετίζεται με τη λειτουργία της παρένθεσης ως βασικού δομικού στοιχείου μιας παράστασης μέσω της οποίας διαμορφώνονται οι σχέσεις μεταξύ των μερών της δομής αφού χωρίς την παρουσία των παρενθέσεων ο υπολογισμός θα κατέληγε σε άλλο αποτέλεσμα ενώ η δεύτερη σχετίζεται με τους κανόνες για την προτεραιότητα των πράξεων (Gunnarsson et al., 2015). Φαίνεται όμως οι μαθητές να μην έρχονται σε επαφή με αυτήν τη διπλή πτυχή της παρένθεσης στα πλαίσια της εκπαίδευσής τους στα Μαθηματικά όπου κυρίαρχη είναι η συσχέτισή της με τους κανόνες για την προτεραιότητα των πράξεων. Επομένως, παρουσιάζει ενδιαφέρον το πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές το ρόλο-λειτουργία της παρένθεσης αλλά και πως τη χρησιμοποιούν σε διαδικασίες υπολογισμού αριθμητικών παραστάσεων. Για το λόγο αυτό στην παρούσα εργασία εξετάζονται οι απαντήσεις μαθητών της Στ' Δημοτικού -αφού έχουν ήδη διδαχθεί την προτεραιότητα των πράξεων- προκειμένου να δοθούν απαντήσεις στα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

- Πότε οι μαθητές ανακαλούν τη γνώση τους σχετικά με τη χρήση των παρενθέσεων;

- Ποιους τύπους προσέγγισης ακολουθούν στην αξιολόγηση (υπολογισμό) αριθμητικών παραστάσεων που εμπλέκουν χρήση παρενθέσεων;

ΤΙ ΛΕΕΙ Η ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.

Η έρευνα έχει μελετήσει τη συμβολή της παρένθεσης σε θέματα ανάπτυξης της αίσθησης της δομής (Hoch & Dreyfus, 2010) και επιτυχούς επίλυσης αριθμητικών εξισώσεων (Marchini & Papadopoulos, 2011). Ο Radford (2000) τις αποκαλεί 'προσθήκες του νου' προκειμένου να διεκπεραιωθούν από το λύτη ενέργειες που απαιτούνται από το περιβάλλον των δραστηριοτήτων. Σε αυτό το πνεύμα, οι λύτες, μέσα από μια κατάλληλη αντικατάσταση, θεωρούν έναν πολύπλοκο όρο ως μια ενιαία οντότητα, με αποτέλεσμα να αναγνωρίζουν μια οικεία δομή [πχ, 5x] σε μια πιο σύνθετη μορφή [πχ, 5(2+3)], κάτι που θεωρείται απαραίτητο για την ανάπτυξη της αίσθησης της δομής (Hoch & Dreyfus, 2010). Ανάλογη λειτουργία των παρενθέσεων, ως μιας επιλογής που βοηθά τους μαθητές να εστιάσουν στο περιεχόμενό τους ως ένα ενιαίο όλον αναφέρουν και οι Marchini και Papadopoulos (2011) σε έρευνά τους με μαθητές της Β' και Γ' Δημοτικού πάνω στον υπολογισμό ανοικτών αριθμητικών προτάσεων. Στην περίπτωση αυτή η παρένθεση λειτούργησε ως ένα «εξωτερικό» συστατικό το οποίο επέδρασε τόσο στη διαμόρφωση του «σχήματος»-μορφή της παράστασης, όσο και στην ανάδειξη της δομής της, συνεισφέροντας έτσι στον επιτυχή υπολογισμό (εσωτερικά συστατικά). Για παράδειγμα, περισσότεροι μαθητές έλυσαν σωστά την εξίσωση (□+4)=9 παρά την □+4=9.

Οι ίδιοι οι μαθητές φαίνεται να έχουν μια στατική αντίληψη για τις παρενθέσεις. Γι' αυτούς οι παρενθέσεις σε μια αριθμητική παράσταση λειτουργούν κυρίως ως μια ένδειξη εφαρμογής των κανόνων για την προτεραιότητα των πράξεων, με τις πράξεις στο εσωτερικό τους να προηγούνται (Okazaki, 2006), κάτι για το οποίο ίσως μεγάλο μερίδιο ευθύνης φέρει ο τρόπος που λαμβάνει χώρα η σχετική διδασκαλία στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση (Wu, 2007). Αυτό φαίνεται με τη σειρά του να περιορίζει τη δυνατότητα των μαθητών να αναγνωρίσουν σχέσεις μεταξύ των μερών μιας μαθηματικής δομής όπως αυτή αποτυπώνεται σε μια αριθμητική παράσταση με παρενθέσεις. Κάποιες φορές φαίνεται ότι το πλαίσιο με το οποίο σχετίζεται μια δοσμένη παράσταση προσδιορίζει και τη σειρά των πράξεων (Booth, 1988), ενώ σε περίπτωση απουσίας του συνηθίζουν να αξιολογούν από αριστερά προς τα δεξιά (Kieran, 1979). Άλλες φορές πάλι οι μαθητές τείνουν να κάνουν χρήση μια άσχετης πληροφορίας που σχετίζεται με την απόσταση μεταξύ των συμβόλων σε μια σύνθετη αριθμητική παράσταση που ενέχει πρόσθεση ή πολλαπλασιασμό (Landy & Goldstone, 2007) ή από τη διαχωριστική επίδραση του συμβόλου της αφαίρεσης (Linchevski & Livneh, 1999) όπου οι μαθητές θεωρούν μια αριθμητική παράσταση όπως η 19 – 3 + 6 ίση με 19 – 9 = 10, με το σύμβολο της αφαίρεσης να λειτουργεί ως ένα σημείο διαχωρισμού της παράστασης. Τέλος, τείνουν να συσχετίζουν την εμφάνιση των παρενθέσεων με την αρχική εκτέλεση των πράξεων αδυνατώντας να δουν την ισοδυναμία ανάμεσα σε εκφράσεις όπως η 900-150-150 και η 900-(150+150) (Linchevski & Herscovics, 1996).

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στην έρευνα συμμετείχαν 112 μαθητές της Στ’ Δημοτικού από πέντε διαφορετικά σχολεία της Θεσσαλονίκης και των Γιαννιτσών (η συγκεκριμένη έρευνα αποτελεί μέρος μιας μεγαλύτερης στην οποία συμμετέχουν και μαθητές της Ε’ Δημοτικού). Οι μαθητές, είχαν μια πρώτη (πολύ σύντομη) επαφή με τις παρενθέσεις στην Γ’ Δημοτικού (επιμεριστική ιδιότητα), ωστόσο η τυπική τους εισαγωγή στη διδασκαλία λαμβάνει χώρα στην Στ’ τάξη στο πλαίσιο των κανόνων της προτεραιότητας των πράξεων και είναι αυτή που ουσιαστικά δημιουργεί μια περιορισμένη κατανόηση της λειτουργικότητάς τους (Kieran, 1979).

Ομάδα 1

Γνωρίζετε ότι το $\frac{8}{4}$ μπορεί να γραφεί σε μια γραμμή ως 8:4.
Γράψτε τα παρακάτω σε μία σειρά και στη συνέχεια κάντε τους υπολογισμούς.

Παράδειγμα: $\frac{8}{4} = 8/4 = 2$

1) $\frac{12}{4}+2$ = ______________ = _______

2) $\frac{12}{4+2}$ = ______________ = _______

3) $\frac{8+12}{3+2}$ = ______________ = _______

4) $\frac{20}{\frac{4}{2}}$ = ______________ = _______

5) $\frac{12+2\cdot 3}{3}$ = ______________ = _______

Ομάδα 3

Βρείτε το αποτέλεσμα σε κάθε μια από τις παρακάτω παραστάσεις. Φροντίστε να φαίνεται πως κάνατε τους υπολογισμούς σας.

α) $9-2\cdot 3-2$

β) $5\cdot 4\cdot 3+6\cdot 2+1$

γ) $2\cdot 3\cdot 5-4\cdot 2+6$

δ) $5\cdot 3+2\cdot 4\cdot 5+3\cdot 2$

Εικόνα 1: 1η και 3η ομάδα δραστηριοτήτων

Στους μαθητές δόθηκε μια συλλογή από 6 ομάδες δραστηριοτήτων. Η συλλογή συνδιαμορφώθηκε σε συνεργασία με αντίστοιχη ερευνητική ομάδα από το Jönköping University της Σουηδίας όπου τρέχει παράλληλα η ίδια έρευνα. Η αρχική μορφή του τεστ ελέγχθηκε μέσω πιλοτικής έρευνας με 26 μαθητές. Τα αποτελέσματά της αξιολογήθηκαν και οδήγησαν στην τελική μορφή του τεστ. Όλες οι δραστηριότητες του τελικού τεστ απαντήθηκαν από όλους τους συμμετέχοντες μαθητές της

Στ’ τάξης (112 άτομα). Εδώ περιοριζόμαστε στην πρώτη και τρίτη ομάδα δραστηριοτήτων.

Η διαδικασία επίλυσης του τεστ (χρόνος επίλυσης, οδηγίες-επισημάνσεις) ήταν πανομοιότυπη για όλα τα τμήματα που συμμετείχαν στην έρευνα, με τους μαθητές να παροτρύνονται να καταγράψουν αναλυτικά την πορεία επίλυσής τους. Σε ό,τι αφορά την ανάλυση των δεδομένων αυτή έγινε σε δύο επίπεδα. Αρχικά, σε ένα ποιοτικό επίπεδο, όπου οι απαντήσεις των μαθητών κατηγοριοποιήθηκαν ανάλογα με το αν ήταν ορθές, ή -στην περίπτωση που δεν ήταν- ανάλογα με την προσέγγιση που υιοθετούσαν στους υπολογισμούς τους. Στη συνέχεια, σε ένα ποσοτικό επίπεδο, υπολογίστηκαν συχνότητες και ποσοστά για όλες τις παραπάνω κατηγορίες. Επίσης, επιχειρήθηκε μία σύγκριση των απαντήσεων ανάμεσα σε συγκεκριμένες δραστηριότητες που εξέταζαν το ίδιο φαινόμενο προκειμένου να διαπιστωθούν τυχόν συσχετίσεις.

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ

Η πρώτη ομάδα δραστηριοτήτων ζητούσε από τους μαθητές να γράψουν κάθε κλάσμα ως οριζόντια διαίρεση και να προβούν στους αντίστοιχους υπολογισμούς. Δινόταν το παράδειγμα του $\frac{8}{4}$ που γράφεται ως 8:4. Λίγοι μαθητές έφτασαν στο σωστό αποτέλεσμα ακολουθώντας μια ‘ορθή’ μαθηματική διαδικασία. Εδώ αναφερόμαστε στην αναγκαιότητα χρήσης παρενθέσεων στην οριζόντια γραφή που θα εξασφάλιζε το σωστό αποτέλεσμα. Έτσι για παράδειγμα, η 3η δραστηριότητα της πρώτης ομάδας θα έπρεπε να γραφεί οριζόντια ως (8+12):(3+2)=20:5=4.

	Δραστ.1	Δραστ.2	Δραστ.3	Δραστ.4	Δραστ.5
Χρήση παρενθέσεων	3 (2.7%)	5(4.5%)	7(6.3%)	10(8.9%)	6(5.4%)
Χωρίς παρενθέσεις	61(54.5%)	88(78.6%)	86(76.8%)	69(61.6%)	68(60.7%)

Πίνακας 1: Απαντήσεις με σωστό αποτέλεσμα στην ομάδα-1

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1 πολύ λίγοι ήταν οι μαθητές που ανταποκρίθηκαν με επιτυχία στην προσέγγιση αυτή. Είναι ενδιαφέρον όμως ότι στον ίδιο πίνακα υπάρχει ένας σημαντικά μεγάλος αριθμός μαθητών που έφτασε στο σωστό αποτέλεσμα μέσα από μια αριθμητική παράσταση που αν αξιολογηθεί με τους κανόνες για την προτεραιότητα των πράξεων θα έπρεπε να οδηγήσει σε διαφορετικό αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, για την ίδια δραστηριότητα, οι συγκεκριμένοι μαθητές απάντησαν: 8+12:3+2=20:5=4 παραβιάζοντας έτσι το πρωτόκολλο της προτεραιότητας των πράξεων σύμφωνα με το οποίο το αποτέλεσμα θα έπρεπε να είναι 8+12:3+2=8+4+2=14. Μια δεύτερη όμως ματιά στα ίδια αποτελέσματα, στο φως των ευρημάτων της επόμενης ομάδας δραστηριοτήτων, μπορεί ίσως να δώσει μια άλλη ερμηνεία στο εν λόγω φαινόμενο.

Στη δεύτερη ομάδα δραστηριοτήτων οι σωστές απαντήσεις με- και χωρίς- τη χρήση παρενθέσεων φαίνονται στον Πίνακα 2. Η εκφώνηση ζητούσε τον υπολογισμό των παραστάσεων χωρίς καμία αναφορά στη χρήση παρενθέσεων οι οποίες στην προκειμένη περίπτωση δεν κρίνονταν απαραίτητες.

	Δραστ- α	Δραστ- β	Δραστ- γ	Δραστ- δ
Χρήση παρενθέσεων	18(16%)	20(17.9%)	14(13.1%)	11(9.7%)
Χωρίς παρενθέσεις	42(37.5%)	45(40.2%)	36(32.1%)	39(34.8%)

Πίνακας 2: Απαντήσεις με σωστό αποτέλεσμα στην ομάδα-3

Φαίνεται λοιπόν πως ένα μέρος των μαθητών (αυξημένο σε σχέση με την ομάδα 1) έκανε χρήση παρενθέσεων για τον τελικό υπολογισμό. Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζει το γεγονός ότι αθροιστικά (με και χωρίς παρενθέσεις) το ποσοστό των σωστών απαντήσεων έχει μειωθεί στην ομάδα-3 σε σχέση με την ομάδα 1. Στο σημείο αυτό, αξίζει να επισημανθεί ο καίριος ρόλος που φαίνεται να διαδραματίζει το ‘πλαίσιο’ στην όλη διαδικασία ως «οδηγός» για τις διαδικασίες υπολογισμού (Booth, 1988). Στην πρώτη ομάδα, η κατανόηση της έννοιας του κλάσματος επιβάλλει την προσέγγιση που θα ακολουθηθεί. Ο ρόλος του πλαισίου εδώ είναι πολύ βοηθητικός αφού δηλώνει ξεκάθαρα τον τρόπο ανάλυσης ($\frac{\alpha}{\beta} = \alpha{:}\beta$). Ο μαθητής έχοντας αυτή τη γνώση ως οδηγό, ακόμη και όταν γράφει 8+12:3+2 για την $3^{η}$ δραστηριότητα, προχωρά στον υπολογισμό κάνοντας χρήση αυτών που αποκαλούμε στην εργασία «νοερές παρενθέσεις». Δηλαδή προχωρά στον υπολογισμό της παράστασης ως οι παρενθέσεις να ήταν παρούσες και να επέβαλαν έναν υπολογισμό της μορφής (8+12):(3+2). Το ίδιο ισχύει και για τις άλλες δραστηριότητες της ομάδας 1. Το ερώτημα που προκύπτει έτσι είναι αν ο σωστός υπολογισμός οφείλεται αποκλειστικά στην επίδραση του πλαισίου (έννοια κλάσματος) οπότε η γνώση της χρήσης της παρένθεσης είναι απούσα. Πράγματι, όλες οι δραστηριότητες (πλην της τελευταίας) στην ομάδα αυτή θα μπορούσαν να απαντηθούν και μόνο με την καλή γνώση της έννοιας του κλάσματος που επιβάλλει αρχικά τον υπολογισμό κάθε όρου του κλάσματος προκειμένου στη συνέχεια να γίνει η σχετική διαίρεση. Η Δραστηριότητα-5 όμως της ομάδας αυτής απαιτεί και μια επιπλέον γνώση των κανόνων για την προτεραιότητα προκειμένου να επιτευχθεί ο υπολογισμός στον αριθμητή. Εξετάζοντας μόνη της την εν λόγω ομάδα θα μπορούσε ο μεγάλος αριθμός 'σωστών' απαντήσεων σε αυτήν να αποδοθεί στο ρόλο που παίζει το πλαίσιο μέσα στο οποίο είναι ενταγμένη η δραστηριότητα. Εξετάζοντας επίσης μόνη της την ομάδα 3, μπορεί να δει κανείς ότι οι απαντήσεις των μαθητών (Πίνακας 2) είναι ενδεικτικές της καλής γνώσης των κανόνων για την προτεραιότητα των πράξεων (κάτι που δεν μπορεί με σιγουριά να επικαλεστεί κανείς στις δραστηριότητες της ομάδας 1 όπου το πλαίσιο συμβάλλει καθοριστικά). Όμως, η παράλληλη εξέταση των απαντήσεων των μαθητών και στις δυο ομάδες μπορεί να ρίξει φως στο όλο θέμα.

	Δραστ-1	Δραστ-2	Δραστ-3	Δραστ-4	Δραστ-5
Νοερές παρενθ. (Ομ-1)	61	88	86	69	68
Χρήση κανόνων προτερ. (Ομ-3)	44(72,1%)	60(68,1%)	56(65,1%)	49 (71%)	51(75%)

Πίνακας 3: Συνέπεια μεταξύ απαντήσεων σε ομάδα 1 και ομάδα 3

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3, το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών (κατά μέσο όρο το 70% περίπου) που φάνηκε να κάνουν χρήση των νοερών παρενθέσεων στις δραστηριότητες της ομάδας 1, ήταν σε θέση να υπολογίσει σωστά τις αριθμητικές παραστάσεις στην ομάδα 3 όπου προαπαιτούμενο ήταν η καλή γνώση των κανόνων για την προτεραιότητα των πράξεων. Αυτό ενισχύει την άποψη ότι όταν το πλαίσιο επιβάλλει τον τρόπο ανάλυσης μιας παράστασης, οι μαθητές το σέβονται και το ακολουθούν χωρίς να ελέγχουν την μαθηματική ορθότητα όσων γράφουν. Στην περίπτωσή μας η απαραίτητη χρήση των παρενθέσεων στις κλασματικές παραστάσεις της ομάδας 1 φαίνεται να αγνοείται. Όμως αυτό που μάλλον συμβαίνει είναι ότι οι μαθητές θέτουν σε προτεραιότητα το πλαίσιο της έννοιας και κάνουν στον υπολογισμό τους χρήση 'νοερών' παρενθέσεων (αν και φαινομενικά δείχνει να συμβαίνει το αντίθετο). Αντιθέτως, όταν δεν υπάρχει πλαίσιο που να επιβάλλεται (περίπτωση ομάδας 3), τότε οι μαθητές υπολογίζουν τις αριθμητικές παραστάσεις με προφανή το σεβασμό στους κανόνες προτεραιότητας των πράξεων και κάνοντας -σε ορισμένες περιπτώσεις- χρήση παρενθέσεων.

Πέρα τώρα από τις δυο παραπάνω προσεγγίσεις που οδήγησαν τους μαθητές σε ορθές απαντήσεις, εντοπίστηκαν και άλλες προσεγγίσεις που φανέρωναν απουσία γνώσης, ή ελλιπή κατανόηση στη διαχείριση αριθμητικών παραστάσεων. Οι βασικές προσεγγίσεις που οδήγησαν σε λάθη είναι: ο υπολογισμός από τα αριστερά προς τα δεξιά, λάθη λόγω διαστήματος μεταξύ των συμβόλων, λάθη λόγω της ισχυρής επίδρασης του συμβόλου της αφαίρεσης και λάθη που σχετίζονται με τη δυαδική φύση των πράξεων. Ο Πίνακας 4 αντλεί σχετικά αριθμητικά δεδομένα από τις δραστηριότητες της ομάδας 3.

	Δραστ-α	Δραστ-β	Δραστ-γ	Δραστ-δ
Αριστερά προς τα δεξιά	19(17%)	21(18,8%)	22(19,6%)	24(21,4%)
Διάστημα μεταξύ συμβόλων	12(10,7%)	-	-	-
Διαχωριστική επίδραση συμβόλου αφαίρεσης	-	-	21(18,8%)	-
Δυαδική φύση πράξεων	6(5,4%)	7(6,3%)	6(5,4%)	8(7,2%)

Πίνακας 4: Προσεγγίσεις που οδήγησαν σε λάθη στην ομάδα-3

Όπως φαίνεται και από τον Πίνακα 4 η δημοφιλέστερη προσέγγιση που οδήγησε σε λάθη ήταν αυτή της εκτέλεσης των πράξεων στις αριθμητικές παραστάσεις από τα αριστερά προς τα δεξιά (Kieran, 1979). Μια τέτοια απάντηση για την πρώτη δραστηριότητα της ομάδας 3 είναι της μορφής: $9-2\cdot3-2=7\cdot3-2=21-2=19$ και όχι αυτή που σέβεται την προτεραιότητα των πράξεων (δηλαδή, $9-2\cdot3-2=9-6-2=1$). Η ίδια προσέγγιση συναντήθηκε και στην ομάδα 1, ιδιαίτερα στη Δραστηριότητα 5 (18 απαντήσεις, 16,1%), όπου παρόλο που το πλαίσιο επέβαλε μια ιεραρχία στην εκτέλεση πράξεων, εν τούτοις για τον υπολογισμό του αποτελέσματος στον αριθμητή οι λύτες έπρεπε να εφαρμόσουν τη γνώση για την προτεραιότητα των πράξεων.

Η δεύτερη προσέγγιση, ενδεχομένως σχετίζεται με την επίδραση των οπτικών νύξεων (Landy & Goldstone, 2007). Έτσι η ύπαρξη του συμβόλου του πολλαπλασιασμού στο μέσον της αριθμητικής παράστασης στη Δραστηριότητα-α της ομάδας 3, με ικανή απόσταση από τα γειτονικά της σύμβολα/ψηφία οδήγησε πιθανόν τους 12 μαθητές στο να υπολογίσουν το αποτέλεσμα ως $9-2\cdot3-2=7\cdot1=7$.

Η επόμενη προσέγγιση που οδήγησε σε λάθος σχετίζεται πιθανόν με τη διαχωριστική επίδραση του συμβόλου της αφαίρεσης (Linchevski & Livneh, 1999). Στην ομάδα 3 μόνο η δραστηριότητα-γ προσφερόταν για το λάθος αυτό και ισχυριζόμαστε ότι εμπίπτει στην κατηγορία αυτή λόγω του ότι η πλειοψηφία των μαθητών αυτών ακολούθησε με συνέπεια τους κανόνες για την προτεραιότητα των πράξεων στις υπόλοιπες δραστηριότητες της ίδιας ομάδας. Θα μπορούσε κάποιος να αναρωτηθεί για το ρόλο της πρώτης δραστηριότητας όπου και πάλι εμφανίζεται το σύμβολο της αφαίρεσης. Σύμφωνα όμως με τους Linchevski και Livneh (1999) το φαινόμενο αυτό παρουσιάζεται μόνο όταν έχουμε μια μόνο εμφάνιση του συμβόλου της αφαίρεσης στην αριθμητική παράσταση. Αυτό δικαιολογεί γιατί δεν έχουμε αντίστοιχες απαντήσεις στην πρώτη δραστηριότητα της ομάδας που περιέχει δυο αφαιρέσεις.

α) $(9-2)\cdot(3-2)=7\cdot 1=7$

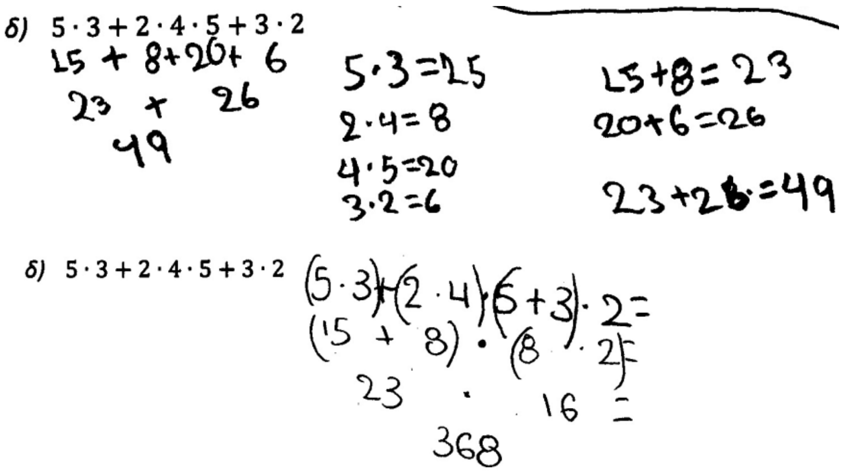
β) $(5\cdot 4)\cdot(3+6)\cdot(2+1)=(20\cdot 9)\cdot 3=180\cdot 3=60$

γ) $(2\cdot 3)\cdot(6-4)\cdot(2+6)=(6\cdot 1)\cdot 8=7\cdot 8=56$

Εικόνα 1: Δυαδική φύση πράξεων με άρτιο πλήθος όρων

Και οι τρεις προηγούμενες προσεγγίσεις μας είναι ήδη γνωστές από το βιβλιογραφία. Ενδιαφέρον παρουσιάζει όμως η επόμενη προσέγγιση που δεν απαντάται στη βιβλιογραφία. Σχετίζεται με την τάση των μαθητών να συνδέουν κάθε σύμβολο πράξης με δύο όρους εκατέρωθεν του συμβόλου που θα πρέπει να συνδυαστούν προκειμένου να δώσουν ένα αποτέλεσμα. Συγκεκριμένα έξι μαθητές ακολούθησαν με συνέπεια την προσέγγιση αυτή σε όλες τις δραστηριότητες. Η προσέγγιση μάλιστα αυτή εμφανίζεται με δύο διαφορετικές όψεις που σχετίζονται με το αν ο αριθμός των όρων που εμπλέκονται στην παράσταση είναι άρτιος ή περιττός. Στην πρώτη περίπτωση (Δραστηριότητες α, β και γ) οι μαθητές χωρίζουν σε ζεύγη με τη βοήθεια παρενθέσεων τους όρους της παράστασης έτσι ώστε κάθε δύο όροι να συνδέονται με ένα ενδιάμεσο σύμβολο πράξης και στη συνέχεια προχωρούν στον υπολογισμό (βλ. Εικ.1).

Στην περίπτωση που το πλήθος των όρων είναι περιττός αριθμός (Δραστηριότητα-δ) τότε φαίνεται οι μαθητές να ακολουθούν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις: Η πρώτη προσέγγιση απαιτεί το διπλασιασμό ενός εκ των όρων της παράστασης, προκειμένου να επιτευχθεί άρτιο πλήθος όρων και έτσι να ακολουθηθεί η πιο πάνω τακτική των ζευγών (Εικ.2, πάνω.). Έτσι, η παράσταση όπως φαίνεται και από την εικόνα υπολογίζεται με διπλασιασμό του 4 ώστε να δημιουργηθούν σε ζεύγη οι πράξεις (5·3), (2·4), (4·5) και (3·2), που οδηγεί σε τέσσερα επιμέρους αποτελέσματα (15, 8, 20, 6) και στη συνέχεια με εφαρμογή και πάλι ζευγών (15+8), (20+6) υπολογίζεται το τελικό αποτέλεσμα. Η δεύτερη προσέγγιση υιοθετεί μία πιο «απλή» στρατηγική. Δημιουργεί ζεύγη με το άρτιο πλήθος όρων και πάλι με τη βοήθεια παρενθέσεων (όλοι εκτός έναν, συνήθως τον τελευταίο). Εφαρμόζει τη λογική των ζευγών με αυτούς.



Εικόνα 2: Δυαδική φύση πράξεων με περιττό πλήθος όρων

Αν τα επιμέρους αποτελέσματα μαζί με τον εναπομείναντα όρο αποτελούν άρτιο πλήθος, τότε ακολουθείται η τακτική των ζευγών. Αν και πάλι το πλήθος είναι περιττό τότε επαναλαμβάνεται η τακτική ζεύγη συν ένας. Για παράδειγμα, στη Δραστηριότητα-δ (Εικ.2, κάτω), υπολογίζονται τα 3 πρώτα ζεύγη (5·3), (2·4), (5+3). Αυτά οδηγούν στα επιμέρους αποτελέσματα 15, 8 και 8 που μαζί με το 2 που είχε μείνει δημιουργούν τα ζεύγη (15+8) και (8·2).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παρούσα έρευνα αναδεικνύει τον κυρίαρχο ρόλο που μπορεί να παίξει το πλαίσιο εκφοράς μιας αριθμητικής παράστασης στον υπολογισμό της, σε σημείο που να οδηγεί τους μαθητές στο να αγνοούν φαινομενικά την αναγκαιότητα για τη χρήση των παρενθέσεων. Ισχυριζόμαστε ότι πρόκειται για φαινομενική παράλειψη και ότι οι υπολογισμοί γίνονται με τη χρήση ‘νοερών’ παρενθέσεων καθώς από τη μια το σωστό αριθμητικό αποτέλεσμα δικαιολογεί την παρουσία αυτών των ‘νοερών’ παρενθέσεων και από την άλλη οι ίδιοι μαθητές σε ένα άλλο πλαίσιο προσανατολισμένο καθαρά στην προτεραιότητα των πράξεων είναι σε θέση να κάνουν την ανάλογη χρήση των παρενθέσεων ακολουθώντας τους σχετικούς κανόνες. Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζει μια ξεχωριστή προσέγγιση υπολογισμού αριθμητικών παραστάσεων επηρεασμένη από τη δυαδική φύση των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων την οποία δεν έχουμε συναντήσει μέχρι στιγμής στη σχετική βιβλιογραφία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Gunnarsson, R., Sönnerhed, W. W., & Hernell, B. (2016). Does it help to use mathematically superfluous brackets when teaching the rules for the order of operations?. *Educational Studies in Mathematics*, *92*(1), 91-105.

Okazaki, M. (2006). Semiotic chaining in an expression constructing activity aimed at the transition from arithmetic to algebra. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 257-264

Hoch, M. & Dreyfus, T. (2010). Developing Katy's algebraic structure sense. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne and F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME-6*, (pp. 529-538). Institut National De Recherche Pedagogique, Lyon, France 529 – 538

Wu, H. (2004). "Order of operations" and other oddities in school mathematics. Ανακτήθηκε 2 Μαρτίου, 2017: https://math.berkeley.edu/~wu/order5.pdf (πρόσβαση)

Linchevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. *Educational studies in mathematics*, *30*(1), 39-65.

Marchini, C., & Papadopoulos, I. (2011). Are useless brackets useful tools for teaching? *Proceedings of PME 35*, *3*, 185-192.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis, *Educational Studies in Mathematics*, 42, 237-268.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F.Coxford and A. P. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra, k-12* (1988 yearbook)(pp. 20–32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (1979). Children's operational thinking within the context of bracketing and the order of operations. In *Proceedings of the 3rd PME International Conference* (Vol. 1, pp. 128-133).

Landy, D., & Goldstone, R. L. (2007). The alignment of ordering and space in arithmetic computation. In D. S. McNamara & J. G. Trafton (Eds.),Proceedings of the 29th Annual Conference of the Cognitive Science Society(pp. 437–442). Austin, TX: Cognitive Science Society

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational studies in mathematics*, *40*(2), 173-196.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΗΣ Α', Β' ΚΑΙ Γ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Παπανικολάου Χρήστος, Καλαβάσης Φραγκίσκος

Μαθηματικός M.Sc, Καθηγητής Πανεπιστημίου Αιγαίου

xrispapanikolaou@gmail.com, kalabas@aegean.gr

Η εισαγωγή της έννοιας της εκτίμησης στα νέα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών θεωρείται κεντρική για την ανάπτυξη της δυναμικής των μαθηματικών. Στην παρούσα εργασία μελετήθηκαν οι δραστηριότητες που προτείνονται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών και παρουσιάζονται στα βιβλία «δασκάλου» και τα σχολικά εγχειρίδια των Α', Β', Γ' τάξεων των μαθηματικών του Δημοτικού σχολείου. Για τη μελέτη και χαρτογράφηση των δραστηριοτήτων κατασκευάσαμε μια σχάρα 16 συνδυασμών από τις μορφές της εκτίμησης- και από τις διαστάσεις σημαντικότητας της έννοιας, που επισημαίνονται στη βιβλιογραφία.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ- ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Οι κοινωνικές αλλαγές και η κυριαρχία των νέων τεχνολογιών επηρέασε τις έννοιες ενάριθμος και μαθηματικός γραμματισμός, ενώ ταυτόχρονα ο τρόπος διδασκαλίας και το περιεχόμενο των μαθηματικών στα σχολικά προγράμματα επηρεάστηκαν από τη χρήση των νέων δυνατοτήτων που προσέφερε το περιβάλλον και οι εφαρμογές της τεχνολογίας. Σε αυτό το μεταβαλλόμενο πλαίσιο ερευνήθηκε με νέους όρους η θέση των νοερών υπολογισμών και της εκτίμησης στις έννοιες ενάριθμος και μαθηματικός γραμματισμός, ενώ η εκτίμηση αναγνωρίσθηκε ως ένα σημαντικό μαθηματικό περιεχόμενο από τα Αναλυτικά Προγράμματα της Αγγλίας, της Η.Π.Α και της Ιαπωνίας (Λεμονίδης, 2013).

Η κοινωνικο-γνωστική σημασία της έννοιας της εκτίμησης τονίζεται από το 1977, όταν το Εθνικό συμβούλιο εποπτείας των μαθηματικών (National Council of Supervisors of Mathematics) θεώρησε την εκτίμηση και την προσέγγιση σημαντικές δεξιότητες για τον μαθητή αλλά και τον αυριανό πολίτη και άρχισε να τις αναπτύσσει ώστε να συμπεριληφθούν κατάλληλα πλαισιωμένες στο ενιαίο ένα πρόγραμμα δράσης « Agenda for Action » (National Council of Teachers of Mathematics, 1980) (Sowder, 1992). Η εκτίμηση θεωρήθηκε ως ένα σημαντικό μέρος της γνωστικής λειτουργίας αφού είναι διάχυτη στις καθημερινές δραστηριότητες των μαθητών και των ενηλίκων και συνδέεται με άλλες ειδικές πτυχές των μαθηματικών ικανοτήτων, όπως η δεξιότητα στους υπολογισμούς και οι αποδόσεις στα διάφορα μαθηματικά τεστ.

Η επιστημολογική-ψυχολογική της σημασία αναδείχθηκε μέσω της σχέσης της με την αίσθηση του αριθμού και τον νοερό υπολογισμό (Sowder, 1992) καθώς και από το γεγονός ότι πολλοί τύποι εκτίμησης απαιτούν την δημιουργία νέων ευέλικτων μεθόδων πέρα από την εφαρμογή διαδικασιών ρουτίνας (Siegler & Booth, 2005). Σύμφωνα με την Κολέζα (2009) η αίσθηση του αριθμού περιλαμβάνει ένα σύνολο εννοιών, όπως το νόημα του αριθμού, την αξία θέσης των ψηφίων ενός αριθμού, τους τρόπους αναπαράστασης του αριθμού, τις σχέσεις μεταξύ των αριθμών, το σχετικό μέγεθος των αριθμών και τέλος την ικανότητα χρήσης των αριθμών για την επίλυση προβλημάτων και αναφέρεται σε σημαντικές ικανότητες που αναπτύσσει το άτομο όπως: η ευελιξία στους νοερούς υπολογισμούς σε αριθμητικές εκτιμήσεις και ποσοτικές κρίσεις. Οι συνδέσεις της έννοιας της εκτίμησης μέτρησης με την θεωρία της διατήρησης του Piaget και με την κοινωνικοπολιτισμική θεωρία του Vygotsky για τα πολιτισμικά εργαλεία μέτρησης ανέδειξαν μια από τις διεπιστημονικές διαστάσεις της εκτίμησης (Clements,1999· Nunes, Light & Mason, 1993).

Η άποψη ότι οι χρήσεις της εκτίμησης συνδέονται με ορισμένες πτυχές των στόχων της μαθηματικής εκπαίδευσης, όπως με τη σαφήνεια της σκέψης και του λόγου και τη δυνατότητα διαχείρισης προβλημάτων και εφαρμογής διαδικασιών δείχνει την εκπαιδευτική επικαιρότητα της εκτίμησης, ενώ ορισμένες έρευνες τη συνδέουν με τη δυσκολία μαθητών να κατανοήσουν και να λύσουν μαθηματικά προβλήματα (Usiskin,1986 στο Dolma, 2002). Επιπρόσθετα, από στοχευμένες έρευνες φαίνεται πως μαθητές που έχουν αποκτήσει τη δεξιότητα της εκτίμησης μπορούν να αναγνωρίσουν την αξία των μαθηματικών, να αποκτήσουν αυτοπεποίθηση ως προς τις ικανότητες τους να λύνουν προβλήματα, να επικοινωνούν με μαθηματικό τρόπο και τέλος να αιτιολογούν τον συλλογισμό τους (Micklo, 1999 στο Dolma, 2002). Η έμφαση στην εκτίμηση της απάντησης εμφανίζεται ως ένα από τα ποιο σημαντικά βήματα στην μαθηματική εκπαίδευση, καθώς ως δεξιότητα είναι συνυφασμένη με τον σύγχρονο άνθρωπο, ενώ βοηθάει στην ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών και επεκτείνεται στις έννοιες του χώρου και της μέτρησης (Φιλίππου & Χρίστου, 2004).

Οι όροι εκτίμηση και προσέγγιση δεν διαχωρίζονται εύκολα. Η προσέγγιση έχει την δική της αριθμητική και τους δικούς της κανόνες (Sowder, 1992).Τα εργαλεία της προσέγγισης είναι τα θεωρήματα υπολογισμού, η θεωρία λαθών και οι αλγόριθμοι με χαρτί και μολύβι ή με υπολογιστή χειρός ενώ η εκτίμηση λαμβάνει υπόψη τα σφάλματα αλλά με λιγότερο ακριβή τρόπο (Segovia & Castro, 2009). Στην παρούσα εργασία οι όροι εκτίμηση και προσέγγιση θα θεωρηθούν συμβατικά παραπλήσιοι, εφόσον δεν είναι διακριτές οι διαφορές τους στα σχολικά εγχειρίδια.

Η άποψη ότι τα μαθηματικά είναι συνδεδεμένα με την ακρίβεια, αν λειτουργήσει στερεοτυπικά, ενδέχεται να δημιουργεί την περιοριστική εντύπωση ότι η εκτίμηση είναι μια έννοια που δεν ανήκει στις ενότητες των μαθηματικών (Usiskin, 1986 στο Segovia & Castro, 2009) σε αντίθεση με την έννοια της προσέγγισης την οποία οι μαθηματικοί έχουν αποδεχθεί με χαρακτηριστικό παράδειγμα την περίπτωση του ορίου όπου το αποτέλεσμα της διαδικασίας υπολογισμού αντικαθίσταται με έναν ακριβή αριθμό που ενσωματώθηκε στο μαθηματικό λογισμό. Η διεισδυτικότητα της εκτίμησης στις καθημερινές δραστηριότητες συνδυαζόμενη με την δυσκολία που παρουσιάζουν τόσο οι μαθητές όσο και οι ενήλικες στην εφαρμογή της αλλά και συσχέτιση της με την μαθηματική ικανότητα επίλυσης σύγχρονων προβλημάτων οδήγησε το NCTM από το 1980 να δώσει υψηλή προτεραιότητα στην βελτίωση των δεξιοτήτων της εκτίμησης (Siegler & Booth, 2005). Υπάρχουν τέσσερις λόγοι σύμφωνα με τους οποίους αναδεικνύεται η σημασία της διδασκαλίας της και συνδέεται με παρατηρούμενες δυσκολίες των μαθητών (Λεμονίδης, 2013):

- η χρήση της εκτίμησης στις καθημερινές δραστηριότητες
- η βαθύτερη κατανόηση της θεσιακής αξίας, των πράξεων και της αίσθησης του αριθμού (Beishuizen,van Putten & van Mulken,1997· National Research Council, 2001 όπως αναφέρεται στο Λεμονίδης, 2013)
- η δημιουργία νέων ευέλικτων στρατηγικών πέρα από την απλή εφαρμογή μηχανικών διαδικασιών
- η εκτίμηση της απάντησης σε ένα πρόβλημα (Case, Sowder, 1990· Hope, Sherril, 1987· Reys, Bestgen, Rybott, & Wyatt, 1980 όπως αναφέρεται στο Λεμονίδης, 2013)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στα νέα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών στην Πρωτοβάθμια εκπαίδευση όπου αντικατροπτίζεται μια προσπάθεια εκσυγχρονισμού των προγραμμάτων σπουδών γίνονται σαφείς οι στόχοι για την διδακτική αξιοποίηση των εκτιμήσεων. Ο στόχος της εργασίας μας είναι η μελέτη και χαρτογράφηση της παρουσίας της εκτίμησης-προσέγγισης στο Α.Π.Σ, στα σχολικά βιβλία του μαθητή και στα βιβλία του δασκάλου των τάξεων Α’, Β’, Γ’ του Δημοτικού. Συγκεκριμένα μελετήθηκε ο τρόπος με τον οποίο τοποθετείται η διδασκαλία της εκτίμησης- στην βιβλιογραφική έρευνα και προσδιορίζοντας τις κατηγορίες των διδακτικών καταστάσεων και των πλαισίων που προτείνονται μελετήθηκε ο τρόπος παρουσίασης αλλά και η επίδραση αυτών των κατηγοριών στις δραστηριότητες που προτείνονται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, στα σχολικά βιβλία και στα βιβλία του Δασκάλου (Παπανικολάου, 2017).

Συνοψίζοντας τα παραπάνω μπορούμε να σημειώσουμε σχετικά με την εκτίμηση –στη διδασκαλία ότι υπάρχουν:

α) τέσσερις μορφές παρουσίας της εκτίμησης-

- σε υπολογιστική εκτίμηση (Μ1)
- σε εκτίμηση πλήθους (Μ2)
- σε εκτίμηση με χρήση αριθμογραμμής (Μ3)
- σε εκτίμηση μέτρων (Μ4)

και

β) τέσσερις διακριτές διαστάσεις της έννοιας εκτίμησης- που αφορούν την

- σύνδεση της με την καθημερινότητα (Δ1)
- σύνδεση της με την αίσθηση του αριθμού (Δ2)
- σύνδεση της με την δημιουργικότητα επινόησης στρατηγικών (Δ3)
- και τέλος σύνδεση της με την επαλήθευση της απάντησης ενός προβλήματος (Δ4)

Από τα (α) και (β) κατασκευάσαμε ένα πρίσμα που αποτελείται από δεκαέξι πλαίσια διδακτικών δραστηριοτήτων όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 1.

	Δ1	Δ2	Δ3	Δ4
Μ1	(Μ1,Δ1)	(Μ1,Δ2)	(Μ1,Δ3)	(Μ1,Δ4)
Μ2	(Μ2,Δ1)	(Μ2,Δ3)	(Μ2,Δ3)	(Μ2,Δ4)
Μ3	(Μ3,Δ1)	(Μ3,Δ2)	(Μ3,Δ3)	(Μ3,Δ4)
Μ4	(Μ4,Δ1)	(Μ4,Δ2)	(Μ4,Δ3)	(Μ4,Δ4)

Πίνακας 1: Οι δεκαέξι κατηγορίες διδακτικών δραστηριοτήτων και πλαισίων.

Με βάση το πρίσμα αυτό χαρτογραφήσαμε τις δραστηριότητες που περιέχονται στο Α.Π.Σ. (2003), στα σχολικά εγχειρίδια (Βιβλίο του Μαθητή, Τετράδιο Εργασιών) και στα Βιβλία του Δασκάλου των τάξεων Α’, Β’ και Γ’ Δημοτικού.

Κατά την ανάλυση των δραστηριοτήτων βρέθηκαν δραστηριότητες που είχαν δύο διαφορετικές μορφές εκτίμησης οπότε αυτές οι δραστηριότητες μετρηθήκαν δυο φορές. Επίσης η ανάλυση των δραστηριοτήτων έδειξε ότι σε μια δραστηριότητα μπορεί να αναδύονται περισσότερες από μια διαστάσεις σημαντικότητας.

Στο Δ.Ε.Π.Π.Σ-ΑΠΣ (2003) μελετήθηκαν 28 θεματικές ενότητες και σε κάθε μια από αυτές αντιστοιχούν συγκεκριμένοι στόχοι με αντίστοιχες ενδεικτικές δραστηριότητες. Στα βιβλία του μαθητή, στα τετράδια εργασιών και στα βιβλία του Δασκάλου μελετήθηκαν 1.717 δραστηριότητες. Στον παρακάτω πίνακα καταγράφεται η απόλυτη συχνότητα των δραστηριοτήτων ανά τάξη.

	Α’ τάξη	Β’ τάξη	Γ’ τάξη
Βιβλίο Μαθητή (Β.Μ)	240	190	202
Τετράδιο Εργασιών(Τ.Ε)	305	310	294
Βιβλίο Δασκάλου (Β.Δ)	63	54	59
Σύνολα	608	554	555

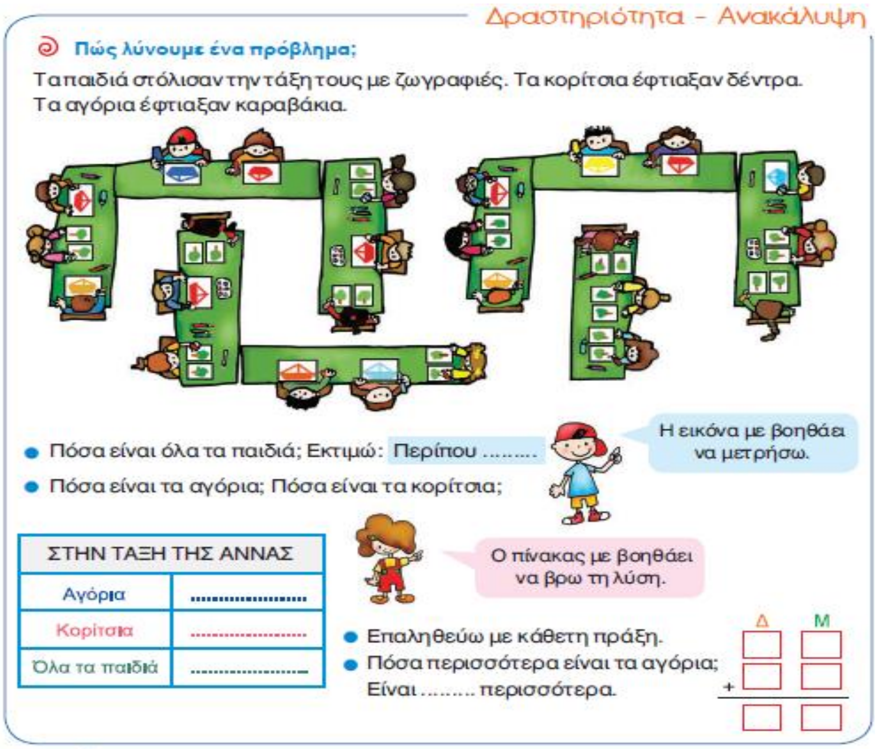
Πίνακας 2: Οι απόλυτες συχνότητες των δραστηριοτήτων ανά τάξη όπως εμφανίζονται στα Βιβλία του Μαθητή , στα Τετράδια και στα Βιβλία του Δασκάλου.

Στην συνέχεια περιγράφουμε μια δραστηριότητα που αναλύθηκε μέσα από το πρίσμα που αναφέρθηκε παραπάνω ώστε να γίνει περισσότερο κατανοητή η κατηγοριοποίηση των δραστηριοτήτων.

Δραστηριότητα: Βιβλίο Μαθητή Β’ τάξης, Ενότητα 1, Κεφάλαιο 5, Τεύχος Α σελ 20-21 : Δραστηριότητα- Ανακάλυψη.

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα που φαίνεται στην Εικόνα 1 χαρακτηρίσθηκε ότι περιέχει την έννοια της εκτίμησης στη μορφή «εκτίμηση πλήθους (Μ2)» αφού περιέχει την χαρακτηριστική ερώτηση:

«Πόσα είναι όλα τα παιδιά». Επίσης χαρακτηρίζεται ως προς τις διαστάσεις σημαντικότητας με Δ1 και Δ2 για τους εξής λόγους: η εικόνα περιέχει στοιχεία από την καθημερινή ζωή των μαθητών και τα βοηθάει να κατανοήσουν το μέγεθος του αριθμού των παιδιών που είναι στην Εικόνα 1.



Εικόνα 1 Βιβλίο Μαθητή Β’ τάξης Τεύχος Α σελ 20,21 Δραστηριότητα – Ανακάλυψη.

Αποτελέσματα

Στην ανάλυση των δραστηριοτήτων που ενσωμάτωναν την έννοια της εκτίμησης μέσα από το πρίσμα που δημιουργήθηκε από τις 4 μορφές της εκτίμησης και τις 4 διαστάσεις ως προς την σημαντικότητά της μελετήθηκαν οι 16 διαφορετικοί συνδυασμοί τύπου (Μορφή i , Διάσταση j).

Τα ευρήματα της έρευνας φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

	Α.Π.Σ.			(Β.Μ)			(Τ.Δ)			(Β.Μ)		
ΜΟΡΦΗ	ΑΠΣ Α	ΑΠΣ Β	ΑΠΣ Γ	ΒΜ Α	ΒΜ Β	ΒΜ Γ	ΤΕ Α	ΤΕ Β	ΤΕ Γ	ΒΔ Α	ΒΔ Β	ΒΔ Γ
(Μ1,Δ1)	0,00	0,00	0,00	0,00	30,28	20,83	0,00	37,12	3,85	0,00	24,44	37,50
(Μ1,Δ2)	0,00	0,00	0,00	0,00	17,43	29,17	0,00	34,85	11,54	0,00	20,00	25,00
(Μ1,Δ3)	0,00	0,00	0,00	0,00	19,27	4,17	0,00	15,15	7,69	0,00	15,56	25,00
(Μ1,Δ4)	0,00	0,00	0,00	0,00	1,83	12,50	0,00	0,76	0,00	0,00	4,44	0,00
(Μ2,Δ1)	0,00	0,00	0,00	16,67	2,75	0,00	11,76	0,76	0,00	0,00	2,22	0,00
(Μ2,Δ2)	0,00	0,00	0,00	16,67	4,59	0,00	11,76	0,76	0,00	0,00	0,00	0,00
(Μ2,Δ3)	0,00	0,00	0,00	0,00	6,42	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,22	0,00

(Μ2,Δ4)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
(Μ3,Δ1)	0,00	0,00	20,00	0,00	2,75	4,17	0,00	0,76	11,54	0,00	6,67	0,00
(Μ3,Δ2)	33,33	100,00	40,00	0,00	4,59	8,33	0,00	3,03	26,92	0,00	11,11	0,00
(Μ3,Δ3)	0,00	0,00	0,00	0,00	2,75	0,00	0,00	0,76	0,00	0,00	2,22	0,00
(Μ3,Δ4)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,92	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
(Μ4,Δ1)	33,33	0,00	20,00	50,00	1,83	12,50	58,82	2,27	23,08	57,14	6,67	12,50
(Μ4,Δ2)	0,00	0,00	0,00	0,00	1,83	0,00	0,00	0,76	3,85	0,00	0,00	0,00
(Μ4,Δ3)	33,33	0,00	20,00	16,67	1,83	8,33	17,65	3,03	7,69	42,86	2,22	0,00
(Μ4,Δ4)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,92	0,00	0,00	0,00	3,85	0,00	2,22	0,00
ΣΥΝΟΛΑ	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

Πίνακας 3: Οι σχετικές συχνότητες (rf) των συνδυασμών (Μορφή i , Διάσταση j) στο εμπειρικό υλικό των Α’,Β’,Γ’ τάξεων του Δημοτικού.

Από την ανάγνωση των ευρημάτων του Πίνακα 3 προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα:

Στην Α’ τάξη του Δημοτικού:

- στο Α.Π.Σ εμφανίζονται οι (Μ3,Δ2), (Μ4,Δ1) και (Μ4,Δ3) με ποσοστά 33,33%
- στο Β.Μ εμφανίζονται οι (Μ2,Δ1), (Μ2,Δ2), (Μ4,Δ3) με ποσοστά 16,67% αντιστοίχως και ο (Μ4,Δ1) με ποσοστό 50%.
- στο Τ.Δ εμφανίζονται οι ίδιοι συνδυασμοί που εμφανίστηκαν στο Β.Μ με ποσοστά περίπου τα ίδια.
- στο Β.Δ εμφανίζονται μόνο δυο συνδυασμοί οι (Μ4,Δ1) και (Μ4,Δ3) με ποσοστά 58,82% και 42,86% αντιστοίχως.

Στη Β’ τάξη του Δημοτικού:

- στο Β.Μ, στο Τ.Δ, και στο Β.Δ επικρατούν οι συνδυασμοί (Μ1,Δ1), (Μ1,Δ2), (Μ1,Δ3) με ποσοστά που κυμαίνονται από 15% έως 38%.
- Οι υπόλοιποι συνδυασμοί εμφανίζονται με ποσοστά από 0% έως 7% με εξαίρεση τον (Μ3,Δ2) στο Βιβλίο του Δασκάλου με 11,11%
- Στο Α.Π.Σ. της Β’ τάξης εμφανίζεται μόνο ο συνδυασμός (Μ3,Δ2).

Στη Γ’ τάξη του Δημοτικού:

- στο Α.Π.Σ εμφανίζονται 4 συνδυασμοί οι: (Μ3,Δ1), (Μ3,Δ2), (Μ4,Δ1) και (Μ4,Δ3) με ποσοστά 20%, 40%, 20%και 20% αντιστοίχως.
- στο Βιβλίο του Μαθητή (Β.Μ) υπάρχουν 4 επικρατέστεροι συνδυασμοί με ποσοστά από 12,5% έως 29,17% οι οποίοι είναι (Μ1,Δ1), (Μ1,Δ2), (Μ1,Δ4) και (Μ4,Δ1) ενώ οι υπόλοιποι εμφανίζουν ποσοστά από 0% έως 8,33%.
- στο Τετράδιο Εργασιών επικρατεί η ίδια τάση με τα αποτελέσματα του Βιβλίου του Μαθητή
- και τέλος στο Βιβλίο του Μαθητή εμφανίζονται 4 συνδυασμοί (Μ1,Δ1), (Μ1,Δ2), (Μ1,Δ3) και (Μ4,Δ1) με ποσοστά 37,5% , 25%,25%,και 12,5% αντιστοίχως.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στο Αναλυτικό Πρόγραμμά Σπουδών των τριών τάξεων του δημοτικού οι δεκαέξι διδακτικές δραστηριότητες της σχάρας που κατασκευάσαμε δεν εμφανίζονται ισότιμα. Κυρίως εμφανίζονται διδακτικά πλαίσια που περιέχουν την εκτίμηση μέσω αριθμογραμμής και την εκτίμηση μέτρων με αισθητή την απουσία διδακτικών καταστάσεων μορφής (Mi, Δ4) δηλαδή καταστάσεων που να συνδέουν την εκτίμηση με την επαλήθευση αποτελέσματος το οποίο είναι σε αντίφαση με το συμπέρασμα που προέκυψε από την βιβλιογραφική έρευνα. Η ερμηνεία αυτού του συμπεράσματος θα μπορούσε να συνδέεται με την κρυφή ισχύ της στερεοτυπικής αντίληψης ότι τα μαθηματικά είναι συνδεδεμένα με την ακρίβεια και ότι η εκτίμηση δεν θεωρείται μέρος των μαθηματικών.

Η εμφάνιση της εκτίμησης μέσω αριθμογραμμής στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών και των τριών τάξεων και η σύνδεση της κυρίως με την διάσταση 2 δηλαδή της αίσθησης αριθμού φαίνεται να επιβεβαιώνει την άποψη ότι το γνωστικό εργαλείο που είναι κατάλληλο για να διδαχθούν οι αριθμοί είναι η αριθμογραμμή.

Αναλυτικότερα στο Α.Π.Σ (2003) της Α', Β' και Γ' τάξης του Δημοτικού οι δραστηριότητες που έχουν την έννοια της εκτίμησης δεν ξεπερνάνε το 1/3 του συνόλου των δραστηριοτήτων που προτείνονται ανά τάξη.

Η εμφάνιση της εκτίμησης με αριθμογραμμή στο Α.Π.Σ (δηλ του συνδυασμού (Μ3,Α.Π.Σ)) και στις τρεις τάξεις αλλά και της εκτίμησης μέτρων (δηλ του συνδυασμού (Μ4,Α.Π.Σ.)) στην Α' και Γ' τάξη δείχνει μια τάση του Α.Π.Σ (2003) να προκρίνει δραστηριότητες που περιέχουν την εκτίμηση με χρήση αριθμογραμμής αλλά και την εκτίμηση μέτρων.

Ως προς τις διαστάσεις σημαντικότητας της εκτίμησης η απουσία του συνδυασμού (Δ4, Α.Π.Σ) από τις δραστηριότητες και των τριών τάξεων του δημοτικού θα μπορούσε να συσχετιστεί πάλι με την αμφιβολία περί της πλήρους μαθηματικής υπόστασης της εκτίμησης, καθώς σε αυτή την περίπτωση θα είχε προταθεί στους μαθητές να προχωρούν σε επαλήθευση της απάντησης σε ένα πρόβλημα μέσω της εκτίμησης.

Οι διδακτικές δραστηριότητες για τη διδασκαλία της έννοιας της εκτίμησης δεν εμφανίζονται με την ίδια βαρύτητα στα Βιβλία του Μαθητή και στα Τετράδια Εργασιών και στα Βιβλία του Δασκάλου.

Συγκεκριμένα στο υλικό που μελετήθηκε στην Α' τάξη του Δημοτικού η εκτίμηση πλήθους εμφανίζεται στο Β.Μ και στο Τ.Ε και συνδέεται κυρίως με τις δυσκολίες που παρουσιάζει στη χρήση της στην καθημερινή ζωή (Δ1) και στην κατανόηση της αίσθησης του αριθμού ενώ η εκτίμηση μέτρων εμφανίζεται και στα τρία σχολικά εγχειρίδια και αναδεικνύει τη σημαντικότητα της μέσω των διαστάσεων Δ1 και Δ3.

Στις δραστηριότητες της Β' τάξης που περιέχονται και στα τρία σχολικά εγχειρίδια εμφανίζονται σχεδόν όλες οι διδακτικές δραστηριότητες της σχάρας που κατασκευάσαμε με την υπολογιστική εκτίμηση να εμφανίζει τα μεγαλύτερα ποσοστά η οποία αναδεικνύει τη σημαντικότητα της μέσα από τις 4 διαστάσεις με τη σύνδεση της με της δυσκολίες ως προς τη χρήση της στην καθημερινότητα (Δ1) να ξεχωρίζει. Οι υπόλοιπες μορφές εκτίμησης συνδέονται με όλα τα είδη των διαστάσεων αλλά σε πολύ μικρότερα ποσοστά από ότι εμφανίζεται η υπολογιστική εκτίμηση.

Στις δραστηριότητες της Γ' τάξης που περιέχονται και στα τρία σχολικά εγχειρίδια τόσο η υπολογιστική εκτίμηση όσο και η εκτίμηση μέτρων συνδέονται με όλες τις διαστάσεις της σημαντικότητας της. Η εκτίμηση πλήθους απουσιάζει ενώ η εκτίμηση με χρήση αριθμογραμμής εμφανίζεται μόνο στο Β.Μ και στο Τ.Ε και η σημαντικότητα της προβάλλεται από τις δυσκολίες χρήσης της στην καθημερινότητα και από τις δυσκολίες ως προς την κατανόηση της αίσθησης του αριθμού (της θεσιακής αξίας και της τάξης μεγέθους του αριθμού).

ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

Ο τρόπος με τον οποίο τοποθετείται η διδασκαλία της εκτίμησης-προσέγγισης στην βιβλιογραφική έρευνα μας οδήγησε στην επεξεργασία μιας τυπολογίας δεκαέξι διδακτικών δραστηριοτήτων –πλαισίων της εκτίμησης για να μελετήσουμε την επίδραση τους στις δραστηριότητες που προτείνονται στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών και παρουσιάζονται στα σχολικά βιβλία και στο βιβλίο του δασκάλου των τάξεων Α', Β', Γ' του Δημοτικού. Διαπιστώνουμε μια διαφοροποίηση μεταξύ των δεδομένων που προέκυψαν από την βιβλιογραφικών έρευνα και των δεδομένων που προέκυψαν από την μελέτη των δραστηριοτήτων του Α.Π.Σ και των σχολικών βιβλίων. Ενώ οι τύποι διδακτικών δραστηριοτήτων και μορφών της εκτίμησης θέτονται σχεδόν ισότιμα ή/και συμπληρωματικά στη βιβλιογραφία ώστε να τεκμηριώνεται και να αναδεικνύεται η αξία και η χρησιμότητα της διδασκαλίας της, στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών δεν εμφανίζονται ούτε όλοι τύποι, ούτε με την ίδια βαρύτητα (Παπανικολάου, 2017). Αυτό ενδέχεται να συνδέεται με τη στερεοτυπική ισχύ της αντίληψης ότι η έννοια της εκτίμησης δεν αποτελεί ξεκάθαρα μέρος των μαθηματικών. Αντίθετα τα σχολικά βιβλία τόσο του μαθητή όσο και του Δασκάλου χαρακτηρίζονται από ένα πλουραλισμό ως προς τις διδακτικές δραστηριότητες-μορφές της εκτίμησης τα οποία, επιδιώκοντας να είναι σύμφωνα με το πνεύμα των αρχών με τις οποίες εμφανίζεται να γράφτηκαν τα νέα σχολικά βιβλία.

Η παρούσα έρευνα μένει να επεκταθεί και στις υπόλοιπες τρεις τάξεις του Δημοτικού, αλλά και να συμπληρωθεί με παρατήρηση της σχολικής πρακτικής και των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών και των οικογενειών, ώστε να αποκτηθεί μια συνολική εικόνα για την αξία, τη σημασία και τις δυσκολίες που αποδίδονται στη διδασκαλία της εκτίμησης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Clements, D. H. (1999). *Teaching length measurement: Research challenges. School Science and Mathematics*, 99(1), 5-11.

Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ) και Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ) Μαθηματικών (2003). Ανακτήθηκε 9 Δεκεμβρίου 2016 από http://www.pi-schools.gr/programs/depps/

Dolma, P. (2002). *The relationship between estimation skill and computational ability of students in years 5, 7 and 9 for whole and rational numbers.* Ανακτήθηκε 9 Δεκεμβρίου 2016 από http://ro.ecu.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?article=1743&context=theses

Φιλίππου, Γ., Χρίστου, Κ. (2004). Εκτίμηση της απάντησης. Στο Γ. Φιλίππου & Κ. Χρίστου (Επ.), *Διδακτική των μαθηματικών* (σελ. 279-286). Αθήνα:Τυπωθήτω.

Λεμονίδης, Χ. (2013). Γενικά θεωρητικά θέματα των νοερών υπολογισμών. Στο Χ. Λεμονίδης (Επ), *Νοεροί υπολογισμοί Μαθηματικά της φύσης και της ζωής* (σελ.22-71).Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

Λεμονίδης, Χ. (2013). Κατ' Εκτίμηση Υπολογισμοί. Στο Χ. Λεμονίδης (Επ), *Νοεροί υπολογισμοί Μαθηματικά της φύσης και της ζωής* (σελ.339-374).Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

Παπανικολάου, Χ. (2017). *Η κατανόηση της έννοιας της προσέγγισης και των εφαρμογών της στα μαθηματικά της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης* Διπλωματική Διατριβή. Ρόδος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Segovia, I., Castro, E. (2009). Computational and measurement estimation: curriculum foundations and research carried out at the University of Granada, Mathematics Didactics Department Electronic *Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1), 449-53

Siegler, R. S. & Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation. In J. I. Campbell, (Ed), *Handbook of mathematical cognition*, (pp.197-212) New York: Psychology Press

Sowder, J. T. (1992). Estimation and number sense. In D. A. Grouws (Ed), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp.371-389). U.S.A: Macmillan Publishing Co, Inc.

Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΚΡΙΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑΣ

Παπαντωνίου Άντρη και Παναούρα Ρίτα

Πανεπιστήμιο Frederick

andripapant@cytanet.com.cy , pre.pm@frederick.ac.cy

Στην παρούσα έρευνα διερευνήθηκε η επίδραση της διερευνητικής μεθόδου διδασκαλίας και του επιπέδου κριτικής σκέψης των μαθητών στην επίδοσή τους στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών στερεομετρίας. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε με τη χορήγηση ερωτηματολογίου κριτικής σκέψης και δοκιμίου στερεομετρίας σε 100 παιδιά Γ΄ Γυμνασίου πριν και μετά από διδακτική παρέμβαση διερευνητικής διδασκαλίας. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι τη μεγαλύτερη βελτίωση στην επίδοση τους στη στερεομετρία, είχαν οι μαθητές της ομάδας παρέμβασης που ανήκαν στην ομάδα της υψηλής κριτικής σκέψης και είχαν διδαχθεί με τη διερευνητική μέθοδο διδασκαλίας.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο τρόπος οργάνωσης αλλά και διεξαγωγής της διδασκαλίας αποτελεί ένα από τους σημαντικότερους παράγοντες που επηρεάζουν τη μάθηση των μαθηματικών (Eggen & Kauchak, 2001). Για τη δημιουργία μιας εκπαίδευσης προσαρμοσμένης στις ανάγκες του 21ου αιώνα, τα σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα στα μαθηματικά περιλαμβάνουν στους στόχους που τίθενται, την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης για την επίλυση προβλημάτων και για την αιτιολόγηση της λογικότητας των επιχειρημάτων και των απαντήσεων (NCTM, 2000). Η μάθηση των μαθηματικών και οι στόχοι που τίθενται στα αναλυτικά προγράμματα συνδέονται με τις κοινωνικές ανάγκες και δεξιότητες των ατόμων, τα οποία χρειάζεται να δρουν σε ένα ιδιαίτερα ανταγωνιστικό περιβάλλον.

Κυρίαρχος στόχος της εκπαίδευσης σήμερα, αποτελεί η καλλιέργεια βασικών δεξιοτήτων που πρέπει να έχουν οι μαθητές για να μπορέσουν να αντιμετωπίσουν τις προκλήσεις και ευκαιρίες (Ananiadou & Claro, 2009· Binkley et al., 2010). Οι μαθητές πρέπει να αποκτήσουν ενεργή προσέγγιση για τον τρόπο που μαθαίνουν, να χρησιμοποιούν την κρίση τους, να αξιοποιούν τις γνώσεις τους και να διερευνούν νέες μαθηματικές έννοιες (Rumanova, Záhorská και Vallo, 2014). Απαραίτητη προϋπόθεση για να σκέφτονται λογικά και να αναπτύξουν την επιστημονική τους γνώση είναι να διαθέτουν δεξιότητες κριτικής σκέψης (Wimbarti, 2012).

Τα άτομα πρέπει να αναπτύξουν και να καλλιεργήσουν τις δεξιότητες αυτές γιατί μόνο έτσι θα μπορέσουν να προετοιμαστούν για να πετύχουν στο μέλλον και να έχουν μια πιο βελτιωμένη ποιότητα ζωής (Huitt, 1998).

Σύμφωνα με τους Maričić, Špijunović και Malinović Jovanović (2013), χρειάζονται κατάλληλες συνθήκες για να αναπτυχθεί η κριτική σκέψη στους μαθητές. Το κατάλληλο περιεχόμενο σε συνδυασμό με τη σωστή στρατηγική και μέθοδο μπορεί να αποφέρει τα επιθυμητά αποτελέσματα κατά την διδασκαλία των μαθηματικών. Η ανεπάρκεια των υφιστάμενων παραδοσιακών μοντέλων εκπαίδευσης να καλύψουν τις ανάγκες των μαθητών του 21ου αιώνα, (Barron & Darling-Hammond, 2008˙ Friesen & Jardine, 2009˙ Perkins, 2010) ώθησε αρκετούς ερευνητές να προτείνουν νέες μεθόδους διδακτικής προσέγγισης για να ενισχύσουν τις δεξιότητες κριτικής σκέψης του ατόμου (Bolte et al., 2011· Minner et al., 2010· Spronken-Smith, 2008). Μεγάλος αριθμός ερευνών προτείνει τη διερευνητική μέθοδο διδασκαλίας ως ένα πολύ πιο αποτελεσματικό τρόπο της μάθησης από τις παραδοσιακές μορφές διδασκαλίας (Hu, Kuh, & Li, 2008˙ Donham, Bishop, Kuhlthau, & Oberg, 2001) χωρίς ωστόσο να είναι γνωστό σε ποιο βαθμό χρησιμοποιείται (Engeln, Euler, & Maass, 2013) και χωρίς να έχει συνδεθεί αυτόματα με την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης. Η διερευνητική μάθηση είναι μια προσέγγιση στη διδασκαλία και μάθηση που θεωρεί ως το επίκεντρο της μαθησιακής εμπειρίας τις ερωτήσεις, τις ιδέες και τις παρατηρήσεις των μαθητών. Ο εκπαιδευτικός διαδραματίζει ενεργό ρόλο δημιουργώντας τις κατάλληλες συνθήκες για ένα πολιτισμένο κλίμα όπου οι ιδέες των παιδιών μπορούν να αμφισβητηθούν, να δοκιμαστούν και να επαναπροσδιοριστούν (Scardamalia, 2002).

Κάποιες έρευνες (π.χ. Guthrie, 2000) υποστηρίζουν ότι με τη συζήτηση κατά τη διάρκεια του μαθήματος οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν, να ενδυναμώσουν και να επεκτείνουν προϋπάρχουσες δεξιότητες κριτικής σκέψης. Κατά τη διαδικασία της διερευνητικής διδασκαλίας οι μαθητές συνεργάζονται, εξερευνούν, ρωτούν, εξηγούν, εμπλέκονται στη διαδικασία μάθησης, με τους εκπαιδευτικούς να τους καθοδηγούν και να τους παροτρύνουν για εξερεύνηση (Artigue & Blomhoj, 2013). Η διερευνητική μάθηση αναπτύσσει την πνευματική ανάπτυξη και ωριμότητα στους μαθητές για να προετοιμαστούν για τη δια βίου μάθηση και να επιτύχουν τα αναμενόμενα μαθησιακά αποτελέσματα (Lee, 2004).

Σύμφωνα με τον Wyatt (2005) με τη διερευνητική μέθοδο διδασκαλίας επιτυγχάνεται η αντιμετώπιση διαφόρων προβλημάτων μέσω διαφόρων δραστηριοτήτων έρευνας. Οι μαθητές στη διερευνητική μάθηση κατανοούν καλύτερα τις διάφορες έννοιες αναπτύσσοντας ικανότητες κριτικής σκέψης (Barrow, 2006).

Η παρούσα έρευνα αποσκοπεί στο να απαντήσει ένα κύριο ερευνητικό ερώτημα που διασυνδέει την κριτική σκέψη με τη διερευνητική διδασκαλία στην επίδοση των ατόμων. Συγκεκριμένα διερευνά το βαθμό επίδρασης του αρχικού επιπέδου κριτικής σκέψης των ατόμων, σε συνδυασμό με τη διερευνητική προσέγγιση διδασκαλίας, στην κατανόηση εννοιών στερεομετρίας.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Δείγμα

Για τους σκοπούς της παρούσας έρευνας επιλέγηκαν 100 μαθητές από τέσσερα τμήματα της Γ΄ Γυμνασίου από ένα δημόσιο Γυμνάσιο της Πάφου. Η επιλογή του σχολείου έγινε για πρακτικούς λόγους που αφορούν στην ευκολία πρόσβασης του πρώτου ερευνητή και η επιλογή της τάξης έγινε γιατί στη Γ΄ τάξη Γυμνασίου διδάσκεται το κεφάλαιο της στερεομετρίας στη Μέση Εκπαίδευση.

Με τυχαίο τρόπο δύο τμήματα αποτελούσαν την ομάδα ελέγχου (ΟΕ) και τα άλλα δύο την ομάδα παρέμβασης (ΟΠ). Με αυτό τον τρόπο ένας αριθμός 50 μαθητών αποτελούν την ομάδα ελέγχου και αντίστοιχος αριθμός την ομάδα παρέμβασης.

Μέσα Συλλογής Δεδομένων

Για τη συλλογή δεδομένων σχετικών με την απάντηση του ερευνητικού ερωτήματος χρησιμοποιήθηκαν (α) προπειραματικό δοκίμιο στερεομετρίας (β) ερωτηματολόγιο κριτικής σκέψης (γ) μετά-πειραματικό δοκίμιο στερεομετρίας.

Το μεταπειραματικό δοκίμιο είναι το ίδιο με το προπειραματικό δοκίμιο στερεομετρίας με στόχο τη μέτρηση της ικανότητας των μαθητών στις έννοιες της στερεομετρίας, μέσα από ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής και προβλήματα ανοικτού τύπου. Μαθησιακό αποτέλεσμα στερεομετρίας ορίζεται ως η διαφορά του μεταπειραματικού δοκιμίου στερεομετρίας από το προπειραματικό δοκίμιο στερεομετρίας.

Το δοκίμιο στερεομετρίας είχε κατασκευαστεί για τους σκοπούς της παρούσας έρευνας με τέτοιο τρόπο ώστε τα 13 έργα που περιλαμβάνονταν να είναι κατάλληλα για μαθητές Γ΄ Γυμνασίου. Οι μαθητές είχαν 40 λεπτά στη διάθεσή τους να το απαντήσουν, χρόνος ικανοποιητικός με βάση πιλοτική εφαρμογή του. Μέσα από τα έργα του δοκιμίου, έγινε έλεγχος κατανόησης των εννοιών για ονοματολογία, για αναγνώριση επίπεδων και στερεών σχημάτων, για αναγνώριση των αναπτυγμάτων τους, για αναγνώριση κύριων χαρακτηριστικών τους καθώς επίσης και για εύρεση εμβαδών και όγκων των διαφόρων στερεών. Το δοκίμιο στερεομετρίας είχε στόχο να μετρήσει την ικανότητα κατανόησης των εννοιών της στερεομετρίας και να κατατάξει τους μαθητές σε υψηλό, μέτριο και χαμηλό επίπεδο ικανότητας στον τομέα της στερεομετρίας. Έγινε πιλοτική χορήγηση του δοκιμίου στερεομετρίας σε 25 μαθητές και αφού εντοπίστηκαν ορισμένες αδυναμίες όσον αφορά στην κατανόηση θεμάτων, οριστικοποιήθηκε. Ένα ενδεικτικό έργο του δοκιμίου παρουσιάζεται στην Εικόνα 1, εφόσον η παρουσίαση του δοκιμίου σε πλήρη μορφή δεν μπορεί να είναι εφικτή στο χώρο της παρούσας δημοσίευσης.

Ένας κόκκινος κύβος που αποτελείται από 27 μικρότερους κύβους έχει πέσει μέσα σε κουβά με κίτρινη μπογιά. Πόσοι κύβοι θα έχουν κίτρινη μπογιά στις έδρες τους; Θα βαφτούν όλοι το ίδιο; **Δικαιολογήστε την απάντησή σας.**

Εικόνα 1: Έργο από το δοκίμιο στερεομετρίας

Το ερωτηματολόγιο κριτικής σκέψης που χρησιμοποιήθηκε (Washington State University Center for Teaching, Learning, & Technology, 2006), με συντελεστή εσωτερικής συνέπειας Cronbach's *α* .74, δόθηκε σε όλους τους μαθητές πριν να ξεκινήσει η διδακτική παρέμβαση. Περιελάμβανε τέσσερα μέρη με εννέα συνολικά ερωτήσεις. Οι ερωτήσεις αφορούσαν α) την ανάλυση της εργασίας και διερεύνηση επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος, β) τη συλλογή και την αξιολόγηση πληροφοριών από διαφορετικές πηγές για την επίλυση της εργασίας που δόθηκε, γ) την αξιολόγηση επιχειρημάτων και δ) τη χρήση άλλων στοιχείων και κριτηρίων και τέλος την αιτιολόγηση και δικαιολόγηση των επιλογών για τη λύση της εργασίας. Μία ενδεικτική ερώτηση του ερωτηματολογίου ζητούσε από τα άτομα να καθορίσουν τι πρέπει να γνωρίζουν για να λύσουν ένα έργο πριν ξεκινήσουν την επίλυσή του. Οι επιλογές που είχαν και αφορούν μία κριτική προσέγγιση ως προς την αυτοαναπαράστασή τους ήταν: 1. Δεν ξέρω τι χρειάζεται να γνωρίζω για να λύσω το έργο, 2.

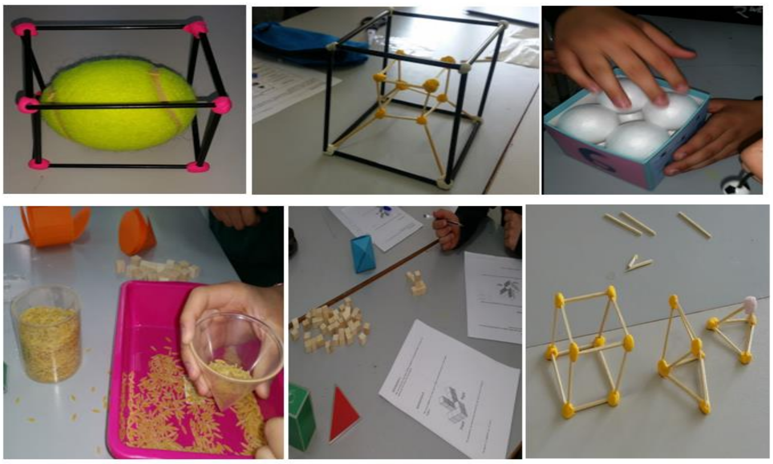
Μπορώ να εντοπίσω κάποια πράγματα που χρειάζεται να ξέρω για να λύσω το έργο και 3. Γνωρίζω τι χρειάζεται να ξέρω για να λύσω το έργο.

Ερευνητική διαδικασία

Η ερευνητική διαδικασία ξεκίνησε με το ερωτηματολόγιο κριτικής σκέψης (ΕΚΣ) το οποίο δόθηκε σε όλους τους μαθητές, τόσο της ομάδας παρέμβασης όσο και της ομάδας ελέγχου πριν να ξεκινήσει η διδακτική παρέμβαση. Τα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου κριτικής σκέψης στο προπειραματικό στάδιο κατάταξαν, τους μαθητές σε υψηλό επίπεδο κριτικής σκέψης (ΥΚΣ) με βαθμολογία 21-30 (5 μαθητές στην ΟΕ και 9 μαθητές στην ΟΠ), μέτριο (ΜΚΣ) με βαθμολογία 11-20 (24 μαθητές στην ΟΕ και 26 μαθητές στην ΟΠ) και χαμηλό επίπεδο (ΧΚΣ) κριτικής σκέψης με βαθμολογία 0-10 (21 μαθητές στην ΟΕ και 15 μαθητές στην ΟΠ).

Ακολούθησε το παρεμβατικό πρόγραμμα με διερευνητική μέθοδο διδασκαλίας του κεφαλαίου της στερεομετρίας, διάρκειας 8 διδακτικών περιόδων (δύο δηλαδή περίπου εβδομάδων), όπως προτείνει ο ενδεικτικός ετήσιος προγραμματισμός του Υπουργείου Παιδείας και Πολιτισμού της Κύπρου για τη διδασκαλία της στερεομετρίας στη Γ΄ Γυμνασίου. Η ομάδα παρέμβασης διδάχθηκε σειρά δραστηριοτήτων με διερευνητική μέθοδο διδασκαλίας, ενώ η ομάδα ελέγχου διδάχθηκε με την παραδοσιακή μέθοδο διδασκαλίας.

Πιο αναλυτικά, κατά τη διάρκεια της παραδοσιακής μεθόδου διδασκαλίας οι μαθητές είχαν πιο παθητικό ρόλο. Ο καθηγητής είχε τον πρωταγωνιστικό ρόλο, χρησιμοποιώντας κυρίως το σχολικό εγχειρίδιο και τον βιντεοπροβολέα. Μέσα από μια προγραμματισμένη διδασκαλία ο καθηγητής παρουσίασε την ύλη, έδωσε έμφαση στα κύρια σημεία του κεφαλαίου, απόδειξε τους τύπους με τους μαθητές να αντιγράφουν από τον πίνακα ακολουθώντας τις οδηγίες του καθηγητή. Η επίλυση ασκήσεων γινόταν με την καθοδήγησή του καθηγητή. Κατά τη διάρκεια της διερευνητικής μεθόδου διδασκαλίας, οι μαθητές της ομάδας παρέμβασης είχαν την ευκαιρία να εμπλακούν σε δραστηριότητες με νόημα, όπως ορίζουν τη διερευνητική μέθοδο διδασκαλίας οι Love et al., (2015). Οι μαθητές ενθαρρύνονταν να σκέφτονται κριτικά, να μοιράζονται τις ιδέες τους και να προσπαθούν να κατανοήσουν τις απόψεις των άλλων. Χρησιμοποιώντας διάφορα υλικά όπως για παράδειγμα ξυλάκια, πλαστελίνη, αναπτύγματα στερεών, κυβάκια, μπάλες κ.ά είχαν την ευκαιρία να κατασκευάσουν διάφορα στερεά σχήματα , να αναγνωρίσουν τα κύρια χαρακτηριστικά τους και να σκεφτούν τρόπους μέτρησης του όγκου και του εμβαδού των στερεών. Κατά τη διάρκεια της διερευνητικής διαδικασίας διδασκαλίας με την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού χωρίς αυτός να έχει τον πρωταρχικό ρόλο στις συζητήσεις, οι μαθητές παρατηρούσαν, αμφισβητούσαν, έθεταν ερωτήματα και στον εκπαιδευτικό και στους συμμαθητές τους, σχεδίαζαν τα πειράματα τους και αποφάσιζαν οι ίδιοι ποια πορεία θα ακολουθήσουν (Εικόνα 2).



Εικόνα 2: Ενδεικτικές δραστηριότητες της διδακτικής παρέμβασης

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Για να διερευνηθεί οποιαδήποτε διαφορά στους μέσους όρους της επίδοσης των μαθητών της ομάδας παρέμβασης (M=21.84, SD=5.9) και της ομάδας ελέγχου (M=21.36, SD=7.5) στην αρχική μέτρηση, στο προπειραματικό στάδιο εφαρμόστηκε το κριτήριο t-test και έγινε σύγκριση των μέσων όρων των αποτελεσμάτων των αρχικών δοκιμίων στερεομετρίας. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν έδειξαν ότι οι διαφορές στις μέσες τιμές δεν ήταν στατιστικά σημαντικές ($p > .05$) και επομένως οι δύο ομάδες μπορούν να θεωρηθούν ισοδύναμες, στοιχείο που μας επιτρέπει και τη σύγκριση στη συνέχεια. Παράλληλα, διενεργήθηκε σύγκριση των μέσων όρων στο δοκίμιο κριτικής σκέψης με τις διαφορές στις μέσες τιμές των δύο ομάδων, ομάδας ελέγχου (M=19.34, SD =3.00) και ομάδας παρέμβασης (M=20.46, SD =3.81), να μην είναι στατιστικά σημαντικές.

Για την διερεύνηση της επίδρασης της μεθόδου διδασκαλίας καθώς και του επιπέδου κριτικής σκέψης στο μαθησιακό αποτέλεσμα στη στερεομετρία (όπως έχει οριστεί πιο πάνω), αρχικά πραγματοποιήθηκε περιγραφική στατιστική ανάλυση. Τα αποτελέσματα, που φαίνονται στον Πίνακα 1 έδειξαν διαφορές μεταξύ των μαθητών στην ομάδα ελέγχου και της ομάδας παρέμβασης ως προς το μαθησιακό αποτέλεσμα στη στερεομετρία.

Ομάδα Διδασκαλίας	Επίπεδο Κριτικής Σκέψης	N	Μέσος Όρος	Τυπική Απόκλιση
Ελέγχου	Χαμηλή	21	1.33	4.139
	Μέτρια	24	1.04	4.268
	Ψηλή	5	-2.20	4.324
Παρέμβασης	Χαμηλή	15	1.53	5.235
	Μέτρια	26	3.75	6.304
	Ψηλή	9	8.83	8.951

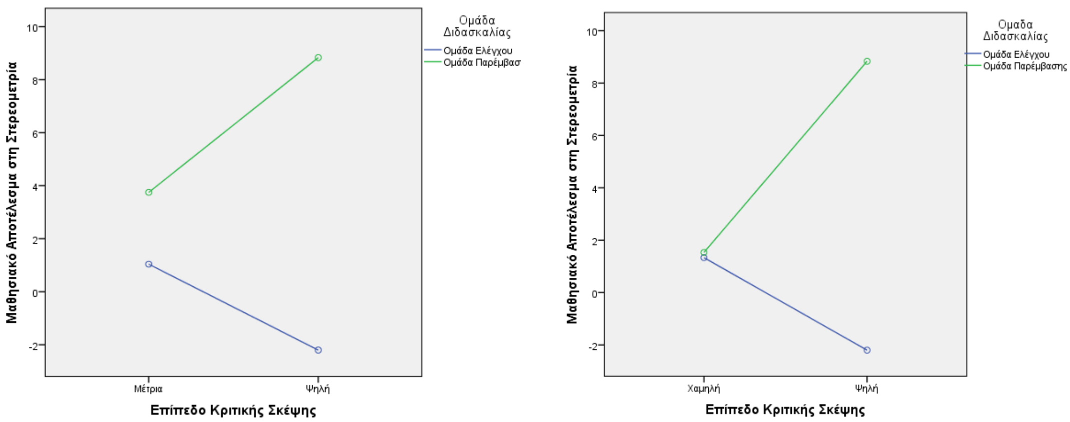
Πίνακας 1: Μέσος όρος και τυπική απόκλιση των δύο ομάδων διδασκαλίας και του επιπέδου κριτικής σκέψης.

Για τον εντοπισμό στατιστικά σημαντικών διαφορών διεξάχθηκε ανάλυση διακύμανσης δύο κατευθύνσεων Anova 3(ΧΚΣ, ΜΚΣ, ΥΚΣ)×2(ΟΕ, ΟΠ) ως προς την διαφορά τελικής και αρχικής μέτρησης του δοκιμίου στερεομετρίας. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης (Πίνακας 2) έδειξαν στατιστικά σημαντική κύρια επίδραση της ομάδας διδασκαλίας $F(1,\ 94) = 12.66,\ p = .001 < .05$ και ο δείκτης $\eta^2 = .119$. Οι μαθητές στην ομάδα παρέμβασης είχαν μεγαλύτερο μαθησιακό κέρδος από τους μαθητές της ομάδας ελέγχου. Δεν βρέθηκε στατιστικά σημαντική κύρια επίδραση του επιπέδου κριτικής σκέψης $F(2,\ 94) = .633,\ p = .533 > .05$ και ο δείκτης $\eta^2 = .013$. Τέλος βρέθηκε στατιστικά σημαντική αλληλεπίδραση Ομάδας Διδασκαλίας×Επιπέδου Κριτικής Σκέψης με $F(2,\ 94) = 4.558,\ p = .013 < .05$ και ο δείκτης $\eta^2 = .088$.

Πηγή	SS	MS	F	p
Ομάδα διδασκαλίας	384.491	384.49	12.66	.001
Κριτική Σκέψη	38.444	19.22	.63	.533
Ομάδα διδασκαλίας*Επίπεδο Κριτικής Σκέψης	276.87	138.44	4.56	.13

Πίνακας 2: Ανάλυση διακύμανσης για τη μελέτη της διαφοράς επίδοσης στο τεστ στερεομετρίας των δύο ομάδων διδασκαλίας, και το επίπεδο κριτικής σκέψης.

Για περαιτέρω διερεύνηση της αλληλεπίδρασης είχαν διεξαχθεί τρεις 2x2 Anova από τις οποίες προέκυψαν δύο στατιστικά σημαντικές αλληλεπιδράσεις. Οι μαθητές στην ομάδα παρέμβασης με αρχική υψηλή κριτική σκέψη φάνηκε ότι είχαν μεγαλύτερο μαθησιακό αποτέλεσμα από τους μαθητές με χαμηλή και μέτρια κριτική σκέψη. Τα αποτελέσματα φαίνονται στα Διαγράμματα 1&2.



Διαγράμματα 1&2: Αλληλεπιδράσεις Επιπέδου Κριτικής Σκέψης και Ομάδας Διδασκαλίας

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η παρούσα εργασία εξέτασε σε ποιο βαθμό επιδρά η διερευνητική μέθοδος διδασκαλίας στην κατανόηση εννοιών στερεομετρίας, ανάλογα με το επίπεδο κριτικής σκέψης που έχουν ήδη αναπτύξει τα άτομα, μέχρι το στάδιο της συγκεκριμένης μαθησιακής παρέμβασης. Από τα αποτελέσματα διαφάνηκε ότι η διερευνητική μέθοδο διδασκαλίας έχει καλύτερα αποτελέσματα στους μαθητές όλων των επιπέδων συγκριτικά με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας, δρα όμως ευεργετικά σε μεγαλύτερο βαθμό στους μαθητές των οποίων η κριτική σκέψη είναι πιο ανεπτυγμένη. Φαίνεται ότι οι μαθητές με ψηλότερο επίπεδο κριτικής σκέψης μπορούν να δράσουν πιο ενεργητικά σε δραστηριότητες διερεύνησης όπου απαιτείται η δική τους πρωτοβουλία και δραστηριοποίηση. Αποτελεί ένδειξη ότι η συγκεκριμένη μέθοδος διδασκαλίας δεν είναι «συνταγή» για όλους τους μαθητές και μπορεί να αξιοποιείται για καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα νοουμένου ότι πληρούνται κάποιες προϋποθέσεις.

Πολλές έρευνες μέχρι σήμερα είχαν δείξει τα θετικά που μπορεί να έχει η αξιοποίηση της διερευνητικής μεθόδου διδασκαλίας στα μαθηματικά (Laursen κ.ά, 2011). Σε πρόσφατη έρευνα ο Hattie (2015) συμπέρανε ότι η διερευνητική διδασκαλία αυξάνει τις επιδόσεις των μαθητών στα Μαθηματικά. Η παρούσα έρευνα θέτει μία πρόσθετη παράμετρο στο θέμα. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η διερευνητική διδασκαλία προσφέρει περισσότερα στους μαθητές με ψηλό επίπεδο κριτικής σκέψης. Σε μελλοντικές έρευνες, σημαντική θα ήταν και η διερεύνηση μεθόδου διδασκαλίας και του επιπέδου κριτικής σκέψης των μαθητών στην επίδοσή τους και σε άλλα κεφάλαια των μαθηματικών ή συσχέτιση με ιδιαίτερα γνωστικά χαρακτηριστικά των μαθητών, όπως είναι το μαθησιακό και το γνωστικό στιλ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ananiadou, K., & Claro, M. (2009). 21st century skills and competences for new millennium learners in OECD countries. (OECD Education Working Papers. No. 41.) Paris: OECD.

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualising inquiry-based education in mathematics. *ZDM- The International Journal on Mathematics Education*, *45*(6).

Barron, B., & Darling-Hammond, L. (2008). *Teaching for Meaningful Learning: A Review of Research on Inquiry-Based and Cooperative Learning*. Book Excerpt. *George Lucas Educational Foundation*.

Barrow, L. H. (2006). *A Brief History of Inquiry: From Dewey to Standards*. *Journal of Science Teacher Education*, 265-268.

Binkley, M., Erstad, O., Herman, J., Raizen, S., Ripley, M., & Rumble, M. (2010). *Defining 21st century skills. Assessment and teaching of 21st century skills draft white paper.* The University of Melbourne.

Bolte, C., Streller, S., Holbrook, J., Rannikmäe, M., Mamlok-Naaman, R., Hofstein, A., & Rauch, F. (2011). PROFILES: Professional Reflection-Oriented Focus on Inquiry based Learning and Education through Science. *Proceedings of the European Science Educational Research Association (ESERA)*, Lyon, France, September 2011.

Donham, J., Bishop, K., Kuhlthau, C. C., & Oberg, D. (2001). *Inquiry-based learning: Lessons from Library Power*. Worthington, OH: Linworth.

Engeln, K., Euler, M., & Maass, K. (2013). *Inquiry-based learning in mathematics and science: a comparative baseline study of teachers' beliefs and practices across 12 European countries. ZDM*, *45*(6), 823-836.

Eggen, P. D., & Kauchak. D. P. (2001). *Strategies for teachers: Teaching content and thinking skills*. Boston: Allyn and Bacon.

Fielding-Wells, J., Dole, S., & Makar, K. (2014). Inquiry pedagogy to promote emerging proportional reasoning in primary students. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(1), 47.

Friesen, S., & Jardine, D. (2009). *21st century learning and learners. Prepared for Western and Northern Canadian Curriculum Protocol by Galileo Educational Network*.

Guthrie, B. (2000). Thinking about Students' Thinking. Practitioner Research Briefs, *1999-2000 Report Series. Virginia Adult Education Research Network Practitioner Research Briefs* 1999-2000 Report Series, 1 -2.

Hattie, J. (2015). *Visible Learning into Action. International Case Studies of Impact*. Routledge, London, New York: Taylor and Francis

Hu, S., Kuh, G. D., & Li, S. (2008). *The effects of engagement in inquiry-oriented activities on student learning and personal development. Innovative Higher Education*, *33*(2), 71-81.

Laursen, S., Hassi, M. L., Kogan, M., Hunter, A. B., & Weston, T. (2011). *Evaluation of the IBL mathematics project: Student and instructor outcomes of inquiry-based learning in college mathematics*. Colorado University.

Lee, V. S. (2004). *Teaching and learning through inquiry: A guidebook for institutions and instructors*. Stylus Pub Llc.

Love, B., Hodge, A., Corritore, C., & Ernst C. D. (2015). Inquiry-based learning and the flipped classroom model: Foreign language pedagogy. *PRIMUS, 25*(8), 745-762.

Maričić, S., Špijunović, K., & Malinović Jovanović, N. (2013). The Role of Tasks in the Development of Students’ Critical Thinking in Initial Teaching of Mathematics. In J. Novotna, & H. Moraova (Eds.), *Task and tools in elementary mathematics* (pp. 204–212). Prague, the Czech Republic: Charles University, Faculty of Education.

Minner, D.D., Levy, A.J. & Century, J. (2010). Inquiry-based science instruction—what is it and does it matter? Results from a research synthesis years 1984 to 2002. *Journal of Research in Science Teaching*, *47*, pp. 474–496.

National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM (2000).

Perkins, D. (2010). *Making learning whole: How seven principles of teaching can transform education*. John Wiley & Sons.

Rumanová. L, Záhorská. J, Vallo, D. (2014) *Pupils' solutions of a geometric problem from a mathematical competition*. In Acta Mathematica 17: Proceeding of 12th Mathematical Conference in Nitra, Slovakia 19 June 2014. FNS CPU in Nitra, Nitra, pp. 143–148

Scardamalia, M. (2002). *Collective cognitive responsibility for the advancement of knowledge. Liberal education in a knowledge society*, *97*, 67-98.

Spronken-Smith, R. (2008). Experiencing the process of knowledge creation: The nature and use of inquiry-based learning in higher education. *Journal of Geography in Higher Education*, *2*, pp. 183–201.

Washington State University Center for Teaching, Learning, & Technology (2006) "Guide to Rating Critical & Integrative Thinking,"

Wimbarti, S. (2012). Mutu Pendidikan Matematika di Indonesia Masih Rendah. *Makalah pada Seminar Memahami Potensi Anak Berkesukaran Belajar dalam Tinjauan Neurologis dan Psikologi.* Yogyakarta: Fakultas Psikologi UGM.

Wyatt, S. (2005). *Extending inquiry-based learning to include original experimentation. The Journal of General Education*, *54*(2), 83-89.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΜΙΚΡΩΝ ΠΑΙΔΙΩΝ ΒΑΣΙΣΜΕΝΕΣ ΣΤΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ: ΣΧΕΔΙΑΣΤΙΚΟΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Σκουμπουρδή Χρυσάνθη

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

kara@aegean.gr

Για την υιοθέτηση της μάθησης μέσω διερεύνησης[1] στη μαθηματική εκπαίδευση απαραίτητη κρίνεται η εξοικείωση των εκπαιδευτικών με τα βασικά χαρακτηριστικά και τις ιδιαιτερότητές της. Σε αυτό το πλαίσιο, στη συγκεκριμένη εργασία έγινε η υπόθεση ότι η συμμετοχή των φοιτητών[2] σε μάθημα αναπτυγμένο με βάση τα στάδια του πλαισίου FIBA[3] και η εμπλοκή τους στον σχεδιασμό και την υλοποίηση δραστηριοτήτων για τα μαθηματικά θα τους προβλημάτιζε και θα τους ωθούσε να εξερευνήσουν την προσέγγιση της διερεύνησης. Από τα αποτελέσματα φάνηκε ότι οι φοιτητές εξοικειώθηκαν με τα χαρακτηριστικά της προσέγγισης, μέσω του πλαισίου, εντοπίζοντας τα χαρακτηριστικά της, αλλά δεν την υιοθέτησαν, όλοι, στον ίδιο βαθμό.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Από τις κύριες προσδοκίες της καινοτομίας στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι η μάθηση των μαθηματικών μέσω διερεύνησης. Η συγκεκριμένη προσέγγιση δίνει έμφαση στην επικοινωνία των ιδεών και στην αιτιολόγηση των συλλογισμών των μαθητών, με τρόπο που να γίνεται κατανοητός τόσο από τους άλλους μαθητές όσο και από τον εκπαιδευτικό (Eckhoff, 2017). Τα βασικά χαρακτηριστικά της μάθησης μέσω διερεύνησης είναι η εργασία σε ομάδες με επικέντρωση στη διατύπωση και απάντηση ερωτημάτων και εικασιών, η διδασκαλία μέσω επίλυσης προβλημάτων, καθώς και η καλλιέργεια διερευνητικών πρακτικών (Artigue & Baptist, 2012; Calder, 2015).

Τα ερευνητικά αποτελέσματα για τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών μέσω διερεύνησης, παρόλο που είναι περιορισμένα, προβληματίζουν και προκαλούν για περαιτέρω έρευνα. Ενώ, δηλαδή, οι έρευνες αναδεικνύουν τη δυσκολία υιοθέτησης της μεθόδου, τονίζουν παράλληλα τα κοινωνικά και γνωστικά οφέλη της προσέγγισης. Αυτό φάνηκε από τις αντιδράσεις των συμμετεχόντων σε μία κοινότητα διερεύνησης οι οποίοι παρόλο που ήταν επιφυλακτικοί με την προσέγγιση και δεν μπόρεσαν να την υιοθετήσουν άμεσα αλλάζοντας την παιδαγωγική τους, άρχισαν να την εξερευνούν, να διερωτώνται, να θέτουν ερωτήματα και να προσπαθούν να φτάσουν σε απαντήσεις μέσα από τη συνεργασία (Wells, 1999). Παρόμοια ήταν τα αποτελέσματα ερευνητικού προγράμματος εκπαίδευσης εκπαιδευτικών στο οποίο διερευνήθηκε η επιρροή διαμορφωμένου, με βάση την προσέγγιση της διερεύνησης, υλικού, στις πεποιθήσεις και πρακτικές των εκπαιδευτικών. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι ενώ οι εκπαιδευτικοί ενθάρρυναν τη συνεργασία στην τάξη και χρησιμοποίησαν λιγότερο δομημένα θέματα και σχέδια μαθήματος, τα οποία προσάρμοζαν στις ανάγκες των μαθητών, δυσκολεύτηκαν να υιοθετήσουν τις πρακτικές της μάθησης μέσω διερεύνησης (Swan, Pead, Doorman & Mooldijk, 2013). Από την άλλη, σε έρευνα στην οποία αναλύθηκαν οι πρακτικές ενός εκπαιδευτικού μετά την παρακολούθηση προγράμματος που βασιζόταν στη διερεύνηση και είχε συγκεκριμένη φιλοσοφία, δομή και δραστηριότητες, φάνηκε ότι παρόλο που ο συγκεκριμένος εκπαιδευτικός όταν εισήχθη στο πρόγραμμα είχε πολύ περιορισμένη γνώση του αντικειμένου μπόρεσε μετά από αυτό να εφαρμόσει πρακτικές που βασίζονται στη διερεύνηση (Towers, 2010). Επίσης, σε ερευνητικό πρόγραμμα στο οποίο συνεργάστηκαν εκπαιδευτικοί και ερευνητές για να σχεδιάσουν δραστηριότητες, για τη διδασκαλία των μαθηματικών, βασισμένων στη διερεύνηση, φάνηκε ότι παρόλο που η διαδικασία προκάλεσε αβεβαιότητα και εντάσεις μεταξύ των εμπλεκόμενων αναδείχθηκε η αξία της μεθόδου για τη μάθηση και για τις γνώσεις που απέκτησαν οι εκπαιδευτικοί (Goodchild, Fuglestad & Jaworski, 2013). Κοινή συνισταμένη των παραπάνω ερευνητικών αποτελεσμάτων είναι η ανάγκη εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών για τη νέα αυτή προσέγγιση.

Στη συγκεκριμένη εργασία, σε μία προσπάθεια εκπαίδευσης υποψήφιων εκπαιδευτικών για τα χαρακτηριστικά της προσέγγισης χρησιμοποιήθηκε ένα πλαίσιο, το FIBA, με το οποίο μπορεί να σχεδιαστούν και να πραγματοποιηθούν δραστηριότητες βασισμένες στη διερεύνηση. Έγινε η υπόθεση ότι η συμμετοχή των φοιτητών σε εξαμηνιαίο μάθημα αναπτυγμένο με βάση το πλαίσιο FIBA και η εμπλοκή τους στον σχεδιασμό και την υλοποίηση δραστηριοτήτων, με βάση το πλαίσιο αυτό, για τα μαθηματικά του νηπιαγωγείου θα τους ωθούσε να εξερευνήσουν την προσέγγιση της διερεύνησης. Τέθηκαν δύο ερευνητικά ερωτήματα: α) Με ποιον τρόπο η εμπλοκή των φοιτητών στη διαδικασία του μαθήματος τους οδήγησε στην εξερεύνηση της προσέγγισης και στον εντοπισμό των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών της; β) Σε ποια στάδια του πλαισίου βασίστηκε ο σχεδιασμός και η πραγματοποίηση των δραστηριοτήτων των φοιτητών;

Πλαίσιο FIBA

Το πλαίσιο FIBA αφορά σε ένα πλαίσιο σχεδιασμού, ανάπτυξης και διαχείρισης δραστηριοτήτων βασισμένων στη διερεύνηση, το οποίο διαμορφώθηκε με βάση τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της μάθησης και διδασκαλίας μέσω διερεύνησης με σκοπό να βοηθήσει τους εκπαιδευτικούς στον διδακτικό τους σχεδιασμό (Skoumpourdi, 2017). Προέκυψε αφενός από την προσδοκία υιοθέτησης της καινοτομίας της μαθηματικής εκπαίδευσης για μάθηση μέσω διερεύνησης και αφετέρου από την ανάγκη των εκπαιδευτικών για πιο ενδιαφέρουσες και δημιουργικές δραστηριότητες για τα μαθηματικά οι οποίες να ενθαρρύνουν τη συμμετοχή και τη μάθηση.

Το πλαίσιο FIBA αποτελείται από επτά στάδια: 1. *Θέμα/προβληματισμός*: τίθεται ο προβληματισμός μέσω σεναρίου. 2. *Εξερεύνηση*: εξερευνούν οι μαθητές το πρόβλημα και σκέφτονται πώς θα το λύσουν, θέτοντας διευκρινιστικά ερωτήματα, ανταλλάσσοντας μεταξύ τους απόψεις για να καταλήξουν στο πώς θα εργαστούν/συλλογιστούν για να προσεγγίσουν τη/τις λύση/λύσεις. 3. *Παρουσίαση*: παρουσιάζονται οι λύσεις και αναλύονται οι συλλογισμοί, μέσω επιχειρηματολογίας. 4. *Σύνθεση/σύνδεση*: συνοψίζονται τα αποτελέσματα των παρουσιάσεων και τίθενται ερωτήματα προκειμένου να συνδεθούν οι παρουσιάσεις μεταξύ τους, με τον προβληματισμό, καθώς και με τον μαθηματικό σκοπό, ώστε να καταλήξει η τάξη σε ένα συμπέρασμα. 5. *Γενίκευση/Μαθηματικοποίηση*: Γενικεύονται ή/και μαθηματικοποιούνται οι δράσεις, διαμορφώνοντας τη μαθηματική ιδέα και συνδέοντάς την με την πρότερη γνώση. 6. *Μετάφραση*: Μεταφράζεται ο συλλογισμός σε άλλα μέσα. 7. *Επέκταση*: Τίθενται νέοι προβληματισμοί επεκτείνοντας τον αρχικό προβληματισμό.

Η ιδιαιτερότητα του πλαισίου έγκειται στο ότι συνυφαίνονται στοιχεία σχεδιασμού, ανάπτυξης και διαχείρισης μίας δραστηριότητας. Με άλλα λόγια, για να σχεδιαστεί μία δραστηριότητα, βάση του συγκεκριμένου πλαισίου, πρέπει να ληφθούν παράλληλα υπόψη και τα στάδια πραγματοποίησής της. Προτρέπει τα θέματα των δραστηριοτήτων να πηγάζουν από, σχετικά ανοικτές προς διερεύνηση, καταστάσεις προβληματισμού οι οποίες επιτρέπουν ποικίλα ερωτήματα, εικασίες, συλλογισμούς και αιτιολογήσεις. Προτείνονται ασυνήθιστα προβλήματα στα οποία δεν δίνεται κάποια στρατηγική για τη λύση τους, αλλά και η λύση δεν είναι προφανής. Χρησιμοποιούνται υλικά και άλλα μέσα συναφή με το πλαίσιο του προβλήματος, αλλά και με τα ενδιαφέροντα και τις ανάγκες των μαθητών τα οποία θα τους βοηθήσουν να διερευνήσουν την κατάσταση, να βρουν απαντήσεις στις ερωτήσεις που τίθενται, αλλά και να θέσουν δικές τους. Μέσω του πλαισίου μπορούν να σχεδιαστούν και να υλοποιηθούν δραστηριότητες οι οποίες παρέχουν στους μαθητές ευκαιρίες εμπλοκής τόσο στο μαθηματικό περιεχόμενο όσο και στις επιστημονικές πρακτικές της διερεύνησης.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε ήταν η έρευνα που βασίζεται στον σχεδιασμό (design-based research), ως η μεθοδολογία που σκοπό έχει να αναπτύξει θεωρίες για τη μάθηση, καθώς και για τα μέσα που σχεδιάζονται για να υποστηρίξουν τη μάθηση (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003). Η παρεμβατική φύση της μεθόδου, η οποία επιτρέπει αλλαγές και αναθεωρήσεις, πριν την ολοκλήρωση της δοκιμής, δίνει τη δυνατότητα της ταυτόχρονης ανάπτυξης και δοκιμής της προσέγγισης της διερεύνησης για τη μάθηση των μαθηματικών, μέσα σε ένα καινοτόμο μαθησιακό περιβάλλον, δίνοντας εικόνα για το αν, πώς και υπό ποιες συνθήκες μπορεί να λειτουργήσει αυτή η προσέγγιση.

Τα δεδομένα της έρευνας προήλθαν από τριάντα (30) δευτεροετείς φοιτητές του Τ.Ε.Π.Α.Ε.Σ. οι οποίοι συμμετείχαν σε εξαμηνιαίο ‘μάθημα έρευνας’. Οι φοιτητές του δεύτερου έτους έχουν ολοκληρώσει δύο μαθήματα για τα μαθηματικά και είναι εξοικειωμένοι με τις μαθηματικές έννοιες που διδάσκονται στο νηπιαγωγείο. Επιπλέον είναι ικανοί να σχεδιάζουν μαθηματικές δραστηριότητες με βάση συγκεκριμένους μαθησιακούς στόχους.

Ο σκοπός του ‘μαθήματος έρευνας’ ήταν διπλός, αφενός η εμβάθυνση στη γνώση μαθηματικών εννοιών της επιλογής των φοιτητών και αφετέρου η εξοικείωση των φοιτητών με την προσέγγιση της διερεύνησης ώστε να ενθαρρυνθούν να τη χρησιμοποιήσουν για να σχεδιάσουν δραστηριότητες για τις επιλεγμένες έννοιες. Για την επίτευξη του σκοπού αυτού χρησιμοποιήθηκε το πλαίσιο FIBA τόσο για τον σχεδιασμό και τη διεξαγωγή του μαθήματος όσο και για τον σχεδιασμό και την πραγματοποίηση δραστηριοτήτων από τους φοιτητές.

Για τη διαπραγμάτευση των παραπάνω θεμάτων οι φοιτητές χωρίστηκαν, όπως επιθυμούσαν, σε ομάδες. Έτσι, δημιουργήθηκαν έξι ομάδες των 3 έως 6 ατόμων οι οποίες συνεργάστηκαν κατά τη διάρκεια του μαθήματος τόσο για την εμβάθυνση στην έννοια όσο και για τον σχεδιασμό της δραστηριότητας. Η σχεδιασμένη δραστηριότητα κάθε ομάδας πραγματοποιήθηκε στη διάρκεια του μαθήματος με εκπαιδευτικούς τους φοιτητές της ομάδας και μαθητές τους φοιτητές των υπόλοιπων ομάδων.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων πραγματοποιείται σε δύο μέρη, σε αντιστοιχία με τα μέρη του μαθήματος. Στο πρώτο μέρος αναλύεται η εμπλοκή των φοιτητών στη διαδικασία του μαθήματος και στο δεύτερο μέρος παρουσιάζεται ο σχεδιασμός και η πραγματοποίηση των δραστηριοτήτων σε σχέση με τα στάδια του πλαισίου FIBA.

Εμπλοκή στη διαδικασία του μαθήματος

Ο σχεδιασμός, η ανάπτυξη και η διαχείριση του μαθήματος ήταν βασισμένα στα στάδια του πλαισίου FIBA. Η αναζήτηση των αρχικών θεμάτων προς διαπραγμάτευση, ενέπλεξε τους φοιτητές σε συζητήσεις, εικασίες και προβληματισμούς τόσο μέσα στην ίδια την ομάδα όσο και μεταξύ των ομάδων. Μέσα από τη συζήτηση δύο ομάδες επέλεξαν να ασχοληθούν με τα επίπεδα σχήματα, δύο ομάδες με τα επίπεδα και τα στερεά σχήματα και δύο ομάδες με τη μέτρηση μήκους, ως μαθηματικές έννοιες οι οποίες δημιουργούν δυσκολίες τόσο στα νήπια, όσο και στους ίδιους. Η εξερεύνηση των παραπάνω εννοιών ενέπλεξε τη μελέτη, από τις ομάδες των φοιτητών, ποικίλων θεμάτων, για την ολοκληρωμένη προσέγγισή τους ώστε να δημιουργηθεί το υπόβαθρο για τον σχεδιασμό δραστηριοτήτων. Έτσι, μελετήθηκαν και παρουσιάστηκαν, τελικά, από όλες τις ομάδες: οι στόχοι του ΔΕΠΠΣ και του ΠΣΝ, οι ικανότητες, οι δυσκολίες και οι παρανοήσεις των νηπίων για τη συγκεκριμένη έννοια, καθώς και ποικίλες δραστηριότητες από διάφορα έντυπα ή μη μέσα για την κάθε έννοια. Η σύνθεση και σύνδεση των παραπάνω θεμάτων, οδήγησε σε γενικεύσεις ως προς τα χαρακτηριστικά των δραστηριοτήτων.

Κατά τη διαδικασία του μαθήματος, μέσα από τις συζητήσεις και τις παρουσιάσεις των ομάδων έγινε φανερό ότι η ελευθερία που τους δόθηκε, τόσο στην επιλογή των θεμάτων προς διαπραγμάτευση όσο και στον τρόπο διαπραγμάτευσής τους, προβλημάτισε κάποιες ομάδες φοιτητών. Παρατηρήθηκαν τρεις κυρίως συμπεριφορές: 1. ‘Μερική αντίσταση προσαρμογής στη μέθοδο της διερεύνησης’: στην περίπτωση αυτή μία ομάδα φοιτητών (6 άτομα) αμφισβήτησε τη διαδικασία, εξέφρασε τη δυσαρέσκειά της ως προς τον τρόπο διεξαγωγής του μαθήματος και τις αρμοδιότητες που έπρεπε να αναλάβουν, δεν ήθελαν να πάρουν πρωτοβουλίες και αντιδρούσαν στις τυχόν επισημάνσεις που τους γίνονταν. 2. ‘Προσπάθεια προσαρμογής στη μέθοδο της διερεύνησης’: στις περιπτώσεις αυτές τρεις ομάδες (15 άτομα) έκαναν έντονη προσπάθεια να κατανοήσουν τη διαδικασία και να ανταποκριθούν σε αυτήν θέτοντας ποικίλα ερωτήματα ως προς την ελευθερία επιλογής των θεμάτων προς διαπραγμάτευση και την ταυτόχρονη αναζήτηση επιβεβαίωσης των πρωτοβουλιών τους. 3. ‘Προσαρμογή στη μέθοδο της διερεύνησης’: στην περίπτωση αυτή δύο ομάδες φοιτητών (9 άτομα) υιοθέτησαν τη μέθοδο, συνεισφέροντας με τις ερωτήσεις, τις εικασίες και τα σχόλιά τους στον περαιτέρω προβληματισμό, στη λύση προβλημάτων, αλλά και στην πρόοδο των άλλων ομάδων, προτείνοντας λύσεις και ιδέες.

Σχεδιασμός και πραγματοποίηση δραστηριοτήτων

Οι φοιτητές, στο δεύτερο μέρος του μαθήματος, προσπάθησαν να σχεδιάσουν και να πραγματοποιήσουν μία δραστηριότητα με βάση τα επτά στάδια του πλαισίου FIBA. Οι σχεδιασμένες δραστηριότητες ήταν ποικίλες και αφορούσαν στις επιλεγμένες έννοιες (επίπεδα και στερεά γεωμετρικά σχήματα, μέτρηση μήκους), όμως η ανάπτυξή τους στα επτά στάδια του πλαισίου δεν έγινε σε όλες τις περιπτώσεις εφικτή. Οι δύο ομάδες φοιτητών που είχαν προσαρμοστεί στις απαιτήσεις της μεθόδου και την είχαν εξερευνήσει κριτικά εντοπίζοντας τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της, ήταν και αυτές που ανταποκρίθηκαν με επιτυχία. Έθεσαν ερωτήματα και συνεργάστηκαν για την αναζήτηση απαντήσεων στους προβληματισμούς τους, πήραν πρωτοβουλίες, ήταν δημιουργικοί, αιτιολόγησαν τις επιλογές τους, αντιλήφθηκαν την αυτονομία των μαθητών στη μάθηση και την κατανόηση και υιοθέτησαν τις παραπάνω διερευνητικές πρακτικές τόσο στον σχεδιασμό όσο και στην πραγματοποίηση των δραστηριοτήτων τους.

Οι δραστηριότητες των υπόλοιπων ομάδων περιλάμβαναν περιορισμένη διερεύνηση, κατά τον σχεδιασμό, η οποία μειωνόταν ακόμα περισσότερο κατά την υλοποίηση. Δυσκολεύτηκαν να υλοποιήσουν διερευνητικά τις σχεδιασμένες τους δραστηριότητες εφόσον η ανάπτυξη των σταδίων του πλαισίου στην πράξη τους οδήγησε στο να αναλαμβάνουν την ευθύνη της διαχείρισής τους. Συγκεκριμένα, όσον αφορά στο 1^{ο} στάδιο (Θέμα/Προβληματισμός), ενώ όλες οι δραστηριότητες παρουσιάζονταν μέσα από κάποιο σενάριο, δεν υπήρχε σε όλες προβληματισμός. Παρόλο, δηλαδή, που θεωρητικά συζητήθηκε ότι οι δραστηριότητες θα πρέπει να σχεδιαστούν με τέτοιο τρόπο ώστε να ενθαρρύνουν τους μαθητές να αποφασίζουν μόνοι τους πότε και πώς να χρησιμοποιήσουν μία μέθοδο, μία διαδικασία ή μία στρατηγική, στην πράξη αυτό δεν υλοποιήθηκε. Τα σενάρια απαιτούσαν, συνήθως, καθορισμένες μαθηματικές δράσεις (π.χ. «δείχνουμε το σχήμα και καλούνται να το ονομάσουν», «αντιστοιχίζουν σε φύλλο εργασίας τα επίπεδα με τα στερεά σχήματα», «μετρούν την απόσταση με κυβάκια» κ.λπ.), οι οποίες ναι μεν ανταποκρίνονταν στον μαθηματικό στόχο, αλλά δεν προβλημάτιζαν ιδιαίτερα τα παιδιά αφήνοντας τους περιθώρια για την επιλογή της δράσης τους. Οι φοιτητές είχαν την τάση να αντιγράφουν έτοιμες δραστηριότητες προσπαθώντας να προσαρμόσουν τα στάδια του πλαισίου στη δραστηριότητα και όχι τη δραστηριότητα στα στάδια, κάτι το οποίο δεν ήταν αποτελεσματικό.

Μετά από συζητήσεις, εικασίες, επιχειρηματολογία και προτάσεις οι ομάδες προσπάθησαν να δημιουργήσουν πιο έντονο προβληματισμό δίνοντας έναν βαθμό ανοιχτότητας στα σενάριά τους. Η περιγραφή του 2ου (Εξερεύνηση) και 3ου σταδίου (Παρουσίαση) από τους φοιτητές έκανε φανερή την αντίληψή τους για την ομάδα και τον ρόλο της στη διδακτική και μαθησιακή διαδικασία. Ενώ, δηλαδή, ανέφεραν ότι, στα στάδια αυτά, τα παιδιά σε συνεργασία, εξερευνούν το πρόβλημα, σκέφτονται και αποφασίζουν πώς θα το λύσουν και παρουσιάζουν τη λύση στην οποία κατέληξαν, στην υλοποίηση της δραστηριότητάς τους έδωσαν πολύ συγκεκριμένες οδηγίες. Φάνηκε, δηλαδή, από την πραγματοποίηση των δραστηριοτήτων ότι η εργασία σε ομάδες, για τους φοιτητές, είναι η σύνθεση, από εκείνους, των ατομικών εργασιών, των παιδιών, σε μια προσπάθειά τους να έχουν τον συνεχή έλεγχο της διαδικασίας. Δεν άφησαν περιθώριο για εργασία σε ομάδες και ανάπτυξη πρωτοβουλιών εφόσον σε όλη τη διάρκεια της υλοποίησης της δραστηριότητας υπήρχε καθοδήγηση. Καλούσαν έναν-έναν μαθητή/φοιτητή να υλοποιήσει τη δράση και ανέλαβαν οι ίδιοι να παρουσιάσουν τις δημιουργίες χωρίς να ενθαρρύνουν την παρουσίαση του συλλογισμού. Για παράδειγμα, για την κατασκευή από μία ομάδα της επίπεδης χώρας (ή της στερεής από άλλη ομάδα) παροτρύνθηκε ο κάθε μαθητής/φοιτητής χωριστά να δημιουργήσει μία κατασκευή και στη συνέχεια ενοποιήθηκαν και παρουσιάστηκαν οι κατασκευές από τον εκπαιδευτικό/φοιτητή. Λόγω της παραπάνω διαχείρισης το 4ο στάδιο (Σύνθεση/Σύνδεση), της δραστηριότητας, ουσιαστικά δεν γινόταν διακριτό και αυτό γιατί η παρουσίαση και περιγραφή από τους ίδιους των δράσεων των παιδιών συνέθετε και συνέδεε τις παρουσιάσεις. Αυτό είχε να κάνει με δύο κυρίως λόγους. Ο πρώτος αφορούσε στο υλικό. Στις περιπτώσεις αυτές δεν είχε εξασφαλιστεί υλικό για όλες τις ομάδες, οπότε έπρεπε να δουλέψει η μία ομάδα μετά την άλλη με το συγκεκριμένο υλικό και όχι ταυτόχρονα. Ο δεύτερος λόγος αφορούσε στην παιδαγωγική διαχείριση όπου ο εκπαιδευτικός/φοιτητής δεν μπορούσε να διαχειριστεί την εργασία σε ομάδες και κατείχε συνεχώς τον κύριο ρόλο. Γενικά, δινόταν έμφαση στην απάντηση σε συγκεκριμένες ερωτήσεις, χωρίς περαιτέρω αλληλεπίδραση, με μια αγωνία να προχωρήσει η διαδικασία και όχι να γίνει κοινή γνώση η κάθε απάντηση, να συνδεθούν μεταξύ τους οι συλλογισμοί και να προχωρήσουν στη γενίκευση. Έτσι, αντιμετώπισαν ζήτημα στο 5ο στάδιο (Γενίκευση/Μαθηματικοποίηση) εφόσον η γενίκευση ήταν κάτι το οποίο δεν μπορούσαν να προσεγγίσουν. Δυσκολεύτηκαν να αντιληφθούν ότι η γενίκευση ξεκινάει από τη στιγμή που η αιτιολόγηση δεν συνδέεται με το πλαίσιο του προβληματισμού και ότι συνεχίζει όταν συνδυάζονται οι διαφορετικές μαθηματικές ιδέες.

Τέλος, το 6^{ο} (Μετάφραση) και 7^{ο} στάδιο (Επέκταση) περιγράφονταν μόνο θεωρητικά.

Επιπλέον, κατά την προσπάθεια διαχείρισης των δραστηριοτήτων, με βάση τα στάδια του πλαισίου FIBA, έγιναν φανερές γνωστικές ελλείψεις των φοιτητών. Για παράδειγμα, κάποιοι μπέρδευαν τα ονόματα των επίπεδων και στερεών σχημάτων ή προσπαθώντας να περιγράψουν τα στερεά σχήματα ανέφεραν ένα, το πολύ δύο κύρια χαρακτηριστικά τους προσθέτοντας «τι άλλο να πω;». Μία φοιτήτρια για να εξηγήσει τη διαφορά τετραγώνου και κύβου είπε «ο κύβος έχει πιο πολλές πλευρές» και προσπαθώντας να περιγράψει τον κύλινδρο είπε «ο κύλινδρος είναι κύκλος που τον τραβάω προς τα πάνω». Επίσης, σε μία δραστηριότητα κατά την οποία είχαν δημιουργηθεί από τις ομάδες πύργοι που έπρεπε να συγκριθούν μεταξύ τους ως προς το ύψος, παρόλο που οι πύργοι ήταν φτιαγμένοι από κυβάκια ίσου μεγέθους, επιλέχθηκαν άλλα υλικά για να πραγματοποιηθεί η μέτρηση. Δυσκολία παρουσιάστηκε και στη διαχείριση των μη αναμενόμενων απαντήσεων. Για παράδειγμα, σε μία δραστηριότητα εντοπισμού των ορθογωνίων στην οποία οι μαθητές/φοιτητές επισήμαναν και τα τετράγωνα ο εκπαιδευτικός/φοιτητής δεν ήξερε πώς να το διαχειριστεί και σταμάτησε τη διαδικασία λέγοντας «Τώρα τι κάνουμε;».

Αξίζει να σημειωθεί ότι, με δεδομένες τις αλλαγές και τις αναθεωρήσεις που ενθαρρύνονταν κατά τη διαπραγμάτευση της προσέγγισης της διερεύνησης, κατά τη διάρκεια του μαθήματος, φάνηκε, ειδικά όσο ολοκληρωνόταν, ότι οι φοιτητές είχαν πιο ενεργή εμπλοκή στις συζητήσεις και τους προβληματισμούς και άρχισαν να αναγνωρίζουν τα θετικά στοιχεία της όλης διαδικασίας τόσο ως προς τη δική τους εμπλοκή όσο και ως προς τον τρόπο εμπλοκής των μαθητών στην οικοδόμηση της γνώσης. Ανέφεραν ότι οικοδόμησαν γνώση τόσο για το ίδιο το γνωστικό αντικείμενο, μέσα από την πολυπαραγοντική διερεύνηση των εννοιών και την προσπάθεια επιλογής και σχεδιασμού δραστηριοτήτων, όσο και για την παιδαγωγική διαχείριση των δραστηριοτήτων όπου τον κύριο ρόλο της διαδικασίας του μαθήματος κατέχουν οι ομάδες, οι ερωτήσεις και η αλληλεπίδραση. Αναγνώρισαν ότι αυτό προέκυψε από τον ιδιαίτερο τρόπο που έγινε το μάθημα, την ευθύνη που ανέλαβαν, τον βαθμό συμμετοχής τους σε αυτό και γενικά τον ρόλο τους στη διεξαγωγή του. Ταυτόχρονα αναγνώρισαν και ανέδειξαν τη δυσκολία σχεδιασμού και πραγματοποίησης δραστηριοτήτων που στηρίζουν τη διερευνητική μάθηση χαρακτηρίζοντας την όλη διαδικασία απαιτητική ως προς τις γνώσεις και τον χρόνο που απαιτεί και την αβεβαιότητα και ανασφάλεια που προκαλεί, αλλά ταυτόχρονα αποτελεσματική και ενδιαφέρουσα.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η χρήση του πλαισίου σχεδιασμού, ανάπτυξης και διαχείρισης δραστηριοτήτων βασισμένων στη διερεύνηση (FIBA) τόσο για τη διεξαγωγή του μαθήματος όσο και για τη δημιουργία δραστηριοτήτων φάνηκε να εξοικειώνει τους υποψήφιους εκπαιδευτικούς με τα χαρακτηριστικά της προσέγγισης. Βέβαια, δεν υιοθετήθηκε στον ίδιο βαθμό από όλους τους φοιτητές, οι οποίοι, τουλάχιστον αρχικά, επέδειξαν διαφορετικά επίπεδα προσαρμογής στο πλαίσιο. Οι φοιτητές ενώ φάνηκε να εμπλέκονται ενεργά με το πλαίσιο κατά τη διεξαγωγή του μαθήματος, αναγνωρίζοντας, τελικά, τη λειτουργία των επιμέρους σταδίων του πλαισίου, δυσκολεύτηκαν κατά την εφαρμογή του για τη δημιουργία δραστηριοτήτων, διατυπώνοντας προβληματισμούς και ερωτήματα. Αυτό μπορεί να οφείλεται σε πολλούς παράγοντες μεταξύ των οποίων οι προσωπικές οπτικές και εμπειρίες τους, οι οποίες αντιστέκονται στην καινοτομία και ενθαρρύνουν τη μετάδοση της γνώσης για βαθιά κατανόηση, η έλλειψη γνώσης περιεχομένου και παιδαγωγικής γνώσης, αλλά και αυτοπεποίθησης που απαιτεί η καινοτομία, η μη επαρκής υποστήριξη μέσω σχετικών μαθημάτων, η έλλειψη διδακτικής εμπειρίας, αλλά και το ότι δεν είχαν πραγματικούς μαθητές, αλλά συμφοιτητές τους.

Η μάθηση μέσω διερεύνησης, παρόλο που είναι μια πολύπλοκη προσέγγιση και ο σχεδιασμός δραστηριοτήτων για την υποστήριξή της απαιτεί χρόνο, προσπάθεια και βαθιά γνώση του γνωστικού αντικειμένου, όπως φάνηκε από τα αποτελέσματα της έρευνας και έχει καταγραφεί και στα αποτελέσματα άλλων ερευνών, ίσως να αξίζει να υιοθετηθεί από τη μαθηματική εκπαίδευση, εφόσον τα πλεονεκτήματά της θεωρείται ότι υπερτερούν των δυσκολιών της, ετοιμάζοντας τους πολίτες του μέλλοντος. Απαραίτητη, όμως, είναι η εξοικείωση των εκπαιδευτικών με τα χαρακτηριστικά της μάθησης μέσω διερεύνησης ώστε να μπορέσουν να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις μιας τέτοιας μεθόδου και αυτό μπορεί να γίνει μέσω του πλαισίου FIBA.

Επομένως, περαιτέρω έρευνες είναι απαραίτητες για τη διερεύνηση του ρόλου του πλαισίου FIBA ως εργαλείου τόσο για τον σχεδιασμό επιμορφωτικών προγραμμάτων εκπαίδευσης εκπαιδευτικών που να υποστηρίζουν τη μάθηση μέσω διερεύνησης όσο και για την ανάπτυξη διερευνητικών δραστηριοτήτων σε τάξεις μαθηματικών.

Σημειώσεις

1. Με την έκφραση ‘μάθηση μέσω διερεύνησης’ αποδίδεται ο όρος inquiry-based learning (ή enquiry-based learning). Ο όρος έχει αποδοθεί και ως ‘μάθηση βασισμένη στη διερώτηση’.
2. FIBA: Framework for designing and implementing Inquiry Based Activities (Skoumpourdi, 2017)
3. Με τον γενικό όρο ‘φοιτητές’ εννοούμε τους φοιτητές και τις φοιτήτριες. Ανάλογα χρησιμοποιείται και ο όρος εκπαιδευτικός και μαθητής.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Artigue, M., & Baptist, P. (2012). *Inquiry in mathematics education* (Resources for implementing inquiry in science and in mathematics at school). Retrieved from http://www.fibonacci-project.eu/

Calder, N. (2015). Student wonderings: scaffolding student and understanding within student-centered inquiry learning. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 47*(7), 1121-1131.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9–13.

Eckhoff, A. (2017). Partners in inquiry: A collaborative life science investigation with preservice teachers and kindergarten students. *Early Childhood Education Journal*, *45*(2), 219-227.

Goodchild, S., Fuglestad, A.-B., & Jaworski, B. (2013). Critical alignment in inquiry-based practice in developing mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics, 84*(2), 393-412.

Skoumpourdi, C. (2017, in press). A framework for designing inquiry based activities (FIBA) for early childhood mathematics. In T. Dooley, & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the 10th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 10, February 1 – 5, 2017). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Swan, M., Pead, D., Doorman, M., & Mooldijk, A. (2013). Designing and using professional development resources for inquiry-based learning. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 45*(7), 945-957.

Towers, J. (2010). Learning to teach mathematics through inquiry: a focus on the relationship between describing and enacting inquiry-oriented teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(3), 243-263.

Wells, G. (1999). *Dialogic inquiry: Towards a sociocultural practice and theory of education*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Η ΑΠΟΒΛΕΠΤΙΚΟΤΗΤΑ ΩΣ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΣΤΗΝ ΕΡΕΥΝΑ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σπύρου Παναγιώτης

Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

pspirou@math.uoa.gr

Ο όρος intentionality χρησιμοποιείται στην φαινομενολογία και όχι μόνο, έχει πολύ λίγο αξιοποιηθεί στη Διδακτική των Μαθηματικών, παρά τις δυνατότητες περιγραφής που προσφέρει. Η intentionality έχει μεγάλο πλούτο δυνατοτήτων τόσο για ποιοτικές γνωστικές αναλύσεις όσο και για σημασιολογικές. Επικεντρώνεται κυρίως στην εποπτεία και στις εσωτερικές επεξεργασίες και ακόμη περισσότερο δίνει σε μεγαλύτερο βάθος τους όρους που καθορίζουν επικοινωνία και κατανόηση. Η κατανόηση γίνεται κάτι το οποίο δεν περιορίζεται από τη μέτρηση και μπορεί να επεκταθεί στα κίνητρα και τις προθέσεις των υποκειμένων που συμμετέχουν σε μια γνωστική διαδικασία.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τον όρο intentionality, στα ελληνικά τον βρίσκουμε μεταφρασμένο ως προθετικότητα ή προθεσιακότητα (Edelman 1996), άλλοτε αναφορικότητα και το δόκιμο αποβλεπτικότητα (από τους μεταφραστές, φιλόσοφους Πλατής, Σκουτερόπουλος, Κιτσόπουλος, Κόντος, Ξηροπαΐδης). Με την απόδοση του όρου ως προθετικότητα υποδηλώνεται πως όλα τα αποβλεπτικά, συνειδησιακά φαινόμενα ενέχουν το στοιχείο της πρόθεσης (Ξηροπαΐδης, 1996, σελ. 79) κάτι που δεν συμβαίνει πάντα. Ο όρος προέρχεται από την φαινομενολογία και οι ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών τον χρησιμοποιούν σπάνια και ίσως όχι εύστοχα, παρά τις δυνατότητες περιγραφής που προσφέρει, όπως μπορεί να κάνει και η φαινομενολογία γενικά (Moutsios-Rentzos, Spyrou & Peteinara, 2014, Zagorianakos, 2016). Ο όρος ξεκινά με τον φιλόσοφο και ψυχολόγο Brentano στην Βιέννη, μαθητής του οποίου υπήρξε ο ιδρυτής της φαινομενολογίας Edmund Husserl, αλλά και ο ιδρυτής της ψυχανάλυσης Sigmund Freud (Audi, 2011, σελ. 756). Ο Brentano αναφέρει

“Κάθε ψυχικό φαινόμενο χαρακτηρίζει ό,τι οι Σχολαστικοί του Μεσαίωνα ονόμασαν αποβλεπτική (αλλά και νοητική) *ενύπαρξη* ενός αντικειμένου και που εμείς, μολονότι όχι με εντελώς μονοσήμαντες εκφράσεις, θα ονομάζαμε αναφορά σ'ένα περιεχόμενο, κατεύθυνση προς ένα αντικείμενο (χωρίς με τούτο να εννοείται εδώ μια εμπειρική πραγματικότητα) ή προς την *ενύπαρκτη αντικειμενικότητα*. Όλα τα ψυχικά φαινόμενα περιέχουν εντός τους κάτι ως αντικειμενικό, μολονότι όχι όλα με όμοιο τρόπο" (Ξηροπαΐδης, 1996, σελ 79).

Η αποβλεπτικότητα εμφανίζεται ως «η μελέτη της ανθρώπινης εμπειρίας και του τρόπου με τον οποίο μας παρουσιάζονται τα πράγματα μέσα σε αυτή την εμπειρία και δια μέσου αυτής της εμπειρίας» (Sokolowski, 2003, σελ. xiv) και χωρίς να καταφεύγει σε ένα εμπειρισμό, καθώς ο Husserl προσπάθησε να απαντήσει στο ερώτημα πώς η εσωτερική εμπειρία συνδέεται με τις ιδεατές άχρονες έννοιες (Husserl, 1986, σελ 17), πώς μπορεί η συνείδηση να στραφεί σε κάτι που την υπερβαίνει και το αδράχνει, (Ströker, 1994, σελ 41).

Η αποβλεπτικότητα εφαρμόζεται στην θεωρία της γνώσης (Sokolowski, 2003, σελ. 1). Το «αποβλέπειν» σημαίνει τη συνειδησιακή σχέση που έχουμε με ένα αντικείμενο (Sokolowski, 2003, σελ. 2). Αυτό εξασφαλίζει ότι το αποβλεπτικό ενέργημα, ως νοητικό ενέργημα ενώ λαμβάνει χώρα μέσα στο νου αναφέρεται σε ένα αντικείμενο του εξωτερικού κόσμου. Η συνείδηση είναι πάντα συνείδηση για κάτι, όπως αναφέρεται ως κοινός τόπος (Ströker, 1994, σελ 32, Husserl 1986, σελ. 124) και δεν είναι έγκλειστη στο δικό της δωμάτιο αλλά κατέχεται από την διυποκειμενικότητα η οποία είναι προϋπόθεση για την αντικειμενικότητα. Μια παρόμοια έκφραση χρησιμοποιεί ο Raymond Duval, στην *σημειωτική θεωρία αναπαραστάσεων*, με επίγνωση των φαινομενολογικών συνδηλώσεων (συζήτηση μαζί του), καθώς για αυτόν «η συνείδηση είναι πάντα στραμμένη σε μια αναπαράσταση για κάτι». Η αποβλεπτικότητα και η τέτοια απόδοση ερμηνείας του όρου συνδέεται με την σημασία, (Ξηροπαΐδης, 1994, 1996) αλλά είναι ένα πεδίο που δεν θα θίξουμε άμεσα σε αυτή την ελλειπτική εισαγωγή.

ΠΙΑΖΕΤΙΑΝΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Αν αναζητήσουμε στην Διδακτική των Μαθηματικών να βρούμε παραπλήσιες έννοιες, θα ανατρέξουμε στις μεταπιαζετιανές ιδέες που επικαλούνται στην σύνοψη τους οι Tall, Thomas, Davis, Gray και, Simpson (2000). Σε αυτές τις θεωρίες, αντιλαμβάνονται μια μαθηματική ιδέα ως ενθυλάκωση μιας δράσης σε μια έννοια, όπως ένα ρήμα συνδέεται με ένα ουσιαστικό, με μια αναφορά σε ένα αρχικό όρο του Piaget της θεματοποίησης. Είναι μάλλον κοινοτοπία να πούμε ότι οι έννοιες επικοινωνούνται επειδή ο νους των επιμέρους υποκειμένων που τις ανταλλάσουν τις θεματοποιεί, επικεντρώνεται σε αυτές διαχωρίζοντας τες από τον αισθητηριακό χυλό. Τον όρο θεματοποίηση αξιοποιούν στην συζήτηση για την αποβλεπτικότητα (Ξηροπαΐδης, 1996, σελ. 85, Ströker, 1994, σελ 35). Στις συγκεκριμένες ιδέες, που περιγράφουν οι μεταπιαζετιανοί ερευνητές για την συγκρότηση γνωστικών αντικειμένων, κυριαρχεί μια περιορισμένη περιγραφή δράσης δομικού αλλά συγχρόνως καντιανού χαρακτήρα, ως εάν ένα αντικείμενο να προσδιορίζεται από ένα μοναδικό συγκεκριμένο ενέργημα, διαδικασία (process), όπως το ονομάζουν οι Gray & Tall (2001). Έστω και αν το επιμερίζουν σε επί μέρους διαδικασίες (procedures). Π.χ. ο αριθμός 5 κατανοείται από δράσεις του 3+2 ή 2+3 ή 1+4 κλπ, όλα μαζί συγκροτούν την εν λόγω διαδικασία. Αυτή η διαδικασία, εμφανίζεται πανομοιότυπη σε όλους σε αντίθεση από το εξατομικευμένο των συχνά απεριόριστης πολλαπλότητας επιμέρους αποβλεπτικών ενεργημάτων που είναι στραμμένα προς το αντικείμενο, όπως θεωρεί η φαινομενολογία (Ströker, 1994, σελ 37, Ξηροπαΐδης, 1994, σελ 14).

> «Όταν βλέπουμε ένα αντικείμενο βιώνουμε μια δέσμη από αισθήματα που αντιστοιχούν στις ιδιότητες του… τα αισθήματα αυτά αποτελούν κάτι σαν φορέα του αποβλεπτικού ενεργήματος, … ως αναπαραστατικά περιεχόμενα διαμέσου των οποίων αντιλαμβανόμαστε το αντικείμενο… όταν συμβεί αυτό, σχηματίζεται στη συνείδηση η *εμφάνιση* του αντικειμένου… με μια έννοια διαφορετική από την καντιανή, αφού δεν λογίζεται ως πραγματικός καθορισμός του αντικειμένου αλλά ως κάτι που η συνείδηση απλώς βιώνει» (Husserl, 1986, σελ 34).

Το αντικείμενο, λαμβανόμενο με τους τρόπους αναφοράς του, δεν είναι ποτέ το καθαυτό αντικείμενο (Ströker, 1994, σελ 37). «Η *ταυτότητα* του αντικειμένου νοείται με βάση την αντίθεσή της προς την *πολλαπλότητα ενεργημάτων* σε αντίθεση με το αντικείμενο» (στο ίδιο). Έτσι, μιλάμε για τη «διερεύνηση της αποβλεπτικότητας στις δομικές συνάφειες των ενεργημάτων κι όχι σε μεμονωμένες σχέσεις ενεργήματος – αντικειμένου», (στο ίδιο σελ 33). Το αντικείμενο συγκροτείται ως υπερβατολογικό (transcendental): τεχνικός όρος της φιλοσοφίας που χρησιμοποιείται από τον Καντ, τον Πιαζέ, τον Husserl, ως αυτό που υπερβαίνει την εμπειρία μας, με την έννοια ότι παρέχει το θεμέλιο ή τη δομή της εμπειρίας. Ο Καντ δέχεται για παράδειγμα, ότι οι καθαρές μορφές *εποπτείας* (χώρος, χρόνος) και οι καθαρές έννοιες της διάνοιας (κατηγορίες, όπως ουσία, αιτία) είναι υπερβατολογικές. Μορφές και έννοιες αυτού του τύπου συνιστούν συνθήκες δυνατότητας της εμπειρίας, (Audi, 2011, σελ. 1174) και εμμενές (σταθερό) που το απογυμνώνει ως τέτοιο και το φανερώνει ακριβώς στην ενέργειά του η φαινομενολογική αναγωγή (Ströker, 1994, σελ 33), (μια διαδικασία που εν συντομία αναλύει το αντικείμενο σε ειδητικές κατηγορίες). Τα αποβλεπτικά ενεργήματα και η αναφορά τους καθίστανται συνθήκες μόνο αναγκαίες.

Εξάλλου, ένα αντικείμενο και ιδιαίτερα μαθηματικό δεν προσδιορίζεται τόσο απλά, όπως και δεν αποδίδεται από μια μοναδική αναπαράσταση του. Σκεφτείτε, τις αναπαραστάσεις με τις οποίες μπορούμε να αποδώσουμε ένα κύκλο στην Αναλυτική Γεωμετρία. Ως γεωμετρικό τόπο των σημείων που ισαπέχουν ενός κέντρου, με μια εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ και προφανώς με το γράψιμο ενός γεωμετρικού κύκλου στο επίπεδο. Το αντικείμενο κύκλος βρίσκεται πίσω από τις εκάστοτε αναπαραστάσεις του. «Διακρίνουμε το αντικείμενο *το οποίο* μας δίνεται από το αντικείμενο *έτσι όπως* μας δίνεται…. Αποβλεπτικό αντικείμενο είναι τμήμα ή όψη του αντικειμένου που βαστάζεται από το ενέργημα» (Husserl, 1986, σελ. 35).

Τα αντικείμενα δεν προσεγγίζονται ταυτόσημα από όλους. «Όταν έχουμε την ίδια παράσταση με κάποιον άλλο, αυτό δεν σημαίνει, ταυτότητα των ενεργημάτων σαν να είναι η δική μου συνείδηση… σύμφυτη με τη συνείδηση ενός άλλου … πανομοιότυπο αντίγραφο του άλλου» (Husserl 1986, σελ 37, Ξηροπαΐδης, 1994, σελ 11).

ΑΠΟΒΛΕΠΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΚΡΙΤΙΚΟ ΡΕΥΜΑ

Ο ρόλος της Γνωστικής Ψυχολογίας και η αξιοποίηση της στη Διδακτική των Μαθηματικών με την καντιανή αλλά και μετρητική επιστημολογία της, έχει επικριθεί μέσα από το κριτικό ρεύμα με το επιχείρημα ότι κατευθύνθηκε στο να καταστήσει το παιδί διαχειρίσιμο μέσω της μαθηματικής εκπαίδευσης, με την υποβάθμιση του από παιδί με πλήρη κοινωνική υπόσταση σε *γνωστικό υποκείμενο,* που η σχέση του με τα μαθηματικά περιορίζεται στην ανάπτυξη της διαδικαστικής μαθηματικής σκέψης, φαινόμενο που η Valero (2004, σελ. 8) με ένα υπερβολικό όρο το ονομάζει "schizomathematicslearner".

Για να καταλάβουμε την διδακτική σημασία αυτής της επιστημολογικής διαφοροποίησης, ας δούμε τον όρο αποβλεπτικότητα στον Skovsmose (1994). Εκεί, συναντούμε την βαθύτερη αναζήτηση της ιδέας ώστε να φανεί η γειτονία της αποβλεπτικότητας με πιο έντονα τα ψυχολογικά χαρακτηριστικά ως προθετικότητας, δηλαδή συγχρόνως την προδιάθεση (pre-intention ή dispositions, σελ 179 κά) και την ελευθερία του μαθητή. Αναφέρει ότι η νοητική δράση ενός υποκειμένου προϋποθέτει ένα βαθμό ελευθερίας και μη καθορισμού. Είναι δηλαδή, η πλήρωση μιας πρόθεσης και κατεύθυνσης προς ένα αντικείμενο, μια δράση, μια προοπτική, έναν *ορίζοντα* θα έλεγα με έναν χουσσερλιανό όρο. Το υποκείμενο υπάρχει μέσα σε μια κοινωνία κι έχει ιστορία. Η διάθεση του αποκαλύπτεται μέσα στη δράση, θέση που αναδεικνύει τη σημασία της δράσης και θυμίζει υπαρξισμό. Στο σημείο αυτό, να θυμίσω την επισήμανση του Vygotsky (1997, σελ 168) που μιλά για συγκινησιακούς παράγοντες που επεμβαίνουν στην μάθηση, για «τις ιδέες που έχουν γίνει επιθυμία, την έννοια που μετατρέπεται σε πάθος». Οι διαθέσεις και οι αποβλέψεις (στα γραφόμενα του Skovsmose) δεν προσφέρονται σε μια μηχανική βιολογική ανάλυση. Στις αναλυτικές απόψεις του, ο Skovsmose σε όλο το Κεφάλαιο 10 με τίτλο Αποβλεπτικότητα, τονίζει την μεγάλη σημασία του όρου μέσα στην πολλά υποσχόμενη διάδραση της τάξης.

ΑΠΟΒΛΕΠΤΙΚΟΤΗΤΑ ΣΕ ΑΛΛΑ ΠΛΑΙΣΙΑ

Αυτή η επισήμανση της σημασίας της αποβλεπτικότητας, ως βασικό εργαλείο κατανόησης της επικοινωνίας αλλά και της μη μηχανικής γνώσης των ανθρώπων έρχεται να υποστηριχθεί και από άλλους όπως στην νατουραλιστική φαινομενολογία στη νευροφιλοσοφία του νομπελίστα Gerald Edelman, (2005) αλλά και του πραγματιστή φιλόσοφου της σχολής της Φρανκφούρτης Jurgen Habermas (1990).

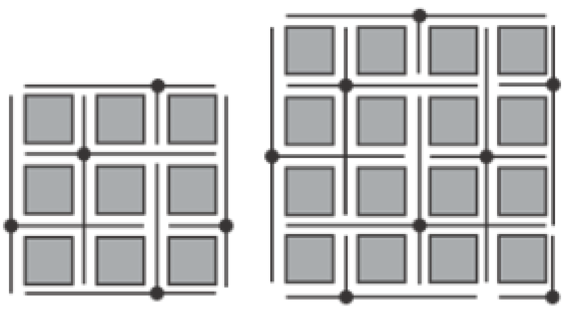
Ο Edelman έχει συγκροτήσει μια πολύ ενδιαφέρουσα θεωρία για την συνείδηση αξιοποιώντας τις πληροφορίες που έχουμε για το νευρικό σύστημα και το DNA το τελευταίο τέταρτο του 20ου αιώνα και με δυο φιλοσοφικές αφετηρίες, εκείνη του Δαρβίνου για την εξέλιξη των ειδών και την άλλη του Freud για την μεγάλη σημασία του υποσυνείδητου και της επιθυμίας. Εκεί, πλέον η αποβλεπτικότητα, ως επένδυση προσοχής στη μη ντετερμινιστική ανάδειξη της, γίνεται αποφασιστική. Ο εγκέφαλος είναι ένα από τα ελάχιστα συστήματα στο Σύμπαν που έχει τη δυνατότητα να αυτοοργανώνεται (Edelman, 2003, σελ. 61). Η πλούσια θεωρία του στηριζόμενη στους εγκεφαλικούς χάρτες και τις δυνατότητες συνάψεων (μιλάμε για 10^{11} εγκεφαλικά κύτταρα με 10^{15} δυνατές συνδέσεις) προσφέρει ένα περιβάλλον μέσα στο οποίο η όποια ντετερμινιστική περιγραφή καθίσταται άστοχη. Πρόσφατα, ακούστηκε για την εφαρμογή μοντέλων Αλγεβρικής Τοπολογίας πολλών διαστάσεων (Osborne, 2017).

Ο Edelman εγκαινιάζοντας μια βιολογική εξελικτική επιστημολογία θεωρεί επικίνδυνη την ενασχόληση με τη νόηση χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη τη δομή, τη λειτουργία, την ανάπτυξη και την εξέλιξη (στο ίδιο, σελ. 123). Η ενδεχομενικότητα κυριαρχεί στην προθετική προδιάθεση της συνείδησης η οποία πηγάζει όχι μόνο από την δυνατότητα των άπειρων συνάψεων ενός εκάστοτε εγκεφάλου αλλά και αξιοποιώντας την δαρβινική επιλεκτική αρχή της πληθυσμιακής θεώρησης (ίδιο, σελ 127), παραπέμπει στην απειρία των δυνατών συνδυασμών που καθορίζουν το είδος. Επίσης, οι άπειρες διυποκειμενικές και κοινωνικές συναλλαγές μέσα σε αξιακά συστήματα, συνδεδεμένα με κοινωνικές ανταποδώσεις και ηδονή, έρχονται και καθορίζουν στον εγκέφαλο την μνήμη, τις κατηγοριοποιήσεις που επεξεργάζεται, αλλά και την μάθηση (ίδιο, σελ 179). Έτσι, μας προσφέρεται ένα μοντέλο συνείδησης που απομακρύνεται από τις καλωδιακές περιγραφές της τεχνητής νοημοσύνης και τους λογικομαθηματικους ντετερμινισμούς που έχουμε συνηθίσει. Η θεώρηση του Edelman δίνει περιθώριο σε κατανοήσεις που επιτρέπουν την ελευθερία και την επιλογή στη μάθηση, όπως θα ήθελε ο Skovsmose. Ακόμη παραπέρα, ο Habermas, στο κείμενό του «Γνώση κι Διαφέρον» θεωρεί τη γνώση όργανο αυτοσυντήρησης που στηρίζεται σε μια υπέρβαση της παρορμητικής φύσης της libido (ο διάσημος όρος του Freud) και βαθειά συνδεδεμένο με την φυσική ιστορία του ατόμου, την εργασία και την κυριαρχία (Habermas, 1990, σελ 34).

ΑΠΟΒΛΕΠΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΖΩΣΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΗ ΕΜΠΕΙΡΙΑ*

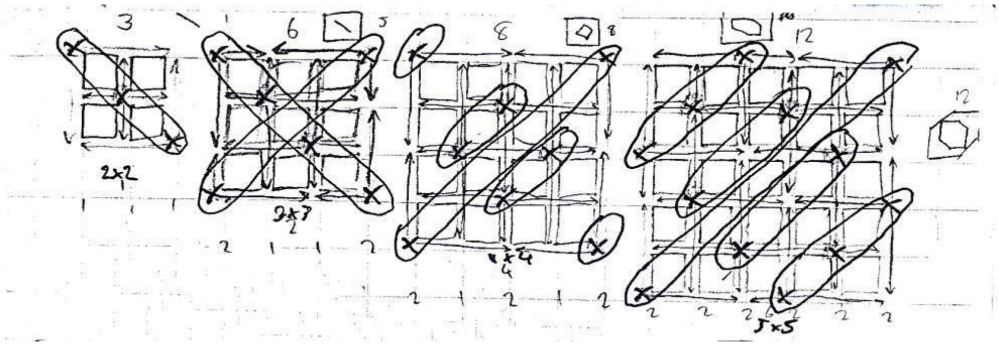
Ο Zagorianakos (2016) δίνει ένα ενδιαφέρον υπόδειγμα παρακολούθησης της αποβλεπτικής προσέγγισης ενός μαθηματικού αντικειμένου και προσφέρει την ευκαιρία για μια περιγραφή της σκέψης του μαθητή καθώς ο τελευταίος κατανοεί και επινοεί. Αυτό γίνεται με αφορμή ενός προβλήματος Διακριτών Μαθηματικών: Πόσους αστυνομικούς χρειαζόμαστε για να ελέγξουμε όλες τις οδούς σε ένα διαμέρισμα πόλης, όταν κάθε ένας μπορεί να καλύψει το πολύ δυο τετράγωνα (Zagorianakos, 2016, σελ. 78). Στην περίπτωση του πειράματος, που διεξήχθη σε ένα Τμήμα Μαθηματικών του Μάντσεστερ, οι φοιτητές ήταν ελεύθεροι να το ψάξουν συνδυαστικά στο χώρο του Πανεπιστημίου ή στο σπίτι τους. Οι ερευνητές ουδετεροποιημένοι (Zagorianakos, 2016, σελ. 77) δεν τους έκαναν την παραμικρή σύσταση παρά μόνο τους ζήτησαν να καταγράφουν τα αναστοχαστικά σκεπτικά τους ανά 20 λεπτά.

Ο φοιτητής ανέδειξε ένα αποτελεσματικό μοτίβο για την διερεύνηση του, που του έλυνε διαισθητικά το πρόβλημα καθώς στόχος της φαινομενολογίας είναι η αρραγής ενότητα μεταξύ νοήσεως και εποπτείας (Ξηροπαΐδης, 1994, σελ. 7). Οι καθοριστικές αποβλέψεις του φοιτητή είναι (α) η επιθυμία του να βρει *ένα μοτίβο***,** το οποίο να ικανοποιεί όλες



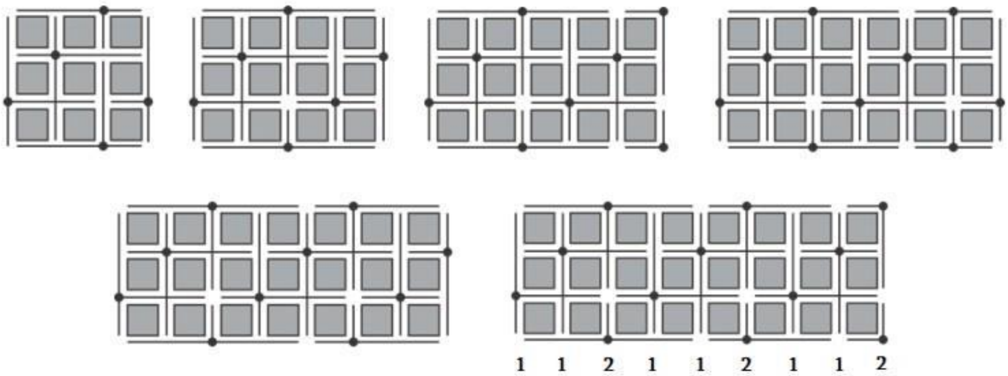
Εικόνα 3 Ασύμμετρες τοποθετήσεις αστυνομικών από τον φοιτητή, σε 3x3, 4x4 πλέγματα.

τις περιπτώσεις, αντί της διερεύνησης διαφορετικών μοτίβων για διαφορετικές κατηγορίες σχημάτων και (β) η επιθυμία του το μοτίβο αυτό να δίνει *συμμετρικές* κατανομές των αστυνομικών σε κάθε μπλοκ οικοδομικών τετραγώνων τα οποία επιτηρούν.



Εικόνα 4 Συμμετρικές τοποθετήσεις αστυνομικών από τον φοιτητή, σε 2x2, 3x3, 4x4, 5x5 πλέγματα.

Σε αυτή τη φάση, ο φοιτητής τονίζει ότι ένιωσε ότι *ηττήθηκε* (Zagorianakos, 2016, σελ. 89) (κατάσταση που παραπέμπει στην τάση κυριαρχίας του Habermas) και αυτό τον κάνει να εγκαταλείπει την περιστασιακή του ιδέα. Η λύση που βρήκε ικανοποίησε την πρώτη απόβλεψη και ακύρωσε την δεύτερη.



Εικόνα 5 Τα 3xn πλέγματα που οδήγησαν τον φοιτητή στην εποπτεία ουσίας. Η μαθηματικοποίηση επήλθε μετά την παρατήρηση της επαναληψιμότητας των 'αστυνομικών' στις κάθετες οδούς (1, 1, 2,…).

Το άρθρο εξετάζει τη διαδικασία μετάβασης από την προαντικειμενική στην αντικειμενική φάση του μαθηματικού αντικειμένου, που έδωσε τη λύση στη διερεύνηση του φοιτητή. Επικεντρώνεται στη *λειτουργική απόβλεψη*, (Zagorianakos, 2016, σελ 75) δηλαδή αυτής που παράγει την φυσική και προκατηγορική (προσυγκροτήσεις της Ströker, 1994, σελ. 45, Zagorianakos, 2016, σελ. 72) ενότητα του κόσμου της ζωής, όροι που αποκτούν σημασία μέσα στην φαινομενολογική οπτική. Εισάγει την περιγραφή των τριών βημάτων της *εποπτείας ουσίας* του φοιτητή χρησιμοποιώντας την μεταφορά της *στερεοσκοπικής όρασης*: τα δύο πρώτα βήματα της εποπτείας αποτελούν δύο 'βλέμματα' επί συγκεκριμένων παραδειγμάτων, και το τρίτο βήμα αποτελεί τη σύνθεση τους σε ένα νέο ‘βλέμμα’, το οποίο αφορά στην γενίκευση των δύο προηγούμενων, συγκροτώντας μέσω αυτού του ενεργήματος–‘βλέμματος’ ένα ποιοτικά διαφορετικό, *αφηρημένο αντικείμενο*, το οποίο περικλείει τα αντικείμενα των δύο πρώτων ‘βλεμμάτων’, χωρίς όμως να ανάγεται σε αυτά. Η αποβλεπτικότητα είναι παρούσα και στα τρία βήματα της εποπτείας: (α) καθώς ο φοιτητής ήλεγχε ότι σε κάθε τετράγωνο πλέγμα οικοδομικών τετραγώνων το διαφαινόμενο νέο μοτίβο δίνει το βέλτιστο πλήθος αστυνομικών φύλαξης (πρώτο βήμα), (β) καθώς επέκτεινε την εφαρμογή του μοτίβου σε *3xn πλέγματα* (δεύτερο βήμα), και τέλος, (γ) όταν συνέθεσε με τη λειτουργία στερεοσκοπικής όρασης, από τα δύο πρώτα βήματα, μια *νέα εποπτεία* γενίκευσης του νέου μοτίβου, ως κατάλληλο για όλα τα δυνατά πλέγματα. Η αποβλεπτικότητα εμφανίζεται με τη διπλή της λειτουργία: (α) ως προ-αναστοχαστική, προ-αντικειμενική κίνηση, η οποία οργανώνει αδρά τα μορφώματα που θα εξελιχθούν σε αντικείμενα και αναστέλλει αυτά που θα απορριφθούν. (β) ως θετικό (οντοθετικό) ενέργημα που χρήζει το επικρατούν μόρφωμα σε αντικείμενο. Εδώ, πρέπει να αναζητήσουμε ένας πλήθος ενεργημάτων που σαρώνουν τις δυνατότητες δοκιμάζοντας, και που επιβεβαιώνουν αυτό, που ο Λάκατος αποδίδει στα μαθηματικά, κάτι το ψευδοεμπειρικό (Davis & Hersh, 1981, σελ. 335) μια επιστήμη που κρύβει βαθειά επαγωγική διερεύνηση περιπτώσεων και που στο τέλος στρέφεται απαγωγικά, γιατί αυτή είναι η παραγωγή της μαθηματικής αλήθειας.

Έτσι, η Χουσσερλιανή φαινομενολογία αναζητά τις αποβλεπτικές πηγές του αντικειμένου οι οποίες να εντάσσονται στην ιστορία του υποκειμένου και τις προδιαθέσεις του. Η αναζήτηση των πηγών σημαίνει ότι αποδέχεται ένα πλήθος ενεργήματα τα οποία έχουν συνθήκες απροσδιοριστίας και προσφέρονται στην πολύπλοκη συνδυαστική διεργασία που ενεργοποιεί «η συνείδηση ώστε να εγκαθιδρύει τα *συγκροτησιακά επιτεύγματα* της κι η *ανάδυση* του αντικειμένου μέσα στη συνείδηση», (Ströker, 1994, σελ 35).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η φαινομενολογία έχει εμφανιστεί έμμεσα στην Διδακτική Μαθηματικών πχ. (Freudenthal, 1983) όπου παρουσιάζει τις Μαθηματικές έννοιες μέσα από τις φυσικές εμφανίσεις τους, αλλά αρνείται απ’ τον πρόλογο να το κάνει με όρους φαινομενολογίας του Husserl. Στην πραγματικότητα το έργο του Husserl είναι δαιδαλώδες. Για την δυσκολία αλλά και τη σημασία του έργου του για τους Μαθηματικούς γράφει και ο Gian-Carlo Rota. Το ίδιο και ο Brown (1996) αναφέρεται στη φαινομενολογία, αλλά το κάνει σαφώς με όρους μεταφαινομενολογικής θεωρίας της Ερμηνευτικής. Επίσης, έχει ενδιαφέρον η εξομολόγηση του Πιαζέτ

(1987) όταν καταλαβαίνει την μεγάλη σημασία του Husserl, σε μεγάλη ηλικία και γράφει «είναι ντροπή μου αλλά μέχρι πρόσφατα δεν είχα διαβάσει ούτε μια αράδα του Husserl… όλη η μελέτη της διαμόρφωσης και της ανάπτυξης διανοητικών εννοιών και ενεργημάτων οδηγεί σε ένα τέτοιο πρόβλημα και προπάντων επιτρέπει να παραστούμε σε μια τέτοια απελευθέρωση, με μια αυθόρμητη και άμεσα παρατηρήσιμη μορφή.» (Πιαζέ, σελ. 136).

Η αποβλεπτικότητα αποτελεί κεντρικό όρο της φαινομενολογίας έχει ευρύτερη επίδραση στη φιλοσοφία (Lyons, 1995). Η άποψή μου είναι ότι η αποβλεπτικότητα δεν έχει υποστηριχθεί πολύπλευρα επειδή εμπλέκεται με ένα σύνολο φαινομενολογικών όρων, που θα χρειαζόταν να αναλυθούν για να γίνει κατανοητή η αξία της ως γνωστικό και διδακτικό εργαλείο και δεν έχει εκτιμηθεί όπως της αξίζει. Αυτού του είδους η αποβλεπτικότητα μας δίνει την ευκαιρία να στοχαστούμε αυτό που θα σήμαινε επικοινωνία στη συγκρότηση μαθηματικών αντικειμένων, ιδιαίτερα, μέσα στην τάξη. Οι ερευνητές, που τους ενδιαφέρει η επικοινωνία μέσα στην τάξη, πρέπει να στρέψουν την προσοχή τους στον τρόπο που τα δίκτυα της αποβλεπτικότητας του εκάστοτε μαθητή προσλαμβάνουν το νόημα και το συγκροτούν μέσω των αποβλεπτικών ενεργημάτων στην εμπειρία των εσωτερικών αναπαραστάσεων. Αυτό θα ήταν δυνατό να διερευνηθεί αν είχαμε κάπως πυκνά τους δυνατούς αναστοχασμούς των μαθητών, ή αν οι μαθητές μας διηγούντο όσο το δυνατόν περισσότερα σε αυτή την πορεία προσέγγισης ενός αποτελέσματος.

*Στην περίληψη που αφορά στο άρθρο του Αντώνη Ζαγοριανάκου βοήθησε και ο συγγραφέας και τον ευχαριστώ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Audi R. (2011), *Το Φιλοσοφικό Λεξικό του Cambridge*, Αθήνα: Κέδρος.

Brown T. (1996), The Phenomenology of Mathematics Classroom, *Educational Studies in Mathematics*, 31: 115-150.

Gray E, & Tall D. (2001) Relationships between embody objects and symbolic procepts: An explanatory theory of success and failure in mathematics, *Proceedings PEM25*, Utrecht , July 2001. pp. 65-72.

Davis P. J., Hersh R. (1981), *Η Μαθηματική Εμπειρία*, Αθήνα: Τροχαλία

Edelman, G. M. (2005). *Αιθέρας θεϊκός, λαμπερή φωτιά*. Αθήνα: Κάτοπτρο.

Freudenthal, H: (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematics Structures* , Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Habermas J. (1990) Γνώση κι Ενδιαφέρον. Στο *Κείμενα Γνωσιοθεωρίας και Κοινωνικής Κριτικής,* Πλέθρον, σελ 21-42.

Husserl E. (1986), *Δεύτερη Λογική Έρευνα*, Αθήνα: Γνώση.

Lyons W.: 1995, *Approaches to Intetionality*, Clarendon Press, Oxford.

Moutsios-Rentzos, A., Spyrou, P., & Peteinara, A. (2014). The objectification of the right-angled triangle in the teaching of the Pythagorean Theorem: an empirical investigation. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(1), 29-51.

Ξηροπαΐδης Γ. (1994), Αποβλεπτικότητα και Σημασία, *Δευκαλίων* 13(1), Οκτώβριος 1994 σελ. 3-36.

Ξηροπαΐδης Γ. (1996), Αποβλεπτικό βίωμα και αναφορά, *Νεύσις* (4) 77-114.

Osborne H. (2017) Brain Architecture: Scientists Discover 11 Dimensional Structures That Could Help Understand How The Brain Works, in Newsweek http://www.newsweek.com/brain-structure-hidden-architecture-multiverse-dimensions-how-brain-works-624300

Πιαζέ Ζ. 1987, *Σοφία και Ψευδαισθησεις της Φιλοσοφίας*, Αθήνα: Γνώση.

Rota G-C: 2015, *Μαθηματικά και* Φιλοσοφία, Αθήνα: Ευρασία.

Skovsmose O. (1994), *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Sokolowski, R. (2003). *Εισαγωγή στην Φαινομενολογία*. Πάτρα: ΕΠ. Πατρών.

Ströker, E., (1992) Αποβλεπτικότητα και Συγκρότηση, Μεταπλάσεις της Έννοιας της Αποβλεπτικότητας στη Φιλοσοφία του E. Husserl. *Δευκαλίων* 11/1, Οκτώβριος 1992 σελ. *31-49.*

Tall D, Thomas M, Davis G, Gray E., Simpson A. (2000) What Is the Object of the Encapsulation of a Process? *JMB,* 18 (2), 223-241.

Valero, P. (2004). Socio-political perspectives on mathematics education. In P. Valero & R. Zevenbergen (Eds.), *Researching the socio-political dimensions of mathematics education: Issues of power in theory and methodology*. (pp. 5-23). Boston: Kluwer.

Vygotsky L.S. 1997, *Νους στην κοινωνία*. Αθήνα: Gutenberg.

Zagorianakos A. (2016) The Study of the intuition of Essence of the Prospective Teacher of Mathematics from Phenomenology Prespective, *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *15*, 69-94.

Η ΠΟΡΕΙΑ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΤΟΥ ΣΥΛΛΟΓΙΚΟΥ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΥ ΜΙΑΣ ΟΜΑΔΑΣ ΜΑΘΗΤΩΝ

Τριανταφύλλου Χρυσαυγή *, Μπακογιάννη Διονυσία * & Κόσυβας Γιώργος **

*Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ, **Γραφείο Συντονιστή Εκπαίδευσης Ελληνικής Πρεσβείας Λονδίνου

chrtriantaf@math.uoa.gr, dbakogianni@math.uoa.gr & gkosyvas@gmail.com

Η παρούσα εργασία εξετάζει την πορεία διαμόρφωσης του συλλογικού συλλογισμού μιας ομάδας 5 μαθητών Β΄ Γυμνασίου κατά την ανάπτυξη και διαπραγμάτευση του νοήματος σε ένα αυθεντικό πρόβλημα μαθηματικής μοντελοποίησης. Το θεωρητικό και αναλυτικό μας πλαίσιο είναι η θεωρία των κοινοτήτων πρακτικής (Wenger, 1998) και οι δύο διαδικασίες που αυτή ενσωματώνει, την υποστασιοποίηση και τον τρόπο συμμετοχής του κάθε μαθητή σε σχέση με τη συνεισφορά του στην εξέλιξη του συλλογικού συλλογισμού της ομάδας. Σύμφωνα με τα ευρήματα της έρευνας φαίνεται ότι ο τρόπος συμμετοχής των μαθητών (α) εξαρτάται από το είδος της κοινής δράσης των μαθητών (κλειστή ή ανοικτή) και (β) διαφοροποιείται στην πορεία διαμόρφωσης του συλλογικού συλλογισμού.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στις σύγχρονες επιστημολογικές, ψυχολογικές και κοινωνιολογικές θεωρίες έχει παρατηρηθεί μια μετακίνηση από θέσεις οι οποίες υιοθετούσαν πως η μάθηση είναι μια καθαρά ατομική διαδικασία προς θέσεις οι οποίες υποστηρίζουν ότι η μάθηση εμπεριέχει κοινωνικές και πολιτισμικές διαστάσεις (Sfard, 2008; Radford, 2008). Η μάθηση θεωρείται τώρα προϊόν συλλογικής δράσης και διαδικασία κοινωνικής και πολιτισμικής αλληλεπίδρασης. Σύμφωνα με την παραπάνω θεώρηση οι μαθητές αναπτύσσουν μαθηματικούς συλλογισμούς όταν συμμετέχουν σε κοινότητες συλλογικής συλλογιστικής και διερεύνησης όπως μπορεί να είναι η σχολική τάξη ή μια ομάδα μαθητών που αναλαμβάνει να λύσει κάποιο πρόβλημα (Kosyvas, 2016; Maaß & Artigue, 2013). Η συλλογική συλλογιστική θεωρείται μια μορφή διαλογικής συζήτησης στην οποία δυο ή περισσότερα άτομα μοιράζονται τις ιδέες τους, ζητούν διευκρινίσεις και πρόσθετες εξηγήσεις και επισημαίνουν ασυνέπειες ή άλλα λάθη στην επιχειρηματολογία των άλλων (Elbers, 2003; Krummheuer, 2007).

Σε προηγούμενη εργασία μας (Triantafillou, Bakogianni & Kosyvas, 2016) μελετήσαμε την εξέλιξη επίλυσης ενός προβλήματος μοντελοποίησης σε 4 ομάδες μαθητών (2 ομάδες Γυμνασίου και 2 ομάδες Λυκείου) εστιάζοντας σε εντάσεις (tensions), δηλαδή αντιθέσεις και διαφωνίες μεταξύ των μελών μιας ομάδας, κατά τη διαδικασία μοντελοποίησης. Διατηρώντας την κοινωνική μας θεωρητική αντίληψη, αυτή τη φορά εστιάζουμε στην εξέλιξη του συλλογικού συλλογισμού μιας από τις ομάδες του Γυμνασίου. Συγκεκριμένα, εξετάζουμε τις κοινές δράσεις διαπραγμάτευσης του νοήματος (negotiation of meaning) της ομάδας αναλύοντας τις δύο διαδικασίες που αυτή ενσωματώνει, δηλαδή τη διαδικασία της συμμετοχής (participation) και τη διαδικασία της υποστασιοποίησης (reification) υπό το πρίσμα της θεωρίας των κοινοτήτων πρακτικής (Wenger, 1998).

Τα ερευνητικά μας ερωτήματα είναι: Ποια είναι η πορεία του συλλογικού συλλογισμού της ομάδας; Ποιος είναι ο τρόπος συμμετοχής του κάθε μαθητή σε σχέση με τη συνεισφορά του στην εξέλιξη του συλλογικού συλλογισμού της ομάδας; Πώς τα παραπάνω συνδέονται;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η τελευταία θεώρηση της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών ως κοινωνικο-πολιτισμικό φαινόμενο, θέλει τους μαθητές να ενισχύουν τη συμμετοχή τους στη διαδικασία της μάθησης μέσα από συνεργατικά μοντέλα που ενθαρρύνουν το συλλογικό συλλογισμό και τη συλλογική επιχειρηματολογία (Lave & Wenger, 1991).

Η μελέτη της συλλογικής επιχειρηματολογίας που αναπτύσσεται σε μια ομάδα μαθητών έχει ερευνηθεί κυρίως μέσα από τη μελέτη του τρόπου συμμετοχής των μαθητών, την ανάλυση του τρόπου επιχειρηματολογίας της ομάδας αλλά και τα στοιχεία που διαμορφώνουν μια ποιοτική συνεργασία. Συγκεκριμένα, οι Tatsis και Koleza (2006) ανέδειξαν τους εξής ρόλους συμμετεχόντων σε μια ομάδα: τον *κυρίαρχο εμπνευστή* ως το άτομο που προτείνει πολλά πράγματα αλλά δίνει ελάχιστες εξηγήσεις, τον *συνεργατικό εμπνευστή* ως το άτομο που προτείνει και εξηγεί τις ιδέες του, τον *συνεργατικό αξιολογητή,* αυτόν που συνεισφέρει με κριτικό τρόπο αντιπροτείνοντας τις δικές του ιδέες, και τον *ανασφαλή διαπραγματευτή,* αυτόν που δεν συνεισφέρει κάτι στη συζήτηση. Ο Krummheuer (2007) μελέτησε το ρόλο του συμμετέχοντα στις συζητήσεις της τάξης ως προς το βαθμό της αυτονομίας του και ως προς τη δομή των επιχειρημάτων του. Επίσης, διέκρινε "ομαλές" και "συμπυκνωμένες" περιόδους αλληλεπίδρασης με τις δεύτερες να διακρίνονται από τις πρώτες ως προς την πολυπλοκότητα και την αυθεντικότητα της επιχειρηματολογίας, την διαδοχή των συλλογισμών και τη συμμετοχή των ομιλητών στην επιχειρηματολογία. Ο Sawyer (2007) υποστήριξε ότι η δημιουργική συνεργασία μεταξύ των μελών μιας ομάδας υποστηρίζεται από ανοικτού τύπου δραστηριότητες και ο Mercer (1996) ισχυρίστηκε ότι όλες οι συζητήσεις των μαθητών δεν διατηρούν πάντα τα ίδια ποιοτικά χαρακτηριστικά διακρίνοντάς τες σε συζητήσεις αθροιστικού (χωρίς διαπραγμάτευση) και διερευνητικού τύπου (με συνεχή επαναδιαπραγμάτευση του νοήματος).

Στην παρούσα εργασία αναλύουμε την ανάπτυξη του συλλογικού συλλογισμού μιας ομάδας πέντε μαθητών Γυμνασίου στη διαδικασία επίλυσης ενός αυθεντικού προβλήματος μοντελοποίησης υπό το πρίσμα της θεωρίας των κοινοτήτων πρακτικής (Wenger, 1998). Αναγνωρίζουμε ως κοινή επιδίωξη (joint enterprise) της ομάδας την επίλυση του προβλήματος που τους ανατέθηκε από τον εκπαιδευτικό της τάξης. Για την επίτευξη αυτού του στόχου οι μαθητές χρησιμοποιούν κοινά εργαλεία (αναπαραστάσεις, μαθηματικές έννοιες, μαθηματικούς υπολογισμούς κλπ.) και αναπτύσσουν διαφορετικούς τρόπους συμμετοχής (π.χ. εμπνευστές, αξιολογητές, διαπραγματευτές) στη διαπραγμάτευση του κοινού νοήματος. Αναλύουμε την ανάπτυξη του συλλογικού συλλογισμού της ομάδας εστιάζοντας (α) στον τρόπο συμμετοχής των μελών της ομάδας και (β) στις διαδικασίες υποστασιοποίησης που ανέπτυξε. Ο τρόπος συμμετοχής αφορά τη συνεισφορά του κάθε μαθητή στην εξέλιξη του συλλογικού συλλογισμού της ομάδας, ενώ η διαδικασία υποστασιοποίησης αφορά τις διεργασίες που έγιναν στην ομάδα οι οποίες οδήγησαν σε ένα μαθηματικό παραγόμενο (π.χ. υπολογισμός του ωφέλιμου εμβαδού της ταράτσας).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η δραστηριότητα

Το πρόβλημα αφορούσε την τοποθέτηση φωτοβολταϊκών (φβ) στοιχείων (πάνελ) στην οροφή ενός σπιτιού (http://www.mascil-project.eu/classroom-material). Ο εκπαιδευτικός αφού παρουσίασε τη σημασία εγκατάστασης των φβ έδωσε στους μαθητές το παρακάτω πρόβλημα.

	• μία επίπεδη ταράτσα που βλέπει στο Νότο έχει σχήμα ορθογωνίου και διαστάσεις 13μ επί 9μ. • Τα φωτοβολταϊκά πάνελ (φβ) έχουν διαστάσεις 1,654μ. επί 0,993μ. • Η γωνία κλίσης του κάθε φβ με την ταράτσα είναι 28^o. • Πρακτικός κανόνας: Τα φβ τοποθετούνται σε σειρές και η κάθε σειρά απέχει από την επόμενη απόσταση διπλάσια από το ύψος του. Θέλουμε να υπολογίσουμε τον μέγιστο αριθμό φβ που μπορούμε να εγκαταστήσουμε στην ταράτσα.

Εικόνα 1: Το πρόβλημα και οι αναπαραστάσεις που δόθηκαν στους μαθητές.

Συμμετέχοντες και δεδομένα

Η δίωρη πειραματική διδασκαλία πραγματοποιήθηκε στη Β΄ Γυμνασίου. Η τάξη χωρίστηκε σε 5 ομάδες των 4-5 μαθητών. Δόθηκε στους μαθητές επαρκής χρόνος για να σκεφτούν και να γράψουν τη λύση του προβλήματος. Για τις ανάγκες της έρευνας, έγινε μαγνητοφώνηση κάποιων ομάδων και βιντεοσκόπηση της εισαγωγής καθώς και ορισμένων παρεμβάσεων του εκπαιδευτικού στην κάθε ομάδα. Στην παρούσα εργασία εστιάζουμε σε μια ομάδα 5 μαθητών στην οποία παρουσιάστηκαν οι περισσότερες εντάσεις κατά τη διαμόρφωση του συλλογικού συλλογισμού της.

Ανάλυση των δεδομένων

Απομαγνητοφωνήσαμε τη συζήτηση της ομάδας, η οποία διήρκησε 40 λεπτά περίπου. Αναγνωρίσαμε 4 διαδικασίες υποστασιοποίησης που αποτέλεσαν τη μονάδα ανάλυσής μας. Οι διαδικασίες αυτές ήταν οι εξής: Υπολογισμός του ωφέλιμου εμβαδού της ταράτσας, εύρεση του προσανατολισμού των φ/β στο χώρο, υπολογισμός του συνολικού αριθμού των φ/β, επαναδιαπραγμάτευση του προβλήματος και εύρεση της τελικής λύσης. Σε κάθε διαδικασία υποστασιοποίησης αναλύουμε (α) τις επιμέρους *κοινές δράσεις της ομάδας* και (β) τον *τρόπο συμμετοχής* του κάθε μαθητή δηλαδή τη συνεισφορά του στους συλλογισμούς της ομάδας σε κάθε κοινή δράση. Η μια κοινή δράση διαφοροποιείται από την άλλη όταν η ίδια η ομάδα διαπιστώνει ότι πρέπει να αλλάξει τον τρόπο επίλυσης που ακολουθεί ή διαφοροποιούνται τα μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιεί η ομάδα, ενώ στο πέρασμα από την μια υποστασιοποίηση στην άλλη καταλυτικό ρόλο παίζει ο εκπαιδευτικός που τους προτρέπει να αναθεωρήσουν το μαθηματικό παραγόμενο της ομάδας. Αναλύσαμε τον τρόπο της συμμετοχής του κάθε μαθητή ακολουθώντας σε μεγάλο βαθμό την κατηγοριοποίηση των Tatsis και Koleza (2006). Συγκεκριμένα, αναγνωρίζουμε δύο κατηγορίες συμμετοχής: (i) *των μαθητών που συνεισφέρουν στη διαπραγμάτευση του νοήματος με συνεργατικό τρόπο* (όπως ο *συνεργατικός εισηγητής* δηλ. το άτομο που προτείνει κάτι νέο και ταυτόχρονα εξηγεί την πρότασή του, ο *συνεργατικός διαπραγματευτής*, ο οποίος αξιολογεί την ιδέα του άλλου είτε εστιάζοντας σε σημαντικά για την περίπτωση σημεία είτε αντιπροτείνοντας τις δικές του ιδέες και ο *απλοϊκός διαπραγματευτής* δηλ. εκείνος που ζητά διαρκώς εξηγήσεις χωρίς να αντιπροτείνει κάτι) και (ii) *των μαθητών που δεν συνεισέφεραν στη διαπραγμάτευση του νοήματος* κατά τη διάρκεια της κοινής δράσις της ομάδας (όπως ο *κυρίαρχος εισηγητής* δηλ. το άτομο που προτείνει πολλά πράγματα, αλλά δίνει ελάχιστες εξηγήσεις διατηρώντας μια ανταγωνιστική στάση, ο *ανασφαλής συμμετέχων* δηλ. αυτός που είτε απλώς εκτελεί εντολές είτε προσπαθεί να κοινοποιήσει τη σκέψη του αλλά δεν την ολοκληρώνει και τον *μη συμμετέχοντα* δηλ. αυτόν που δεν συμμετέχει καθόλου στη συζήτηση). Τέλος, αναζητήσαμε πώς η σύνθεση των δύο αξόνων επηρέασε την πορεία διαμόρφωσης του συλλογικού συλλογισμού της ομάδας.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζεται μια συνοπτική περιγραφή των 4 υποστασιοποιήσεων τις οποίες αναγνωρίσαμε κατά τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος με τη σειρά που αυτές εκτυλίχθηκαν. Σε κάθε διεργασία υποστασιοποίησης καταγράφουμε το μαθηματικό παραγόμενο και τις επιμέρους δράσεις της ομάδας με αντιστοίχιση προς τα μέλη που συνεισέφεραν κατά την ανάπτυξη του συλλογικού συλλογισμού της ομάδας.

ΚΟΙΝΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΟΜΑΔΑΣ	ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΣΥΝΕΡΓΑΤΙΚΟ ΡΟΛΟ
1η ΥΠΟΣΤΑΣΙΟΠΟΙΗΣΗ: Υπολογισμός του ωφέλιμου εμβαδού της ταράτσας [χρονική διάρκεια 9 λ.]	
1α) Συσχέτιση των διαστάσεων της ταράτσας με τις διαστάσεις του φβ	M2, M4
1β) Συσχέτιση των διαστάσεων της ταράτσας με την απόσταση ασφαλείας	M2, M1
2η ΥΠΟΣΤΑΣΙΟΠΟΙΗΣΗ: Καθορισμός του προσανατολισμού των φ/β στο χώρο [χρονική διάρκεια 2 λ.]	
2α) Αναγνώριση πιθανών τρόπων προσανατολισμού των φβ	M1, M2, M3, M4
3η ΥΠΟΣΤΑΣΙΟΠΟΙΗΣΗ: Υπολογισμός του συνολικού αριθμού των φ/β [χρονική διάρκεια 8 λ.]	
3α) Ανάδειξη της ανάγκης χρήσης τριγωνομετρικών λόγων	M1, M2, M3, M4, M5
3β) Η δυνατότητα χρήσης του ΠΘ	M4, M1, M3
3γ) Ο υπολογισμός του ύψους	M2, M3
3δ) Ο υπολογισμό του συνολικού αριθμού των φ/β	M1, M2
4η ΥΠΟΣΤΑΣΙΟΠΟΙΗΣΗ: Επαναδιαπραγμάτευση του προβλήματος και εύρεση της τελικής λύσης [χρονική διάρκεια 20 λ.]	
4α) Υπολογισμός των ωφέλιμων διαστάσεων της ταράτσας	M2, M4
4β) Υπολογισμός του ύψους	M2, M3
4γ) Εφαρμογή του πρακτικού κανόνα	M4, M5
4δ) Υπολογισμός του συνολικού αριθμού των φ/β	M1, M2, M5

Πίνακας 1: Η πορεία διαμόρφωσης του συλλογικού συλλογισμού της ομάδας.

Όπως φαίνεται στο Πίνακα 1, η 1η υποστασιοποίηση αφορά τον υπολογισμό του ωφέλιμου εμβαδού της ταράτσας. Σε αυτήν αναγνωρίζουμε 2 κοινές δράσεις της ομάδας που αφορούν και οι δύο το ίδιο θέμα αλλά οι μαθητές χρειάστηκαν να αλλάξουν δράση μιας και διαπίστωσαν ότι η προηγούμενη δεν τους οδηγούσε στην κατεύθυνση που θα ήθελαν. Στη δράση 1α ο Μ1 συμμετέχει με ρόλο κυρίαρχου εισηγητή χωρίς να δικαιολογεί τις επιλογές του *(Μ1: Αφού σε μια σειρά φ/β βάζουμε την απόσταση μεταξύ τους δύο φορές το ύψος του… οπότε αφαίρεσε 13 μείον 0,993. […] Γράψε 117-96,14. Μ4: Γιατί το κάνουμε αυτό δεν το χω καταλάβει. Μ1: Ξέρω γω!* Μ2: *Τετραγωνικά μέτρα δεν είναι αυτά;)*. Η συμπεριφορά του είναι μη συνεργατική. Στο τέλος της 1α δράσης ο Μ1 αναγνωρίζει ότι έχει μπερδευτεί. Στη δράση 1βο Μ2 αντιπροτείνει στον Μ1 τον υπολογισμό του εμβαδού της ωφέλιμης ταράτσας αφαιρώντας 1μ από κάθε διάσταση (*Μ2: Όταν σου λέει ότι όλη η ταράτσα είναι 117, σωστά; Σου βγάζει το 0,5μ από εδώ πέρα … γράφει απόσταση ασφαλείας. Μ1: Α! Οπότε 9 μείον 0,5 8,5! Μ2: Όχι δεν είναι 0,5 γιατί το 9 είναι εδώ πέρα βγαίνει από αυτό εδώ πέρα και από αυτό εδώ πέρα ..οπότε πάει 8.)*. Τα εργαλεία διαπραγμάτευσης του Μ2 στην κοινή τους δράση παραπέμπουν στην αναπαράσταση του σπιτιού της εικόνας 1.

Σ' αυτό το επεισόδιο παρατηρούμε τον Μ1 να μετατρέπεται από μη συνεργατικό μέλος (κυρίαρχος εισηγητής στην 1α δράση) σε συνεργατικό διαπραγματευτή στην 1β δράση. Ο Μ2 σε όλη τη διάρκεια αυτής τη υποστασιοποίησης διατηρεί το ρόλο του συνεργατικού διαπραγματευτή στην προσπάθειά του να πείσει τον Μ1 ότι οι διαστάσεις της ωφέλιμης ταράτσας είναι 12μ. και 8μ. Ο Μ4 διατηρεί συνεργατικό ρόλο (του απλοϊκού διαπραγματευτή) και οι Μ3 και Μ5 μη συνεργατικό ρόλο (ανασφαλών συμμετεχόντων). Το επεισόδιο αυτό λήγει όταν οι μαθητές καταλήγουν στις διαστάσεις της ωφέλιμης ταράτσας.

Η 2η υποστασιοποίηση αφορά την εύρεση του προσανατολισμού των φ/β στο χώρο. Στη διάρκεια αυτής της υποστασιοποίησης διακρίνουμε ως κοινή δράση την αναγνώριση διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης των φ/β *(Μ1: Μπορείς να τα βάλεις έτσι ή έτσι ! Πώς θα τα βάλουμε εμείς; Μ2: να κοιτάνε στο νότο; […] Μ4: μπορεί να είναι μία πολυκατοικία πιο ψηλή από πίσω! […] Μ3: Το χέρι μου είναι έτσι … έτσι η ταράτσα… έτσι τα φ/β).* Σε αυτό το επεισόδιο όλοι οι μαθητές εκτός του Μ5 διατήρησαν το ρόλο του συνεργατικού διαπραγματευτή και χρησιμοποίησαν ποικιλία εργαλείων διαπραγμάτευσης (αναπαραστάσεις της καθημερινότητας, νοήματα, χειρονομίες κ.ά.) αλλά και αντιρρήσεις στο αντικείμενο διαπραγμάτευσης. Συγκεκριμένα, ο Μ3 αμφισβητεί αν αυτή η δράση έχει κάποιο νόημα για την επίλυση του προβλήματος (*Μ3: μας ενδιαφέρει ο προσανατολισμός των φ/β;)*.

Στην 3η υποστασιοποίηση με θέμα: υπολογισμός του συνολικού αριθμού των φ/β αναγνωρίζουμε 4 κοινές δράσεις της ομάδας τις οποίες αναλύουμε παρακάτω:

(α) την ανάδειξη της ανάγκης χρήσης τριγωνομετρικών λόγων κατά την οποία όλη η ομάδα λειτουργεί συνεργατικά (βλ. απόσπασμα 1).

Απόσπασμα 1

Μ1: Το φ/β είναι ξαπλωμένο έτσι... αλλά όμως με κλίση παίρνει ύψος και για να βρούμε, θέλουμε να βρούμε ύψος γιατί μετά το επόμενο φ/β…

Μ4: Δηλαδή το χαμηλό σημείο να είναι εδώ και το ψηλό να είναι εδώ.

Μ2: Πώς θα το βρεις το ύψος;

Μ3: Έχω μια ιδέα! Άμα παίρναμε το φ/β που είναι έτσι, και εδώ ……… η βάση … η κάθετος είναι το ύψος και ξέρουμε αυτό εδώ ας πούμε [εννοεί τη γωνία], και ψάχνουμε … το ύψος… Μήπως θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε ημίτονο;

Μ1: Ναι μπορούμε!

Μ5: Πώς ημίτονο;

Μ3: Κάθετη προς υποτείνουσα…

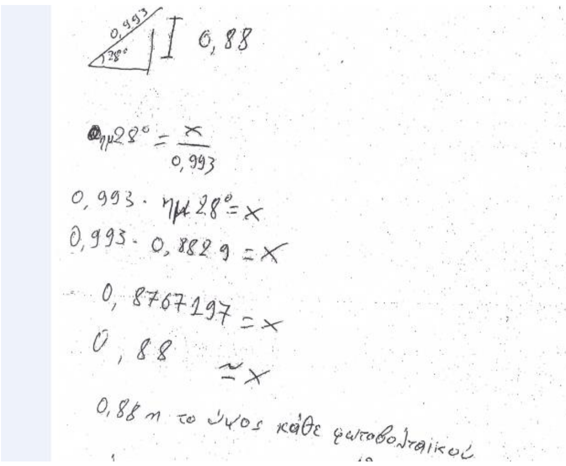
Μ2: Α, δεν ξέρουμε όμως …ξέρουμε, ξέρουμε!

Μ3: Ξέρουμε τη μία πλευρά! Άρα θα βρούμε το ύψος.

Παρατηρούμε σε αυτό το απόσπασμα το πέρασμα από το ρεαλιστικό πλαίσιο του προβλήματος στην ανάδειξη του μαθηματικού αντικειμένου από τον Μ3 ο οποίος για πρώτη φορά αναγνωρίζεται ως συνεργατικός εισηγητής. (β) τη δυνατότητα εφαρμογής του Πυθαγορείου Θεωρήματος (ΠΘ) όπου ο Μ4 ήταν ο συνεργατικός εισηγητής και οι Μ3 και Μ1 οι συνεργατικοί διαπραγματευτές του *(Μ4: Είναι ορθογώνιο τρίγωνο; αφού ξέρουμε την υποτείνουσα ...γιατί δεν κάνουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα; Μ3: Πρέπει να ξέρεις δύο πλευρές, Μ1: Ναι πρέπει να ξέρεις δύο πλευρές. Εδώ δεν ξέρουμε).* (γ) τον υπολογισμό του ύψους του φ/β όπου ο Μ2 αντιπροτείνει τη χρήση του συνημιτόνου εξηγώντας το σκεπτικό του στον Μ3. Τέλος, στην 3δ δράση με θέμα υπολογισμός του συνολικού αριθμού των φ/β ο Μ2 συνεργάζεται με τον Μ1 και καταλήγουν ότι ο συνολικός αριθμός των φ/β είναι 8 (2 σειρές στην πλευρά 8μ και 4 σειρές στην 12μ).

Στην 3η υποστασιοποίηση έχει ενδιαφέρον ότι για πρώτη φορά όλη η ομάδα έδρασε συνεργατικά στην κοινή δράση 3α, αναδείχθηκαν για πρώτη φορά οι Μ3 και Μ4 ως συνεργατικοί εισηγητές ενώ η ιδέα του Μ3 για χρήση τριγωνομετρικών λόγων αλλάζει την πορεία επίλυσης του προβλήματος. Τα εργαλεία της ομάδας σε αυτό το επεισόδιο ξεκίνησαν από διαισθητικά (π.χ. καθημερινές εικόνες, χειρονομίες) και κατέληξαν σε μαθηματικά. Το επεισόδιο λήγει όταν επεμβαίνει για 2η φορά ο εκπαιδευτικός και τους εξηγεί ότι ο αριθμός των φ/β που υπολόγισαν είναι λάθος.

Το 4ο επεισόδιο αφορά την υποστασιοποίηση με θέμα την επαναδιαπραγμάτευση όλου του προβλήματος και την εύρεση της τελικής λύσης. Σ' αυτό το επεισόδιο αναγνωρίζουμε τις παρακάτω κοινές δράσεις: (α) τον υπολογισμό των ωφέλιμων διαστάσεων της ταράτσας (*Μ4: 13 και 9 δεν είναι; Μ2: 12 και 8 γιατί βγάζεις το μισό, μισό από εδώ πέρα, μισό από εδώ πέρα)* με τους Μ4 και Μ2 ως συνεργατικούς διαπραγματευτές. Παρατηρούμε ότι ένα θέμα που απασχόλησε έντονα την ομάδα στην 1η υποστασιοποίηση λύθηκε πολύ σύντομα σε αυτό το επεισόδιο με τον Μ2 να εξηγεί στον Μ1 τους ισχυρισμούς του. (β) τον υπολογισμό του ύψους ή την απόσταση του άνω μέρους του φ/β από το επίπεδο της οριζόντιας ταράτσας). Οι Μ2 και Μ3 συνεργάζονται πάλι για τον υπολογισμό του ύψους αλλά πάλι αντί για το ημίτονο αναφέρονται στο συνημίτονο της γωνίας των 28 μοιρών (βλ. Πίνακα 2) ενώ οι υπόλοιποι μαθητές δεν συμμετέχουν και συζητούν για άλλα θέματα άσχετα με το πρόβλημα.

	*Απόσπασμα 2* Μ2: Αυτό είναι 28. Αυτό γράψτο 28. Αυτό εδώ πέρα γράψτο, ε…0,993 0,993, οπότε θα κάνουμε κάνε κάτω, συν ε.. συν 28 μοίρες ή ημίτονο, ό,τι θες δεν με νοιάζει.. Μ3: Ημίτονο 28μοιρών ισούται με …. Μ2: Ίσον με απέναντι κάθετη προς 0,993. Μ3: Άρα 0,88. Περίπου … στο περίπου.

Πίνακας 2. Σχέδιο στο φύλλο εργασίας των μαθητών και η σχετική τους συζήτηση.

(γ) εφαρμογή του πρακτικού κανόνα, διαπραγματευόμενοι τη σχέση (2x0,88+0,87=2,63) (1), όπου 0,88 είναι η προβολή της πλευράς 0,993 στο επίπεδο. Συνεχίζουν και εδώ να συνεργάζονται οι Μ2 και Μ3. Το ότι χρησιμοποιούν τον ίδιο αριθμό για τον υπολογισμό του ύψους και της προβολής της πλευράς των 0,993μ στο επίπεδο προκαλεί τους Μ4 και Μ5 επανειλημμένα να ζητούν εξηγήσεις (*Μ5: πώς βρήκες το 0,87; Μ2: συνημίτονο ρε φίλε…Μ4: τι είναι το 0, 87; Μ1: μη γυρίζουμε πίσω).* Οι μαθητές Μ2 και Μ3 για πρώτη φορά τώρα ‘εχουν ρλολο ρόλο μη συνεργατικό (κυρίαρχου εισηγητή) δίνοντας μόνο γενικές εξηγήσεις μιας και θέλουν να ολοκληρώσουν την άσκηση ενώ οι Μ4 και Μ5 δρουν συνεργατικά (σε ρόλο απλοϊκού διαπραγματευτή) χωρίς όμως να καταφέρουν να πείσουν τους συμμαθητές τους ότι έχουν κάνει λάθος. (δ) Υπολογισμός του συνολικού αριθμού των φ/β θεωρώντας ότι στηρίζονται στη μικρή πλευρά [12:0,993] και απλώνονται σε σειρές στα 8μ. ταράτσας. Το λάθος τους είναι ότι θεωρούν ότι σε κάθε περίπτωση το ύψος είναι συγκεκριμένο άσχετα από τον τρόπο στήριξης του φ/β. Οι Μ1, Μ2 και Μ5 συμμετέχουν ως συνεργατικοί διαπραγματευτές.

Σ’ αυτό το επεισόδιο κυριαρχεί ο Μ2 σε συνεργατικό κυρίως ρόλο, ο οποίος ξεκινά την επίλυση του προβλήματος από την αρχή. Τα εργαλεία του είναι κυρίως μαθηματικά (μαθηματικές διαδικασίες και αναπαραστάσεις όπως του τριγώνου στην Εικόνα 2). Ο Μ3 συνεργάζεται με τον Μ2 στην εφαρμογή τριγωνομετρικών λόγων. Ο Μ1 συμβάλλει μόνο στον υπολογισμό του συνολικού αριθμού των φ/β, ενώ οι Μ4 και Μ5 διατηρούν σε κάποιες κοινές δράσεις το ρόλο του απλοϊκού διαπραγματευτή. Η επαναδιαπραγμάτευση του προβλήματος διαρκεί 20 λεπτά και στις επιμέρους δράσεις αναγνωρίζουμε με συνεργατικό ρόλο διαφορετικά μέλη της ομάδας.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η πορεία του συλλογικού συλλογισμού της ομάδας αποτελείται από διάφορα στάδια που καθορίζονται από το μαθηματικό παραγόμενο της ομάδας. Τα στάδια αυτά αναγνωρίζονται στην παρούσα εργασία ως διεργασίες υποστασιοποίησης ενός μαθηματικού αντικειμένου. Μερικές φορές το μαθηματικό παραγόμενο είναι δυνατόν να απορριφθεί από τον εκπαιδευτικό οπότε πρέπει η ομάδα να επαναδιαπραγματευτεί το ίδιο θέμα. Οι διεργασίες υποστασιοποίησης αποτελούνται από επιμέρους κοινές δράσεις της ομάδας. Στις δράσεις αυτές οι μαθητές υιοθετούν διαφορετικούς ρόλους οι οποίοι δεν είναι πάντα οι ίδιοι ενώ ταυτόχρονα επηρεάζουν και το αποτέλεσμα της διαπραγμάτευσης. Μόνον ένας μαθητής, ο Μ2, διατήρησε το ρόλο του συνεργατικού διαπραγματευτή σε όλες σχεδόν τις κοινές δράσεις της ομάδας. Ο Μ1 ξεκίνησε ως κυρίαρχος εισηγητής και συνέχισε ως συνεργατικός διαπραγματευτής στις υπόλοιπες δράσεις που συμμετείχε. Οι Μ3 και Μ4 ξεκίνησαν ως ανασφαλείς συμμετέχοντες και ακολούθως συνεισέφεραν στην ανάπτυξη και διαπραγμάτευση του μαθηματικού νοήματος, ενώ στις δράσεις 3α και 3β ανέλαβαν ρόλο συνεργατικού εισηγητή. Τέλος, ο Μ5 είχε έναν περιφερειακό ρόλο στις πρώτες υποστασιοποιήσεις ενώ στην 3^{η} και 4^{η} έχει το ρόλο του απλοϊκού διαπραγματευτή.

Ο *τρόπος συμμετοχής των μαθητών φαίνεται να εξαρτάται από το είδος της κοινής δράσης*. Συγκεκριμένα, στη δράση της ‘αναγνώρισης πιθανών τρόπων προσανατολισμού των φ/β’ η συμμετοχή ευνοείται από την ανοικτή δραστηριότητα η οποία ενθαρρύνει διαφορετικές προσεγγίσεις και συλλογισμούς (Sawyer, 2007). Αντίθετα, στη δράση του υπολογισμού του ύψους των φ/β, την οποία θεωρούμε ως μια κλειστή αλγοριθμική διαδικασία, συμμετέχουν αποκλειστικά οι μαθητές Μ2 και Μ3. Στη δράση της ‘ανάδειξης της χρήσης τριγωνομετρικών λόγων’ διαπιστώνουμε ότι όλη η ομάδα δρα συνεργατικά και οδηγείται στην αναγνώριση της χρήσης ενός μαθηματικού εργαλείου. Θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε την παραπάνω δράση ως μια περίπτωση *συμπυκνωμένης διαπραγμάτευσης νοήματος* (Krummheuer, 2007) λόγω της αυθεντικότητας της επιχειρηματολογίας των μαθητών και της διαδοχής των συλλογισμών από πλαισιωμένες σε μαθηματικές.

Τέλος, σύμφωνα με τις παρατηρήσεις μας, η πορεία διαμόρφωσης του συλλογικού συλλογισμού των μαθητών φάνηκε να συνδέεται με τη φύση των εργαλείων διαπραγμάτευσης. Παρόλα αυτά, στο πλαίσιο αυτής της εργασίας υπάρχουν περιορισμοί που δεν μας επιτρέπουν να μελετήσουμε περαιτέρω τη σχέση αυτή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Elbers, E. (2003). Classroom interaction as reflection: learning and teaching mathematics in a community of inquiry. *Educational Studies in Mathematics, 54*(1), 77–99.

Kosyvas, G. (2016). The students' involvement in a workplace inquiry activity: solution of the solar panel problem. In G. Adams (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *36*(1), 47-52.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom. Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behaviour*, 26, 60-84.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). S*ituated Learning: Legitimate Peripheral Participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Maaß, K. & Artigue, M. (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: a synthesis. *ZDM*, 45, 779–795.

Mercer, N. (1996). The quality of talk in children's collaborative activity in the classroom. *Learning and instruction*, *6*(4), 359–377.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 215–234). Rotterdam: Sense Publishers.

Sawyer, K. (2007). *Group genius: The creative power of collaboration*. New York, NY: Basic Books.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Tatsis, K. & Koleza, E. (2006). The effect of students' roles on the establishment of shared knowledge during collaborative problem solving: a case study from the field of mathematics. *Social Psychology of Education*, 9(4), 443–460.

Triantafillou, C., Bakogianni, D. & Kosyvas, G. (2016). Tensions in students' group work on modelling activities. In C. Csikos, A. Rausch & J. Szitanyi (Eds.). *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 283-290). Szeged, Hungary: PME.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕΣΑ ΣΤΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Χαραλαμπίδου Ε.[1], Κλώθου Ά.[2]

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

1elcharal@eled.duth.gr, 2aklothou@eled.duth.gr

Το παιχνίδι διευκολύνει σημαντικά τη μάθηση των μαθηματικών και της γεωμετρίας, κυρίως στην πρώτη σχολική ηλικία. Η παρούσα μελέτη πραγματεύεται τη συμβολή του παιχνιδιού στη μάθηση της Γεωμετρίας στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση και το αξιοποιεί συνδυαστικά με την προσέγγιση van Hiele περί επιπέδων ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης. Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 16 μαθητές από δύο τμήματα πρώτης τάξης ενός Δημοτικού Σχολείου ημιαστικής περιοχής της Θράκης. Τα ερευνητικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν ήταν η παρατήρηση και η κλινική συνέντευξη. Τα δεδομένα αναλύθηκαν με την αξιοποίηση τεχνικών της Ανάλυσης Περιεχομένου και της Θεμελιωμένης Θεωρίας. Τα πρώτα αποτελέσματα αναδεικνύουν την ανάγκη των μαθητών να αντιμετωπίσουν τα γεωμετρικά σχήματα τόσο ολιστικά (ως ολότητα σχήματος) όσο και αναλυτικά (με αναφορά σε συστατικά στοιχεία και μέρη τους).

ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Το παιχνίδι και τα μαθηματικά μπορούν να λειτουργήσουν συνδυαστικά. Ένας από τους συνδυασμούς που υιοθετήθηκε στην παρούσα έρευνα συναντάται στη βιβλιογραφία ως "Παιχνίδι στα Μαθηματικά". Στα πλαίσια αυτού του συνδυασμού κυρίαρχο ρόλο κατέχουν οι μαθηματικές έννοιες, η κατανόηση των οποίων διευκολύνεται από τη χρήση μαθηματικών εργαλείων και αντικειμένων που αποκτούν παιγνιώδη χαρακτήρα (Χασάπης, 2012: 77-81). Τόσο σε αυτόν όσο και σε άλλους συνδυασμούς το παιχνίδι συνεισφέρει στο πεδίο των μαθηματικών όχι μόνο με τα εργαλεία και τα υλικά αυτά καθαυτά, αλλά και με το μαθησιακό πλαίσιο που δημιουργεί (Jarrell, 1998: 57). Ειδικότερα, το παιχνίδι διαμορφώνει ένα περιβάλλον μέσα στο οποίο τα αντικείμενα, τα εργαλεία και οι ιδέες αποκτούν νόημα, ενώ προσφέρει εμπειρίες και δυνατότητες διερεύνησης, οι οποίες μπορούν να οδηγήσουν σε συνδέσεις και κατανοήσεις των μαθηματικών εννοιών, των αντικειμένων και των νοημάτων που καλλιεργήθηκαν (Dockett & Perry, 2010: 716-717).

Επιπρόσθετα, στην πραγματοποίηση αυτών των συνδέσεων συμβάλλουν οι αποφάσεις που οι μαθητές καλούνται να λάβουν στη διάρκεια των παιγνιωδών δραστηριοτήτων (Δεσλή, 2015). Κατά τη διαδικασία λήψης αποφάσεων, μαθηματικοί τρόποι σκέψης μπορούν να καλλιεργηθούν, καθώς μέσω του παιχνιδιού ενδέχεται να προκύψουν καταστάσεις, ο χειρισμός των οποίων "αναγκάζει" τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τις ήδη υπάρχουσες μαθηματικές κατανοήσεις και να επιστρατεύσουν τις προσωπικές τους στρατηγικές (Jarrell, 1998: 62). Με αυτόν τον τρόπο αξιοποίησής του, το παιχνίδι μπορεί να συμβάλλει στη διδασκαλία των μαθηματικών και να προσφέρει νέες δυνατότητες στη μάθηση, μία από τις οποίες είναι η "ανακάλυψη" του μαθηματικού περιεχομένου και η σύνδεσή του με τις εμπειρίες των παιδιών. Μέσω αυτών των συνδέσεων αναμένεται να αναδειχθούν οι υπάρχουσες ιδέες των παιδιών αναφορικά με τις μαθηματικές έννοιες, με αποτέλεσμα να έρθουν στο προσκήνιο τόσο οι κατανοήσεις όσο και οι παρανοήσεις των μαθητών σε σχέση με το ίδιο το μαθηματικό περιεχόμενο (Dooley, Dunphy & Shiel, 2014).

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ

Στην παρούσα εργασία το παιχνίδι αξιοποιείται με τον υποστηρικτικό του ρόλο στη μάθηση της γεωμετρίας, ιδιαίτερα κατά την πρώτη σχολική ηλικία, γεγονός που επιβεβαιώνεται από τη σχετική βιβλιογραφία, (Σανίδα & Τσιακκούρη, 2005; Τζεκάκη, 2015), και συνδέεται με τους τρόπους ανάπτυξης του γεωμετρικού λογισμού. Ειδικότερα, η πρώτη απόπειρα κατανόησης του τρόπου ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης πραγματοποιήθηκε από τον Piaget, σύμφωνα με τον οποίο το παιδί χειρίζεται και αντιμετωπίζει τον περιβάλλοντα χώρο αρχικά με διαισθητικό τρόπο. Περαιτέρω ερμηνεία και κατανόηση του τρόπου ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης διατυπώθηκε από τους van Hiele (1999), η προσέγγιση των οποίων βασίζεται σε πέντε επίπεδα ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης, τα οποία "απαιτούν" σταδιακή και διαδοχική μετάβαση από το κατώτερο επίπεδο ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης στο ανώτερο. Αυτή η μετάβαση δεν εξαρτάται από την ηλικία, αλλά από τις γεωμετρικές εμπειρίες που το άτομο διαθέτει (van de Walle, 2005). Στο Επίπεδο 0 «Οπτικοποίηση-Αναγνώριση», τα γεωμετρικά σχήματα γίνονται αντιληπτά ως ολότητες και οπτικές εικόνες, οι οποίες αναγνωρίζονται από την εμφάνισή τους (κατηγορίες επιπέδου 0: Ολότητα και Διαίσθηση). Οι μαθητές είναι σε θέση να ταξινομήσουν τα σχήματα με βάση διαισθητικά και όχι μαθηματικά κριτήρια. Στο Επίπεδο 1 «Ανάλυση-Περιγραφή», τα γεωμετρικά σχήματα εξετάζονται ως ομάδες και συλλογές ιδιοτήτων. Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές μπορούν να διακρίνουν τα χαρακτηριστικά και τα συστατικά στοιχεία των σχημάτων, πραγματοποιώντας συσχετισμούς μεταξύ στοιχειών και σχημάτων σε εμπειρικό και πρωταρχικό επίπεδο (κατηγορίες επιπέδου 1: Οπτικοποίηση & Ανάλυση) (Κολέζα & Ντζιαχρήστος, 1990). Στο Επίπεδο 2 «Άτυπη Παραγωγή-Διάταξη», οι σχέσεις μεταξύ των γεωμετρικών σχημάτων και των ιδιοτήτων που διέπουν το καθένα κατανοούνται διαισθητικά και άτυπα. Στο Επίπεδο 3 «Τυπική Παραγωγή-Αφαίρεση», οι ιδιότητες των σχημάτων και οι σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων τους κατανοούνται βάσει μαθηματικών κριτηρίων. Οι μαθητές είναι σε θέση να διαμορφώσουν την προσωπική τους "γεωμετρική θεωρία", η οποία εντάσσεται στα πλαίσια ενός συστήματος αξιωμάτων και ορισμών, η αξία των οποίων πλέον αναγνωρίζεται. Στο Επίπεδο 4 «Αυστηρότητα», γίνεται κατανοητή η σπουδαιότητα της ακρίβειας για τη διατύπωση γεωμετρικών θεωριών. Επιπλέον, τα αξιωματικά συστήματα αναλύονται και συγκρίνονται με μαθηματική ακρίβεια και αυστηρότητα (Πατσιομίτου, 2015).

Η ΜΕΛΕΤΗ

Στα πλαίσια της παρούσας μελέτης, και σε συνεργασία με τις εκπαιδευτικούς δύο τμημάτων Α' τάξης Δημοτικού, διερευνήθηκε η κατανόηση του τρόπου σκέψης και δράσης των μαθητών, καθώς και η συμβολή των "δραστηριοτήτων γεωμετρίας μέσα στο παιχνίδι" στη μάθηση της Γεωμετρίας στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου (Kaldrimidou, Sakonidis & Tzekaki, 2008; Τζεκάκη, 2011). Τα ερευνητικά ερωτήματα που διατυπώθηκαν ήταν τα εξής: (α) πώς προσεγγίζουν οι μαθητές της Α' τάξης Δημοτικού τα γεωμετρικά σχήματα κατά τη διάρκεια ενασχόλησής τους με παιγνιώδεις δραστηριότητες, και (β) κατά πόσο εξαρτάται αυτή η προσέγγιση από το είδος και τον τρόπο υλοποίησης των παιγνιωδών δραστηριοτήτων.

Δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 16 μαθητές της πρώτης τάξης Δημοτικού Σχολείου ημιαστικής περιοχής της Θράκης, ενώ διατηρήθηκε η αναλογία του φύλου (8 αγόρια, 8 κορίτσια). Τα ερευνητικά εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν ήταν η ημιδομημένη παρατήρηση μέσω πέντε παιγνιωδών δραστηριοτήτων και η ημιδομημένη κλινική συνέντευξη, η οποία πραγματοποιήθηκε τόσο κατά τη διάρκεια όσο και μετά το πέρας των παιχνιδιών. Το κάθε ερευνητικό εργαλείο είχε τριμερή δομή που αφορούσε (α) τον *τρόπο σκέψης* των μαθητών σε σχέση με τα παιγνιώδη μαθηματικά έργα, (β) τα *κριτήρια* με βάση τα οποία δρούσαν και (γ) την *αιτιολόγηση* των επιλογών τους.

Οι δραστηριότητες ήταν πέντε και διαμορφώθηκαν έτσι ώστε καθεμία να πληροί έναν στόχο του αναλυτικού προγράμματος της γεωμετρίας της Α' τάξης του Δημοτικού Σχολείου. Η πρώτη δραστηριότητα προήλθε από τον van de Walle (2005) και αφορούσε την *αναγνώριση* των σχημάτων μέσω της ψηλάφησής τους. Στη δεύτερη δραστηριότητα, της *Ταξινόμησης* των σχημάτων (van de Walle, 2005), ζητήθηκε από τους μαθητές να επιλέξουν ένα σχήμα-στόχο και βάσει αυτού να ταξινομήσουν τα υπόλοιπα σχήματα, τοποθετώντας τα στην ίδια ή σε διαφορετική κατηγορία, αιτιολογώντας τα κριτήρια επιλογής. Στην τρίτη δραστηριότητα του *Σχεδιασμού* των σχημάτων, η οποία κατασκευάστηκε από τις ερευνήτριες, οι μαθητές καλούνταν να σχεδιάσουν οικείες γι' αυτούς εικόνες (π.χ. σπίτι, ζώο, άνθρωπο, τρένο), οι οποίες αποτελούνταν από γεωμετρικά σχήματα. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές "υποχρεώνονταν" να σχεδιάσουν τα γεωμετρικά σχήματα των εικόνων που είχαν δοθεί. Στην τέταρτη δραστηριότητα της *Ονομασίας* των σχημάτων χρησιμοποιήθηκε το παιχνίδι του κρυμμένου θησαυρού. Δημιουργήθηκαν αυτοσχέδιοι γρίφοι και οδηγίες, τις οποίες οι μαθητές σε ομάδες καλούνταν να επιλύσουν μέσω της ονομασίας των σχημάτων. Στην πέμπτη δραστηριότητα, αυτή της *Αναπαραγωγής* των σχημάτων, η οποία προέρχεται από τη σχετική βιβλιογραφία (Σκουμπουρδή & Μαλαματένιου, 2015), οι μαθητές καλούνταν να τοποθετήσουν σχήματα πάνω σε επιφάνειες, αιτιολογώντας τις αποφάσεις τους. Πολλές φορές τα σχήματα των επιφανειών (π.χ. τετράγωνο) καλύπτονταν με διαφορετικά σχήματα (π.χ. 4 τρίγωνα), γεγονός που οδηγούσε τους μαθητές να αναπτύσσουν τις ιδέες τους σχετικά με αυτές τις επικαλύψεις. Σε όλες τις δραστηριότητες συμμετείχαν και οι 16 μαθητές (οκτώ αγόρια και οκτώ κορίτσια πρώτης τάξης Δημοτικού). Η διάρκεια ενασχόλησης με τις δραστηριότητες κυμάνθηκε από μία έως δύο διδακτικές ώρες βάσει των απαιτήσεων και των αναγκών που προέκυπταν. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τα δεδομένα που συλλέχθηκαν από την κλινική συνέντευξη.

Η ανάλυση των δεδομένων στηρίχθηκε σε τεχνικές της Ανάλυσης Περιεχομένου και της Θεμελιωμένης Θεωρίας και ακολούθησε τα παρακάτω στάδια: στο *πρώτο στάδιο* πραγματοποιήθηκε προσεκτική ανάγνωση των δεδομένων της συνέντευξης με στόχο την ένταξή τους (όπου αυτό ήταν δυνατό) σε μία ή σε περισσότερες κατηγορίες από κάθε επίπεδο ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης κατά van Hiele (τα δεδομένα εντάχθηκαν κυρίως στο πρώτο αλλά και στο δεύτερο επίπεδο ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης). Έτσι, για την ένταξη των δεδομένων στο Επίπεδο 0 χρησιμοποιήθηκαν οι κατηγορίες "Ολότητα" και "Διαίσθηση", ενώ για την ένταξη στο Επίπεδο 1 χρησιμοποιήθηκαν οι κατηγορίες "Συστατικά Μέρη των σχημάτων" και οι "Συσχετίσεις" μεταξύ τους. Στο *δεύτερο στάδιο* ανάλυσης δημιουργήθηκαν υπο-κατηγορίες για κάθε κατηγορία των επιπέδων 0 και 1 van Hiele με βάση τα δεδομένα από τη συνέντευξη (τις διατυπώσεις των μαθητών). Η οπτικοποίηση του σχήματος, η εμφάνισή του, το σχήμα, το σχέδιό του, η νοερή αναπαράστασή του, η δυνατότητα κάλυψης επιφάνειας με αυτό και το μέγεθός του εντάχθηκαν στην κατηγορία “Ολότητα” του Επιπέδου 0 van Hiele και αποτέλεσαν τις υπο-κατηγορίες της. Η επίκληση στις αισθήσεις και η σύνδεση των σχημάτων με αντικείμενα και με εμπειρίες των παιδιών αποτέλεσαν τις υπο-κατηγορίες στην κατηγορία “Διαίσθηση” του Επιπέδου 0 van Hiele. Στην κατηγορία “Μέρη των Σχημάτων” του Επιπέδου 1 van Hiele εντάχθηκαν απαντήσεις των μαθητών που αναδείκνυαν ως κριτήρια την ύπαρξη ή μη γωνίας ή πλευράς, το είδος και τον αριθμό γωνίας και πλευράς, τον προσανατολισμό και την ένταση κάποιου χαρακτηριστικού. Τέλος, αν και εντοπίστηκαν ελάχιστες αναφορές σχετικές με τον συσχετισμό των σχημάτων με βάση την εμφάνισή τους ή το είδος των πλευρών τους, καταχωρήθηκαν ως υπο-κατηγορίες της κατηγορίας “Συσχετίσεις” του Επιπέδου 1 van Hiele. Όταν οι απαντήσεις του δείγματος αναδείκνυαν μια νέα κατηγορία εκτός των επιπέδων van Hiele, τότε αυτή καταγραφόταν ως χωριστή κατηγορία και επιχειρούνταν να διερευνηθεί κατά πόσο χρησιμοποιείται και από άλλους μαθητές.

Επιπρόσθετα, κάθε απάντηση βαθμολογούνταν σε μια κλίμακα 1-3, όπου ως “ασθενείς” (βαθμός 1) αξιολογήθηκαν οι απαντήσεις στις οποίες υπήρχε απλή αναφορά από τον μαθητή στο κριτήριο επιλογής και στον τρόπο δράσης («Τα έβαλα εδώ γιατί μοιάζουν»). Ως “μέτριες” (βαθμός 2), κρίθηκαν οι απαντήσεις στις οποίες παρουσιαζόταν μια σύντομη επεξήγηση («Μοιάζουν στις γραμμές»), ενώ ως “ισχυρές” (βαθμός 3) θεωρήθηκαν οι απαντήσεις στις οποίες αναδεικνύονταν περισσότερα του ενός επεξηγηματικά χαρακτηριστικά και κριτήρια («Μοιάζουν στις γραμμές, είναι όλες ίσιες»).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα δεδομένα της έρευνας που αφορούσαν τον χειρισμό των γεωμετρικών σχημάτων εντάχθηκαν στα επίπεδα 0 και 1 των van Hiele. Σε σχέση με το *πρώτο ερευνητικό ερώτημα*, οι μαθητές χειρίστηκαν τα σχήματα <u>ολιστικά</u> στηριζόμενοι στην καθολική τους εικόνα, <u>διαισθητικά</u>, στηριζόμενοι στις αισθήσεις και τις εμπειρίες τους (Επίπεδο 0 van Hiele), και <u>αναλυτικά</u>, λαμβάνοντας υπόψη τα συστατικά στοιχεία και μέρη των σχημάτων (Επίπεδο 1 van Hiele).

Οι μαθητές που χειρίστηκαν τα γεωμετρικά σχήματα διαισθητικά, συνέδεσαν τα σχήματα με οικεία αντικείμενα του περιβάλλοντός τους και με τις προσωπικές τους εμπειρίες. Πολλές φορές, οι μαθητές επικαλούνταν τη διαίσθησή τους αναδεικνύοντάς την ως κριτήριο της δράσης τους, ιδιαίτερα σε στιγμές αμηχανίας και δυσκολίας χειρισμού των σχημάτων. Παρακάτω παρατίθενται ενδεικτικά ορισμένα σχετικά αποσπάσματα.

> Το πιάνω, το γυρνάω και γυρίζει, κάνει γύρω-γύρω και είναι κυκλικό. Πάει συνέχεια κύκλος, δεν πάει ευθεία. (Λάμπρος)

> Το σχήμα (έλλειψη) είναι μισοφέγγαρο. Είναι έτσι, δηλαδή έχει στροφή, εδώ έχει κύκλο. Και γραμμή έχει. Το έχω ξαναδεί αυτό στο φεγγάρι. Το σχήμα είναι σαν το φεγγάρι, μισοφέγγαρο. (Στράτος)

> Το σχήμα αυτό (πολύγωνο) μοιάζει σαν πατάτα. Μου θυμίζει πατάτα γιατί η μαμά μου, όταν καθαρίζει τις πατάτες, έτσι είναι, τέτοιο σχήμα έχουν, όπως να 'ναι. (Σοφία)

Ο χειρισμός όμως των σχημάτων δεν περιορίστηκε στο διαισθητικό επίπεδο. Έλαβε και άλλες μορφές, μία από τις οποίες ήταν η ολιστική. Τα σχήματα προσεγγίζονταν με βάση τη συνολική τους εικόνα και εμφάνιση. Οι μαθητές λειτούργησαν με κριτήριο την ολότητα των σχημάτων, νοηματοδοτώντας την κατεξοχήν ως καθολικό σχήμα και σχέδιο των σχημάτων.

> Το σχήμα που πιάνω είναι κύκλος γιατί είναι όλο στρογγυλό. Το ακούμπησα και το κατάλαβα επειδή είναι κυκλικό. Το έπιασα ολόκληρο και είναι κυκλικό. Το έπιασα, οι γωνίες είναι έτσι, γύρω-γύρω. (Ειρήνη)

Εκτός των παραπάνω προσεγγίσεων τα σχήματα προσεγγίστηκαν και με αναφορά στα συστατικά τους μέρη, δηλαδή αναλυτικά. Κατά την αναλυτική προσέγγιση των σχημάτων κυριάρχησαν ο αριθμός των πλευρών και το είδος τους.

> Για να φτιάξω τα χέρια έβαλα ορθογώνιο γιατί αν έβαζα τρίγωνο, δεν θα περπατούσε καλά, θα περπατούσε στις μύτες, να έτσι. Το ορθογώνιο μάς βοηθάει να σηκωθούμε, να κάτσουμε, να περπατήσουμε γιατί είναι ίσιο στις γραμμές. Είναι 4 γραμμές. Και τα χέρια μας είναι μακριά και μπορούμε να πιάσουμε χέρια μακριά και γι' αυτό το ορθογώνιο που είναι μακρύ μπαίνει στα χέρια. Το τετράγωνο δεν θα μπορούσε να μπει για χέρι γιατί θα ήταν κοντό και χοντρό. (Πάρης)

Με βάση τη σχετική βιβλιογραφία (ΙΕΠ, 2014: 66) η αναλυτική προσέγγιση αποτελεί μια δύσκολη διαδικασία και μετάβαση για τους μαθητές, γεγονός που δεν επιβεβαιώθηκε στην παρούσα ερευνητική προσπάθεια, καθώς οι μαθητές, σε πολλές περιπτώσεις, παρέπεμπαν σε μέρη των σχημάτων. Σε άλλες περιπτώσεις, η αναφορά στα συστατικά στοιχεία δεν παρεμπόδιζε την ταυτόχρονη ολιστική αντίληψη του σχήματος.

> Τετράγωνο: τέσσερις γραμμές και τέσσερις γωνίες. Τετράγωνο: Είναι χοντρό και πιο μικρό. Οι γραμμές πρέπει να είναι χοντρούτσικες. Προσέχω ότι έχω 4 γωνίες και 4 γραμμές, πάνω στο τετράγωνο, ίσα-ίσα το υπολογίζω. Υπολογίζω τις γραμμές και τις γωνίες και τις φτιάχνω. Οι γραμμές να είναι κάπως χοντρές. Οι γραμμές του να είναι όλες ίσες. Όλες χοντρές, μικρές. Όλες ίσες. (Αλεξάνδρα)

Τέλος, προέκυψαν αναφορές των μαθητών, οι οποίες αναδείκνυαν νέες κατηγορίες που δεν σχετίζονταν με την ολότητα ή με τα μέρη των σχημάτων. Παράδειγμα αποτελεί η κατηγορία της γειτνίασης:

> Τα έβαλα μαζί γιατί ήταν δίπλα-δίπλα. (Χριστίνα)

Μέσω του παιχνιδιού, σε πολλές περιπτώσεις πραγματοποιούνταν συσχετισμοί-συνδέσεις μεταξύ χαρακτηριστικών του κάθε επιπέδου (π.χ. συσχετισμός μεγέθους-κάλυψης επιφάνειας: «Πρέπει να έχουν το ίδιο σχήμα και μέγεθος για να το καλύπτει, να χωράει»). Αυτές οι συνδέσεις μεταξύ των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης δεν φαίνεται να αναφέρονται στη βιβλιογραφία ως απόρροια του παιχνιδιού. Διευκρινίζεται ωστόσο ότι μέσω του παιχνιδιού οι μαθητές μπορούν να υλοποιήσουν συνδέσεις γενικά μεταξύ των γνώσεων και των εμπειριών στις οποίες μετέχουν (Dooley, Dunphy & Shiel, 2014).

Οι παραπάνω προσεγγίσεις επηρεάστηκαν από το είδος των παιγνιωδών δραστηριοτήτων και από τον τρόπο υλοποίησής τους. Έτσι, σε σχέση με το *δεύτερο ερευνητικό ερώτημα* και ανεξάρτητα από το είδος των παιγνιωδών δραστηριοτήτων, οι μαθητές προσέγγιζαν σταθερά τα σχήματα με διαισθητικό τρόπο, συνδέοντάς τα με οικεία αντικείμενα και με τις εμπειρίες τους. Οι μαθητές υιοθετούσαν περισσότερο την προσέγγιση αυτή σε στιγμές που δυσκολεύονταν να αναγνωρίσουν τα σχήματα ή σε περιπτώσεις μη εξοικείωσής τους με αυτά. Αυτή η δυσκολία αντιμετώπισης και η μη οικειότητα αναδείχθηκε από την ίδια τη δομή των παιγνιωδών δραστηριοτήτων. Ακόμη, η ολιστική και η αναλυτική προσέγγιση των σχημάτων λάμβανε σε κάθε δραστηριότητα άλλη μορφή, με κυρίαρχες για την πρώτη το σχήμα και το σχέδιο και για τη δεύτερη τον αριθμό και το είδος των πλευρών. Έτσι, για την Ολιστική Προσέγγιση προέκυψαν επιπρόσθετες κατηγορίες (η Οπτικοποίηση, η Εμφάνιση, η Νοερή Αναπαράσταση, η Κάλυψη Επιφάνειας και το Μέγεθος), ενώ για την Αναλυτική Προσέγγιση προέκυψαν οι πρόσθετες κατηγορίες Ύπαρξη ή μη Πλευράς και Γωνίας, Αριθμός και Είδος των γωνιών, Προσανατολισμός του Σχήματος και Ένταση του

Χαρακτηριστικού των Σχημάτων. Η ανάδειξη αυτών των κατηγοριών εμφανίστηκε σε διαφορετική κάθε φορά δραστηριότητα και επηρεάστηκε από το είδος της, τη δομή της και από τον τρόπο υλοποίησής της από την ερευνήτρια. Ενδεικτικά παρατίθεται η εμφάνιση της κατηγορίας "Ένταση Χαρακτηριστικού", μόνο στη δραστηριότητα της Ταξινόμησης, όπου και δόθηκαν στα παιδιά μη οικεία και στερεοτυπικά σχήματα, τα οποία αποτελούνταν τόσο από καμπύλες όσο και από ευθείες γραμμές. Οι μαθητές ανταποκρίθηκαν χρησιμοποιώντας ως κριτήριο ένα χαρακτηριστικό του σχήματος, ενώ διαφοροποιήθηκαν ως προς τον βαθμό αναφοράς σε αυτό το χαρακτηριστικό, τοποθετώντας τα μη οικεία σχήματα σε αυτήν την κατηγορία ανάλογα με το κυρίαρχο χαρακτηριστικό τους ["στο μεγαλύτερο μέρος είναι στρόγγυλο, θα μπει με τους κύκλους (Ειρήνη)].

ΣΥΖΗΤΗΣΗ- ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ο βαθμός ανάδειξης των ιδεών των μαθητών και των προσεγγίσεων που υιοθετούνται για τα σχήματα επηρεάζεται, μεταξύ άλλων, και από το είδος των παιγνιωδών δραστηριοτήτων και τον τρόπο υλοποίησής τους. Στη συγκεκριμένη έρευνα οι παιγνιώδεις δραστηριότητες είχαν στοχοθεσία, αναφέρονταν σε συγκεκριμένο μαθηματικό έργο επίλυσης και προσέφεραν τη δυνατότητα λήψης απόφασης. Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με τις συνεντεύξεις που ακολούθησαν, έδωσαν τη δυνατότητα στους μαθητές να εκφράσουν τις ιδέες τους για τα γεωμετρικά σχήματα και να προσδιορίσουν τα κριτήριά τους κατά τον χειρισμό των σχημάτων, εύρημα που υποστηρίζεται και από τη βιβλιογραφία (Fisher & Frey, 2014). Οι ιδέες των παιδιών αναφορικά με τα σχήματα ήταν διαισθητικές, ολιστικές (αναφέρονταν στην καθολική τους εικόνα) και αναλυτικές (αναφέρονταν στα στοιχεία των σχημάτων). Η βιβλιογραφία πριμοδοτεί τον διαισθητικό και τον ολιστικό χειρισμό των σχημάτων στην πρώτη σχολική ηλικία, (ΙΕΠ, 2014), όχι όμως και τον αναλυτικό, ο οποίος θεωρείται ένα δύσκολο επίτευγμα για τη συγκεκριμένη ηλικιακή ομάδα. Η εμφάνιση αναλυτικού χειρισμού ωστόσο στα πλαίσια της παρούσας έρευνας μπορεί να αποδοθεί στο είδος και στον τρόπο υλοποίησης των παιγνιωδών δραστηριοτήτων, οι οποίες επέτρεψαν τη μετάβαση από το ένα επίπεδο σκέψης στο άλλο. Αυτό το πέρασμα εξαρτάται σημαντικά από τη δομή του παιχνιδιού και από τον τρόπο αξιοποίησής του (Σκουμπουρδή, 2015). Στις δραστηριότητες που ακολουθήθηκε διερευνητική προσέγγιση (δραστηριότητα Ψηλάφησης, Ταξινόμησης, Σχεδιασμού), με στόχο την ανάδειξη των κριτηρίων και των τρόπων σκέψης των παιδιών, η μετάβαση μεταξύ των επιπέδων σκέψης συντελέσθηκε με μεγαλύτερη επιτυχία και από μεγαλύτερο αριθμό μαθητών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Dockett, S. & Perry, B. (2010). What makes Mathematics Play? In L. Sparrow, B. Kissane & C. Hurst (Eds), *Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia: Shaping the Future of Mathematics Education*. Fremantle: Merga.

Dooley, T., Dunply, E. & Shiel, G. (2014). *Mathematics in Early Childhood and Primary Education (3-8 years). Teaching and Learning*. Dublin: NCCA.

Fisher, D. & Frey, N. (2014). Better Learning Through Structured Teaching. A framework for the Gradual Release of Responsibility. In *Teacher Resource Library*. 2nd Edition. Alexandria, VA USA: ASCD.

Jarrell, R. H. (1998). Play and its Influence on the Development of Young Children's Mathematical Thinking. In D. Pronin Fromberg & D. Bergen (Eds), *Play From Birth to Twelve and Beyond*. *Contexts, Perspectives and Meanings*. 56-67. New York: Garland Publishing, INC.

van de Walle, J. (2005). *Μαθηματικά για το δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια εξελικτική διδασκαλία*. Αθήνα: Τυπωθήτω.

van Hiele, P.M. (1999). Developing Geometric Thinking through Activities that begin with play. *Teaching children Mathematics NCTM*, 310-316.

Δεσλή, Δ. (2015). Κάνοντας μαθηματικά μέσα από παιχνίδι: οι αλλαγές στις απόψεις των μαθητών. Στα *πρακτικά του 1ου Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή: «Ανάπτυξη Εκπαιδευτικού Υλικού στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες»*, σελ. 759-769. Ρόδος.

ΙΕΠ (2014). *Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση (Δημοτικό). Οδηγός για τον Εκπαιδευτικό «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων».* Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Kaldrimidou, M., Sakonidis, H. & Tzekaki, M. (2003). Teachers' intervention in students' mathematical work: a classification. In M.A. Mariotti (Eds). *Proceedings of Cerme 2*. University of Pisa: Italy, 3 (12): 1-11.

Kaldrimidou, M., Sakonidis, C. & Tzekaki, M (2008). *Comparative readings of the nature of the mathematical knowledge under construction in the classroom*, ZDM, 39: 235-245.

Κολέζα, Ε. & Ντζιαχρήστος, Β. (1990). Η Διδασκαλία της Γεωμετρίας στα Σχολεία: Επίπεδα P.M. van Hiele. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, 37, 11-23.

Πατσιομίτου, Σ. (2015). Η ανάπτυξη ικανότητας εργαλειακής αποκωδικοποίησης νοητικών αναπαραστάσεων των μαθητών ως μη γλωσσική εγγύηση στην ανάπτυξη της γεωμετρικής τους σκέψης. *Νέος Παιδαγωγός*, 5, 29-60.

Σανίδα, Ε. & Τσιακκούρη, Γ. (2005). *Μάθηση και διδασκαλία Γεωμετρικών Εννοιών στο Δημοτικό Σχολείο: Η Περίπτωση των τετραπλεύρων*. Πτυχιακή Εργασία. Αλεξανδρούπολη: ΔΠΘ/ ΠΤΔΕ.

Σκουμπουρδή, Χ. & Μαλαματένιου, Π.Κ. (2015). Παιχνίδι κάλυψης επιφάνειας για το Νηπιαγωγείο. Στα *πρακτικά του 1ου Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή: «Ανάπτυξη Εκπαιδευτικού Υλικού στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες»*. Σελ. 174-182. Ρόδος.

Σκουμπουρδή, Χ. (2015). *Το παιχνίδι στη Μαθηματική Εκπαίδευση των μικρών παιδιών.* Αθήνα: ΣΕΑΒ/ Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα.

Τζεκάκη, Μ. (2011). Μαθηματική Δραστηριότητα και Μαθηματικά έργα. *Στα πρακτικά του 4ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών: «Η τάξη ως πεδίο ανάπτυξης της μαθηματικής δραστηριότητας»,* σελ. 51-66. Ιωάννινα.

Τζεκάκη, Μ. (2015). Μαθηματική Δραστηριότητα μέσα στο Παιχνίδι και στο Εκπαιδευτικό Υλικό. Στο Χ. Σκουμπουρδή & Μ. Σκουμιός (Επιμ.), Πρακτικά του *1ου Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή «Ανάπτυξη Εκπαιδευτικού Υλικού στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες»*. 60-71. Ρόδος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου/Σχολή Ανθρωπιστικών Επιστημών.

Χασάπης, Δ. (2012). Το παιχνίδι στη Μάθηση και τη Διδασκαλία των Μαθηματικών. Στο Χασάπης, Δ. (Επιμ.), *Πρακτικά 10ου Διήμερου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, «Το παιχνίδι στη Μάθηση και τη Διδασκαλία των Μαθηματικών»*. 67-88. Αθήνα: Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών/ Τμήμα Εκπαίδευσης και Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία.

ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΤΙΣ Ε΄ ΚΑΙ ΣΤ΄ ΤΑΞΕΙΣ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

Χαραλάμπους Γιάννης, Παναούρα Ρίτα

Πανεπιστήμιο Frederick,

yianch@cytanet.com.cy, pre.pm@frederick.ac.cy

Η παρούσα πειραματική έρευνα, στην οποία συμμετείχαν 851 μαθητές, είχε σκοπό να εξετάσει τις επιδράσεις ενός παρεμβατικού προγράμματος, το οποίο αποτελείται από μια σειρά έργων μαθηματικής μοντελοποίησης, στην επίδοσή τους στη λύση προβλήματος. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η επίδοση της πειραματικής ομάδας ήταν στατιστικά σημαντικά ψηλότερη από αυτή της ομάδας ελέγχου. Παρουσιάζεται σε συντομία το θεωρητικό πλαίσιο της μαθηματικής μοντελοποίησης, αναλυτικά ο σχεδιασμός της έρευνας και της πειραματικής παρέμβασης, και συζητείται η σημασία διερεύνησης του θέματος της αξιοποίησης της μοντελοποίησης στη διδασκαλία των μαθηματικών, μετά την παρουσίαση των αποτελεσμάτων προκαταρκτικών αναλύσεων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η λύση προβλήματος αναγνωρίζεται ως μια σημαντική δεξιότητα ζωής, η οποία εμπλέκει ένα ευρύ φάσμα διαδικασιών, όπως η ανάλυση, η ερμηνεία, η πρόβλεψη, η αξιολόγηση και ο αναστοχασμός, και αποτελεί πρωταρχικό στόχο ή βασικό συστατικό του σχολικού αναλυτικού προγράμματος των μαθηματικών σε πολλές χώρες (Aderson, 2009).

Οι Lesh και Zawojewski (2007) προτείνουν με βάση την προσέγγιση της μοντελοποίησης τον ακόλουθο ορισμό ως λύση προβλήματος: ένα έργο ή μια στοχευμένη δραστηριότητα, αποτελεί πρόβλημα (ή προβληματική κατάσταση), όταν ο «λύτης του προβλήματος» (που μπορεί να είναι και μια συνεργατική ομάδα) χρειάζεται να αναπτύξει ένα πιο παραγωγικό τρόπο σκέψης για τη δεδομένη κατάσταση. «Ένα πιο παραγωγικό τρόπο σκέψης» σημαίνει ότι είναι αναγκαίο ο λύτης να εμπλακεί σε μια διαδικασία ερμηνείας της κατάστασης, η οποία στα μαθηματικά σημαίνει μοντελοποίηση (Zawojewski, 2013).

Υπό την προοπτική των μοντέλων και της μοντελοποίησης, τα προβλήματα μοντελοποίησης είναι ρεαλιστικές πολύπλοκες καταστάσεις, όπου ο λύτης του προβλήματος εμπλέκεται σε μαθηματικούς συλλογισμούς πέρα από τη συνηθισμένη σχολική εμπειρία και όπου η γενίκευση των αποτελεσμάτων συχνά περιλαμβάνει πολύπλοκα έγγραφα ή εννοιολογικά εργαλεία, τα οποία είναι αναγκαία για κάποιο σκοπό, ή για να επιτευχθεί ένας στόχος (Lesh and Zawojewski, 2007).

Παρόλο που η μοντελοποίηση στα Μαθηματικά έχει συνδεθεί κυρίως με τα επίπεδα της Ανώτερης Δευτεροβάθμιας (Λύκειο) και της Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης (Greer, Verschaffel & Mukhopadhyay, 2007), πρόσφατες έρευνες κατέδειξαν πως οι μαθητές επιπέδου Δημοτικής και Κατώτερης Δευτεροβάθμιας (English, 2006, English & Watters, 2005) μπορούν να εργαστούν αποτελεσματικά με δραστηριότητες μοντελοποίησης. Η παρούσα έρευνα φιλοδοξεί να συνεισφέρει στο κενό που υπάρχει στο χώρο της δημοτικής εκπαίδευσης, ιδιαίτερα σε ποσοτικής φύσεως έρευνες στον τομέα της μαθηματικής μοντελοποίησης.

Σύμφωνα με τον Barbosa (2006) η μαθηματική μοντελοποίηση ορίζεται ως το μαθησιακό περιβάλλον, όπου οι μαθητές καλούνται να λύσουν προβλήματα μέσα από την καθημερινή ζωή, επαγγελματικές περιοχές ή καταστάσεις από επιστημονικούς τομείς, μέσω των μαθηματικών. Μαθησιακό περιβάλλον είναι οι κοινωνικές συνθήκες που παρέχονται στους μαθητές για ανάπτυξη κάποιων δραστηριοτήτων (Barbosa, 2006). Οι Confrey και Maloney (2007) εισηγούνται μια αναλυτικότερη περιγραφή και δηλώνουν πως η μαθηματική μοντελοποίηση είναι η διαδικασία όπου απαντάται μια απροσδιόριστη κατάσταση, την μετατρέπει σε πρόβλημα, χρησιμοποιεί την έρευνα, αιτιολόγηση και μαθηματικές δομές για να μπορέσει να μετασχηματίσει την κατάσταση. Η μοντελοποίηση παράγει ένα προϊόν, ένα μοντέλο, το οποίο είναι μια περιγραφή ή μια αναπαράσταση της κατάστασης, που προέρχεται από τις μαθηματικές επιστήμες, σε σχέση με τις εμπειρίες του ατόμου, το οποίο άτομο έχει αλλάξει μέσα από τις διαδικασίες μοντελοποίησης.

Η μαθηματική μοντελοποίηση παρέχει μεθόδους για ανάλυση δεδομένων, σχηματισμό θεωριών (οι οποίες συχνά εκφράζονται με συμβολικές μαθηματικές φόρμες) και αξιολόγηση αυτών των θεωριών, καθώς επίσης συμβάλλει στην οριοθέτηση διαδικασιών επίλυσης προβλήματος (Sokolowski, 2015). Τα πιο ισχυρά επιχειρήματα για τη μοντελοποίηση βασίζονται στην άποψη ότι είναι επωφελής στην ανάπτυξη της σκέψης των μαθητών, η οποία επιτυγχάνεται με τη μετατόπιση της εστίασης της μάθησης, από την εύρεση μοναδικών λύσεων, στην ενίσχυση των ικανοτήτων ανάπτυξης γενικών διαδικασιών λύσης με τον μετασχηματισμό και ερμηνεία των πληροφοριών, κατασκευή μοντέλων και εγκυροποίηση των μοντέλων (Confrey, 2007).

Η παρούσα εργασία στοχεύει στη διερεύνηση του κύριου ερωτήματος: Ποιες είναι οι επιδράσεις ενός παρεμβατικού προγράμματος, το οποίο αποτελείται από μια σειρά δραστηριοτήτων μαθηματικής μοντελοποίησης, στην επίδοση σε σχέση με τη λύση προβλήματος και τις ικανότητες μαθηματικής μοντελοποίησης των μαθητών;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Σχεδιασμός και δείγμα

Η έρευνα είναι ένας οιονεί πειραματικός σχεδιασμός, καθώς δεν υπήρχε δυνατότητα τυχαίας κατανομής των ατόμων στις δυο ομάδες. Έγινε τυχαία κατανομή των τμημάτων που θα συμμετείχαν στις ομάδες της έρευνας και ακολουθήθηκε η διαδικασία που φαίνεται στον Πίνακα 1.

Τυχαία ανάθεση	Ομάδα Ελέγχου	Προέλεγχος	Καμιά Μεταχείριση	Μεταέλεγχος	Αργοπορημένος Έλεγχος
Τυχαία ανάθεση	Πειραματική Ομάδα	Προέλεγχος	Πειραματική Μεταχείριση	Μεταέλεγχος	Αργοπορημένος Έλεγχος

Πίνακας 1: Δομή πειραματικού σχεδιασμού

Στην έρευνα συμμετείχαν 851 μαθητές της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης δημόσιων δημοτικών σχολείων. Δόθηκαν έντυπα συγκατάθεσης γονέων για εξασφάλιση της σχετικής άδειας σε 998 μαθητές και επιστράφηκαν πίσω θετικά συμπληρωμένα 908, ποσοστό θετικής ανταπόκρισης 91%. Από τους 908 μαθητές το τελικό δείγμα κατέληξε στους 851, καθώς 20 μαθητές απουσίαζαν από την πρώτη μέτρηση και άλλοι 29 μαθητές απουσίαζαν από τη δεύτερη. Επίσης, στο χρονικό διάστημα μεταξύ της πρώτης και δεύτερης μέτρησης, 3 μαθητές μεταγράφηκαν σε άλλο σχολείο, 3 μαθητές μετοίκησαν στο εξωτερικό και 2 δεν συμπλήρωσαν το ερωτηματολόγιο ορθά και ολοκληρωμένα.

Παρέμβαση

Το παρεμβατικό πρόγραμμα περιλάμβανε πέντε προβλήματα μαθηματικής μοντελοποίησης. Η εφαρμογή του προγράμματος ξεκίνησε αμέσως μετά τις διακοπές των Χριστουγέννων, την πρώτη εργάσιμη για τα σχολεία, βδομάδα του Γενάρη και ολοκληρώθηκε περίπου στα μέσα Μαρτίου. Η διδασκαλία και επίλυση των πέντε δραστηριοτήτων γινόταν περίπου κάθε δύο βδομάδες. Η σειρά εκτέλεσης καθορίστηκε με βάση το βαθμό δυσκολίας της κάθε δραστηριότητας. Στις δραστηριότητες οι μαθητές καλούνταν να προτείνουν στον «πελάτη» :1) την καλύτερη, ανάμεσα σε δύο, προσφορά εργασίας, 2) την κατάταξη σε σειρά των πέντε πρώτων καλύτερων αντισφαιριστριών, 3) την καλύτερη πόλη για μόνιμη εγκατάσταση, δ) τον πολυτιμότερο καλαθοσφαιριστή της περιόδου (Σχεδιάγραμμα 1) και 5) την αποτελεσματικότητα ενός προπονητικού προγράμματος για χάσιμο περιττών κιλών ενός φοιτητή-αθλητή.

Ο πολυτιμότερος καλαθοσφαιριστής της περιόδου 2015-16

Η Ευρωπαϊκή Ομοσπονδία Καλαθοσφαίρισης θέλει να αναδείξει τον πολυτιμότερο καλαθοσφαιριστή που αγωνίζεται στην Ευρώπη για την αγωνιστική περίοδο 2015-16. Ο πίνακας που ακολουθεί παρουσιάζει τα στατικά στοιχεία του κάθε υποψήφιου.

Βοήθα την Ομοσπονδία να αναδείξει τον πολυτιμότερο καλαθοσφαιριστή.

Πίνακας 1: Μέσοι όροι των καλαθοσφαιριστών ανά κατηγορία

Καλαθοσφαιριστής	Λεπτά συμμετοχής	Πόντοι	Ρημπάουντ	Ασίστ	Κλεψίματα	Λάθη
Τεοντοσίτς Μίλος	28:11	14.8	2.8	7	0.8	3.7
Φερνάντεθ Ρούντι	27:24	12.7	3.4	3.3	1.5	1.3
Σπανούλης Βασίλης	28:07	14.4	1.8	5.5	0.8	3.1
Πρίντεζης Γιώργος	25:16	12.2	4.8	1	0.2	1.1
Ροντρίγκεθ Σέρχιο	21:34	11.1	1.4	5.1	1	1.3
Γουίμς Σόνι	26;56	13.1	4	3.4	1	2.2
Μπιέλιτσα Νεμάνια	27:45	12.1	8.5	1.9	1.3	1.5

Σχεδιάγραμμα 1: Ο πολυτιμότερος καλαθοσφαιριστής

Οι σύνθετες αυτές δραστηριότητες χαρακτηρίζονται από ανοικτότητα σε λύσεις. Οι πολλαπλές λύσεις προκύπτουν είτε από την απουσία μεταβλητών, που πρέπει να καθοριστούν από το άτομο που επιλύει το πρόβλημα είτε από τα διαφορετικά μαθηματικά, διαφορετικές μεθόδους που υιοθετούνται προς επίλυση του προβλήματος (Schukajlow & Krug, 2013).

Τα μαθήματα διενεργήθηκαν από τους εκπαιδευτικούς μαθηματικών των τμημάτων. Η διδασκαλία και των πέντε δραστηριοτήτων έγινε με την ίδια μεθοδολογία, εφόσον οι εκπαιδευτικοί είχαν τύχει σχετικής επιμόρφωσης και γινόταν κατά τη διάρκεια έλεγχος. Κατά τη ίδια χρονική περίοδο η ομάδα ελέγχου ασχολήθηκε με την επίλυση προβλημάτων που περιλαμβάνονταν στα σχολικά βιβλία, κυρίως ρουτίνας, και διαδικασίας.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται σε συντομία, το διδακτικό πλάνο που εφάρμοσαν οι εκπαιδευτικοί , το οποίο αποτελείται από τέσσερις φάσεις:

Γενική δομή μαθήματος επίλυσης δραστηριότητας μοντελοποίησης

Α. Εισαγωγή

Οι μαθητές διαβάζουν ατομικά και πολύ προσεκτικά τη δραστηριότητα, προσπαθούν να φανταστούν ξεκάθαρα την κατάσταση, συζητούν για λίγο στην ομάδα τους και έπειτα ακολουθεί συζήτηση του εκπαιδευτικού με την ολότητα της τάξης. Ο εκπαιδευτικός υποβάλλει μερικές απλές ερωτήσεις σε σχέση με τη δραστηριότητα, που ονομάζονται «ερωτήσεις ετοιμότητας».

Β. Εργασία στις ομάδες

Β1. Σε αυτή τη φάση οι μαθητές εργαζόμενοι ομαδικά καλούνται να απλοποιήσουν την κατάσταση. Πρέπει να ψάξουν για τα δεδομένα που χρειάζονται. Αν είναι αναγκαίο να κάνουν υποθέσεις, να καθορίσουν μεταβλητές που τους ενδιαφέρουν και είναι απαραίτητες για την επίλυση της δραστηριότητας και να ψάξουν για μαθηματικές σχέσεις.

Β2. Χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα μαθηματικά, αυτά που η ομάδα κατέχει, ή και πιθανόν κάτι καινούριο το οποίο θα βγει μέσα από τις διαδικασίες, καταλήγει σε ένα μοντέλο, που θα την οδηγήσει στη λύση της δραστηριότητας. Η ομάδα καταγράφει το μαθηματικό αποτέλεσμα. Συνδέει το αποτέλεσμα με τη δραστηριότητα.

Γ. Εργασία στην ολότητα της τάξης

Γ1. Η κάθε ομάδα παρουσιάζει το μοντέλο που κατασκεύασε για να λύσει το πρόβλημα καθώς και το μαθηματικό αποτέλεσμα. Επεξηγεί και αιτιολογεί τις επιλογές της, επιλύει τυχόν απορίες και δίνει διευκρινίσεις.

Γ2. Οι μαθητές σε μια συζήτηση στην ολότητα της τάξης, συζητούν, κρίνουν τα μοντέλα και τις λύσεις, προσπαθώντας να δουν ποιο από αυτά ανταποκρίνεται περισσότερο στις απαιτήσεις της δραστηριότητας. Ο εκπαιδευτικός συνοψίζει τις βασικές ιδέες και σημεία/σταθμούς της λύσης του προβλήματος.

Δ. Καταγραφή και επεξήγηση του αποτελέσματος

Η ομάδα καταλήγει στην τελική απάντηση, λύση που θα δώσει. Γίνεται καταγραφή της τελικής λύσης, του τελικού αποτελέσματος και αναλυτική περιγραφή της διαδικασίας (του μοντέλου) που ακολουθήθηκε για να εξαχθεί το τελικό αποτέλεσμα.

Βασικές αρχές διδασκαλίας

Οι εκπαιδευτικοί της πειραματικής ομάδας κατά την διεξαγωγή των μαθημάτων του παρεμβατικού προγράμματος υιοθέτησαν βασικές αρχές διδασκαλίας στην επίλυση προβλημάτων μοντελοποίησης. Οι τρεις κυριότερες αρχές ήταν οι ακόλουθες: α) Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να δίνεται χρόνος στους μαθητές για να σκεφτούν β) Συνεργατική, αυτοκαθοδηγούμενη μάθηση με την υποστήριξη του εκπαιδευτικού. Υπάρχει μια σταθερή ισορροπία ανάμεσα στην ανεξαρτησία των μαθητών και την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού, σύμφωνα με τη γνωστή «Αρχή της ελάχιστης υποστήριξης» του Aebli (Blum, 2015) και γ) Οι παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού πρέπει να γίνονται μόνο όταν είναι πραγματικά απαραίτητες. Ιδιαίτερα αποτελεσματικές για την μοντελοποίηση είναι οι παρεμβάσεις στρατηγικής.

Επιμόρφωση εκπαιδευτικών πειραματικής ομάδας

Όλοι οι εκπαιδευτικοί της πειραματικής ομάδας έτυχαν επιμόρφωσης στο θέμα της διδασκαλίας δραστηριοτήτων μαθηματικής μοντελοποίησης, η οποία διήρκησε δύο μήνες και ήταν πριν την υλοποίηση της παρέμβασης. Όλοι οι εκπαιδευτικοί έλαβαν το πακέτο επιμόρφωσης, το οποίο περιλάμβανε: α) Σύντομο θεωρητικό πλαίσιο για τη διδασκαλία της μαθηματική μοντελοποίηση και το ρόλο του εκπαιδευτικού σε αυτήν β) Τη γενική δομή του μαθήματος επίλυσης δραστηριότητας μοντελοποίησης, γ) Τις πέντε δραστηριότητες και τα αντίστοιχα βοηθήματα για τους εκπαιδευτικούς, δ) Αρχές διδασκαλίας δραστηριοτήτων μοντελοποίησης, ε) Σύντομο οδηγό – Λίστα ελέγχου, στ) Χρονοδιάγραμμα και ζ) Ένα βιντεογραφημένο δειγματικό μάθημα.

Με την παρέλευση ενός χρονικού διαστήματος, τουλάχιστον δυο εβδομάδων, ακολούθησαν δίωρες επιμορφωτικές συναντήσεις των εκπαιδευτικών με τον ερευνητή. Οι επιμορφωτικές συναντήσεις ήταν είτε ατομικές (ένας εκπαιδευτικός και ο ερευνητής) είτε ομαδικές (δυο ή τρεις εκπαιδευτικοί το μέγιστο).

Εργαλεία μέτρησης

Για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας, χρησιμοποιήθηκαν τα ακόλουθα δυο εργαλεία συλλογής ποσοτικών δεδομένων: α) Δοκίμιο Αξιολόγησης Ικανοτήτων Μοντελοποίησης στη Λύση Προβλήματος και β) Ερωτηματολόγιο Μέτρησης Στάσεων και Πεποιθήσεων απέναντι στα Μαθηματικά.

Το Δοκίμιο Αξιολόγησης Ικανοτήτων Μοντελοποίησης στη Λύση Προβλήματος οικοδομήθηκε και εγκυροποιήθηκε με επιτυχία σε πιλοτική φάση της έρευνας, σε τέσσερις ισοδύναμες παραλλαγές. Για τις ανάγκες οικοδόμησης του δοκιμίου αξιολόγησης, χρησιμοποιήθηκαν τρεις τύποι προβλημάτων, που αξιολογούν αντίστοιχα τρεις ευρείς τομείς επίλυσης προβλήματος. Οι τρεις τύποι είναι: α) Λήψη απόφασης β) Ανάλυση συστήματος και σχεδιασμός και γ) Αντιμετώπιση προβληματικής κατάστασης. Σύμφωνα με τον OECD (2003) αυτοί οι τρεις τύποι προβλήματος παρέχουν τις γενικές δομές, με τις οποίες οι διαδικασίες λύσης προβλήματος μπορούν να αξιολογηθούν. Συνολικά χρησιμοποιήθηκαν εννέα έργα, τρία από κάθε είδος. Κάθε δοκίμιο αποτελείται από έξι έργα και ο χρόνος επίλυσης του ανέρχεται στα 60 λεπτά.

Το ερωτηματολόγιο μέτρησης στάσεων και πεποιθήσεων απέναντι στα Μαθηματικά που χρησιμοποίηθηκε στην έρευνα είναι το ερωτηματολόγιο Attitudes Toward Mathematics Inventory (ATMI) των Tapia και Marsh (1996), όπως αυτό τροποποιήθηκε από τους Majeed, Darmawan και Lynch (2013).

Πέρα από τα δεδομένα που συλλέχτηκαν με τα προαναφερθέντα κύρια εργαλεία μέτρησης, δεδομένα για την έρευνα αποτελούν και τα φύλλα εργασίας των ομάδων εργασίας των μαθητών της πειραματικής ομάδας, καθώς επίσης και μη δομημένες συνεντεύξεις που πάρθηκαν από τους εκπαιδευτικούς της πειραματικής.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

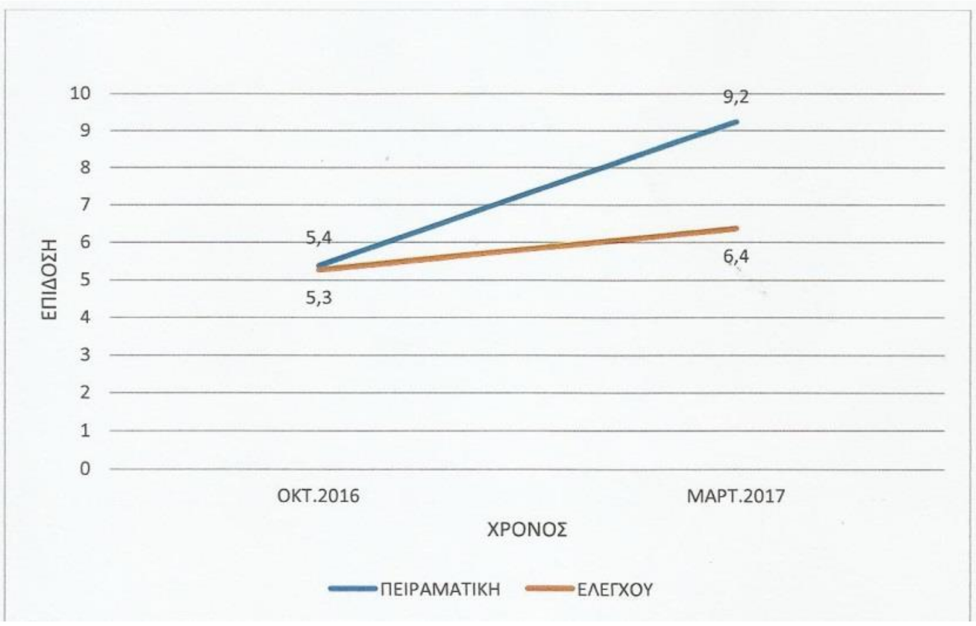
Στο παρόν άρθρο παρουσιάζονται μόνο τα αποτελέσματα των δύο πρώτων μετρήσεων και μόνο για την ικανότητα μοντελοποίησης σε σχέση με την ομάδα, τα οποία απαντούν στο ερευνητικό ερώτημα που τέθηκε. Ο Πίνακας 2 παρουσιάζει τη σύνθεση των δυο ομάδων τόσο σε σχέση με το φύλο όσο και με την τάξη, καθώς και τους μέσους όρους της κάθε ομάδας.

Ομάδα	**Κορίτσια**	**Αγόρια**	**Ε΄τάξη**	**ΣΤ΄τάξη**	**Σύνολο**	**Μ.Ο pre**	**Μ.Ο post**
Πειραματική	**221 (49.8)**	**223 (50.2)**	**197 (44.4)**	**247 (55.6)**	**444**	**5.4 (3.9)**	**9.2 (3.9)**
Ελέγχου	**197 (48.4)**	**210 (51.6)**	**205 (50.4)**	**202 (49.6)**	**407**	**5.3 (3.1)**	**6.4 (3.5)**

Πίνακας 2: Σύνθεση των ομάδων και Μέσοι Όροι

Για να διερευνηθεί πιθανή διαφορά στους μέσους όρους της ικανότητας μαθηματικής μοντελοποίησης διενεργήθηκαν δύο t-test για ανεξάρτητα δείγματα. Ένα για την επίδοση των ομάδων, πειραματικής και ελέγχου, πριν την εφαρμογή της παρέμβασης (pre-test) και ένα για την επίδοση των ομάδων μετά την παρέμβαση (post-test). Η πρώτη ανάλυση κατέδειξε ότι δεν υπήρχε στατιστικά σημαντική διαφορά στους μέσους όρους της κλίμακας της ικανότητας μαθηματικής μοντελοποίησης μεταξύ πειραματικής και ομάδας ελέγχου, $t(849)= .587$, $p=.557$, με τις δυο ομάδες, πειραματική και ελέγχου, να μην έχουν ουσιαστική διαφορά στους μέσους όρους (5.4±3.2 και 5.3±3.1 αντίστοιχα).

Σε αντίθεση, η δεύτερη ανάλυση κατέδειξε ότι υπήρχε στατιστικά σημαντική διαφορά στους μέσους όρους της κλίμακας της ικανότητας μαθηματικής μοντελοποίησης μεταξύ πειραματικής και ομάδας ελέγχου, t(849)= 10.78, p<0,001, με τις δυο ομάδες να έχουν ουσιαστική διαφορά στους μέσους όρους (9.2±3.9 και 6.4±3.5 αντίστοιχα).



Διάγραμμα 1

Η διαφορά των δυο ομάδων στην επίδοση στην ικανότητα μαθηματικής μοντελοποίησης στις δυο μετρήσεις παρουσιάζεται και στο διάγραμμα 1.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ- ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα πρώτα ενδεικτικά αποτελέσματα από την αρχική ανάλυση μέρους των δεδομένων καταδεικνύουν την αποτελεσματικότητα του παρεμβατικού προγράμματος στην ανάπτυξη της ικανότητας μοντελοποίησης και τη δυνατότητα των μαθητών δημοτικής να εργαστούν αποτελεσματικά σε δραστηριότητες μοντελοποίησης.

Η παρούσα έρευνα, με τις περαιτέρω αναλύσεις στη συνέχεια φιλοδοξεί να συνεισφέρει τα μέγιστα στο χώρο της μαθηματικής μοντελοποίησης σε επίπεδο Δημοτικής. Ανάμεσα στις έρευνες που αφορούν τη Δημοτική, η έρευνα πρωτοτυπεί σε μεθοδογική προσέγγιση καθώς οι πλείστες προσεγγίζουν το θέμα ποιοτικά (π.χ. Lehrer & Schauble, 2000, English & Watters, 2005, English, 2006, English 2008). Κι άλλες πειραματικές έρευνες έχουν καταδείξει την ικανότητα των μαθητών να εργαστούν αποτελεσματικά, αλλά οι σημαντικότερες έρευνες τέτοιας μορφής, πειραματικού σχεδιασμού, της τελευταίας εικοσαετίας αφορούν την Μέση και Ανώτερη Εκπαίδευση (Sokolowski, 2015).

Ακόμη, μια σημαντική έρευνα των Mischo & Maab (2012) με μαθητές 6ης, διερευνά ποιοι προσωπικοί παράγοντες επηρεάζουν τη μοντελοποίηση και όχι με τη δυνατότητα να εργαστούν αποτελεσματικά. Σημαντικό στοιχείο για την παρούσα έρευνα είναι ότι έχει συγκριτικά με το χώρο της, μεγάλο δείγμα, αρκετά μεγαλύτερο απ' όλες όσες αφορά η πλέον πρόσφατη μετα-ανάλυση (Sokolowski, 2015). Συμπερασματικά η παρέμβαση αυτή καταδεικνύει κάποιες κατευθύνσεις που μπορεί να πάρει η έρευνα για αξιοποίηση της μαθηματικής μοντελοποίησης στο επίπεδο της δημοτικής εκπαίδευσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Aderson, J. (2009). Mathematics curriculum development and the role of problem solving. ACSA National Biennial Conference Curriculum: a national conversation, 2-4 October 2009, Canberra, ACT

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: A critical and discursive perspective. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 38* (3), 293–301.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modeling: What do we know, what we can do. Στο S.J. Cho (Επιμ.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, DOI 10.1007/978-3-319-12688-3_9

Confrey, J (2007). Epistemology and Modelling-Overview. Στο W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn, & M. Niss (Επιμ.), *Modelling and applications in mathematics education:The 14th ICMI Study* (pp. 125-128). New York, NY: Springer.

Confrey, J., & Maloney, A. (2007). A theory of mathematical modelling in technological settings. Στο W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn, & M. Niss (Επιμ.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI Study* (pp. 57-68). New York, NY: Springer.

English, L. D. (2006). Mathematical modeling in the primary school: Children's construction of a consumer guide. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 303-323.

English, L. D. (2008). Promoting interdisciplinarity through mathematical modeling. *ZDM Mathematics Education*, 41, 161-181.

English, L. and Watters, J. (2005). Mathematical modeling with 9-year-olds. Στο Chick, H. L. & Vinsent, J. L. (Επιμ.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 297-304. Melbourne:PME.

Greer, B., Verschaffel, L., & Mukhopadhyay, S. (2007). Modelling for life: Mathematics and children's experience. Στο W. Blum, W. Henne, and M. Niss (Επιμ.), *Applications and modelling in mathematics education* (ICMI Study 14). Dordrecht: Kluwer.

Lehrer, R., & Schauble, L. (2000). Inventing data structures for representational purposes: Elemetary grade students' classification models, *Mathematical Thinking and Learning*, 2, 1-2, 51-74.

Lesh, R.,& Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. Στο F. Lester (Επιμ..), *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 763– 804). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Majeed, A. A., Darmawan G. N., & Lynch P. (2013). A confirmatory factor analysis of attitudes toward mathematics inventory (ATMI). *The Mathematics Educator*. 15(1), 121-135.

Mischo, C., & Maab, K. (2012). Which personal factors affect mathematical modeling? The effects of abilities, domain specific and cross domain-competences and beliefs on performance in mathematical modeling. *Journal of Mathematical Modeling and Applications*, 1, 7, 3-19.

Organization for Economics Co-Operation and Development [OECD] (2003). *The PISA 2003: Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*, http://www.oecd.org/edu/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/33694881.pdf. Ανάκληση 18.09.2015.

Schukajliow, S., & Krug, A. (2013). Uncertainty orientation, preference for solving task with multiple solutions and modeling. Στο *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* Antalya, February 6-10, 1429-1438.

Sokolowski, A. (2015). The effects of mathematical modeling on students' achievement- meta-analysis of research. *The JAFOR jornal of education,* 3 (1), 93-114.

Zawojewski, J. (2013). Problem solving versus modeling. Στο R. Lesh, P.L. Galbraith, C.R. Haines, & A. Hurford (Επιμ.), *Modeling students' mathematical modeling competencies*, 531-538. New York, NY: Springer.

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΚΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Η ΣΧΕΣΗ ΚΑΙ Ο ΡΟΛΟΣ ΤΟΥΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΠΡΩΙΜΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ

Χειμωνή Μαρία και Πίττα-Πανταζή Δήμητρα

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου, Πανεπιστήμιο Κύπρου

himonis@cytanet.com.cy, dpitta@ucy.ac.cy

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η διερεύνηση των ικανοτήτων των μαθητών για γενίκευση και απόδειξη κατά την επίλυση έργων πρώιμης άλγεβρας. Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν 684 μαθητές ηλικίας 10 έως 13 ετών, οι οποίοι εξετάστηκαν σε ένα γραπτό δοκίμιο. Η ποσοτική ανάλυση των δεδομένων έδειξε ότι υπήρχαν 4 διακριτές ομάδες μαθητών, οι οποίες παρουσίασαν διαφορετική επίδοση στα έργα του δοκιμίου. Η ποιοτική ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών σε συγκεκριμένα έργα έδειξε ότι υπήρχαν διαφοροποιήσεις μεταξύ των 4 ομάδων ως προς τη φύση και τα χαρακτηριστικά των διαδικασιών γενίκευσης και απόδειξης που προσπάθησαν να αναπτύξουν. Τα αποτελέσματα αυτά φανερώνουν την ύπαρξη διαφορετικών επιπέδων στις ικανότητες για γενίκευση και απόδειξη, υποδεικνύοντας παράλληλα και την ύπαρξη διαφορετικών επιπέδων στην πρώιμη αλγεβρική σκέψη των μαθητών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στην εισαγωγή της άλγεβρας στα μαθηματικά του δημοτικού σχολείου (π.χ. NCTM 2000). Η ιδέα αυτή οδήγησε πολλούς ερευνητές στη μελέτη της αλγεβρική σκέψης και στην προσπάθεια προσδιορισμού των βασικών χαρακτηριστικών της. Πολλές ερευνητικές εργασίες περιέγραψαν την αλγεβρική σκέψη ως μια “συνήθεια του μυαλού” που επιτρέπει στους μαθητές να αναγνωρίσουν τη δομή και τις σχέσεις στα μαθηματικά και η οποία είναι δυνατόν να αναπτυχθεί από τα πρώτα κιόλας χρόνια της σχολικής τους ζωής (π.χ. Blanton & Kaput, 2005). Επιπλέον, διαφάνηκε, μέσα από τη διαθέσιμη βιβλιογραφία, ότι η ικανότητα αυτή είναι πολυδιάστατη και διασυνδέεται με μια πληθώρα μαθηματικών διαδικασιών, όπως η αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών, η πρόβλεψη, η εικασία, η γενίκευση, η αιτιολόγηση και η επικύρωση.

Στο πλαίσιο αυτό, πολλοί ερευνητές υποστήριξαν ότι οι αλγεβρικές διαδικασίες διασυνδέονται άμεσα με τις διαδικασίες απόδειξης (π.χ. Lannin, 2005). Παράλληλα, υποστηρίχθηκε ότι η ενίσχυση της άλγεβρας στο δημοτικό σχολείο δεν μπορεί να διαχωριστεί από την ενίσχυση της απόδειξης. Όπως αναφέρεται και στις Αρχές του NCTM (2000) για τα σχολικά μαθηματικά, δύο τομείς που χρειάζεται να ενισχυθούν μέσα από τα αναλυτικά προγράμματα και τη διδασκαλία, τόσο στην πρωτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, είναι η άλγεβρα και η απόδειξη.

Παρά τα σημαντικά ευρήματα της προϋπάρχουσας έρευνας για τη σχέση της άλγεβρας και της απόδειξης, υπάρχουν ακόμα αναπάντητα ερωτήματα, τα οποία εστιάζονται στο κατά πόσο οι μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης είναι ικανοί να ανταπεξέλθουν σε δραστηριότητες άλγεβρας και απόδειξης. Η παρούσα εργασία αποτελεί μια προσπάθεια περιγραφής των ικανοτήτων των μαθητών ηλικίας 10 έως 13 ετών για γενίκευση και απόδειξη, με σκοπό την περαιτέρω ανάλυση της σχέσης άλγεβρας και απόδειξης, αλλά και του ρόλου που οι δύο αυτές διαδικασίες διαδραματίζουν στην ανάπτυξη της πρώιμης αλγεβρικής σκέψης.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η σχέση μεταξύ άλγεβρας και απόδειξης

Πολλές ερευνητικές εργασίες ανέδειξαν τον σημαντικό ρόλο της άλγεβρας σε μαθηματικές δραστηριότητες που απαιτούν την τεκμηρίωση αποδείξεων (π.χ. Lannin, 2005· Pedemonte, 2008). Συγκεκριμένα, υποστηρίχθηκε ότι η άλγεβρα και η απόδειξη διασυνδέονται από τη φύση τους, εξαιτίας της σχέσης που έχουν και οι δύο με τη διαδικασία της γενίκευσης.

Οι Blanton και Kaput (2005) επισήμαναν ότι η άλγεβρα και η απόδειξη συνυπάρχουν σε δραστηριότητες όπου οι μαθητές: (α) χρησιμοποιούν γενικεύσεις, για να οικοδομήσουν νέες γενικεύσεις, (β) προσπαθούν να γενικεύσουν μια μαθηματική διαδικασία ή έναν τύπο και (γ) ελέγχουν εικασίες, αιτιολογούν και αποδεικνύουν. Οι διαδικασίες αυτές αντανακλούν υψηλά επίπεδα αλγεβρικής σκέψης. Εντούτοις, ακόμα και οι μικρότεροι σε ηλικία μαθητές είναι δυνατόν να αναπτύξουν αυτές τις ικανότητες μέσα από κατάλληλα περιβάλλοντα μάθησης.

Επίπεδα στην εξέλιξη των ικανοτήτων για γενίκευση και απόδειξη

Ο Radford (2008) υποστήριξε ότι ο τρόπος που οι μαθητές χρησιμοποιούν και αναπαριστούν σχέσεις και αντικείμενα, με σκοπό τη διαμόρφωση γενικεύσεων, είναι δυνατόν να παρουσιάσει διαφοροποιήσεις, υποδεικνύοντας διαφορετικά επίπεδα της ικανότητας για γενίκευση. Ειδικότερα, υπάρχουν μαθητές που χρησιμοποιούν αριθμητικές πράξεις για την αναπαράσταση μιας γενίκευσης, ενώ άλλοι περιγράφουν τη σχέση μεταξύ συγκεκριμένων αντικειμένων. Τέλος, υπάρχουν μαθητές που χρησιμοποιούν σύμβολα. Σε αυτό το πλαίσιο, μια γενίκευση μπορεί να εκφραστεί με πολλαπλούς τρόπους, όπως λόγια, εικόνες, χειρονομίες, σύμβολα και άλλα αντικείμενα που σχετίζονται με την κουλτούρα του ατόμου (Radford 2008).

Παράλληλα, η διαθέσιμη βιβλιογραφία παρέχει στοιχεία για την ύπαρξη διαφορετικών επιπέδων στην ικανότητα των μαθητών για απόδειξη. Σύμφωνα με τους Russell, Schifter και Bastable (2011), οι νεαροί μαθητές είναι δύσκολο να αναπτύξουν διαδικασίες τυπικής μαθηματικής απόδειξης. Ωστόσο, είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουν διάφορες στρατηγικές και εργαλεία, όπως αριθμητικά παραδείγματα, σχέδια, μοντέλα και σενάρια, όταν προσπαθούν να αποδείξουν την ισχύ ορισμένων υποθέσεων. Για τον λόγο αυτό, συνήθως, στο δημοτικό σχολείο χρησιμοποιείται ο όρος «αιτιολόγηση» σε αντικατάσταση του όρου «απόδειξη», ώστε να ληφθούν υπόψη όλα τα διαφορετικά επιχειρήματα που μπορούν να προβάλουν οι μαθητές.

Ερευνητές (π.χ. Lannin, 2005) που μελέτησαν την ικανότητα μαθητών για αιτιολόγηση, έδειξαν ότι η ικανότητα αυτή εξελίσσεται μέσα από διαφορετικά επίπεδα. Σε ένα πρωταρχικό επίπεδο, η αιτιολόγηση στηρίζεται σε εξωτερικά παραδείγματα. Σε ένα επόμενο επίπεδο, η αιτιολόγηση προκύπτει από ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Τέλος, η αιτιολόγηση αναπτύσσεται στη βάση μαθηματικού συλλογισμού.

Δραστηριότητες γενίκευσης και απόδειξης

Η διερεύνηση μοτίβων έχει προταθεί ως μια κατάλληλη δραστηριότητα που δίνει ευκαιρίες στους μαθητές για εντοπισμό κανονικοτήτων, διατύπωση εικασιών και κατασκευή επιχειρημάτων (NCTM, 2000). Η διαδικασία της γενίκευσης, η οποία έχει πρωτεύοντα ρόλο στην αναγνώριση και περιγραφή του γενικού κανόνα σε ένα μοτίβο, οδηγεί στην ανάπτυξη επαγωγικών επιχειρημάτων και στη μαθηματική επαγωγική απόδειξη (Pedemonte 2008). Πολλές έρευνες εντόπισαν ότι οι μαθητές, στο πλαίσιο δραστηριοτήτων με μοτίβα, είναι δυνατόν να αξιοποιήσουν πολλαπλές στρατηγικές και εργαλεία. Οι Stephens et al. (2012) έδειξαν ότι οι μαθητές προσεγγίζουν αρχικά τα μοτίβα με τη χρήση επαναληπτικών (recursive) στρατηγικών και στη συνέχεια, μετά από κατάλληλες διδακτικές παρεμβάσεις, είναι σε θέση να αναπαραστήσουν σχέσεις συνδιακύμανσης και κανόνες αντιστοιχίας με τη χρήση φυσικής γλώσσας ή μεταβλητών. Επίσης, ορισμένοι ερευνητές (π.χ. Warren, Cooper & Lamb, 2006) παρατήρησαν ότι οι πίνακες με δύο σύνολα τιμών υποβοηθούν την κατανόηση της σχέσης που διέπει ένα μοτίβο.

Πέρα από τις δραστηριότητες με μοτίβα, οι Russell, Schifter και Bastable (2011) εισηγήθηκαν ότι έργα του τύπου «ποιο είναι το αποτέλεσμα της πρόσθεσης δύο άρτιων αριθμών;» προκαλούν τους μαθητές να αναπτύξουν διαδικασίες επικύρωσης ιδεών. Με τον τρόπο αυτό ενδυναμώνεται η ικανότητα των μαθητών για κατασκευή υποθέσεων και απόδειξη.

ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Η παρούσα εργασία αποσκοπεί στη διερεύνηση των ικανοτήτων γενίκευσης και απόδειξης των μαθητών σε έργα πρώιμης άλγεβρας. Τα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας είναι:

1. Υπάρχουν διακριτές ομάδες μαθητών που επιδεικνύουν διαφορετικά επίπεδα ικανοτήτων για γενίκευση και απόδειξη;
2. Ποια είναι τα χαρακτηριστικά των διαδικασιών γενίκευσης και απόδειξης που εφαρμόζουν μαθητές διαφορετικών επιπέδων;

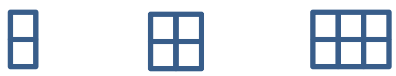
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες και Διαδικασία

Οι συμμετέχοντες ήταν συνολικά 684 μαθητές: 170 από τη Δ’ τάξη, 164 από την Ε’ τάξη, 184 από τη Στ’ τάξη και 166 από την Α’ Γυμνασίου. Οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν ένα δοκίμιο που περιλάμβανε ποικίλα έργα πρώιμης άλγεβρας, έχοντας στη διάθεσή τους 40 λεπτά.

Δοκίμιο Αλγεβρικής Σκέψης

Η ανάπτυξη του δοκιμίου βασίστηκε στην προσαρμογή έργων που χρησιμοποιήθηκαν σε προηγούμενες έρευνες (π.χ. Blanton & Kaput, 2005). Στο δοκίμιο συμπεριλήφθηκαν συνολικά 18 έργα. Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει παραδείγματα των έργων. Στα πλαίσιο της παρούσας εργασίας, η ανάλυση των αποτελεσμάτων επικεντρώνεται στην επίδοση και τις στρατηγικές των μαθητών σε έργα που ζητούσαν την αναγνώριση και περιγραφή μοτίβων και σε έργα που αναφέρονταν σε ιδιότητες άρτιων και περιττών αριθμών.

Αναγνώριση του γενικού κανόνα σε σχηματικό μοτίβο	Ο Βασίλης τοποθετεί τετράγωνα με τον ακόλουθο τρόπο:  *Σχήμα 1* *Σχήμα 2* *Σχήμα 3* Πόσα τετράγωνα θα υπάρχουν στο 16^{ο} σχήμα;
Εφαρμογή ιδιοτήτων άρτιων και περιττών αριθμών	Συμφωνείς με την πιο κάτω δήλωση; Να αιτιολογήσεις την απάντησή σου. *«Το άθροισμα δύο ζυγών αριθμών είναι πάντα μονός αριθμός».*

Πίνακας 1: Παραδείγματα έργων

Ανάλυση δεδομένων

Για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πακέτο MPLUS. Συγκεκριμένα, πραγματοποιήθηκε η ανάλυση Latent Class, η οποία επιτρέπει τον εντοπισμό ομάδων μαθητών με παρόμοια συμπεριφορά στα έργα του δοκιμίου. Το στατιστικό πακέτο SPSS αξιοποιήθηκε για τη διεξαγωγή περιγραφικών στατιστικών και ανάλυσης διασποράς (ANOVA). Επιπλέον, οι απαντήσεις των μαθητών σε συγκεκριμένα έργα μελετήθηκαν ποιοτικά, ώστε να διαφωτιστεί η φύση των διαδικασιών γενίκευσης και απόδειξης που εφάρμοσαν. Συγκεκριμένα, αξιολογήθηκε το είδος των στρατηγικών και των αναπαραστάσεων που αξιοποίησαν, για να αναπτύξουν διαδικασίες γενίκευσης και απόδειξης, όπως αριθμητικές στρατηγικές, χρήση φυσικής γλώσσας, σχεδίων ή πινάκων, αλγεβρικών συμβόλων / μεταβλητών.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Υπάρχουν διακριτές ομάδες μαθητών που επιδεικνύουν διαφορετικά επίπεδα ικανοτήτων γενίκευσης και απόδειξης;

Με βάση τις επιδόσεις των μαθητών στο γραπτό δοκίμιο, η ανάλυση Latent Class έδειξε ότι οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα μπορούσαν να διαχωριστούν σε 4 διακριτές ομάδες. Το αποτέλεσμα αυτό υποδεικνύει ότι κάθε ομάδα μαθητών έχει διαφορετική επίδοση στα έργα του δοκιμίου σε σχέση με τις άλλες ομάδες, αντανακλώντας διαφορετικά επίπεδα ικανοτήτων.

Ο Πίνακας 2 παρουσιάζει τα ποσοστά των μαθητών για κάθε ομάδα ανά τάξη. Η πλειοψηφία των μαθητών της Δ’ τάξης συμπεριλήφθηκε στην Ομάδα 1 (47.1%). Περίπου ίσος αριθμός μαθητών της Ε τάξης συμπεριλήφθηκε στην Ομάδα 1 και την Ομάδα 4 (29.9% και 29.3% αντίστοιχα). Το μεγαλύτερο ποσοστό μαθητών της Στ’ τάξης συμπεριλήφθηκε στην Ομάδα 4 (30,4%), όπως και της Α’ Γυμνασίου (33.1%).

	Ομάδα 1	Ομάδα 2	Ομάδα 3	Ομάδα 4
Δ’ Δημοτικού	47.1 %	16.5%	24.7%	11.8%
Ε’ Δημοτικού	29.9%	18.9%	22%	29.3%
Στ’ Δημοτικού	25%	22.8%	21.7%	30.4%
Α’ Γυμνασίου	24.1%	18.7%	24.1%	33.1%
Σύνολο	31.4%	19.3%	23.1%	26.2%

Πίνακας 2: Ποσοστά μαθητών για κάθε ομάδα

Ο πίνακας 3 παρουσιάζει την επίδοση των μαθητών κάθε ομάδας στο δοκίμιο. Φαίνεται ότι κάθε ομάδα είχε ψηλότερο μέσο όρο σε σχέση με την προηγούμενη ομάδα. Ο μέσος όρος της Ομάδας 1 (0.202) ήταν χαμηλός, υποδηλώνοντας ότι οι μαθητές αυτοί αντιμετώπισαν δυσκολίες στην επίλυση των έργων. Ο μέσος όρος της Ομάδας 2 (0.394) ήταν πιο ψηλός από τον μέσο όρο της Ομάδας 1, όπως και ο μέσος όρος της Ομάδας 3 (0,521) ήταν πιο ψηλός από αυτόν της Ομάδας 2. Ο μέσος όρος της Ομάδας 4 (0,709) ήταν πιο ψηλός από τον μέσο όρο της Ομάδας 3.

	Ομάδα 1 n=215		Ομάδα 2 n=158		Ομάδα 3 n=132		Ομάδα 4 n=179	
Επίδοση στο δοκίμιο	Μ.Ο.	Τ.Α	Μ.Ο	Τ.Α	Μ.Ο	Τ.Α	Μ.Ο	Τ.Α
	.202	.128	.394	.130	.521	.161	.709	.173

Πίνακας 3: Μέσος όρος κάθε ομάδας στο δοκίμιο

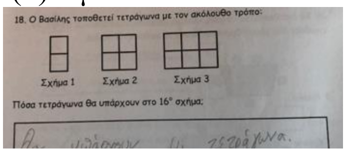
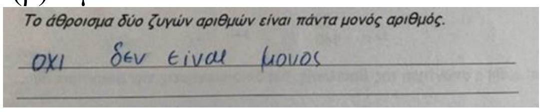
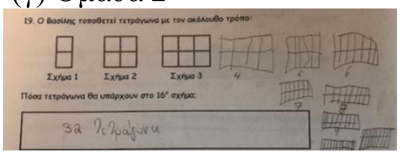
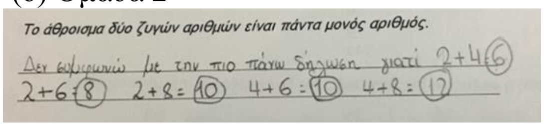
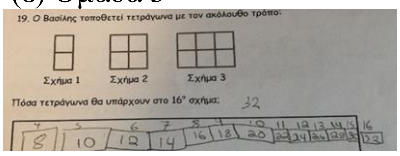
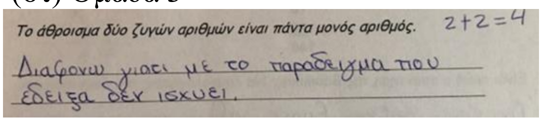
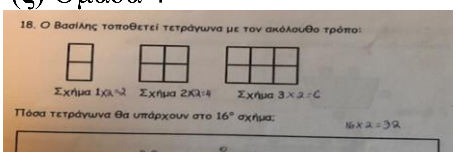
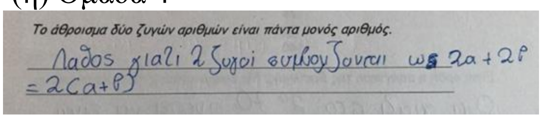
Τα αποτελέσματα της ανάλυσης διασποράς (ANOVA) έδειξαν ότι οι διαφορές ως προς την επίδοση των μαθητών των 4 ομάδων ήταν στατιστικά σημαντικές ($F= 558.306$, $p<.01$).

Ποια είναι τα χαρακτηριστικά των διαδικασιών γενίκευσης και απόδειξης που εφαρμόζουν μαθητές διαφορετικών επιπέδων;

Η ποιοτική ανάλυση των απαντήσεων που δόθηκαν από τους μαθητές κάθε ομάδας σε συγκεκριμένα έργα του δοκιμίου, υπέδειξε διαφορές ως προς τη φύση και τα χαρακτηριστικά των διαδικασιών γενίκευσης και απόδειξης που προσπάθησαν να αναπτύξουν. Στην Εικόνα 1 παρουσιάζονται ενδεικτικές απαντήσεις των μαθητών κάθε ομάδας σε ένα έργο με σχηματικό μοτίβο και ένα έργο που αφορούσε ιδιότητες άρτιων και περιττών αριθμών.

Ομάδα 1: Οι μαθητές της Ομάδας 1 δεν κατάφεραν να επιλύσουν με επιτυχία τα έργα με μοτίβα. Όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 1(α), έδωσαν μια λανθασμένη απάντηση για τον αριθμό των τετραγώνων, χωρίς να επεξηγήσουν τη διαδικασία που ακολούθησαν, ώστε να διαφανεί κατά πόσο προσπάθησαν να αναπτύξουν μια γενίκευση. Επιπλέον, οι μαθητές της Ομάδας 1 δεν κατάφεραν να επιλύσουν με επιτυχία τα έργα που αναφέρονταν σε ιδιότητες άρτιων και περιττών αριθμών. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 1(β), φαίνεται να μην προσπάθησαν να επεξηγήσουν τον συλλογισμό τους, ώστε να επιβεβαιώσουν την ορθότητα της απάντησής τους. Γενικότερα, οι μαθητές αυτοί φαίνεται να μην ήταν ικανοί να εκφράσουν διαδικασίες γενίκευσης και απόδειξης.

Ομάδα 2: Οι μαθητές της Ομάδας 2 κατάφεραν να επιλύσουν ορισμένα έργα με μοτίβα, όπως αυτό που παρουσιάζεται στην Εικόνα 1(γ). Οι μαθητές αυτοί φαίνεται να είχαν παρατηρήσει μια κανονικότητα στον αριθμό των τετραγώνων σε διαδοχικά σχήματα και εφάρμοσαν επαναληπτικές στρατηγικές. Για να αναπαραστήσουν τους επόμενους όρους, κατασκεύασαν σχέδια. Εντούτοις, δεν πρόσεξαν τη σχέση που έχει ο αριθμός των τετραγώνων σε κάθε σχήμα με τη θέση του σχήματος. Επομένως, η στρατηγική που ακολούθησαν δεν τους επέτρεψε να καταλήξουν σε έναν γενικό κανόνα για τον υπολογισμό του αριθμού των τετραγώνων σε οποιοδήποτε σχήμα του μοτίβου. Η αιτιολόγηση της απάντησής τους εστιάστηκε στα συγκεκριμένα παραδείγματα που είχαν αναπαραστήσει με σχέδια. Στο έργο με τις ιδιότητες άρτιων και περιττών αριθμών, κατασκεύασαν παραδείγματα πρόσθεσης άρτιων αριθμών, για να δείξουν ότι η δήλωση είναι λανθασμένη. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 1(δ), η αιτιολόγηση της απάντησής τους στηρίζεται στα αποτελέσματα των παραδειγμάτων τους και όχι στην ισχύ μιας γενικής ιδιότητας. Φαίνεται λοιπόν ότι οι μαθητές αυτοί χρησιμοποίησαν βήμα προς βήμα διαδικασίες και διαισθητικές στρατηγικές, οι οποίες δεν τους επέτρεψαν να φτάσουν σε επαγωγικό συλλογισμό. Τα νέα δεδομένα που κατασκεύασαν (π.χ. το σχέδιο, τα αθροίσματα) δεν τους οδήγησαν σε γενικά συμπεράσματα.

(α) Ομάδα 1  	(β) Ομάδα 1 
(γ) Ομάδα 2  	(δ) Ομάδα 2 
(ε) Ομάδα 3  	(στ) Ομάδα 3 
(ζ) Ομάδα 4  	(η) Ομάδα 4 

Εικόνα 1: Χαρακτηριστικά παραδείγματα απαντήσεων των μαθητών.

Ομάδα 3: Στα έργα με μοτίβα, οι μαθητές της Ομάδας 3 φαίνεται να είχαν αναγνωρίσει την ύπαρξη δύο μεταβλητών (θέση σχήματος και αριθμός τετραγώνων) και ανέπτυξαν μια διαδικασία εικασίας για τη σχέση που υπάρχει ανάμεσά τους. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 1(ε), κατασκεύασαν έναν πίνακα με δύο σύνολα τιμών. Η αιτιολόγηση της απάντησής τους φαίνεται να βασίζεται στην αναγνώριση μιας σχέσης συνδιακύμανσης, η οποία, ωστόσο, αιτιολογείται με βάση τα συγκεκριμένα αριθμητικά δεδομένα, από το σχήμα 1 μέχρι και το σχήμα 16. Στο έργο με τις ιδιότητες άρτιων και περιττών αριθμών, όπως φαίνεται στην Εικόνα 1(στ), οι μαθητές αυτοί, σε σύγκριση με τους μαθητές της Ομάδας 2, έδειξαν ότι δεν χρειάζονταν πολλά παραδείγματα, για να επιβεβαιώσουν ότι δεν ισχύει η δήλωση. Χρησιμοποίησαν ένα παράδειγμα, χωρίς να επικεντρωθούν στο συγκεκριμένο αποτέλεσμα, δείχνοντας ότι δύο άρτιοι αριθμοί δεν είναι δυνατόν να δώσουν ως άθροισμα έναν περιττό αριθμό. Γενικά, οι μαθητές της Ομάδας 3 χρησιμοποίησαν πιο σύντομες διαδικασίες, για να δημιουργήσουν νέα δεδομένα, τα οποία τους οδήγησαν σε επαγωγικό συλλογισμό. Ωστόσο, οι μαθητές αυτοί δεν προχώρησαν στη διατύπωση μιας γενικής σχέσης ή ιδιότητας. Έτσι, η διαδικασία γενίκευσης και αιτιολόγησης που ακολούθησαν στηρίζεται στην περιγραφή των αντικειμένων και της σχέσης τους σε ένα συγκεκριμένο συγκείμενο (Radford 2008).

Ομάδα 4: Στο έργο με μοτίβο, οι μαθητές της Ομάδας 4 φαίνεται να παρατήρησαν έναν κανόνα αντιστοιχίας. Όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 1(ζ), χρησιμοποίησαν μια εξίσωση, για να αναπαραστήσουν τη σχέση, η οποία συνδέει μια ανεξάρτητη μεταβλητή (τη θέση του σχήματος) και μια εξαρτημένη μεταβλητή (τον αριθμό των τετραγώνων). Με βάση τη σχέση αυτή, αιτιολόγησαν την απάντησή τους σχετικά με το σχήμα 16, χωρίς να βρουν όλους τους ενδιάμεσους όρους. Φαίνεται λοιπόν ότι η διαδικασία γενίκευσης που ανέπτυξαν οι μαθητές αυτοί βασίζεται στη κατασκευή ενός μοντέλου εξίσωσης. Η απάντηση των μαθητών στο έργο με τις ιδιότητες των άρτιων και περιττών αριθμών στην Εικόνα 1(η) δείχνει ότι ανέπτυξαν μια διαδικασία απόδειξης, η οποία ποιοτικά διαφέρει από αυτές των προηγούμενων ομάδων. Δεν χρειάστηκε να εκτελέσουν πράξεις, για να αιτιολογήσουν την απάντησή τους, αλλά χρησιμοποιήσαν σύμβολα, για να αναπαραστήσουν αλγεβρικά δύο άρτιους αριθμούς και να δείξουν τι συμβαίνει όταν προστεθούν. Η αιτιολόγησή τους βασίζεται και πάλι σε ένα γενικό μοντέλο, το οποίο εφαρμόζεται σε οποιουσδήποτε αριθμούς. Επομένως, οι μαθητές αυτοί φαίνεται να έχουν αναπτύξει επαγωγικό συλλογισμό, ο οποίος τους οδήγησε σε γενικεύσεις.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η διερεύνηση των ικανοτήτων γενίκευσης και απόδειξης σε μαθητές ηλικίας 10 έως 13 ετών. Τα αποτελέσματα της έρευνας, έδειξαν ότι υπάρχουν διακριτές ομάδες μαθητών, οι οποίες έχουν διαφορετική επίδοση και συμπεριφορά σε έργα πρώιμης άλγεβρας. Παράλληλα, οι ομάδες αυτές φάνηκε να έχουν διαφορετικές ικανότητες γενίκευσης και απόδειξης, γεγονός το οποίο φαίνεται να επεξηγεί τις διαφορές που παρουσίασαν στην επίδοσή τους στο δοκίμιο. Τα ευρήματα αυτά είναι σημαντικά γιατί ενισχύουν την περιγραφή της έννοιας της πρώιμης αλγεβρικής σκέψης και υποδεικνύουν την ύπαρξη διαφορετικών επιπέδων πρώιμης αλγεβρικής σκέψης ανάμεσα στους μαθητές. Παράλληλα, δείχνουν ότι ακόμα και νεαροί μαθητές έχουν δυνατότητες για ανάπτυξη υψηλών επιπέδων πρώιμης αλγεβρικής σκέψης.

Οι μαθητές κάθε ομάδας παρουσίασαν ψηλότερη επίδοση σε σχέση με τους μαθητές της προηγούμενης ομάδας. Από τις απαντήσεις των μαθητών της Ομάδας 1 διαφάνηκε μια αδυναμία για ανάπτυξη και έκφραση διαδικασιών γενίκευσης και απόδειξης. Οι μαθητές της Ομάδας 2 φαίνεται να αξιοποίησαν επαναληπτικές στρατηγικές και αριθμητικά παραδείγματα, για να αναπτύξουν διαδικασίες γενίκευσης και απόδειξης. Η συμπεριφορά τους συνάδει με τα ευρήματα της προϋπάρχουσας έρευνας (π.χ. Stephens et al., 2012) σχετικά με τη χρήση συγκεκριμένων αριθμητικών πράξεων για την αναπαράσταση μιας γενίκευσης. Παράλληλα, φαίνεται ότι η ικανότητα τους για απόδειξη και αιτιολόγηση στηρίζεται σε συγκεκριμένα παραδείγματα (Lannin, 2005). Οι μαθητές της Ομάδας 3 φαίνεται να στήριξαν τις διαδικασίες γενίκευσης και απόδειξης στην παρατήρηση μιας γενικής σχέσης και στην εφαρμογή πιο σύντομων διαδικασιών για την αναπαράσταση της σχέσης αυτής. Ωστόσο, και αυτοί οι μαθητές επιβεβαιώνουν τη σχέση που παρατηρούν μόνο μέσα από παραδείγματα, τα οποία είναι στενά συνδεδεμένα με το συγκείμενο του έργου. Όπως ανέφερε ο Radford (2008), υπάρχουν μαθητές που περιγράφουν μια σχέση μέσα από αναφορές σε συγκεκριμένα αντικείμενα. Σε ό,τι αφορά τις διαδικασίες απόδειξης, οι μαθητές αυτοί οικοδόμησαν την αιτιολόγησή τους και πάλι με βάση ένα συγκεκριμένο παράδειγμα (Lannin, 2005). Οι μαθητές της Ομάδας 4 παρουσίασαν ουσιαστικές διαφορές από τις άλλες ομάδες, αφού οι διαδικασίες γενίκευσης και απόδειξης που ακολούθησαν στηρίχθηκαν στην έκφραση μοντέλων, τα οποία περιλάμβαναν αριθμούς και αλγεβρικά σύμβολα.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, φαίνεται ότι τα επίπεδα ικανοτήτων των μαθητών για γενίκευση έχουν άμεση σχέση με τα επίπεδα ικανοτήτων τους για απόδειξη. Οι απαντήσεις των μαθητών στα έργα γενίκευσης δείχνουν να συνάδουν με τις απαντήσεις τους στα έργα απόδειξης, υποδεικνύοντας μια παράλληλη ανάπτυξη των δύο αυτών διαδικασιών.

Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας διαφωτίζουν την έννοια της αλγεβρικής σκέψης στις μικρότερες ηλικίες και μπορούν να αξιοποιηθούν από τους εκπαιδευτικούς. Ειδικότερα, η περιγραφή διαφορετικών ομάδων συμπεριφοράς και επίδοσης μπορεί να καθοδηγήσει τη διαμόρφωση διδακτικών προγραμμάτων που θα ενισχύσουν την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης, μέσα από την ενίσχυση των ικανοτήτων για γενίκευση και απόδειξη. Σε μελλοντικές έρευνες, σημαντική θα ήταν η διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο η διδασκαλία δυνατόν να ενισχύει τις ικανότητες των μαθητών για γενίκευση και αιτιολόγηση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.) *Approaches to algebra* (pp. 3-12). Springer Netherlands.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Lannin, J. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(3), 231-258. doi: 10.1207/s15327833mtl0703_3

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *ZDM*, *40*(3), 385-400. doi: 10.1007/s11858-008-0085-0

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM, 40*(1), 83-96. doi: 10.1007/s11858-007-0061-0

Russell, J., Schifter, D., & Bastable, V. (2011). Developing algebraic thinking in the context of arithmetic. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives, Part 1* (pp. 43-59). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Stephens, A., Isler, I., Marum, T., Blanton, M., Knuth, E., Gardinger, A. (2012). From recursive pattern to correspondence rule: Developing students' abilities to engage in functional thinking. In L.R. Van Zoest, J.-J. Lo, & J.L. Kratky (Eds.) *Proceedings of the 34th Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Kalamazoo, MI: Western Michigan University.

Warren, E., Cooper, T., & Lamb, J. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: Foundations of early algebraic reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(3), 208-223.

Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΕΤΕΡΟ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΔΙΑΜΟΡΦΩΤΙΚΗΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Χριστοδούλου Θεοδώρα, Μιχαήλ – Χρυσάνθου Παρασκευή, Γαγάτσης Αθανάσιος και Ηλία Ιλιάδα

Πανεπιστήμιο Κύπρου

theodoraco@yahoo.gr, pmicha@ucy.ac.cy, gagatsis@ucy.ac.cy, iliadaelia@gmail.com

Το παρόν άρθρο πραγματεύεται το θέμα της διαμορφωτικής αξιολόγησης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και πιο συγκεκριμένα, μελετά την επίδραση της ετερο-αξιολόγησης στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών. Στην παρούσα έρευνα συμμετείχαν 95 μαθητές, από τους οποίους πάρθηκαν συνολικά 190 συνεντεύξεις. Στόχος του άρθρου είναι να εντοπίσει πιθανές διαφορές ανάμεσα σε «δυνατούς» και «αδύνατους» μαθησιακά μαθητές ως προς τις πεποιθήσεις τους για την τεχνική της ετερο-αξιολόγησης στα μαθηματικά. Τα ευρήματα της έρευνας δείχνουν ότι αρχικά υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις δύο ομάδες μαθητών, οι οποίες φαίνεται να μειώνονται με τη συνεχή εφαρμογή της συγκεκριμένης τεχνικής.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Όπως αναφέρεται στη βιβλιογραφία, τέσσερις μεγάλες ανασκοπήσεις σχετικά με την επίδραση της διαμορφωτικής αξιολόγησης (Natriello, 1987· Crooks, 1988· Kluger & DeNisi, 1996· Black & Wiliam, 1998) έχουν υποστηρίξει ότι η χρήση διαμορφωτικών τεχνικών, όπως οι τεχνικές ερωτήσεων, η ανατροφοδότηση χωρίς βαθμούς, η αυτο-αξιολόγηση, η ετερο-αξιολόγηση και η διαμορφωτική χρήση των τελικών αξιολογήσεων μπορούν να διπλασιάσουν την ταχύτητα της μάθησης των μαθητών (Wiliam, 2007). Ακόμη πιο σημαντικό, όμως, είναι ότι η διαμορφωτική αξιολόγηση είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική για τους μαθητές με χαμηλή επίδοση, διότι ενισχύει τη μάθησή τους (Black et al., 2004· Wiliam & Thompson, 2008).

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Διαμορφωτική αξιολόγηση και Ετερο-αξιολόγηση

Διάφοροι ορισμοί έχουν δοθεί κατά καιρούς σχετικά με τη διαμορφωτική αξιολόγηση (π.χ. Wiliam, 2007· Van De Walle, Karp & Bay-Williams, 2013), ωστόσο, ένας ορισμός που συνδυάζει σχεδόν όλους αυτούς που βρέθηκαν στη βιβλιογραφία, έχει προταθεί από τον Popham (2008, σελ.

5), ο οποίος χαρακτηρίζει τη διαμορφωτική αξιολόγηση ως «μια διαδικασία που χρησιμοποιείται από τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας και παρέχει ανατροφοδότηση για την αναπροσαρμογή της διδασκαλίας και της μάθησης με στόχο τη βελτίωση της επίδοσης των μαθητών».

Σύμφωνα με τους Lai και Hwang (2015) η ετερο-αξιολόγηση έχει θεωρηθεί από διάφορους ερευνητές (π.χ. Matsuno, 2009· Tseng & Tsai, 2010), ως μια στρατηγική μάθησης, η οποία βοηθά στην εμπλοκή των μαθητών στην κατασκευή της γνώσης τους και στην ανάπτυξη δεξιοτήτων μέσω της κατανόησης των κριτηρίων επιτυχίας που τίθενται από τους εκπαιδευτικούς, της μάθησης από την εργασία των συνομηλίκων τους και των αναστοχασμών που πραγματοποιούνται τόσο για τη δική τους εργασία όσο και γι' αυτήν των συνομηλίκων τους. Σύμφωνα με τον Topping (1998) η ετερο-αξιολόγηση ορίζεται ως «μια στρατηγική μάθησης μέσα από την οποία οι μαθητές αξιολογούν ή σχολιάζουν την αξία ή την ποιότητα του έργου ή τα μαθησιακά αποτελέσματα των συνομηλίκων τους που διδάχτηκαν το ίδιο μαθησιακό περιεχόμενο» (σελ. 250).

Πεποιθήσεις και αντιλήψεις μαθητών και αξιολόγηση

Ο τρόπος που οι μαθητές αντιλαμβάνονται την αξιολόγηση, το πώς αισθάνονται και πώς ανταποκρίνονται απέναντι σε μια αξιολόγηση είναι πιθανόν να συμβάλλει σημαντικά στη μαθησιακή τους συμπεριφορά και στην ακαδημαϊκή τους επίδοση (Brown, 2011).

Υπάρχουν διάφορες απόψεις στη βιβλιογραφία σχετικά με την έννοια «πεποιθήσεις ή πιστεύω». Ωστόσο, για να αντιμετωπιστούν οι ποικίλες ορολογίες σχετικά με τις γνώσεις, τις πεποιθήσεις και τα συστήματα πεποιθήσεων πιο αποτελεσματικά, ο Thompson (1992) επικαλείται τον όρο «αντιλήψεις» ως «μια γενικότερη νοητική δομή, που περιλαμβάνει τις πεποιθήσεις, τα νοήματα, τις έννοιες, τις προδιαθέσεις, τους κανόνες, τις νοητικές εικόνες, τις προτιμήσεις και τα συναφή» (σελ. 130). Στην παρούσα εργασία ενδιαφερόμαστε για τις πεποιθήσεις των μαθητών, ορίζοντάς τις για τον σκοπό της έρευνάς μας ως τα πιστεύω των συμμετεχόντων για τις διαστάσεις που μελετώνται.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα

Γενικότερος σκοπός του άρθρου είναι να μελετήσει τις πεποιθήσεις των μαθητών γυμνασίου για την εφαρμογή της τεχνικής της ετερο-αξιολόγησης στο μάθημα των μαθηματικών. Ειδικότερα, στόχος του είναι να εντοπίσει πιθανές διαφορές ανάμεσα σε «δυνατούς» και «αδύνατους» μαθησιακά μαθητές ως προς τις πεποιθήσεις τους για τη συγκεκριμένη τεχνική και να απαντήσει στο εξής ερευνητικό ερώτημα: Διαφέρουν οι «αδύνατοι» μαθητές από τους «δυνατούς» ως προς τις πεποιθήσεις τους για την τεχνική της ετερο-αξιολόγησης; [1]

Το δείγμα

Το δείγμα της έρευνας αποτελείται από 95 μαθητές, οι οποίοι προέρχονται από επτά τμήματα Γυμνασίου. Από κάθε τμήμα, προσδιορίστηκαν από την ίδια την εκπαιδευτικό οι «δυνατοί» και οι «αδύνατοι» μαθητές, ανάλογα με το μαθησιακό τους επίπεδο. Τα κριτήρια με τα οποία οι εκπαιδευτικοί χώρισαν τους μαθητές στις δύο ομάδες είναι η ακαδημαϊκή τους επίδοση στα Μαθηματικά και η συνολική τους εικόνα στην τάξη κατά τη διδασκαλία του μαθήματος των μαθηματικών. Ειδικότερα, η ομάδα των «δυνατών» μαθητών αποτελείται από 48 συμμετέχοντες και ανάλογα, η ομάδα των «αδύνατων» μαθητών περιλαμβάνει 47 μαθητές. Όλα τα υποκείμενα της έρευνας δέχτηκαν διδακτικές παρεμβάσεις εστιασμένες στη χρήση τεχνικών που αποσκοπούσαν στη διαμορφωτική αξιολόγηση, όπως είναι η κοινοποίηση των μαθησιακών στόχων και των κριτηρίων επιτυχίας, η ανατροφοδότηση μεταξύ εκπαιδευτικού-μαθητών και μεταξύ μαθητών, η ετερο-αξιολόγηση, η αυτο-αξιολόγηση και ο χειρισμός του μαθηματικού λάθους. Η παρούσα εργασία εστιάζεται στην τεχνική της ετερο-αξιολόγησης.

Διδακτικές παρεμβάσεις και εφαρμογή της τεχνικής της ετερο-αξιολόγησης

Πριν από την έναρξη των παρεμβάσεων πραγματοποιήθηκε κατάρτιση των εκπαιδευτικών που συμμετείχαν στην έρευνα, όπου έγιναν υποδείξεις για τον τρόπο εφαρμογής των τεχνικών της διαμορφωτικής αξιολόγησης. Επιπλέον συναντήσεις με τις εκπαιδευτικούς έγιναν για τον σχεδιασμό των μαθημάτων που πραγματοποίησαν στις παρεμβάσεις και επιμόρφωση για κάθε σχέδιο μαθήματος, δίνοντας έμφαση στις δραστηριότητες που στόχευαν στην εμπλοκή των μαθητών στις υπό διερεύνηση τεχνικές της διαμορφωτικής αξιολόγησης.

Πραγματοποιήθηκαν συνολικά έξι διδακτικές παρεμβάσεις, οι οποίες είχαν διάρκεια 3-5 διδακτικές περιόδους (40΄) η κάθε μία και χωρίστηκαν σε δύο φάσεις έρευνας. Μετά το τέλος της κάθε φάσης πάρθηκαν συνεντεύξεις από όλους τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα.

Σε κάθε διδακτική παρέμβαση, η τεχνική της ετερο-αξιολόγησης επιτυγχάνεται μέσω ενός φύλλου εργασίας, στο οποίο οι μαθητές καλούνται να επιλύσουν αρχικά 1-3 ασκήσεις σχετικές με τους ρητούς αριθμούς, τις γωνίες, τις κλασματικές εξισώσεις και στοιχεία στερεομετρίας. Οι σωστές λύσεις των ασκήσεων δίνονται στους μαθητές είτε σε φυλλάδιο είτε στον πίνακα από την εκπαιδευτικό. Οι μαθητές καλούνται να διορθώσουν τις ασκήσεις του συμμαθητή τους με βάση τις σωστές λύσεις. Συγκεκριμένα, ζητείται από αυτούς να εντοπίσουν τα λάθη του συμμαθητή τους, να του τα εξηγήσουν γραπτώς, περιγράφοντάς του πώς έπρεπε να λυθεί η άσκηση για να είναι σωστή και στο τέλος να βαθμολογήσουν την εργασία του. Στο φύλλο εργασίας που συμπληρώνουν οι μαθητές, αναγράφονται τα κριτήρια επιτυχίας ή αξιολόγησης των ασκήσεων και οι μονάδες με τις οποίες θα αξιολογούν κάθε κριτήριο. Στη συνέχεια, οι μαθητές επιστρέφουν το διορθωμένο φύλλο εργασίας στους συμμαθητές τους για να δει ο καθένας τα λάθη του. Σε αυτό το σημείο, οι μαθητές συζητούν μεταξύ τους τα λάθη τους και ο ένας εξηγεί στον άλλον πώς έπρεπε να λυθεί η άσκηση. Σε περίπτωση που και οι δύο μαθητές έχουν το ίδιο λάθος, ζητούν βοήθεια από την εκπαιδευτικό, για να το εξηγήσει και στους δύο.

Συλλογή δεδομένων

Όσον αφορά τη συλλογή των δεδομένων της έρευνας, πραγματοποιήθηκαν συνεντεύξεις κατά τη διάρκεια των παρεμβάσεων σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές. Μετά το τέλος της πρώτης και της δεύτερης φάσης της έρευνας, αντίστοιχα, δηλαδή, μετά την τρίτη και την έκτη παρέμβαση. Έτσι, πραγματοποιήθηκαν συνολικά 190 ατομικές συνεντεύξεις, προκειμένου να μελετηθούν οι απόψεις των μαθητών για τις τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν στα μαθήματά τους. Τα θέματα που συζητούνται σε αυτές εστιάζουν κυρίως σε τέσσερις άξονες διερεύνησης, οι οποίοι μελετούν το ενδιαφέρον που προκαλεί η κάθε τεχνική, την ευκολία εφαρμογής της, τη χρησιμότητά της και την εφαρμογή της στην τάξη.

Ανάλυση δεδομένων

Για την απάντηση στο ερευνητικό ερώτημα πραγματοποιήθηκαν συνολικά 190 ατομικές συνεντεύξεις (δύο συνεντεύξεις από κάθε συμμετέχοντα). Λόγω του μεγάλου αριθμού των συνεντεύξεων που πραγματοποιήθηκαν, έγινε ποσοτικοποίηση των δεδομένων που πάρθηκαν από αυτές κι έπειτα, διενεργήθηκαν ποσοτικές μέθοδοι ανάλυσης, χρησιμοποιώντας το στατιστικό πακέτο SPSS. Η ποσοτικοποίηση των δεδομένων των συνεντεύξεων βασίστηκε σε τέσσερις άξονες διερεύνησης, οι οποίοι μελετούσαν το ενδιαφέρον που προκαλεί η κάθε τεχνική (μεταβλητή Ip-Interest), την ευκολία της (μεταβλητή Ep-Ease), τη χρησιμότητά της (μεταβλητή Up-Usefulness) και την εφαρμογή της (μεταβλητή Ap-Application)· κατά πόσο, δηλαδή, κάθε τεχνική θα έπρεπε να συνεχίσει ή να σταματήσει να εφαρμόζεται στο μάθημα των μαθηματικών.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Προκειμένου να εντοπιστούν πιθανές στατιστικές διαφορές μεταξύ των «δυνατών» και «αδύνατων» μαθητών ως προς τους διαφορετικούς άξονες που μελετήθηκαν για κάθε τεχνική διενεργήθηκε έλεγχος t για ανεξάρτητα δείγματα μέσω του στατιστικού πακέτου SPSS τόσο για την πρώτη όσο και για τη δεύτερη μέτρηση των συνεντεύξεων.

Ο Πίνακας 1 δείχνει τη σύγκριση μεταξύ των «Δυνατών» και «Αδύνατων» μαθητών για κάθε μεταβλητή χωριστά στην πρώτη και δεύτερη μέτρηση των συνεντεύξεων. Όπως φαίνεται στον πίνακα, οι πεποιθήσεις των «δυνατών» μαθητών είναι πιο θετικές από αυτές των «αδύνατων» μαθητών και στους τέσσερις άξονες που διερευνήθηκαν στις συνεντεύξεις ($p<.05$). Ωστόσο, στην πρώτη μέτρηση φαίνεται να υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις δύο ομάδες μαθητών και στους τέσσερις άξονες που διερευνήθηκαν ($p<.05$), κάτι το οποίο παύει να ισχύει στη δεύτερη μέτρηση.

Μετά το τέλος των παρεμβάσεων, φαίνεται να μειώνονται οι διαφορές ανάμεσα στις δύο ομάδες, εφόσον, όπως προκύπτει από τις συνεντεύξεις των μαθητών, στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις δύο ομάδες μαθητών παρατηρούνται μόνο ως προς την ευκολία και την εφαρμογή της. Αντίθετα, δεν παρατηρούνται σημαντικές διαφορές ως προς το ενδιαφέρον και τη χρησιμότητα της συγκεκριμένης τεχνικής.

Μεταβλητή	Επίπεδο μαθητών	Πρώτη Μέτρηση				Δεύτερη Μέτρηση			
		$\bar{X}$	SD	t	p	$\bar{X}$	SD	t	p
Ip	Αδύνατοι (N=47)	1.66	.479	-3.947	.000	1.66	.479	-1.697	.093
	Δυνατοί (N=48)	1.96	.202			1.81	.394		
Ep	Αδύνατοι	1.62	.491	-2.405	.018	1.49	.505	-2.209	.030
	Δυνατοί	1.83	.377			1.71	.459		
Up	Αδύνατοι	1.72	.452	-3.258	.002	1.74	.441	-1.932	.057
	Δυνατοί	1.96	.202			1.90	.309		
Ap	Αδύνατοι	1.70	.462	-2.397	.019	1.66	.479	-2.242	.028
	Δυνατοί	1.90	.309			1.85	.357		

Πίνακας 1: Συγκρίσεις Πεποιθήσεων «Δυνατών» και «Αδύνατων» Μαθητών για την Πρώτη και Δεύτερη Μέτρηση των Συνεντεύξεων

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Όσον αφορά το ενδιαφέρον (πρώτος άξονας διερεύνησης) που προκαλεί η ετερο-αξιολόγηση ανάμεσα στις δύο ομάδες μαθητών, παρατηρείται ότι οι πεποιθήσεις των «δυνατών» μαθητών είναι πιο θετικές από αυτές των «αδύνατων» και στις δύο μετρήσεις, ωστόσο, στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ τους υπάρχουν μόνο στην πρώτη μέτρηση των συνεντεύξεων.

Τα επιχειρήματα των μαθητών που δεν βρίσκουν ενδιαφέρουσα την τεχνική της ετερο-αξιολόγησης σχηματίζουν πέντε διαφορετικές κατηγορίες, από τις οποίες η επικρατέστερη αναφέρεται στις δυσκολίες που δημιουργεί η συγκεκριμένη τεχνική κατά την επίλυση της άσκησης που θα χρησιμοποιηθεί αργότερα για τους σκοπούς της ετερο-αξιολόγησης. Η συγκεκριμένη δυσκολία αναφέρθηκε μόνο από την ομάδα των «αδύνατων» μαθητών και στις δύο φάσεις των συνεντεύξεων. Ενδεικτικές απαντήσεις αυτών των μαθητών είναι οι εξής: «δεν έβρισκα καλά την πράξη», «δεν ήξερα να λύσω όλη την άσκηση», «δεν τα έβρισκα πολύ εύκολα», «να λύσω λίγο την άσκηση». Ο παράγοντας που αναφέρεται στις δυσκολίες των μαθητών σχετικά με τη διόρθωση των ασκήσεων των συμμαθητών τους βρίσκεται σε συμφωνία με ευρήματα άλλων ερευνών (π.χ. Tsivitanidou et al., 2012· Juwah, 2003), σύμφωνα με τα οποία ένα από τα προβλήματα που πιθανόν να αντιμετωπίζουν οι μαθητές είναι η δυσκολία στο να κατανοήσουν πλήρως τα κριτήρια αξιολόγησης που παρέχει ο εκπαιδευτικός, ώστε να μπορέσουν οι ίδιοι να αξιολογήσουν τα έργα του συμμαθητή τους και να του παράσχουν την κατάλληλη ανατροφοδότηση.

Αναφορικά με την ευκολία εφαρμογής (δεύτερος άξονας διερεύνησης) της τεχνικής της ετερο-αξιολόγησης και τις δυσκολίες που προκαλεί στους μαθητές, παρατηρούμε ότι οι περισσότεροι από τους «δυνατούς» μαθητές βρίσκουν εύκολη την τεχνική της ετερο-αξιολόγησης και στις δύο μετρήσεις. Τα επιχειρήματα των μαθητών που βρίσκουν δύσκολη την τεχνική της ετερο-αξιολόγησης σχηματίζουν έξι διαφορετικές κατηγορίες, οι οποίες προέρχονται κυρίως από τις απαντήσεις των «αδύνατων» μαθητών. Η μεγαλύτερη δυσκολία και για τις δύο ομάδες μαθητών βρίσκεται στην επεξήγηση των λαθών στους συμμαθητές τους. Μερικά τέτοια επιχειρήματα υποστήριζαν ότι «είναι λίγο δύσκολο να εξηγήσεις, να βάλεις βαθμό», «να του πω τα λάθη του συμμαθητή μου είναι λίγο δύσκολο», «έπρεπε να του γράψουμε σωστά τα σχόλια», «να σχολιάσω… είναι δύσκολο», «να μην μπορώ να του τα εξηγήσω».

Άλλοι παράγοντες που σχηματίστηκαν από τις απαντήσεις των μαθητών αφορούν δυσκολίες των μαθητών στη διόρθωση των ασκήσεων των συμμαθητών τους, δυσκολία στο να βάλουν βαθμό στα έργα του συμμαθητή τους, δυσκολίες στην επίλυση της άσκησης και διαφορετικές αιτιολογήσεις.

Οι πεποιθήσεις των «δυνατών» μαθητών σχετικά με τη χρησιμότητα (τρίτος άξονας διερεύνησης) της τεχνικής της ετερο-αξιολόγησης είναι πολύ πιο θετικές από αυτές των «αδύνατων» μαθητών και στις δύο μετρήσεις, ωστόσο, οι διαφορές που παρατηρούνται ανάμεσα στις δύο ομάδες μαθητών είναι στατιστικά σημαντικές μόνο στην πρώτη μέτρηση των συνεντεύξεων.

Τα επιχειρήματα των μαθητών που βρίσκουν βοηθητική την τεχνική της ετερο-αξιολόγησης σχηματίζουν έξι διαφορετικές κατηγορίες, από τις οποίες η επικρατέστερη αναφέρεται στην καλύτερη κατανόηση του μαθήματος. Ενδεικτικά αναφέρονται τα εξής επιχειρήματα: «ο διπλανός μας μπορεί να βρει κάτι που εμείς να μην αντιληφθήκαμε ότι δεν καταλάβαμε και έτσι να μας το εξηγήσουν καλύτερα», «σε βοηθά και ο διπλανός σου, σού τα εξηγά ξανά και τα καταλαβαίνεις», «επαναλαμβάνουμε το μάθημα και το καταλαβαίνουμε ακόμα καλύτερα», «τα διορθώνουμε μετά και μετά καταλαβαίνουμε τι λάθος κάναμε». Είναι φανερή η σύνδεση των παρόντων αποτελεσμάτων με προηγούμενα ευρήματα, εφόσον έρευνες (π.χ. Palincsar & Brown, 1984· Mazur, 1997· Merrill, 2009) έχουν δείξει ότι η συνεργασία που πραγματοποιείται από τις ομαδικές αλληλεπιδράσεις μπορεί να θεωρηθεί ως μια σημαντική μορφή ανατροφοδότησης στον διδακτικό σχεδιασμό. Η χρησιμότητα της ετερο-αξιολόγησης στην αποφυγή των συνηθισμένων λαθών που κάνουν οι μαθητές και η λήψη ανατροφοδότησης με πιο απλά λόγια από τους συνομηλίκους είναι μερικές από τις υπόλοιπες κατηγορίες απαντήσεων που σχηματίστηκαν. Ανάλογες απαντήσεις, υποστήριζαν ότι «βοηθώ τον διπλανό μου και βλέπω κι εγώ τα λάθη του και καταλαβαίνω πού έκανε λάθη, για να μην τα κάνω ούτε και εγώ», «όταν του το εξηγήσεις εσύ ως φίλος του θα το αντιληφθεί πιο καλά επειδή μιλάμε την ίδια γλώσσα» ή «μπορεί να το καταλάβεις καλύτερα από ένα συμμαθητή σου, συνομήλικο. Μπορεί να σου τα διατυπώσει διαφορετικά, με πιο απλά λόγια». Τα πιο πάνω ευρήματα βρίσκονται σε συμφωνία με ευρήματα άλλων ερευνητών, όπως είναι οι Miller, Topping και Thurston (2010) και Tsuei (2012), σύμφωνα με τους οποίους η λήψη ανατροφοδότησης από συνομηλίκους συμβάλλει στη βελτίωση των μαθησιακών αποτελεσμάτων των μαθημάτων.

Τέλος, όσον αφορά τον άξονα της εφαρμογής της τεχνικής (τέταρτος άξονας διερεύνησης), παρατηρούμε ότι οι πεποιθήσεις των «δυνατών» μαθητών είναι πιο θετικές από αυτές των «αδύνατων» και οι διαφορές ανάμεσα στις δύο ομάδες μαθητών είναι στατιστικά σημαντικές και στις δύο φάσεις των παρεμβάσεων. Ενώ οι περισσότεροι μαθητές και από τις δύο ομάδες θέλουν να συνεχίσει η συγκεκριμένη τεχνική στην τάξη τους, ωστόσο, το ποσοστό των «αδύνατων» μαθητών είναι πολύ μικρότερο από αυτό των «δυνατών» μαθητών.

Τα επιχειρήματα των μαθητών για να συνεχίσει να εφαρμόζεται η τεχνική της ετερο-αξιολόγησης σχηματίζουν πέντε κατηγορίες, από τις οποίες η επικρατέστερη αναφέρεται για άλλη μια φορά στη χρησιμότητα της τεχνικής στην καλύτερη κατανόηση του μαθήματος, η οποία υποστηρίζεται και από προηγούμενες έρευνες (π.χ. Sharan, 1999· Xiao & Lucking, 2008· Miller et al., 2010· Tsuei, 2012). Μερικές από τις απαντήσεις αυτών των μαθητών ήταν ότι «εξηγούμε ο ένας στον άλλον τα λάθη του και τα καταλαβαίνουμε πιο εύκολα», «μπορώ να καταλάβω τα λάθη μου» ή «όταν τα λέω εγώ, τα εμπεδώνω καλύτερα, αλλά και ο συμμαθητής μου».

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ένα πρώτο συμπέρασμα στο οποίο καταλήγει η παρούσα μελέτη είναι ότι οι «δυνατοί» μαθητές είναι γενικότερα πιο θετικοί απέναντι στη συγκεκριμένη τεχνική, ωστόσο, οι διαφορές ανάμεσα στις δύο ομάδες μαθητών φαίνεται να εξομαλύνονται κατά κάποιο τρόπο μέσα από την τριβή στη συγκεκριμένη τεχνική. Αυτό που φαίνεται να παραμένει σταθερό, παρά τη συνεχή εξάσκηση στην εφαρμογή της ετερο-αξιολόγησης, είναι οι διαφορές που παρατηρούνται ανάμεσα στις δύο ομάδες μαθητών, όσον αφορά τις δυσκολίες που συναντούν και τις πεποιθήσεις τους για την εφαρμογή της συγκεκριμένης τεχνικής.

Τα αποτελέσματα της έρευνάς μας οδηγούν στο τελικό συμπέρασμα ότι υπάρχει μια ανάγκη για κριτική επανεξέταση των τεχνικών αξιολόγησης. Ένας σημαντικός παράγοντας για την εφαρμογή οποιασδήποτε μορφής αξιολόγησης είναι η ποιότητα των διδακτικών παρεμβάσεων. Η ποιότητα αυτή είναι συχνά αμφισβητήσιμη λόγω των διδακτικών φαινομένων που χαρακτηρίζουν τη διδακτική πράξη και αποτελούν εμπόδιο στη μάθηση των μαθηματικών. Έτσι η υπερβολική χρήση της αναλογίας, τα φαινόμενα Topaze ή Jourdain, κ.ά. (βλ. Γαγάτσης & Μαρκέτος, 2000) θέτουν σε αμφισβήτηση την ποιότητα της μάθησης των Μαθηματικών και η ανάλυσή τους είναι αναγκαία πριν την εφαρμογή οποιασδήποτε τεχνικής διαμορφωτικής αξιολόγησης.

Σημείωση

1. Τα αποτελέσματα που περιγράφονται στο άρθρο αποτελούν μέρος της διδακτορικής διατριβής της Θεοδώρας Χριστοδούλου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Black, P., Harrison, C., Lee, C., Marshall, B., & Wiliam, D. (2004). Working inside the black box: Assessment for learning in the classroom. *Phi Delta Kappan*, *86*(1), 9-21.

Black, P., & Wiliam, D. (1998). Inside the black box: Raising standards through classroom assessment. *Phi Delta Kappan*, *80*(2), 139-148.

Brown, G. T. (2011). Self-regulation of assessment beliefs and attitudes: A review of the Students' Conceptions of Assessment inventory. *Educational Psychology: an international journal of experimental educational psychology*, *31*(6), 731-748.

Crooks, T. J. (1988). The impact of classroom evaluation practices on students. *Review of Educational Research*, *58*, 438-481.

Γαγάτσης, Α., & Μαρκέτος, Α. (2000). Θεμέλια και μέθοδοι της διδακτικής των μαθηματικών. Στο Γαγάτσης, Α. (2000) *Θέματα Διδακτικής των Μαθηματικών* (σελ. 61-134), Θεσσαλονίκη: Αδελφών Κυριακίδη α.ε.

Juwah, C. (2003). Using peer-assessment to develop skills and capabilities. *Journal of United States Distance Learning Association*, *17*(1), 39-50.

Kluger, A. N., & DeNisi, A. (1996). The effects of feedback intervention on performance: A historical review, a meta-analysis, and a preliminary feedback intervention theory. *Psychological Bulletin*, *119*(2), 254-284.

Lai, C. L., & Hwang, G. J. (2015).An interactive peer-assessment criteria development approach to improving students' art design performance using handheld devices. *Computers & Education*, *85*, 149-159.

Matsuno, S. (2009). Self-, peer-, and teacher-assessments in Japanese university EFL writing classrooms. *Language Testing*, *26*, 75-100.

Mazur, R. (1997). *Peer instruction: A user's manual*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Merrill, M. D. (2009). First principles of instruction. In C. M. Reigeluth & A. Carr (Eds.), *Instructional design theories and models: building a common knowledge base* (vol. 3, pp. 1–19). New York, NY: Routledge.

Miller, D., Topping, K., & Thurston, A. (2010). Peer tutoring in reading: the effects of role and organization on two dimensions of self-esteem. *British Journal of Educational Psychology*, *80*(3), 417-433.

Natriello, G. (1987). The impact of evaluation processes on students. *Educational Psychologist*, *22*(2), 155-175.

Palincsar, A S., & Brown, A.L. (1984). Reciprocal teaching of comprehension-fostering and comprehension-monitoring activities. *Cognition and Instruction*, *1*(2) 117–175.

Popham, W. J. (2008). *Transformative assesment.* VA: ASCD.

Sharan, S. (1999).*Handbook of cooperative learning methods*. Santa Barbara, CA: Praeger.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research, in: D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of research on mathematics leaching and learning* (New York, Macmillan), 127-146.

Topping, K. (1998). Peer assessment between students in colleges and universities. *Review of Educational Research*, *68*(3), 249-276.

Tseng, S. C., & Tsai, C. C. (2010). Taiwan college students' self-efficacy and motivation of learning in online peer assessment environments. *The Internet and Higher Education*, *13*, 164-169.

Tsivitanidou, O., Zacharia, Z. C., Hovardas, T., & Nicolaou, A. (2012). Peer assessment among secondary school students: Introducing a peer feedback tool in the context of a computer supported inquiry learning environment in science. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *31*(4), 433-465.

Tsuei, M. (2012). Using synchronous peer tutoring system to promote elementary students' learning in mathematics. *Computers & Education*, *58*(4), 1171-1182.

Van De Walle, A. J., Karp, S. K., & Bay-Williams, M. J. (2013). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (8 ed.). United States of America: Pearson.

Wiliam, D. (2007). Content then process: Teacher learning communities in the service of formative assessment. In D. B. Reeves (Ed.), *Ahead of the curve: The power of assessment to transform teaching and learning* (pp. 183-204). Bloomington, IN: Solution Tree.

Wiliam, D., & Thompson, M. (2008). Integrating assessment with instruction: What will it take to make it work? In Dwyer, C. A. (Ed.), *The future of assessment: Shaping teaching and learning* (pp. 53-82). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Xiao, Y., & Lucking, R. (2008). The impact of two types of peer assessment on students' performance and satisfaction within a Wiki environment. *The Internet and Higher Education*, *11*(3-4), 186-193.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΑΞΟΝΑΣ-2: ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΔΙΑΜΕΣΟΛΑΒΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

Η ΚΡΙΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΕΣ ΑΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΟΜΑΔΕΣ ΣΥΖΗΤΗΣΗΣ (DISCUSSION FORUMS)

Ασυλογιστάκη Ιωάννα

Πανεπιστήμιο Πατρών

joanna.asilog@yahoo.gr

Η παρούσα ερευνητική εργασία αποτελεί μια μελέτη περίπτωσης σχετικά με τη μέτρηση της ομαδικής κριτικής σκέψης σε μια διαδικτυακή ασύγχρονη ομάδα συζήτησης κατά την επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Στην εργασία εκθέτονται οι θεωρίες στις οποίες βασίστηκε ο σχεδιασμός και η ανάλυση των δεδομένων της έρευνας. Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 4 ομάδες 13 φοιτητριών . Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται ενδεικτικά τα αποτελέσματα της ποιοτικής ανάλυσης των μηνυμάτων μιας ομάδας φοιτητριών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στη σημερινή εποχή οι υπολογιστές και το διαδίκτυο έχουν εδραιωθεί ως βασικό μέσο επικοινωνίας, ψυχαγωγίας και εργασίας, γεγονός που έχει επηρεάσει και τον εκπαιδευτικό τομέα. Εντούτοις, όπως αναφέρουν οι Goodman κ.ά. (2001), τώρα που η μάθηση μπορεί να γίνει και εξ αποστάσεως, οι ευκαιρίες για ανάπτυξη της βαθιάς εκπαίδευσης, της συνεργατικότητας μεταξύ ατόμων και της κριτικής σκέψης μειώνονται επικίνδυνα. Στο πνεύμα αυτό, αντικείμενο της εργασίας μας είναι η παρουσίαση της θεωρίας που υποστηρίζει τη διαδικτυακή μάθηση και του σχεδιασμού μιας έρευνας με βασικό στόχο τη διερεύνηση της ανάπτυξης της κριτικής σκέψης από φοιτήτριες της Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης κατά τη συνεργασία τους σε μία διαδικτυακή ασύγχρονη ομάδα συζήτησης ώστε να επιλύσουν δοσμένα μαθηματικά προβλήματα.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η παρούσα εργασία βασίζεται στις κοινωνιοπολιτισμικές θεωρίες μάθησης του εποικοδομισμού και της εγκαθιδρυμένης νόησης και στην υπολογιστικά υποστηριζόμενη συνεργατική μάθηση, το κοινό στοιχείο των οποίων είναι η αναγνώριση της αξίας του περιβάλλοντος κατά τη μάθηση του ατόμου.

Ως γνωστική θεωρία, με κύριο και πρωταρχικό εκφραστή τον Piaget, η κεντρική υπόθεση του (επ)οικοδομισμού, σύμφωνα με τον Yoders (2014), είναι ότι οι μαθητευόμενοι κατασκευάζουν τη νέα γνώση κτίζοντας ενεργά επάνω στις προγενέστερες γνώσεις και εμπειρίες τους, σε άμεση αλληλεπίδραση με το γύρω κόσμο. Η δεύτερη κύρια προσέγγιση, ο κοινωνικός εποικοδομισμός με εκπρόσωπο τον Vygotsky, επικεντρώνεται στο ρόλο που παίζει το περιβάλλον και η κοινωνική αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών. Δίνοντας έμφαση στη διαλογική φύση της μάθησης, υποστήριξε ότι ο πολιτισμικός παράγοντας και οι διαπροσωπικές σχέσεις κατά την οικοδόμηση και κατανόηση της γνώσης προηγούνται των ενδοπροσωπικών διαστάσεων (Schcolnik, Kol, & Abarbanel, 2006). Στον ίδιο τόνο, το μοντέλο της εγκαθιδρυμένης νόησης υποστηρίζει ότι η μάθηση είναι πρωτίστως μια κοινωνιοπολιτισμική λειτουργία που συντελείται μέσω της επικοινωνίας και αλληλεπίδρασης με άλλους. Η γνώση ενσωματώνεται και θεσπίζεται, εξαρτώμενη πάντα από το κοινωνικό πλαίσιο (context) στο οποίο λαμβάνει χώρα (Roth & Jornet, 2013).

Μετά τη δεκαετία του ‘90 η έρευνα σχετικά με τη διαδικασία της μάθησης διευρήνθηκε για να περιλαμβάνει τη μελέτη του τρόπου μάθησης όχι μόνον μεμονωμένων ατόμων, αλλά και ομάδων (learning group). Έχει διαπιστωθεί ότι μέσω της ομάδας των συνεργατών και των αλληλεπιδράσεων που προκύπτουν ενεργοποιούνται τόσο συλλογικοί όσο και ατομικοί μηχανισμοί μάθησης. Η θεώρηση αυτή, χάρη στην πρόοδο της τεχνολογίας, έχει επεκταθεί περιλαμβάνοντας και την περιοχή της «Συνεργατικής Μάθησης με Υποστήριξη Υπολογιστή» (: Computer Supported Collaborative Learning ή CSCL). Η κοινωνική αλληλεπίδραση είναι απαραίτητη για υψηλές διανοητικές διαδικασίες (Driscoll, 1994; όπως αναφέρεται στο Graham & Misanchuk, 2004) δεδομένου ότι μόνο μέσα από τη συνεργασία μπορεί ο μαθητευόμενος να προκαλέσει τις απόψεις του και να καταλάβει των άλλων (Cunningham, 1992; όπ. αν. στο Graham & Misanchuk, 2004). Οι Johnson & Johnson (1996, όπ. αν. στο Graham & Misanchuk, 2004) εντοπίζουν σημαντικά οφέλη στη συνεργατική μάθηση, όπως η ανάληψη δύσκολων έργων, η κριτική και δημιουργική σκέψη, το κίνητρο να μάθουν και να συμβάλλουν στην ομαδική προσπάθεια κ.ά.

Παρά τα θετικά της κοινωνικής αλληλεπίδρασης, όταν αυτή λαμβάνει χώρα μέσω Η/Υ, είναι ένα θέμα που προβληματίζει τους ερευνητές (Nason & Woodruff, 2004). Στοιχεία από έρευνες και αξιολογήσεις σχετικά με τη χρήση CSCL περιβαλλόντων από δασκάλους δείχνουν πως οι διαμεσολαβούμενες από υπολογιστή κοινότητες γνώσης, είναι εξαιρετικές για την ανάπτυξη και προώθηση της συνεργατικής μάθησης για θεματικές περιοχές όπως η τέχνη, οι κοινωνικές επιστήμες και ανάλογα πεδία, όχι όμως για τα μαθηματικά (Bereiter, 2002a; Scardamalia & Bereiter, 1996; όπ. αν. στο Nason & Woodruff, 2004). Πιστεύουν πως είναι δύσκολη η καθιέρωση και διατήρηση των κοινοτήτων στην περιοχή των μαθηματικών λόγω των έμφυτων περιορισμών των περισσότερων CSCL περιβαλλόντων στην αναπαράσταση της μαθηματικής σκέψης, αλλά και λόγω της δυσκολίας πολλών μαθηματικών προβλημάτων να δημιουργήσουν περιβάλλοντα παρακίνησης εποικοδομητικού διαλόγου. Οι Δραστηριότητες Ανάδειξης Μοντέλου (Model Eliciting Activities), ενδεχομένως αποτελούν μια εξαίρεση.

Σε μια Δ.Α.Μ. εκείνο που έχει σημασία είναι η διαδικασία επιλογής του κατάλληλου μαθηματικού μοντέλου και ο τρόπος σκέψης που καθορίζει αυτήν την επιλογή, όχι η τελική απάντηση. Οι J. Moore, Diefes-Dux, & Imbrie (2006) εξηγούν ότι οι ΔΑΜ είναι ανοιχτά και ρεαλιστικά προβλήματα που λύνονται ομαδικά, συνήθως από 3-4 άτομα, και που οι εκπ/μενοι πρέπει να σκεφτούν, να προτείνουν μοντέλα, να τα δοκιμάσουν και να αλλάξουν τη διαδικασία αν χρειαστεί για να ικανοποιήσουν τις ανάγκες ενός υποθετικού πελάτη του προβλήματος. Τέλος, η Κολέζα (2009) σημειώνει ότι ο βαθμός της αλληλεπίδρασης των μαθητών, αλλά και η ποιότητά της αποτελούν την αρχή, την προϋπόθεση για την καλλιέργεια της Κριτικής Σκέψης (Κ.Σ.), δεδομένου ότι η Κ.Σ. στηρίζεται στην αξιολόγηση στοιχείων για την λήψη όσο το δυνατόν αντικειμενικών συμπερασμάτων.

Διαδικτυακές ασύγχρονες ομάδες συζήτησης

Η CSCL, στοχεύοντας στη δημιουργία τεχνολογικά υποστηριζόμενων περιβαλλόντων συνεργασίας και δραστηριοτήτων, προτείνει εργαλεία και πλατφόρμες συνεργασίας, μέσα στα οποία εντάσσονται και οι διαδικτυακές ασύγχρονες ομάδες συζήτησης (asynchronous online discussion forum - AOD).

Από τα μεγαλύτερα πλεονεκτήματά τους είναι η ευκαιρία για ανταλλαγή ιδεών και διαμοιρασμό της γνώσης μεταξύ διδασκόμενων και διδασκόντων (Tallent-Runnels et al., 2006; Levine, 2007; όπ. αν. στο Nandi, Chang, & Balbo, 2009) μέσω ασύγχρονης επικοινωνίας και η αποθήκευση των μηνυμάτων, δίνοντας τη δυνατότητα στους χρήστες να μπαίνουν οποτεδήποτε τους εξυπηρετεί και να επικοινωνούν σε μια μονίμως προσβάσιμη συζήτηση (Nandi, Chang, & Balbo, 2009), αλλά και η επέκταση της συζήτησης εκτός της τάξης (An & Frick, 2006). Με αυτόν τον τρόπο υποβοηθείται η ανάπτυξη της κριτικής σκέψης, αφού οι συμμετέχοντες έχουν περισσότερο χρόνο για να σκεφθούν, να αναστοχαστούν ατομικά και ομαδικά πάνω σε αυτό που ειπώθηκε και να αναζητήσουν επιπλέον πληροφορίες πριν αντιδράσουν (Cheong & Cheung, 2008) συνεισφέροντας σε μια ποιοτική συζήτηση.

Παρόλ' αυτά, εντοπίζονται και μειονεκτήματα, ειδικά αν γίνει σύγκριση με την πρόσωπο-με-πρόσωπο διδασκαλία. Η έλλειψη αλληλεπίδρασης και η απομόνωση, λόγω της ελλειπούς επικοινωνίας και οικειότητας των συμμετεχόντων μεταξύ τους, η δημιουργία παρανοήσεων και ο μη αντικατοπτρισμός των συναισθημάτων των μελών αφού η επικοινωνία είναι μόνο γραπτή, είναι μόνο μερικά από αυτά (Φερφυρή, 2013). Επίσης, πολλοί χρήστες μπορεί να βαριούνται και να κουράζονται να βρίσκονται μπροστά από έναν υπολογιστή συνέχεια και η συζήτηση να εξελίσσεται αργά λόγω του ασύγχρονου χαρακτήρα της, με τη χρονική απόσταση από post σε post να κυμαίνεται από μερικά λεπτά μέχρι και μέρες (Kear, Woodthorpe, Robertson, & Hutchison, 2010).

Κριτική σκέψη

Ορισμός της κριτικής σκέψης, περιεκτικός, συγκεκριμένος και ευρέως αποδεκτός, δεν υπάρχει. Πολλοί ερευνητές έχουν δώσει τους δικούς τους, κάποιοι αρκετά ακριβείς και άλλοι ευρείς, όμως όλοι μοιάζουν μεταξύ τους και οι μικρές διαφοροποιήσεις εξαρτώνται από την οπτική γωνία του κάθε επιστήμονα. Ο Garrison (1992) υποστηρίζει ότι η Κ.Σ. δεν είναι μια ικανότητα αλλά μια εσωτερική, γνωστική διαδικασία που νοηματοδοτεί την εξωτερική εμπειρία μέσω της ανάλυσης των ζητημάτων και των πληροφοριών. Ο Brookfield (1987) αναφέρει ότι είναι μια θετική και παραγωγική δραστηριότητα που εξαρτάται από το πλαίσιο (context) και ότι οι κριτικά σκεπτόμενοι άνθρωποι προσπαθούν πάντα να συλλάβουν και να εξερευνήσουν εναλλακτικές ιδέες, μεθόδους κ.ά. το οποίο τους οδηγεί σε (ανα)στοχαστικό σκεπτικισμό (reflective skepticism). Τέλος, ορισμένοι ακαδημαϊκοί πηγαίνουν τις προσπάθειες ορισμού παραπέρα επισημαίνοντας το γεγονός ότι πολλοί ορισμοί δεν δικαιώνουν τη συνεργατική φύση της Κ.Σ. και την παρουσιάζουν ως ατομική, μονήρη δραστηριότητα. Έτσι, παρατηρούνται ορισμοί και της ομαδικής Κ.Σ., η οποία ορίζεται ως οι «γνωστικές και συναισθηματικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ δύο ή περισσοτέρων ατόμων που εξερευνούν τις εμπειρίες τους ώστε να αποκτήσουν νέες δια-υποκειμενικές αντιλήψεις και εκτιμήσεις» (Yukawa, 2006; όπ. αν. στη Ghodrati, 2015) ή και ως «μια σχετικά μη δομημένη κοινωνική διαδικασία που οδηγεί σε κρίσεις ή λυμένα προβλήματα μέσω της διαδικασίας της συνομιλίας και της χρήσης στοιχείων, συμπερασμάτων, ερμηνειών, λογικής και στοχασμού» (Olivares, 2005; όπ. αν. στη Ghodrati, 2015). Εκπαιδευτικοί, στην προσπάθειά τους να καλλιεργήσουν την Κ.Σ. στους εκπαιδευόμενους, καταφεύγουν στα AODs. Και ενώ πολυάριθμοι ερευνητές και ακαδημαϊκοί έχουν ασχοληθεί με την αξία της διαδικτυακής εκπαίδευσης και τις δυνατότητές των AODs (Salmon, 2000; όπ. αν. στη Smith, 2008), λίγες έρευνες έχουν γίνει εστιασμένες στη μέτρηση της καλλιέργειας της

Κ.Σ.. Συγκεκριμένα, όσοι ερευνητές αποφάσισαν να μελετήσουν την Κ.Σ. στα AODs ανέπτυξαν μοντέλα για την καταγραφή και μελέτη του διαδικτυακού λόγου, τα οποία υιοθετούν την ποιοτική ανάλυση περιεχομένου (content analysis). Οι Garrison, Anderson, & Archer (2001) βρήκαν υψηλά ποσοστά «αναζήτησης», δηλ. ότι τα μέλη σκέφτομαι, προτείνουν ιδέες και μοιράζονται πληροφορίες (από τα χαμηλά επίπεδα Κ.Σ. σύμφωνα με το μοντέλο τους). Οι Newman et al. (1995) και Newman et al. (1997) εξηγούν σε σειρά άρθρων τα πειράματά τους, όπου μελέτησαν συγκριτικά και προσπάθησαν να μετρήσουν το είδος της Κ.Σ. που λάμβανε χώρα σε σεμινάρια μέσω υπολογιστή και δια ζώσης. Διαπίστωσαν ότι η Κ.Σ. που αναπτύσσεται σε διαδικτυακό περιβάλλον έχει παρόμοιο «βάθος» με τα πρόσωπο-με-πρόσωπο σεμινάρια, παρόλο που βρήκαν ότι στα πρώτα οι ιδέες ήταν πιο σημαντικές, δικαιολογημένες ή συνδεδεμένες μεταξύ τους ενώ στα δεύτερα προέκυπταν περισσότερες νέες ιδέες και πληροφορίες. Πέρα από τις παραπάνω, και άλλες, πρόσφατες έρευνες συμπεραίνουν ότι μέσω των διαδικτυακών συζητήσεων ενισχύονται η ανάπτυξη της κριτικής σκέψης, η οικοδόμηση γνώσης αλλά και οι δεξιότητες επικοινωνίας (Wang, Woo & Zhao, 2009). Παρόλ' αυτά υπάρχουν και οι άλλοι ερευνητές με εργασίες, αναλύσεις και έρευνες που καταλήγουν σε αντίθετα συμπεράσματα (για παράδειγμα οι Rourke & Kanuka, 2007; Meyer, 2003; όπ. αν. στο Shedletsky, 2010).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Γενικός σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να μελετήσει αν το discussion forum ως εργαλείο CSCL επιτρέπει την καλλιέργεια Κ.Σ. στους εκπαιδευόμενους, με επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα αν αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο την ανάπτυξή της και ποιες είναι οι φάσεις της Κ.Σ. των ομάδων κατά την επίλυση προβλήματος. Με σκοπό την μέτρηση της Κ.Σ. σε μια AOD, δημιουργήθηκαν 4 ομάδες φοιτητριών (συνολικά 13 άτομα) που φοιτούσαν στο ΠΤΔΕ του Παν. Πάτρας. Με προθεσμία επτά ημερών, τους δόθηκε μια ΔΑΜ, και ζητήθηκε από τις ομάδες η συνεργατική επίλυσή της μέσω ανταλλαγής μηνυμάτων στην πλατφόρμα Wikispaces (η κάθε ομάδα είχε τη δική της σελίδα συζήτησης, κρυφή από τις υπόλοιπες). Στην παρούσα εργασία θα αναλυθούν τα μηνύματα που ανταλλάχθηκαν απο μια μόνο ομάδα, για προφανείς λόγους (πχ έλλειψη χώρου). Ως ερευνητικά εργαλεία χρησιμοποιήθηκαν η παρατήρηση και ποιοτική ανάλυση του περιεχομένου των μηνυμάτων. Κάθε μήνυμα (post ή comment) εντάχθηκε σε μία από τις 4 φάσεις των Garrison, Anderson, & Archer (2001): Ερέθισμα (triggering event), Εξερεύνηση (exploration), Ενσωμάτωση (integration) και Επίλυση (resolution). Οι φάσεις σχεδιάστηκαν για να αναγνωρίζουν τους δείκτες (indicators) και κοινωνιογνωστικές διαδικασίες της κριτικής σκέψης στα μηνύματα των μελών μιας ομάδας. Η πρώτη φάση (με δείκτες όπως «αίσθημα απορίας») αντιπροσωπεύει την πρόκληση, το πρόβλημα προς λύση που έχει τεθεί και η δεύτερη (π.χ. δείκτη ο «καταιγισμός ιδεών») την ανταλλαγή πληροφοριών και ιδεών, όπου τα μέλη πρέπει να σκεφτούν ατομικά και συνεργατικά για τη φύση του προβλήματος. Η τρίτη φάση/κατηγορία αποτελεί την «κατασκευή» της πιθανής λύσης, συνδέοντας τις προηγουμένες ιδέες και αξιολογώντας την καταλληλότητά τους μέσα από δοκιμές (π.χ. δείκτη «σύγκλιση μεταξύ μελών»). Τέλος, η τέταρτη φάση αφορά τις άμεσες ή έμμεσες δράσεις με σκοπό τον έλεγχο της προτεινόμενης λύσης για την εγκυρότητά της (π.χ. δείκτη «δοκιμή λύσεων»). Ως μονάδα ανάλυσης περιεχομένου επιλέχθηκε ολόκληρο το μήνυμα, υιοθετώντας τα επιχειρήματα των Rourke & Anderson (2004): «το μήνυμα ως μονάδα μπορεί να προσδιοριστεί αντικειμενικά ενώ ταυτοχρόνως αποτελεί μονάδα όπως αυτή έχει οριστεί από τον ίδιο τον δημιουργό της», κάτι που υποστηρίζουν και οι Garrison et al. (2001).

Η παρούσα ερευνητική προσπάθεια είναι μία μελέτη περίπτωσης (Case Study) και προτείνεται ως κατάλληλη ερευνητική μέθοδος για την παρούσα έρευνα αφού σαν όρος χαρακτηρίζει την ερευνητική στρατηγική όπου ο ερευνητής εστιάζει στη λεπτομερή ανάλυση της συνθετότητας και των χαρακτηριστικών μιας συγκεκριμένης περίπτωσης σε μια συγκεκριμένη κατάσταση (Verma & Mallick, 2004). Επίσης, δεδομένης της ομοιογένειας του δείγματος και του μικρού του αριθμού, η μελέτη περίπτωσης ήταν μονόδρομος, αφού πρόθεση της έρευνας αυτής δεν είναι η γενίκευση των αποτελεσμάτων στο σύνολο του πληθυσμού αλλά η βαθύτερη διερεύνηση των υποκειμένων υπό συγκεκριμένες συνθήκες (Cohen, Manion & Morrison, 2008).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Κατηγορίες	**Πλήθος μηνυμάτων**	**Ποσοστό (κατά προσέγγιση)**
Ερέθισμα	0	0%
Εξερεύνηση	13	28,9%
Ενσωμάτωση	10	22,2%
Επίλυση	5	11,1%
Άλλα*	17	37,7%
Σύνολο	45	100%

*****Μηνύματα που κωδικοποιήθηκαν ως "μη γνωστική παρουσία"

Πρέπει να τονιστεί ότι η ανάλυση και ο διαχωρισμός των μηνυμάτων βασίστηκε στην πολλαπλή ανάγνωσή τους από την ίδια την ερευνήτρια ώστε να εντοπίσει τους δείκτες της εκάστοτε κατηγορίας στο περιεχόμενό τους. Έρευνες όπως αυτή δεν αναλύουν τις διαδικασίες της σκέψης αλλά τα σημάδια των διαδικασιών στα μηνύματα. Όπως εξηγεί η Ghodrati (2015) επειδή η ομαδική Κ.Σ. δεν μπορεί να επιδεικτεί εξωτερικά δεν σημαίνει ότι δεν έλαβε χώρα κιόλας. Επομένως, ένας περιορισμός του είδους αυτού της έρευνας είναι ότι μπορεί να μελετήσει μόνο τις εμφανείς γνωστικές συμπεριφορές, όχι τις εσωτερικές διαδικασίες (Arnold & Ducate, 2006; όπ. αν. στη Ghodrati 2015). Τέλος, όπως οι Garrison et al. (2001) δηλώνουν για την αξιολόγηση της Κ.Σ., «η διαδικασία είναι αναπόφευκτα επαγωγική και επιρρεπής σε σφάλματα λόγω της υποκειμενικής αξιολόγησης του παρατηρητή». Συνεπώς, τα αποτελέσματα και της ίδιας αυτής έρευνας πρέπει να διαβαστούν με κάποια επιφύλαξη.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ/ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Περιληπτικά, η 1η φάση βρέθηκε μηδενική. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να φανεί λογικό δεδομένου των ξεκάθαρων πληροφοριών και ζητουμένων του προβλήματος. Επίσης, βάσει των λεγομένων, φαίνεται ότι οι συμμετέχουσες σκέφτηκαν και προβληματίστηκαν μόνες τους πριν γράψουν το πρώτο τους μήνυμα και ξεκινήσει η Εξερεύνησή του. Η 2η φάση είχε από τα μεγαλύτερα ποσοστά (28,9%), κάτι που συναντάται και σε άλλες, παρόμοιες έρευνες. Λόγω της φύσης της,-φάση κατά την οποία τα μέλη μοιράζονται πληροφορίες και προτείνουν ιδέες ελεύθερα και δημοκρατικά-, μπορεί να διαρκέσει περισσότερο από τις άλλες φάσεις. Η 3η φάση παρουσιάζει ένα εξίσου μεγάλο ποσοστό, παρά το γεγονός ότι είναι πιο απαιτητική. Στη φάση αυτή οι συμμετέχουσες ανταπεξήλθαν, συνθέτοντας τις προηγούμενες θεμελιωμένες ιδέες, χτίζοντας η μία στην ιδέα της άλλης και δημιουργώντας πιθανές λύσεις. Τα υψηλά ποσοστά των φάσεων της εξερεύνησης και ενσωμάτωσης υποδηλώνουν την τάση για διερεύνηση, ανάλυση, σύγκριση και αντιπαράθεση των συμμετεχόντων, διαδικασίες στενά συνδεδεμένες με την κριτική σκέψη. Πιο χαμηλό ποσοστό είχε η 4η και τελευταία φάση. Κάτι τέτοιο όμως είναι αποδεκτό, καθώς η ομάδα είχε δουλέψει πολύ στις προηγούμενες φάσεις, οπότε στην τελευταία, όπου ελέγχθηκαν/ δοκιμάστηκαν οι προτεινόμενες λύσεις καταλήγοντας στην ιδανική, δεν χρειαζόταν καταβολή μεγάλης προσπάθειας. Εντύπωση μπορεί να προκαλεί το μεγάλο ποσοστό των «άλλων» μηνυμάτων. Ο λόγος είναι ότι υπήρχαν μηνύματα όπως «έχω προβληματιστεί» ή «καμιά άλλη ιδέα;», τα οποία αν και σημαντικά για την εξέλιξη της συζήτησης, δεν ανήκουν σε κατηγορία του μοντέλου. Με λίγα λόγια, αν εξαιρεθούν τα «άλλα» μηνύματα, η συνολική Κ.Σ. της ομάδας υπήρξε μεν άνισα κατανεμημένη στις τέσσερις φάσεις, αλλά αν χωριστεί σε δύο επίπεδα (χαμηλού με τις φάσεις Ερέθισμα και Εξερεύνηση και υψηλού με τις φάσεις Ενσωμάτωση και Επίλυση) αποδεικνύεται «ισορροπημένη», ένα ενθαρρυντικό αποτέλεσμα για το περιβάλλον όπου έλαβε χώρα. Τα θετικά αποτελέσματα της παρούσας εργασίας έρχονται να στηρίξουν παλαιότερες εργασίες και έρευνες όπως των Cheong & Cheung (2008), που αναφέρονται στα οφέλη της CSCL, και των Newman et al. (1995), περί του «βάθους» και τη «συνδεδεμένη» Κ.Σ. στις διαδικτυακές ομάδες. Αν και πολύ περιορισμένο το δείγμα της έρευνας, τα στοιχεία που προέκυψαν απο την ανάλυση των μηνυμάτων και των τεσσάρων ομάδων, μας οδηγούν στο να σκεφτούμε ότι η CSCL και τα AODs ως εκπαιδευτικά περιβάλλοντα προμηνύουν ένα υποσχόμενο μέλλον για την Εκπαίδευση, το οποίο όμως απαιτεί περαιτέρω έρευνα του πεδίου, καθώς είναι δύσκολο και επισφαλές να στηριχθεί η εκπαιδευτική διαδικασία στη CSCL χωρίς πρώτα να ερευνηθεί συστηματικά και σε βάθος χρόνου για την αποτελεσματικότητά της. Σε κάθε περίπτωση, ένα εκπαιδευτικό περιβάλλον (είτε σε αίθουσα είτε μέσω υπολογιστή) που θα προωθεί την υψηλού επιπέδου μάθηση και θα καλλιεργεί ανάλογες δεξιότητες (στην περίπτωση αυτής της έρευνας την Κ.Σ.) καθιστά αναγκαία την κριτική συνομιλία μεταξύ των μελών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

An, Y. & Frick, T. (2006). Student Perceptions of Asynchronous Computer-Mediated Communication in Face-to-Face Courses. *Journal of Computer-Mediated Communication, 11,* 485–499. doi:10.1111/j.1083-6101.2006.00023.x

Brookfield, S. D. (1987). *Developing Critical Thinkers.* San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Cheong, C. M. & Cheung, W. S. (2008). Online discussion and critical thinking skills: A case study in a Singapore secondary school. *Australasian Journal of Educational Technology, 24*(5), 556–573.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2008). *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας.* (μτφ. Σ. Κυρανάκης, Μ. Μαυράκη, Χ. Μητσοπούλου, Π. Μπιθαρά, Μ. Φιλοπούλου). Αθήνα: Μεταίχμιο.

Garrison, D. R. (1992). Critical Thinking and Self-Directed Learning in Adult Education: An Analysis of Responsibility and Control Issues. *Adult Education Quarterly , 42* (3), 136-148.

Garrison, D. R., Anderson, T., & Archer, W. (2001). Critical thinking, cognitive presence, and computer conferencing in distance education. *American Journal of Distance Education , 15* (1), σσ. 7-23.

Ghodrati, N. (2015). Conceptualising and measuring collaborative critical thinking on asynchronous discussion forums: Challenges and possible solutions. *Digital Culture & Education , 7* (1), σσ. 86-103.

Goodman, B., Geier, M., Haverty, L., Linton, F., & McCready, R. (2001). A framework for asynchronous collaborative learning and problem solving. *Proceedings of AIED'01, 10th International Conference on Artificial Intelligence in Education*, (σσ. 188-199).

Graham, C. R., & Misanchuk, M. (2004). Computer-Mediated Learning Groups: Benefits and Challenges to Using Groupwork in Online Learning Environments. Στο T. S. Roberts, *Online collaborative learning : theory and practice* (σσ. 181-202). Hershey; London: Information Science Publishing.

J. Moore, T., Diefes-Dux, H., & Imbrie, P. (2006). Assessment of Team Effectiveness During Complex Mathematical Modeling Tasks. *Frontiers in Education Conference.* San Diego: IEEE.

Kear, K., Woodthorpe, J., Robertson, S., & Hutchison, M. (2010). From forums to wikis: perspectives on tools for collaboration. *The Internet and Higher Education , 13* (4), 218–225.

Nandi, D., Chang, S., & Balbo, S. (2009). A conceptual framework for assessing interaction quality in online discussion forums. *ASCILITE 2009 : Same places, different spaces : Proceedings of the 26th ASCILITE conference* (σσ. 665-673). Auckland, N.Z.: [Australian Society for Computers in Learning in Tertiary Education].

Nason, R., & Woodruff, E. (2004). Online Collaborative Learning in Mathematics: Some Necessary Innovations. Στο T. S. Roberts, *Online collaborative learning : theory and practice* (σσ. 103-131). Hershey; London: Information Science Publishing.

Newman, D. R., Johnson, C., Webb, B., & Cochrane, C. (1997). Evaluating the Quality of Learning in Computer Supported Co-Operative Learning. *Journal of the American Society for Information Science , 48* (6), 484-495.

Newman, D. R., Webb, B., & Cochrane, C. (1995). A content analysis method to measure critical thinking in face-to-face and computer supported group learning. *Interpersonal Computing and Technology Journal , 3*, 56-77.

Roth, W., & Jornet, A. (2013). Situated cognition. *Wiley Interdisciplinary Reviews - Cognitive Science* , p463-p478.

Rourke, L. & Anderson, T. (2004). Validity in quantitative content analysis. Educational Technology Research and Development, *52*(5), 5-18. Doi: 10.1007/BF02504769

Schcolnik, M., Kol, S., & Abarbanel, J. (2006). Constructivism in Theory and in Practice. *English Teaching Forum* , *44*, p12-20.

Shedletsky, L. (2010). Critical Thinking in Discussion: Online versus Face-to-Face. Στο D. Russell, *Cases on Collaboration in Virtual Learning Environments: Processes and Interactions* (σσ. 249-262). Hershey: Information Science Reference.

Smith, H. (2008). Assessing student contributions to online discussion boards. *Practitioner Research in Higher Education* , *2* (1), σσ. 22-28.

Verma, C. K., & Mallick, K. (2004). Εκπαιδευτική έρευνα: Θεωρητικές προσεγγίσεις και τεχνικές. (Α. Παπασταμάτης, Επιμ., & Έ. Γρίβα, Μεταφρ.) Αθήνα: Τυπωθήτω.

Wang, Q., Woo, H. & Zhao, J. (2009). Investigating critical thinking and knowledge construction in an interactive learning environment. *Interactive Learning Environments*, *17*, 95–104. Doi: 10.1080/10494820701706320

Yoders, S. (2014). Constructivism Theory and Use from 21st Century Perspective. *Journal of Applied Learning Technology* , *4* (3), 12-20.

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και Πράξη στη διδασκαλία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Τόπος.

Φερφυρή, Ν. (2013). *Προδιαγραφές μιας καινοτόμας πλατφόρμας ηλεκτρονικής μάθησης που ενσωματώνει τεχνικές επεξεργασίας φυσικής γλώσσας*. Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής (ΜΔΕ).

Η ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΜΙΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΣΕ ΕΝΑ «ΠΑΡΑΔΟΞΟ» ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Βλάχος Ιωάννης, Χούτου Χρυσούλα

Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

J_vlh@hotmail.com, chry_chou@hotmail.com

Η παρούσα εργασία ασχολείται με τη μελέτη περίπτωσης μιας μαθηματικού, απόφοιτης μεταπτυχιακού τμήματος Εφαρμοσμένων Μαθηματικών. Κατά την έρευνα αυτή, αναπτύσσεται ένα εργαλείο με το οποίο αναλύεται ο τρόπος με τον οποίο η μαθηματικός επιχειρηματολογεί όταν έρχεται αντιμέτωπη με ένα πρόβλημα Πιθανοτήτων, αντιπρόσωπο μιας κλάσης γρίφων η σωστή επίλυση των οποίων απαιτεί την εξήγηση των υποκείμενων υποθέσεων. Πιο συγκεκριμένα, διερευνάται το πως η μαθηματικός προσπαθεί να πείσει και να πειστεί, αλλά και το πως αξιολογεί τα επιχειρήματα που η ίδια δίνει.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η αυστηρή θεμελίωσή των Πιθανοτήτων συνοδεύεται από μεγάλο εύρος «παραδόξων» κάτι που φανερώνει την απόκλιση μεταξύ διαίσθησης και εννοιολογικής ανάπτυξης στον τομέα αυτόν (Batanero, 2009). Οι Inglis, Mejia-Ramos και Simpson σημειώνουν ότι ένας μαθηματικός μπορεί εν γνώσει του να χρησιμοποιήσει μη αυστηρά επιχειρήματα, συνοδεύοντάς τα με τον κατάλληλο βαθμό βεβαιότητας, ώστε να οδηγηθεί στη λύση ενός προβλήματος (Inglis et al., 2007). Η Falk από την άλλη μεριά, εξηγεί πως η διαίσθηση μπορεί να οδηγήσει ακόμη και επαγγελματίες μαθηματικούς, σε λανθασμένα αποτελέσματα, τα οποία μάλιστα υποστηρίζουν σθεναρά και με απόλυτη βεβαιότητα, όταν έρχονται αντιμέτωποι με τα «παράδοξα» των πιθανοτήτων (Falk, 1992).

Στην παρούσα εργασία αναπτύσσεται ένα εργαλείο μέσω του οποίου μελετάμε πλήρως την επιχειρηματολογία μιας μαθηματικού, η οποία καλείται να αντιμετωπίσει ένα κλασικό, αντίθετο προς τη διαίσθηση πρόβλημα των πιθανοτήτων. Στόχος μας είναι (α) να δείξουμε την αδυναμία ακόμη και ενός έμπειρου μαθηματικού, όχι απλά να επιχειρηματολογήσει αυστηρά αλλά και να κάνει σωστή χρήση της διαίσθησής του και (β) να παρουσιάσουμε το εν λόγω εργαλείο αξιολόγησης επιχειρημάτων.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Το εργαλείο ανάλυσής μας

Ο Toulmin στο βιβλίο του «Uses of Arguments» (1958) ανέπτυξε ένα σχήμα ανάλυσης της λογικής δομής της *καθημερινής επιχειρηματολογίας*. Η προσέγγιση του, πολύ διαφορετική από αυτή της κλασικής μαθηματικής λογικής, προσφέρει έναν διαδικαστικό τρόπο ελέγχου της εγκυρότητας ενός επιχειρήματος. Το σχήμα του Toulmin αποτελείται από έξι ειδών δηλώσεις. Το *συμπέρασμα* είναι ένας ισχυρισμός που παράγεται από ένα σύνολο *δεδομένων*. Η σύνδεση μεταξύ των δυο, επιτυγχάνεται μέσω ενός συνόλου *εγγυήσεων* οι οποίες συνοδεύονται από κάποια *υποστήριξη* και προσδίδουν κάποιον *βαθμό βεβαιότητας*. Αν οι εγγυήσεις δεν παρέχουν βεβαιότητα, τότε το επιχείρημα μπορεί να διαψευσθεί συνεπώς χρήζει *ανασκευής*.

Στην ειδική περίπτωση της *απόδειξης*, οι εγγυήσεις αποτελούνται από αξιώματα, ορισμούς ή θεωρήματα, ενώ η υποστήριξη είναι το θεωρητικό σύστημα μέσα στο οποίο αναπτύσσεται και δικαιολογείται η εγγύηση. Ο βαθμός βεβαιότητας για μια μαθηματική απόδειξη είναι απόλυτος (Pedemonte, 2005).

Οι Inglis, Mejia-Ramos και Simpson (2007) υποστηρίζουν ότι ένας μαθηματικός μπορεί εν γνώσει του, να χρησιμοποιήσει επιχειρήματα τα οποία δεν αποτελούν αυστηρές αποδείξεις, συνοδεύοντάς τα με τον κατάλληλο βαθμό βεβαιότητας. Οι εγγυήσεις που θα χρησιμοποιήσει σε αυτή την περίπτωση θα στοχεύουν στο να μειώσουν την αβεβαιότητά του σχετικά με κάποιον ισχυρισμό. Υπέθεσαν ως εκ τούτου ότι διαφορετικοί τύποι εγγυήσεων κατά την επιχειρηματολογία, προσδίδουν διαφορετικό βαθμό βεβαιότητας χωρίζοντας έτσι τις εγγυήσεις σε τρεις κατηγορίες. (α) *Ο επαγωγικός τύπος εγγύησης* κατά τον οποίο, μέσω παραδειγμάτων και ειδικών περιπτώσεων οδηγούμαστε στη γενίκευση χωρίς να είμαστε απαραίτητα βέβαιοι για την ισχύ του συμπεράσματός μας (β) *Ο διαισθητικός τύπος εγγύησης* αναφέρεται στην χρήση παρατηρήσεων ή νοητικών κατασκευών που μπορούν να μας πείσουν για τον ισχυρισμό που προσπαθούμε να αποδείξουμε χωρίς φυσικά να μας προσδίδουν απόλυτο βαθμό βεβαιότητας (γ) *Ο παραγωγικός τύπος εγγύησης* είναι ο αυστηρότερος των τριών, οι εγγυήσεις στηρίζονται σε αξιώματα, θεωρήματα, αλγεβρικούς μετασχηματισμούς ή αντιπαραδείγματα ενώ, στόχος εδώ δεν είναι η μείωση αλλά η άρση της αβεβαιότητας.

Ένας έμπειρος μαθηματικός στην προσπάθεια του να κατασκευάσει μια απόδειξη ενδέχεται να χρησιμοποιήσει οποιονδήποτε τύπο εγγύησης. Αυτό που αναμένεται από τον μαθηματικό δεν είναι να δώσει κατευθείαν μια ολοκληρωμένη αυστηρή απόδειξη, αλλά να ταιριάζει κάθε φορά τις εγγυήσεις που δίνει με κατάλληλο βαθμό βεβαιότητας. Ο βαθμός βεβαιότητας που συνοδεύει ο παραγωγικός τύπος εγγύησης είναι κατά τους Inglis, Mejia-Ramos και Simpson (2007) απόλυτος καθώς τα επιχειρήματα δεν επιδέχονται διάψευσης. Ο Aberdein (2005) εισήγαγε την θεωρία του *υποσκάπτη* (undercutter) σύμφωνα με την οποία, μια εγγύηση μπορεί να μην είναι λάθος, αλλά να αδυνατεί να στηρίξει το συμπέρασμα. Μια μαθηματική απόδειξη κατά τον Aberdein μπορεί να υποσκαφθεί χωρίς να διαψευσθεί το συμπέρασμά της. Ο Aberdein στην ουσία αναφέρεται σε επιχειρήματα παραγωγικού τύπου, που αν και δεν είναι από μόνα τους λάθος, εντούτοις δεν στηρίζουν επαρκώς το συμπέρασμα, άρα αναφέρεται σε «ψευδοαποδείξεις». Η παράθεση μιας τέτοιας απόδειξης θα μπορούσε να νοηθεί ως *ασθενώς παραγωγική* (Coe & Ruthven, 1994).

Τέλος, η Pedemonte προτείνει τη χρήση ενός ακόμη τύπου εγγύησης, τον *απαγωγικό*, όπως αυτός νοείται από τον Polya (Polya, 1962 στο Pedemonte, 2005). Σε αυτόν τον τύπο εγγύησης, ξεκινώντας από το συμπέρασμα, ένας κανόνας μπορεί να υποτεθεί, ο οποίος θα καθιστά την υπόθεση πιο έγκυρη. Ο βαθμός βεβαιότητας και εδώ δεν μπορεί να είναι απόλυτος.

Οι Inglis και Mejia Ramos (2008) υποστηρίζουν ότι υπάρχουν πέντε τρόποι για να απαντήσει κανείς στο ερώτημα «πόσο πεπεισμένος είσαι από αυτό το επιχείρημα;».

- Τύπος 0, η εστίαση στα δεδομένα. Το άτομο δεν εμπιστεύεται τα δεδομένα με αποτέλεσμα να προβάλλει τις αμφιβολίες του στην αξιολόγηση ολόκληρου του επιχειρήματος ή τα εμπιστεύεται τόσο σθεναρά ώστε να πείθεται χωρίς να εξετάζει πώς αυτά χρησιμοποιούνται μέσα στο επιχείρημα.
- Τύπος 1, η εστίαση στο συμπέρασμα. Το άτομο έχει τους δικούς του λόγους να εμπιστεύεται ή όχι το συμπέρασμα συνεπώς πείθεται ακόμη και χωρίς να εξετάσει τα επί μέρους βήματα του προς κρίση επιχειρήματος.
- Τύπος 2, η εστίαση στην εγγύηση και την υποστήριξη. Αν η εγγύηση υποστηρίζεται κατάλληλα και δεν επιδέχεται διάψευση μπορεί κανείς να πει ότι υποστηρίζει πλήρως το συμπέρασμα. Αξίζει εδώ να υπενθυμίσουμε τις ενστάσεις του Aberdein (2005) σχετικά με την ικανότητα μιας εγγύησης να υποστηρίξει το συμπέρασμα.

- Τύπος 3, η εστίαση στο βαθμό βεβαιότητας (και την αντίστοιχη διάψευση-ανασκευή) και στο κατά πόσο αυτός είναι κατάλληλος, λαμβάνοντας υπόψη το υπόλοιπο επιχείρημα.
- Τύπος 4, η εστίαση ενός ατόμου, όχι σε κάποιο από τα μέρη του επιχειρήματος αλλά στο πλαίσιο μέσα στο οποίο αυτό αναπτύσσεται.

Για να αναλύσουμε τα επιχειρήματα που θα διατυπώσει ο συμμετέχων, θα κάνουμε χρήση του σχήματος του Toulmin (1958) εμπλουτισμένου με τη θεωρία του Aberdein (2005) περί υποσκαπτών. Οι εγγυήσεις θα χαρακτηρίζονται, όπως προκύπτει από το θεωρητικό μας πλαίσιο ως επαγωγικού, διαισθητικού, απαγωγικού, ασθενώς παραγωγικού ή παραγωγικού. Για να αναλύσουμε το είδος της εστίασης που θα επιδεικνύει ο συμμετέχων όταν καλείται να ελέγξει την ισχύ ενός επιχειρήματος, θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους εστίασης όπως αυτοί προέκυψαν από την έρευνα των Inglis και Mejia Ramos (2008).

Το πρόβλημα

Ο Tom, ο Dick και ο Harry είναι φυλακισμένοι σε ξεχωριστά κελιά σε μια απομονωμένη χώρα και αναμένουν να εκτελεστούν. Ο μονάρχης της χώρας επιλέγει αυθαίρετα να δώσει χάρη σε έναν από τους τρεις. Η απόφαση για το ποιος θα είναι ο τυχερός έγινε μέσω ενός δίκαιου κλήρου. Το όνομα εκείνου που θα ελευθερωθεί δεν θα ανακοινωθεί μέχρι την ημέρα της εκτέλεσής του. Ο φρουρός των κελιών απαγορεύεται να ενημερώσει οποιονδήποτε από τους κρατούμενους σχετικά με την τύχη του. Ο Dick υποστηρίζει ότι ήδη γνωρίζει πως τουλάχιστον ένας από τους άλλους δύο κρατούμενους θα εκτελεστεί, πείθοντας έτσι τον συμπονετικό φρουρό ότι κατονομάζοντας κάποιον από αυτούς δεν παραβιάζει τις εντολές του. Ο φρουρός λοιπόν, αποκαλύπτει στον Dick ότι ο Harry πρόκειται να εκτελεστεί. Βασιζόμενος στην νέα πληροφορία, χαρούμενος ο Dick δηλώνει «πριν από λίγο οι πιθανότητα να σωθώ ήταν 1/3, τώρα μόνο εγώ και ο Tom είμαστε υποψήφιοι για να ελευθερωθούμε και αφού είναι εξίσου πιθανό και για τους δύο να σωθούμε η πιθανότητα μου να σωθώ αυξήθηκε στο 1/2». Ισχύει ο ισχυρισμός του Dick;

Η λύση που προτείνει η Falk είναι η εξής: Έστω T, D, H τα ενδεχόμενα να δοθεί χάρη στους Tom, Dick και Harry αντίστοιχα και t, d, h τα ενδεχόμενα ο φρουρός να κατονομάσει τους Tom, Dick και Harry αντίστοιχα ως μελλοθάνατους.

Είναι $P(T)=P(D)=P(H)=1/3$ δηλαδή οι τρεις κρατούμενοι έχουν ίδια πιθανότητα να τους δοθεί χάρη.

P(h|T)=1, P(h|D)=1/2 (υποθέτουμε ότι ο φρουρός είναι αδιάφορος αν θα κατονομάσει τον Harry ή τον Tom συνεπώς P(h|D)=P(t|D)=1/2) και P(h|H)=0.

Από το θεώρημα Bayes P(D|h)=1/3, P(T|h)=2/3, P(H|h)=0 συνεπώς ο ισχυρισμός του Dick είναι λανθασμένος (Falk, 1992).

1. P(A) η πιθανότητα του ενδεχομένου A και P(A|B) η δεσμευμένη πιθανότητα να συμβεί το A, δεδομένου ότι συμβαίνει το B.
2. Θεώρημα Bayes: Έστω δειγματικός χώρος Ω και {A1, A2, … Aν} μια διαμέρισή του. Αν B ένα ενδεχόμενο του Ω ώστε P(B)>0 και Ai⊂{A1, A2, … Aν}, είναι P(Ai|B)=P(B|Ai)P(Ai)/P(B) και P(B)=P(B|A1)P(A1)+P(B|A2)P(A2)+…+ P(B|Aν)P(Aν) από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας.

Οι συνήθεις παρανοήσεις που παρουσιάζουν οι επίδοξοι λύτες τέτοιων γρίφων είναι η υπόθεση της ομοιομορφίας και η υπόθεση κανένα-νέο, καμία αλλαγή (Falk, 1992). Η υπόθεση της ομοιομορφίας είναι η πηγή του λάθους του Dick και οφείλεται στην πεποίθηση ότι μετά την πληροφόρηση σχετικά με την τύχη του Harry οι πιθανότητες θα πρέπει να μοιραστούν ομοιόμορφα μεταξύ των άλλων δύο κρατούμενων. Η υπόθεση κανένα-νέο, καμία-αλλαγή πηγάζει από την πεποίθηση ότι, αφού ο Dick ήξερε εκ των προτέρων ότι ένας από τους άλλους δύο κρατούμενους θα εκτελεστεί, δεν έμαθε τίποτα καινούριο συνεπώς δεν υπάρχει λόγος να πιστεύει ότι η πιθανότητά απελευθέρωσής του θα αλλάξει. Η υπόθεση αυτή οδηγεί στο λανθασμένο συμπέρασμα ότι και η πιθανότητα απελευθέρωσης του Tom παραμένει σταθερή, δηλαδή πάλι σε ομοιομορφία μεταξύ των δύο.

Ερευνητικό ερώτημα

Η παρούσα εργασία εστιάζει στον τρόπο που επιχειρηματολογεί η μαθηματικός. Πού εστιάζει όταν προσπαθεί να πειστεί, πώς επιχειρηματολογεί όταν προσπαθεί να πείσει; Σε ποιο βαθμό επικρατεί η διαίσθηση της και πώς την διαχειρίζεται;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στην παρούσα έρευνα γίνεται μελέτη περίπτωσης μίας μαθητικού, κάτοχο μεταπτυχιακού διπλώματος Εφαρμοσμένων Μαθηματικών. Κριτήριο για την επιλογή της συγκεκριμένης μαθηματικού ήταν η άριστη επίδοσή της στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών γεγονός που την καθιστά μια αναμφίβολα έμπειρη μαθηματικό. Για την συλλογή δεδομένων συντάχθηκε ένα ερωτηματολόγιο τεσσάρων ερωτήσεων και ζητήθηκε από την συμμετέχουσα να απαντήσει είτε γραπτώς είτε προφορικώς και στις τέσσερις ερωτήσεις.

Το πρώτο ερώτημα του ερωτηματολογίου ήταν ο σχολιασμός του επιχειρήματος του Dick στον προαναφερθέντα γρίφο. Στο δεύτερο ερώτημα ζητήσαμε να σχολιαστεί το παρακάτω επιχείρημα (το οποίο αναφέρεται στο Falk, 1992): «Ας υποθέσουμε ότι ο φρουρός είχε κατονομάσει τον Tom. Με την λογική του Dick, αυτή η πληροφορία θα είχε τον ίδιο αντίκτυπο. Φαίνεται λοιπόν οτι όποιον και να κατονομάσει ο φρουρός, η τύχη του Dick θα είναι η ίδια. Στην πραγματικότητα, αρκεί ένα νοερό πείραμα από μέρους του Dick συμπεριλαμβανομένου ενός υποθετικού φρουρού και η πιθανότητα να σωθεί ο Dick αυξάνει. Όλα αυτά όμως δεν ισχύουν μόνο για τον Dick αλλά και για τον Tom και τον Harry, έτσι για κάθε έναν από τους τρεις κρατούμενους η πιθανότητα αυξάνει στο 1/2 άρα το άθροισμα των πιθανοτήτων των ενδεχομένων του δειγματικού χώρου αυξάνει στα 3/2. Αυτό όμως είναι άτοπο οπότε η πιθανότητα απελευθέρωσης του Dick δεν μπορεί να αυξάνει στο 1/2.». Το τρίτο ερώτημα ζητούσε την τεκμηριωμένη άποψη της συμμετέχουσας σχετικά με το «ποια είναι τελικά η πιθανότητα να σωθεί ο Dick μετά την αποκάλυψη του φρουρού». Τέλος, παρουσιάστηκε η λύση του προβλήματος με τη χρήση του θεωρήματος Bayes και ζητήθηκε από την συμμετέχουσα να το σχολιάσει.

ΑΝΑΛΥΣΗ

Ερώτημα 1

Απαντήσεις της Μαθηματικού: Καταλαβαίνω τη λογική του. Πιστεύω ότι, το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξε αυτός σχετικά με την πιθανότητα να σωθεί, μου φαίνεται σωστό. Δηλαδή προφανώς αφού ο ένας θα εκτελεστεί και έχουν μείνει δύο και ο ένας από τους δύο θα σωθεί, τότε όντως είναι πλέον 1/2 η πιθανότητα να σωθεί που είναι μεγαλύτερη από το 1/3 άρα ναι μου φαίνεται σωστό όλο αυτό. Τώρα δεν ξέρω αν υπάρχει κάποιο trick πίσω απ’ όλο αυτό που εγώ δεν κατάλαβα.

Δεδομένα	Η πιθανότητα να σωθεί κάποιος είναι 1/3 και ο ένας (εκ των Harry και Tom) θα εκτελεστεί.
Εγγύηση	Έχουν μείνει δύο (Dick και Tom) και ο ένας από τους δύο θα σωθεί.
Υποστήριξη	Προφανώς.
Βαθμός Βεβαιότητας	Μου φαίνεται.
Διάψευση - Ανασκευή	Εκτός αν υπάρχει κάποιο trick πίσω απ' όλο αυτό που εγώ δεν κατάλαβα.
Συμπέρασμα	Όντως είναι πλέον 1/2 η πιθανότητα να σωθεί (ο Dick).
Τύπος Εγγύησης	Διαισθητικός (υπόθεση ομοιομορφίας).
Υποσκάπτης	Η εγγύηση αληθεύει αλλά δεν οδηγεί στο συμπέρασμα το οποίο είναι λάθος.
Εστίαση	Τύπος 1 (το συμπέρασμα μου φαίνεται σωστό).

Πίνακας 1. Ανάλυση πρώτου επιχειρήματος (προσπαθεί να πειστεί).

Η μαθηματικός υποθέτει ομοιομορφία μεταξύ των πιθανοτήτων απελευθέρωσης των Tom και Dick επιβεβαιώνοντας έτσι την υπόθεση της Falk. Επιλέγει ωστόσο κατάλληλο βαθμό βεβαιότητας επιβεβαιώνοντας και την υπόθεση των Inglis, Mejia-Ramos και Simpson. Πείθεται, ως επί το πλείστον από το συμπέρασμα το οποίο «της φαίνεται» σωστό.

Ερώτημα 2

Απαντήσεις της Μαθηματικού: Ναι σωστά, αφού είναι τρεις και ο ένας από τους τρείς θα σωθεί, σίγουρα ο ένας από τους άλλους θα εκτελεστεί άρα ότι και να του έλεγε ο φρουρός, δεν σημαίνει κάτι αυτό γιατί είναι δεδομένο ότι ένας από τους άλλου δύο θα εκτελεστεί άρα είναι σαν να μην του λέει τίποτα στην ουσία. Μετά λέει όμως ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων αυξάνει στα 3/2. Ναι προφανώς αν το άθροισμα βγαίνει 3/2 είναι άτοπο αφού η συνολική πιθανότητα πρέπει να είναι 1 αλλά το να πεις ότι για τον καθένα είναι 1/2 άρα το άθροισμα είναι 3/2, κάτι μου φαίνεται λάθος σε αυτό, το να ορίσεις έτσι κάθε ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου.

Δεδομένα	Η πιθανότητα να σωθεί κάποιος είναι 1/3 και ο ένας (εκ των Harry και Tom) θα εκτελεστεί.
Εγγύηση	Τα ενδεχόμενα είναι λάθος ορισμένα.
Υποστήριξη	–
Βαθμός Βεβαιότητας	Μου φαίνεται
Διάψευση - Ανασκευή	–
Συμπέρασμα	Το να πεις ότι καθένας έχει 1/2 είναι λάθος.
Τύπος Εγγύησης	Διαισθητικός
Υποσκάπτης	Στην πραγματικότητα, τα ενδεχόμενα απελευθέρωσης των κρατουμένων δεδομένης μιας υποτιθέμενης συζήτησης με έναν φανταστικό φρουρό δεν ορίζονται καθόλου, λογικό αφού το επιχείρημα προσπαθεί να αναπαράγει την λογική του Dick.
Εστίαση	Τύπος 2, εστίαση στις εγγυήσεις (καθένας έχει 1/2 κάτι μου φαίνεται λάθος σε αυτό, το να ορίσεις έτσι κάθε ενδεχόμενο).

Πίνακας 2. Ανάλυση δεύτερου επιχειρήματος (προσπαθεί να πειστεί).

Η συμμετέχουσα αντιλαμβάνεται το άτοπο της πρότασης «το άθροισμα των πιθανοτήτων των ενδεχομένων του δειγματικού χώρου είναι 3/2» δεν πείθεται όμως πλήρως για την ισχύ του επιχειρήματος, υποθέτοντας πως κάποιο λάθος κρύβεται στον τρόπο που ορίστηκαν τα ενδεχόμενα. Δηλώνει ότι η πληροφορία που λαμβάνει ο φρουρός «είναι σαν να μην του λέει τίποτα στην ουσία» που οδηγεί όπως υποστηρίζει η Falk στην υπόθεση κανένα-νέο, καμία αλλαγή συνεπώς στη διατήρηση της πιθανότητας απελευθέρωσης του Dick.

Η εγγύηση που δίνει η συμμετέχουσα είναι στην ουσία το συμπέρασμα το οποίο δυσκολεύεται να δεχτεί. Τα ενδεχόμενα απελευθέρωσης των κρατουμένων δεδομένης μιας υποτιθέμενης συζήτησης με έναν φανταστικό φρουρό, δεν είναι απλώς λάθος ορισμένα, αλλά καθόλου ορισμένα. Ακριβώς αυτό είναι και το κενό στον συλλογισμό του Dick ο οποίος δεν ορίζει καθόλου το ενδεχόμενο απελευθέρωσής του, δεδομένης της πληροφορίας που έλαβε από τον φρουρό και ακριβώς αυτός είναι ο λόγος που καταλήγουμε σε άτοπο. Τέλος η μαθηματικός εστιάζει στην εγγύηση που παρατέθηκε, η οποία της φαίνεται λάθος με αποτέλεσμα να μην πείθεται για την ορθότητα του επιχειρήματος χωρίς να εξετάσει καθόλου το συμπέρασμα.

Ερώτημα 3

Απαντήσεις της Μαθηματικού: Μας ενδιαφέρει η πιθανότητα να σωθεί κάποιος και όχι να εκτελεστεί, που είναι δεδομένο ότι είναι 1/3 αφού έχουμε τρεις υποψήφιους απ' τους οποίους ένας θα σωθεί. Επίσης είναι δεδομένο ότι ένας από τους άλλους δύο θα εκτελεστεί άρα ό,τι και να έλεγε ο φρουρός, είναι σαν να μην λέει τίποτα, άρα είναι 1/3 η πιθανότητα.

Δεδομένα	Η πιθανότητα να σωθεί κάποιος είναι 1/3 και ο ένας από τους άλλους δύο (Harry και Tom) θα εκτελεστεί.
Εγγύηση	Ό,τι και να έλεγε ο φρουρός, είναι σαν να μην λέει τίποτα.
Υποστήριξη	–
Βαθμός Βεβαιότητας	Απόλυτος (είναι σίγουρη)
Διάψευση - Ανασκευή	–
Συμπέρασμα	Είναι 1/3 η πιθανότητα (να σωθεί ο Dick)
Τύπος Εγγύησης	Διαισθητικός (υπόθεση κανένα-νέο, καμία-αλλαγή).
Υποσκάπτης	Η εγγύηση είναι λάθος και δεν οδηγεί στο κατά τα άλλα σωστό συμπέρασμα.

Πίνακας 3. Ανάλυση τρίτου επιχειρήματος (προσπαθεί να πείσει).

Η μαθηματικός επηρεάζεται από την υπόθεση κανένα-νέα, καμία-αλλαγή, δηλώνοντας ότι η πιθανότητα απελευθέρωσης του Dick παραμένει 1/3 αποτυγχάνει όμως να ταιριάξει την εγγύηση που δίνει, με κατάλληλο βαθμό βεβαιότητας διαψεύδοντας έτσι την υπόθεση των Inglis, Mejia-Ramos και Simpson. Η πιθανότητα είναι πράγματι 1/3, η διαισθητική εγγύηση που δίνεται από τη συμμετέχουσα όμως είναι λάθος, δεν υποστηρίζεται από καμία γνωστή θεωρία ή πρόταση αδυνατώντας έτσι να στηρίξει το συμπέρασμα.

Ερώτημα 4

Απαντήσεις της Μαθηματικού: Αυτό μου φαίνεται πολύ λογικό (ο τρόπος που ορίστηκε το ενδεχόμενο h και στη συνέχεια οι δεσμευμένες πιθανότητες). Μετά λέει, σύμφωνα με το θεώρημα Bayes, P(Ai|B) είναι αυτό… άρα P(D|h) είναι… α και τα βάζει ανάποδα τώρα… α και επειδή εμείς ξέρουμε αυτές τις πιθανότητες, σωστά. Βρήκαμε μέσω του τύπου (θεώρημα Bayes) ότι η πιθανότητα P(H|h) είναι 1/3 και θα πρέπει το άθροισμα P(D|h)+P(T|h)+P(H|h) ναι είναι 1 άρα και το άλλο θα είναι 2/3. Άρα όντως είναι 1/3 και 2/3.

Δεδομένα	Η πιθανότητα να σωθεί κάποιος είναι 1/3 και ο ένας (εκ των Harry και Tom) θα εκτελεστεί. Ο φρουρός κατονόμασε τον Harry μελλοθάνατο.
Εγγύηση	Τα ενδεχόμενα είναι καλά ορισμένα συνεπώς, μέσω του θεωρήματος Bayes και επειδή θα πρέπει το άθροισμα P(D|h)+P(T|h)+P(H|h) να είναι ίσο με 1.
Υποστήριξη	Θεωρία πιθανοτήτων, δεσμευμένες πιθανότητες.
Βαθμός Βεβαιότητας	Απολύτως βέβαιη
Διάψευση - Ανασκευή	–
Συμπέρασμα	Όντως είναι 1/3 και 2/3 (αντίστοιχα η πιθανότητα να σωθεί ο Dick και ο Tom).
Τύπος Εγγύησης	(Ασθενώς) παραγωγικός
Υποσκάπτης	Αν ο φρουρός είναι προκατειλημμένος υπέρ του να κατονομάσει τον Harry όποτε του δίνεται η ευκαιρία, τότε η πιθανότητα απελευθέρωσης γίνεται 1/2 και για τους δύο κρατούμενους.
Εστίαση	Τύπος 2, εστίαση στις εγγυήσεις (αυτό μου φαίνεται πολύ λογικό).

Πίνακας 4. Ανάλυση τέταρτου επιχειρήματος (προσπαθεί να πειστεί).

Το τελευταίο επιχείρημα, όπως ήταν αναμενόμενο πείθει πλήρως την μαθηματικό αφού στηρίζεται στο γνωστό θεώρημα Bayes της θεωρίας πιθανοτήτων. Το μόνο που χρειάστηκε να κάνει η συμμετέχουσα για να πειστεί, ήταν να ελέγξει την ορθότητα των δεσμευμένων πιθανοτήτων P(h|D)=1/2, P(h|T)=1 και P(h|H)=0. Να σημειώσουμε εδώ ότι η πιθανότητα P(h|D)=1/2, υποδηλώνει μη προκατειλημμένο φρουρό κάτι που, αν θέλουμε να είμαστε αυστηροί, δεν είναι άμεσο. Στην ουσία δηλαδή, θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι παρόλο που η εγγύηση είναι παραγωγικού τύπου, ο βαθμός βεβαιότητας δεν θα έπρεπε να είναι απόλυτος. Μια διάψευση-ανασκευή που θα ταίριαζε εδώ θα ήταν η πρόταση «εκτός αν ο φρουρός είναι προκατειλημμένος υπέρ του να κατονομάσει τον Harry όποτε του δίνεται η ευκαιρία».

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η επιχειρηματολογία της μαθηματικού στο τρίτο ερώτημα επιβεβαιώνει την υπόθεση της Falk (1992) ότι οι παρανοήσεις που σχετίζονται με τον γρίφο των «διαβόητων τριών φυλακισμένων» μπορούν να οδηγήσουν ακόμη και έμπειρους μαθηματικούς στη χρήση λανθασμένων διαισθητικών εγγυήσεων συνοδευόμενων από απόλυτη βεβαιότητα, έρχεται έτσι σε αντιπαράθεση με τη υπόθεση των Inglis, Mejia-Ramos και Simpson (2007) ότι ένας έμπειρος μαθηματικός ενδέχεται να χρησιμοποιήσει οποιονδήποτε τύπο εγγύησης αλλά θα μπορεί να τον συνοδεύει με κατάλληλο βαθμό βεβαιότητας.

Στο τέταρτο ερώτημα η συμμετέχουσα χρησιμοποίησε μια εγγύηση παραγωγικού τύπου, την οποία χαρακτηρίσαμε ως ασθενώς παραγωγική επειδή φαίνεται να μπορεί να υποσκαφτεί. Ως αντικείμενο μελέτης για περεταίρω έρευνα προτείνεται ο έλεγχος της υπόθεσης σχετικά με τον απόλυτο βαθμό βεβαιότητας με τον οποίο θα πρέπει να συνοδεύεται ένα παραγωγικό επιχείρημα (Inglis et al., 2007) και η αντιπαράθεσή της με την θεωρία του *υποσκάπτη* (Aberdein, 2005).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Aberdein, A. (2005). The uses of argument in mathematics. *Argumentation*, *19*(3), 287-301.

Batanero, C. (2009). *Training school teachers to teach probability: Reflections and challenges.* In Conferência Plenária 1 Universidad de Granada. Vila Real, Spain.

Coe, R., & Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal*, *20*(1), 41-53.

Falk, R. (1992). A closer look at the probabilities of the notorious three prisoners. *Cognition*, *43*(3), 197-223.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P. & Simpson, A. (2007) Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66, pp. 3-21.

Inglis, M. & Mejia-Ramos, J. P. (2008). How persuaded are you? A typology of Responses. *Research in Mathematics Education*, *10*(2), 119-133.

Pedemonte, B. (2005). Argumentation and algebraic proof. *ZDM*, *40*(3), 385-400.

Toulmin, S. (1958). *The Uses of Argument*. UK. Cambridge University Press.

ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ ΤΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗ ΧΑΡΑΞΗ ΠΟΡΕΙΑΣ ΣΤΟΝ ΝΑΥΤΙΚΟ ΧΑΡΤΗ

*** Βρούτσης Νικόλαος, **Ψυχάρης Γιώργος, **Τριανταφύλλου Χρυσαυγή**

*Εκπαιδευτικός ΠΕ03, ** Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ

vroutsidi@gmail.com, gpsych@math.uoa.gr, chrtriantaf@math.uoa.gr

Η παρούσα έρευνα αφορά τη σύνδεση των σχολικών μαθηματικών με πρακτικές του χώρου εργασίας. Ειδικότερα, πραγματεύεται τους τρόπους νοηματοδότησης γεωμετρικών εννοιών της Α΄ Λυκείου μέσω αυθεντικών πρακτικών και εργαλείων του πλοιάρχου του Εμπορικού Ναυτικού. Οι δραστηριότητες που δόθηκαν στους μαθητές είχαν ως πλαίσιο αναφοράς τον ναυτικό χάρτη και αφορούσαν τη χάραξη πορείας και την εύρεση της θέσης του πλοίου. Σε όλες τις φάσεις της έρευνας συμμετείχε επαγγελματίας πλοίαρχος. Στα αποτελέσματα καταγράφεται η πορεία νοηματοδότησης της εφαπτομένης κύκλου από τους μαθητές κατά τη διερεύνηση της χάραξης πορείας πλοίου, για την αποφυγή εμποδίου, στον ναυτικό χάρτη.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τις τελευταίες δεκαετίες οι περισσότερες έρευνες στον χώρο της διδακτικής των μαθηματικών συγκλίνουν στην άποψη ότι υπάρχει διάσταση ανάμεσα στα μαθηματικά που διδάσκονται στο σχολείο και στα μαθηματικά που χρησιμοποιούνται σε χώρους εργασίας (Triantafillou & Potari, 2010). Η διάσταση αυτή αποτελεί συχνά εμπόδιο, για τους νεοεισερχόμενους σε έναν χώρο εργασίας, στην απόδοση νοήματος σε μαθηματικές πρακτικές του χώρου αυτού. Πρόκειται για το λεγόμενο κενό ικανοτήτων (*skills gap)* (FitzSimons, 2014). Ταυτόχρονα, όμως, αναγνωρίζεται η δυνατότητα που παρέχουν οι χώροι εργασίας για τη διερεύνηση θεμάτων που αφορούν την κατασκευή και χρήση μαθηματικών εννοιών και τον τρόπο που οι προσδοκώμενοι στόχοι των επαγγελματικών χώρων επηρεάζουν και διαμορφώνουν τη νοηματοδότηση αυτή (Pozzi et al., 1998). Στην κατεύθυνση αυτή, τα τελευταία χρόνια καταγράφεται έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον στη διδακτική αξιοποίηση του χώρου εργασίας, στη γενική εκπαίδευση (Psyharis & Potari, 2017).

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε επιμέρους αποτελέσματα μιας έρευνας, με θέμα τη διασύνδεση μαθηματικών εννοιών με αυθεντικές καταστάσεις του χώρου εργασίας. Συγκεκριμένα, μελετήσαμε πώς μαθητές της Α’ Λυκείου νοηματοδότησαν γεωμετρικές έννοιες μέσω της εμπλοκής τους σε ένα αυθεντικό πρόβλημα που αντιμετωπίζει ένας πλοίαρχος, κατά τη χάραξη της πορείας πλοίου στον ναυτικό χάρτη. Προσπαθήσαμε να απαντήσουμε στα εξής ερωτήματα:

- Με ποιο τρόπο νοηματοδοτούν οι μαθητές τη διασύνδεση μαθηματικών εννοιών και αυθεντικών καταστάσεων από τον χώρο της ναυσιπλοΐας;
- Ποιος είναι ο ρόλος των διαθέσιμων μέσων (εργαλείων ψηφιακών και αυθεντικών) και πρακτικών στη διαδικασία νοηματοδότησης;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στην παρούσα εργασία υιοθετήσαμε ως θεωρητικό πλαίσιο την τρίτη γενιά της Θεωρίας Δραστηριότητας, στην οποία μονάδα ανάλυσης αποτελούν δύο αλληλεπιδρώντα συστήματα δραστηριότητας (Engeström et al., 1995). Ως δομικά στοιχεία του κάθε συστήματος αναγνωρίζονται τα υποκείμενα που συμμετέχουν στο σύστημα δραστηριότητας, τα εργαλεία ή τα τεχνουργήματα που χρησιμοποιούν τα υποκείμενα, ο επιδιωκόμενος στόχος, οι κανόνες (επίσημοι ή ανεπίσημοι κανονισμοί που μπορούν να περιορίσουν ή να διευρύνουν τα όρια των δραστηριοτήτων), η κοινότητα, δηλαδή η κοινωνική ομάδα στην οποία ανήκει το υποκείμενο, και η κατανομή εργασίας, η οποία καθορίζει τον τρόπο που οι στόχοι της δραστηριότητας κατανέμονται μέσα στην κοινότητα. Στην παρούσα εργασία τα δύο συστήματα δραστηριότητας που αλληλεπιδρούν είναι αυτό της διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο (μαθητές Α' Λυκείου, εκπαιδευτικός) και της ναυσιπλοΐας του Εμπορικού Ναυτικού (πλοίαρχος).

Στη θεώρηση αυτή, η διαμόρφωση του αντικειμένου της δραστηριότητας ανακύπτει ως μέρος της δυναμικής αλληλεπίδρασης των δύο πρακτικών. Ως *σύνορα (boundaries)* ορίζονται οι κοινωνικές πολιτισμικές διαφορές που προκαλούν ασυνέχειες στις δράσεις ή αλληλεπιδράσεις των ανθρώπων, καθώς αυτοί καλούνται να συμμετάσχουν σε δραστηριότητες της νέας πρακτικής με τις οποίες δεν είναι εξοικειωμένοι (Akkerman & Bakker, 2011). Ο όρος *διέλευση συνόρων (boundary crossing)* αναφέρεται στις αμφίδρομες ενέργειες και αλληλεπιδράσεις μεταξύ των υποκειμένων προκειμένου να εγκαθιδρύσουν ή να αποκαταστήσουν την επικοινωνία ανάμεσά στα συστήματα δραστηριότητας (Bakker & Akkerman, 2014). Η δυναμική αυτή διαδικασία μπορεί να έχει ως δυνητικό αποτέλεσμα την επίτευξη μιας υβριδικής κατάστασης (Engeström et al., 1995). Στα πλαίσια της αμφίδρομης πορείας ανάμεσα στα σύνορα τα υποκείμενα χρησιμοποιούν εργαλεία/τεχνουργήματα προκειμένου να γεφυρώσουν τα δύο συστήματα δραστηριότητας. Για να περιγράψουν τα αντικείμενα αυτά οι Star και Griesemer, (1989) εισήγαγαν τον όρο διασυνοριακά αντικείμενα (*boundary objects*). Ο Jurdak, (2016) αναγνωρίζει τις εργασιακές πρακτικές ως ένα από τα διασυνοριακά αντικείμενα ανάμεσα στα μαθηματικά της τυπικής εκπαίδευσης και της εφαρμογής τους στην καθημερινή ζωή. Μια επαγγελματική πρακτική θεωρείται διαμεσολαβητικό αντικείμενο, καθώς μπορεί να αποκτήσει νόημα τόσο ως ρουτίνα στο εργασιακό περιβάλλον, όσο και ως πεδίο εφαρμογής των μαθηματικών εννοιών στις πρακτικές του χώρου εργασίας (Jurdak, 2016).

Σύμφωνα με τους Akkerman και Baker (2011) η διέλευση συνόρων αποτελεί μια μαθησιακή διαδικασία που μπορεί να περιγραφεί μέσα από την πιθανή ενεργοποίηση τεσσάρων μηχανισμών μάθησης/ νοηματοδότησης. Η ενεργοποίηση των μηχανισμών είναι το ζητούμενο της διέλευσης των συνόρων αλλά δεν είναι πάντοτε εφικτή. Οι μηχανισμοί αυτοί είναι: (α) η αναγνώριση *(identification)* που αναφέρεται στον προσδιορισμό της ταυτότητας κάθε πρακτικής, (β) ο συντονισμός *(coordination)* ο οποίος αφορά τις ελάχιστες ανταλλαγές μεταξύ των διαφορετικών πρακτικών, (γ) ο αναστοχασμός *(reflection)* που περιλαμβάνει την κατανόηση και την ερμηνεία των διαφορών μεταξύ των πρακτικών, είτε υιοθετώντας τις θεωρήσεις του νέου συστήματος *(perspective taking)*, είτε διαμορφώνοντας νέες *(perspective making)* και (δ) ο μετασχηματισμός *(transformation)* με αναφορά στις προφανείς αλλαγές που πραγματοποιούνται και μπορεί να οδηγήσει ακόμα και στην κατασκευή νέων υβριδικών πρακτικών.

Η συνεχής παρουσία του επαγγελματικού χώρου ως πλαίσιο εργασίας, η συμμετοχή του επαγγελματία, η εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες στον ναυτικό χάρτη, η χρήση των εργαλείων του πλοιάρχου, η εφαρμογή αυθεντικών πρακτικών του επαγγελματία πλοιάρχου , η ανάγκη ικανοποίησης των κανόνων που διέπουν τη χάραξη πορείας και η επίλυση ρεαλιστικών προβλημάτων , διαμόρφωσαν τις συνθήκες που είχαν ως αποτέλεσμα οι μαθητές να διέλθουν τα σύνορα ανάμεσα στους δύο χώρους, ενεργοποιώντας μηχανισμούς μάθησης/νοηματοδότησης.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Πλαίσιο της έρευνας

Στα πρότυπα του ευρωπαϊκού προγράμματος Mascil (http://www.mascil-project.eu) τέσσερις μαθητές, όλοι αγόρια, της Α’ Γενικού Λυκείου συμμετείχαν σε αυθεντικές δραστηριότητες από τον χώρο εργασίας των πλοιάρχων του Εμπορικού Ναυτικού. Οι δραστηριότητες είχαν ως πλαίσιο αναφοράς τον ναυτικό χάρτη και αφορούσαν τη χάραξη πορείας του πλοίου και την εύρεση της θέση του (στίγμα του σκάφους). Οι δραστηριότητες δε δόθηκαν στους μαθητές στο πλαίσιο της παραδοσιακής σχολικής τάξης αλλά τους παρουσιάστηκαν ως καταστάσεις του χώρου εργασίας.

Στον σχεδιασμό, όσο και στην κυρίως φάση της έρευνας, συμμετείχε και επαγγελματίας του χώρου. Στη φάση του σχεδιασμού πραγματοποιήθηκαν συναντήσεις του εκπαιδευτικού με τον επαγγελματία, ώστε ο πρώτος να εξοικειωθεί με τον χώρο εργασίας και, στη συνέχεια, να δημιουργήσει τις δραστηριότητες στις οποίες ενεπλάκησαν οι μαθητές. Προκειμένου να διατηρηθεί ο ρεαλισμός, δε δόθηκαν φύλλα εργασίας στους μαθητές, αλλά αυτοί λειτούργησαν ως εκπαιδευόμενοι του χώρου εργασίας. Εργάστηκαν αποκλειστικά στον ναυτικό χάρτη με την καθοδήγηση του πλοιάρχου. Στην κυρίως φάση, ο επαγγελματίας έδρασε ως διδάσκων των μαθητών και φορέας της ναυτικής γνώσης. Παρουσίασε στους μαθητές το πλαίσιο στο οποίο θα εργάζονταν, το ναυτικό χάρτη, τα όργανα και τις μετρήσεις που πραγματοποιεί ο κυβερνήτης του πλοίου. Ο εκπαιδευτικός συμμετείχε ως παρατηρητής και παρέμβαινε με ερωτήσεις, ενθαρρύνοντας τη διερεύνηση και καθοδηγώντας όσο το δυνατό λιγότερο. Ο επαγγελματίας και ο εκπαιδευτικός διευκόλυναν την αμφίδρομη κίνηση των μαθητών στα σύνορα των δύο συστημάτων. Ο πλοίαρχος ήταν αυτός που επικοινώνησε τα στοιχεία της πρακτικής του στους μαθητές. Από την άλλη ο εκπαιδευτικός, με τις ερωτήσεις του, επανάφερε στο προσκήνιο τα τυπικά μαθηματικά. Το κυρίως μέρος της έρευνας χωρίστηκε σε τρεις φάσεις. Οι δραστηριότητες που δημιουργήθηκαν (Πίνακας 1.) είχαν στόχο αφενός την εξοικείωση των μαθητών με τον χώρο εργασίας, αφετέρου την ανάδειξη του μαθηματικού περιεχομένου των πρακτικών και εργαλείων του επαγγελματία. Στα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας θα παρουσιάσουμε τη νοηματοδότηση της εφαπτομένης του κύκλου μέσα από τη δραστηριότητα «Αποφυγή εμποδίου».

Συλλογή δεδομένων και μέθοδος ανάλυσης

Τα δεδομένα που συνελέγησαν είναι βιντεοσκοπημένες δραστηριότητες των μαθητών κατά την κυρίως φάση της έρευνας, απομαγνητοφωνήσεις των βιντεοσκοπημένων δραστηριοτήτων των μαθητών, προσωπικές σημειώσεις του εκπαιδευτικού, και τα αποτελέσματα των δραστηριοτήτων των μαθητών πάνω στον ναυτικό χάρτη στον οποίο εργάστηκαν. Αφού μελετήθηκαν προσεκτικά οι βιντεοσκοπημένες δραστηριότητες και οι αντίστοιχες απομαγνητοφωνήσεις ακολούθησε ο προσδιορισμός των κρίσιμων επεισοδίων, τα οποία επιλέχθηκαν και χαρακτηρίστηκαν ακολουθώντας τη βασισμένη στα δεδομένα θεωρία (*grounded theory*), (Charmaz, 2006). Τα επεισόδια που προσδιορίστηκαν αφορούν νοηματοδοτήσεις ή αποτυχία νοηματοδοτήσεων που προέκυψαν καθώς οι μαθητές προσπάθησαν να «αποκωδικοποιήσουν» επαγγελματικές πρακτικές, να κατανοήσουν και να χρησιμοποιήσουν τα εργαλεία του πλοιάρχου ή να δώσουν απάντηση σε δραστηριότητες που

Φάση Α (δύο ώρες) Εισαγωγική δραστηριότητα	
Γεωγραφικές συντεταγμένες-ναυτικό μίλι	Ορθοκανονικό σύστημα αξόνων
Ακτοπλοϊκό ταξίδι	Τεθλασμένη γραμμή, στροφή κατά γωνία, παράλληλη μεταφορά
Φάση Β (τέσσερις ώρες) Γραμμές θέσης πλοίου	
Αντιστοιχία Ευθυγράμμιση	Ευθεία, σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο
Οριζόντια γωνία	Εγγεγραμμένη γωνία, σχετικές θέσεις κύκλων στο επίπεδο
Ασφαλής διέλευση επικίνδυνων υδάτων	Μεταβολή εγγεγραμμένης γωνίας
Δύο ασύγχρονες διοπτεύσεις του ίδιου καταφανούς σημείου.	Παραλληλόγραμμο, παράλληλη μεταφορά
Απόσταση ραντάρ	Κύκλος
Αποφυγή εμποδίου	Εφαπτόμενες κύκλου
Ισοβαθής καμπύλη	Εφαπτόμενες καμπύλης
Φάση Γ (δύο ώρες) Εύρεση θέσης πλοίου με τη χρήση γραμμών θέσης	
Περιοδικότητα αναλαμπής φάρων	Περιοδικότητα
Εύρεση θέσης πλοίου	Σχετικές θέσεις κύκλων , κύκλου και ευθείας στο επίπεδο, περίκεντρο και έκκεντρο τριγώνου

Εικόνα 1: Φάσεις και δραστηριότητες της εφαρμογής και οι σχετικές μαθηματικές έννοιες

μοντελοποιούν ρεαλιστικά προβλήματα τα οποία αντιμετωπίζει ο πλοίαρχος κατά τον πλου του σκάφους. Σε δεύτερο επίπεδο η ανάλυση επικεντρώθηκε στη συνοριακή διέλευση των μαθητών σε σχέση με τις νοηματοδοτήσεις που καταγράφηκαν στο πρώτο επίπεδο. Στα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας αναλύεται ένα κρίσιμο επεισόδιο από τη Β’ φάση, η «αποφυγή εμποδίου», το οποίο οδήγησε στη νοηματοδότηση της έννοιας της εφαπτομένης του κύκλου από τους μαθητές.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στην κυρίως φάση της έρευνας καταγράφηκαν νοηματοδοτήσεις γεωμετρικών εννοιών και σχέσεων μέσω της ενεργοποίησης των διαδικασιών της αναγνώρισης, του συντονισμού και του αναστοχασμού κατά τη διέλευση των συνόρων από τους μαθητές, ενώ υπήρξαν και ενδείξεις μετασχηματισμού. Στην παρούσα εργασία, αναγνωρίζοντας τον κρίσιμο ρόλο του αναστοχασμού στη σύνδεση των πρακτικών των σχολικών μαθηματικών και του χώρου εργασίας (Jurdak, 2016), αναλύουμε ένα επεισόδιο που εμπίπτει στον παραπάνω μηχανισμό.

Η «Αποφυγή εμποδίου» υπήρξε ένα ανοικτό πρόβλημα γεωμετρικής φύσης για τους μαθητές. Πηγή έμπνευσης της δραστηριότητας αποτέλεσε η αυθεντική πρακτική που ακολουθεί ο επαγγελματίας, σύμφωνα με την οποία χαράζει δύο εφαπτόμενες (από το σημείο εκκίνησης και το σημείο προορισμού) προς ένα νοητό κύκλο γύρω από το εμπόδιο ακτίνας δύο ναυτικών μιλίων. Οι μαθητές κλήθηκαν να χαράξουν τη νέα πορεία, χωρίς να γνωρίζουν την τυπική πρακτική του επαγγελματία. Η διατύπωση του προβλήματος αλλά και το πλαίσιο αναφοράς δεν ήταν ίδια με αυτά που συναντάμε στην τυπική μαθηματική εκπαίδευση. Το πρόβλημα έδρασε ως διασυνοριακό αντικείμενο. Αφενός, για τον χώρο εργασίας, αποτελεί μια σαφή, δομημένη διαδικασία, αφετέρου, χαρακτηρίζεται από ερμηνευτική ευελιξία όσον αφορά τους μαθητές και τα τυπικά μαθηματικά.

Στη διάρκεια της δραστηριότητας ο εκπαιδευτικός υιοθέτησε το ρόλο του παρατηρητή, θέτοντας διευκρινιστικά ερωτήματα όπου έκρινε απαραίτητο. Ο επαγγελματίας λειτούργησε ως κριτής της ορθότητας των προτεινόμενων λύσεων. Η δραστηριότητα λειτούργησε και για τον ίδιο αναστοχαστικά, καθώς συνέκρινε την ακρίβεια της δικής του λύσης σε σχέση με αυτής των μαθητών. Επίσης, αξίζει να επισημάνουμε ότι στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές χρησιμοποίησαν τα κύρια εργαλεία του πλοιάρχου, το διπαράλληλο και τον ναυτικό διαβήτη. Ο διπαράλληλος κανόνας αποτελείται από δύο ίσους κανόνες ενωμένους έτσι ώστε να πλησιάζουν και να απομακρύνονται ο ένας από τον άλλο, διατηρώντας πάντα παράλληλη θέση μεταξύ τους. Χρησιμοποιήθηκε για τη χάραξη ευθειών και την παράλληλη μεταφορά τους. Ο ναυτικός διαβήτης (κουμπάσο) διαφέρει από τον κοινό σχολικό διαβήτη. Τα δύο μεταλλικά σκέλη του έχουν μεγαλύτερο μήκος και καταλήγουν και τα δύο σε οξείες αιχμές. Χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση και σύγκριση αποστάσεων.

Παρατηρώντας στρατηγικές που εφάρμοσαν οι μαθητές καταγράψαμε τρεις κανόνες που τις επηρεάζουν και δεν ανήκουν υποχρεωτικά όλες στην τυπική μαθηματική εκπαίδευση. Αρχικά, οι μαθητές έδρασαν υπακούοντας τους κανόνες των τυπικών μαθηματικών, καθώς ακόμα δεν έχουν διέλθει τα σύνορα των δύο συστημάτων αλλά δρουν ακολουθώντας τις νόρμες των σχολικών μαθηματικών. Συγκεκριμένα, υπακούοντας την ανάγκη της ακρίβειας, χάραξαν κύκλο γύρω από το εμπόδιο προκειμένου να οριοθετηθεί το επικίνδυνο τμήμα. Η κίνηση αυτή των μαθητών αποτέλεσε τη μόνη διαφοροποίησή τους από την πρακτική του επαγγελματία.

Εικόνα 2: Πρώτη λύση, δεν ικανοποιεί το κριτήριο της ασφάλειας.

Στο πλαίσιο της αναζήτησης λύσεων ανέκυψε η ανάγκη οι μαθητές να λάβουν υπόψη τους κανόνες του χώρου εργασίας. Γρήγορα απέρριψαν την πρώτη λύση που παρουσίασαν καθώς δεν ικανοποιούσε τον περιορισμό της ασφάλειας, απόσταση 2 ν. μ. από το εμπόδιο σε όλο το μήκος της διαδρομής (εικόνα 2). Από την πρώτη λύση, οι μαθητές είχαν χρησιμοποιήσει εφαπτόμενο τμήμα στον κύκλο, χωρίς όμως να κάνουν κάποια αναφορά στον όρο.

Μ1: Θα πέσει πάλι πάνω στη βραχονησίδα. Περνάει μέσα στο όριο. Θέλει δύο μίλια.

Μ2: Κοίτα ο κύκλος είναι εδώ, το βλέπεις; (Δείχνει, με το διπαράλληλο, στον Μ3 ότι το τελευταίο τμήμα της πορείας τέμνει τον κύκλο).

Εικόνα 3: Δεύτερη λύση, δεν ικανοποιεί το κριτήριο τη συντομίας.

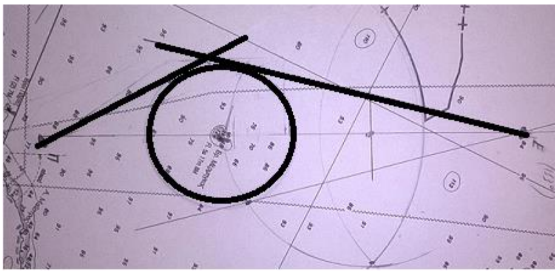
Στη συνέχεια, οι μαθητές πρότειναν παραλλαγές που ικανοποιούσαν το κριτήριο της ασφάλειας. Στη φάση αυτή ενεργοποιήθηκε ο δεύτερος κανόνας του επαγγελματικού χώρου, που αφορά τη συντομία της διαδρομής. Στις λύσεις χρησιμοποίησαν την «οριακή διέλευση» από τον κύκλο ασφαλείας, νοηματοδοτώντας την έννοια της εφαπτομένης από σημείο εκτός κύκλου. Επίσης, οι μαθητές παρατήρησαν ότι μια διαδρομή με συχνές στροφές σε γωνίες 90^o δεν είναι φυσιολογική για ένα πλοίο, καταλήγοντας στη λύση ενός εφαπτόμενου τμήματος για την αποφυγή του εμποδίου (εικόνα 3). Παρατηρούμε πως πλέον οι μαθητές υιοθετώντας κανόνες του νέου συστήματος δραστηριότητας προσπαθούν να εφαρμόσουν γνώσεις και εμπειρίες τους σε ένα νέο πλαίσιο διερχόμενοι τα σύνορα μεταξύ των δύο συστημάτων.

Μ2: Λοιπόν, πας από εδώ - μισό να βρω την ευθεία - «τραβάς»… (Προσπαθεί να φέρει εφαπτομένη στον κύκλο).

Ε: Τι «τραβάς»;

Μ1: Την εφαπτομένη.

Μ2: Ναι, μια που να περνάει οριακά του τόξου του κύκλου και φτάνεις μέχρι εδώ. (Δείχνει σημείο μετά το σημείο επαφής) …



Εικόνα 4: Τελική λύση

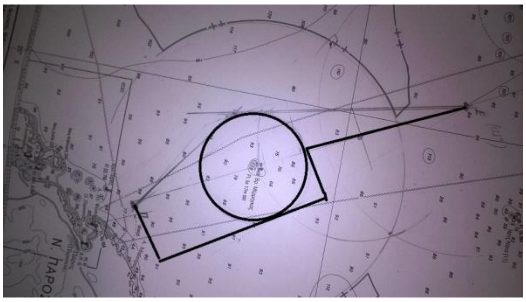
Το τελευταίο ερώτημα που τίθεται, αφορά το σημείο στροφής του πλοίου προς τον προορισμό. Επικεντρώθηκαν στην πρώτη εφαπτομένη και τον κύκλο, πράγμα που τους δυσκόλεψε στην εύρεση της λύσης. Τελικά, οι μαθητές διατύπωσαν και ενέκριναν την ιδέα το πλοίο να στρίψει στο σημείο που η δεύτερη εφαπτομένη του κύκλου, από το σημείο προορισμού, τέμνει την πρώτη. Αυτή τη φορά, η εφαπτομένη νοηματοδοτήθηκε ως η γραμμή που απέχει από τον κύκλο «ελάχιστη απόσταση». Οι εφαπτόμενες χαράχτηκαν «στο περίπου» από τους μαθητές με την καθοδήγηση του επαγγελματία, υιοθετώντας την επαγγελματική πρακτική (εικόνα 4).

Μ2: Να ρωτήσω κάτι; Θα ήταν λάθος να προσθέσουμε στην ακτίνα μισό μίλι;

Μ4: Το λιγότερο δυνατό. Λοιπόν ένα μίλι πιο πέρα…

Μ3: Ωραία, κάνε ακτίνα δυόμιση μίλια για να μην ξαναμπεί στον κύκλο.

Μ1: Να περάσει από τον κύκλο ελάχιστα. (Εννοεί μετά τη στροφή). Να είναι εφαπτόμενη. Όπα, κοίτα ξέρεις τι… αρχίζουμε από εδώ, κάνουμε μια εφαπτόμενη και βλέπουμε που ενώνονται.



Εικόνα 5: Λύση που απορρίφθηκε ως ασύμβατη με πορεία πλοίου

Σημαντικό ρόλο στις αποφάσεις των μαθητών έπαιξε ο χώρος εργασίας ως πλαίσιο αναφοράς καθώς εισήγαγε κανόνες, όπως η ασφάλεια και η συντομία της πορείας του σκάφους αλλά και κανόνες των τυπικών μαθηματικών που εισήγαγαν οι μαθητές χωρίς να εμφανίζονται στην καθημερινή πρακτική του επαγγελματία, όπως η ακρίβεια. Υιοθετώντας τους παραπάνω περιορισμούς και κανόνες του χώρου εργασίας οι μαθητές κατέληξαν στην επιλογή λύσης που ταυτίζεται με την επίσημη επαγγελματική πρακτική απορρίπτοντας ορθές μαθηματικά λύσεις οι οποίες ήταν ασύμβατες με το νέο πλαίσιο (εικόνα 5). Η επαγγελματική πρακτική δρώντας ως πρακτική στα σύνορα *(boundary practice)* διευκόλυνε την επικοινωνία ανάμεσα στα δύο συστήματα δραστηριότητας, αποσαφηνίζοντας τις γνώσεις και τις πεποιθήσεις που κινητοποιούνται στην πορεία ανακάλυψής της από τους μαθητές καθώς εκείνοι ενεπλάκησαν στους ορίζοντες ενός διαφορετικού από το δικό τους κόσμου μέσω της ενεργοποίησης του αναστοχασμού.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παρούσα έρευνα στηρίχτηκε στην παραδοχή πως η ενσωμάτωση αυθεντικών καταστάσεων από τον χώρο εργασίας στη διδασκαλία των μαθηματικών μπορεί να ενισχύσει την κατανόηση μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές και να εμπλουτίσει τη μαθηματική γνώση. Στην παρούσα εργασία εστιάσαμε στον τρόπο με τον οποίο κανόνες του χώρου εργασίας αποτέλεσαν κίνητρο οι μαθητές να διέλθουν τα γνωστικά σύνορα ανάμεσα στα σχολικά μαθηματικά και τον επαγγελματικό χώρο. Τους οδήγησαν στη νοηματοδότηση της έννοιας της εφαπτομένης κύκλου μέσω της διαδικασίας του αναστοχασμού και συγκεκριμένα της υιοθέτησης θεωρήσεων, καθώς η τελική λύση που έδωσαν ταυτίζεται με την επίσημη επαγγελματική πρακτική. Αν και η δραστηριότητα αφορούσε μια βασική, ήδη γνωστή στους μαθητές, γεωμετρική έννοια παρατηρήσαμε πως αυτοί πειραματίστηκαν με διάφορες λύσεις μέχρι να καταλήξουν στη χρήση της εφαπτομένης. Επιπλέον, οι μαθητές θεώρησαν τη λύση που δόθηκε ως τη συντομότερη διαδρομή που θα μπορούσαν να επιλέξουν αν και δεν μπορούσαν να το τεκμηριώσουν με μαθηματικά επιχειρήματα. Οι λύσεις των μαθητών επηρεάστηκαν από την πολυπλοκότητα των δύο συστημάτων. Το νέο πλαίσιο στο οποίο εργάστηκαν με το δικό του πλαίσιο κανόνων και τις ιδιαιτερότητές του, όπως και η δράση της επαγγελματικής πρακτικής ως διασυνοριακό αντικείμενο, ήταν αυτό που βοήθησε στην ενεργοποίηση της διαδικασίας του αναστοχασμού.

Επίσης, τα ευρήματα της έρευνας υποστηρίζουν τα αντίστοιχα ευρήματα άλλων ερευνών (Pozzi et al. ,1998) όσον αφορά το νόημα που αποκτά το πρόβλημα για τους μαθητές στον χώρο εργασίας, καθώς λειτουργεί ως διασυνοριακό αντικείμενο. Οι στρατηγικές επίλυσης είναι πιο πλούσιες σε νοήματα καθώς οι μαθητές, εξοικειωμένοι σταδιακά με το σύστημα του επαγγελματικού χώρου, λαμβάνουν υπόψη τους όχι μόνο την ορθότητα του μαθηματικού συλλογισμού τους αλλά και την ικανοποίηση κανόνων του χώρου εργασίας. Έτσι απέρριψαν λύσεις που δεν ικανοποιούσαν το κριτήριο της συντομίας ή αυτές στις οποίες η προτεινόμενη πορεία ήταν ασύμβατη για πλοίο.

Στο μαθηματικό Αναλυτικό Πρόγραμμα της χώρας μας η μαθηματική γνώση εμφανίζεται ασύνδετη με τον πραγματικό κόσμο. Αν και εντοπίστηκαν εφαρμογές που έχουν σαν πλαίσιο τον ναυτικό χάρτη, αυτές αποτελούν μαθηματικά προβλήματα με αναφορά στον χώρο εργασίας και όχι αυθεντικές καταστάσεις του χώρου από όπου μπορούν να αναδειχθούν μαθηματικές έννοιες. Παρόλα αυτά, όσον αφορά στις διδακτικές προεκτάσεις της έρευνας υπήρξαν ενθαρρυντικές ενδείξεις ότι η σχολική πρακτική μπορεί να κερδίσει από την εμπλοκή των μαθητών σε ρεαλιστικές καταστάσεις από χώρους εργασίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Akkerman, S. F., & Bakker, A. (2011). Boundary Crossing and Boundary Objects. *Review of Educational Research, 81*(2), 132–169

Bakker, A., & Akkerman, S. F. (2014). A boundary-crossing approach to support students’ integration of statistical and work-related knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(2), 223–237.

Charmaz, K. (2006). *Constructing grounded theory*. London ; Thousand Oaks, Calif: Sage Publications.

Engeström, Y., Engeström, R., & Kärkkäinen, M. (1995). Polycontextuality and boundary crossing in expert cognition: Learning and problem solving in complex work activities. *Learning and Instruction*, *5*(4), 319–336.

FitzSimons, G. E., (2014). Commentary on vocational mathematics education: where mathematics education confronts the realities of people’s work. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(2), 291–305.

Jurdak, M. (2016). *Learning and Teaching Real World Problem Solving in School Mathematics*. Cham: Springer International Publishing.

Pozzi, S., Noss, R., & Hoyles, C. (1998). Tools in practice, mathematics in use. *Educational Studies in Mathematics*, *36*(2), 105–122.

Psycharis, G. & Potari, D. (2017). Mathematics teachers' learning at the boundaries of teaching and workplace. In G. A. Stillman, W. Blum & G. Kaiser (Eds.) *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. Springer Book Series.

Star, S. L., & Griesemer, J. R. (1989). Institutional Ecology, `Translations' and Boundary Objects: Amateurs and Professionals in Berkeley's Museum of Vertebrate Zoology, 1907-39. *Social Studies of Science*, *19*(3), 387–420.

Triantafillou, C., & Potari, D. (2010). Mathematical practices in a technological workplace: the role of tools. *Educational Studies in Mathematics*, *74*(3), 27-294.

Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ "TOUCHCOUNTS" ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟ ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΝΩΣΤΙΚΑ ΑΠΑΙΤΗΤΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΡΓΩΝ ΣΤΟ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟ

Δημητρίου Λουίζα και Πίττα-Πανταζή Δήμητρα

Τμήμα Επιστημών Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

dimloui@hotmail.com , dpitta@ucy.ac.cy

Σκοπός της έρευνας, είναι να διερευνήσει κατά πόσο η διδασκαλία με τη χρήση της εφαρμογής "TouchCounts" μπορεί να επηρεάσει την επίλυση γνωστικά απαιτητικών μαθηματικών έργων καθώς και τον μαθηματικό συλλογισμό μαθητών προδημοτικής. Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν δυο μαθητές προδημοτικής διαφορετικών μαθησιακών ικανοτήτων. Οι μαθητές συμμετείχαν σε μια σειρά μαθημάτων χρησιμοποιώντας την εφαρμογή "TouchCounts". Η ανάλυση των δεδομένων που συλλέχθηκαν μέσα από ατομικές συνεντεύξεις έδειξε ότι η χρήση της συγκεκριμένης εφαρμογής μπορεί να αναπτύξει το μαθηματικό συλλογισμό των δύο μαθητών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ένα από τα βασικά ερωτήματα με το οποίο φαίνεται να βρίσκονται αντιμέτωποι πολλοί ερευνητές της μαθηματικής παιδείας είναι και η επίδραση της χρήσης των ψηφιακών τεχνολογιών στους μικρούς μαθητές (Sinclair & Baccaglini – Frank, 2016) αφού πολλοί από αυτούς τονίζουν την καταλληλότητα και την προσθετική αξία της χρήσης των ψηφιακών εργαλείων από τους μικρούς μαθητές (Moyer-Packenham, Salkind, Bolyard, & Suh, 2013). Την ίδια ώρα, η Εθνική Ένωση για την Εκπαίδευση των Μικρών Παιδιών έχει τονίσει τη σημασία για παροχή υψηλού επιπέδου εκπαίδευσης στους μικρούς μαθητές (NAEYC, 2010). Ωστόσο, παρόλη την έμφαση που δίνεται στην ανάγκη για παροχή υψηλού επιπέδου εκπαίδευση στους μικρούς μαθητές, πολλοί ερευνητές τονίζουν ότι οι μαθητές νηπιαγωγείου τείνουν να έρχονται συστηματικά σε επαφή με έννοιες που έχουν ήδη κατακτήσει (Claessens, Engel, & Curran, 2014) αφού πολλοί από τους εκπαιδευτικούς υποτιμούν τις ικανότητες των μικρών μαθητών στα μαθηματικά (Moss, Bruce, & Bobis, 2016). Κατά συνέπεια, σκοπός της παρούσας έρευνας, είναι να διερευνήσει κατά πόσον η διδασκαλία με τη χρήση συγκεκριμένης εφαρμογής σε iPads είναι σε θέση να επηρεάσει τον τρόπο επίλυσης γνωστικά απαιτητικών μαθηματικών έργων από μαθητές προδημοτικής καθώς και τον μαθηματικό τους συλλογισμό. Το ερευνητικό ερώτημα που καλείται να εξετάζει η παρούσα έρευνα είναι:

- Μπορεί η χρήση της μαθηματικής εφαρμογής "TouchCounts" να επηρεάσει τον μαθηματικό συλλογισμό και την επίλυση γνωστικά απαιτητικών έργων μαθητών προδημοτικής; Αν ναι, πώς;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Οι τεχνολογίες πολλαπλής αφής και η εφαρμογή "*TouchCounts*"

Οι τεχνολογίες πολλαπλής αφής φαίνεται να συγκεντρώνουν μεγάλο ενδιαφέρον, λόγω της στενής σχέσης μεταξύ του κύριου τρόπου αλληλεπίδρασης (μέσω των δαχτύλων) και της νευροεπιστήμης που αναδεικνύουν τη σημασία που διαδραματίζουν τα δάχτυλα στην ανάπτυξη της αισθητοποίησης της έννοιας του αριθμού (Sato, Cattaneo, Rizzolatii, & Gallese, 2007). Η εφαρμογή "*TouchCounts*" (Sinclair & Jackiw, 2011) είναι μια ανοιχτή εφαρμογή που δίνει τη δυνατότητα διερεύνησης εννοιών που σχετίζονται με την αισθητοποίηση της έννοιας του αριθμού. Προσφέρει ένα περιβάλλον μάθησης όπου οι μαθητές μπορούν να δημιουργούν, να χειρίζονται μαθηματικά αντικείμενα με τα δάχτυλα και τα χέρια τους, ενώ δίνει τη δυνατότητα ανάπτυξης νέων μορφών μαθηματικής επικοινωνίας. Επιπρόσθετα η παροχή οπτικών αναπαραστάσεων, αριθμητικών συμβόλων και ανατροφοδότησης, μπορεί να βελτιώσει το επίπεδο κατανόησης τους. Η εφαρμογή αυτή μπορεί να χαρακτηριστεί ως ένα ισχυρό εργαλείο για την ανάπτυξη βασικών ικανοτήτων όπως: άμεση αναγνώριση ποσοτήτων, αντιστοιχία ένα-προς-ένα μεταξύ ποσοτήτων σε αναλογική μορφή και των δαχτύλων, έννοια μέρος-όλο (Sinclair & Baccaglini – Frank, 2016). Πρόσφατα, οι Sinclair και Heyd-Metzuyanim (2014) έδειξαν ότι μαθητές ηλικίας 5-6 ετών που χρησιμοποίησαν την εφαρμογή "*TouchCounts*" έτειναν να αναγνωρίζουν έναν αριθμό ως αντικείμενο αντί ως μια διαδικασία αρίθμησης, ενώ η χρήση της συγκεκριμένης εφαρμογής από μαθητές ηλικίας 3-4 ετών έδειξε ότι η ταυτόχρονη τοποθέτηση των δαχτύλων στην οθόνη συμβάλλει στην ανάπτυξη της ικανότητας άμεσης αναγνώρισης μέσω χειρονομιών (Sinclair & Pimm, 2015).

Μαθηματικός συλλογισμός, αισθητοποίηση της έννοιας του αριθμού και γνωστικά απαιτητικά μαθηματικά έργα

Μια από τις βασικές πτυχές που περιλαμβάνονται στα έγγραφα του Εθνικού Συμβουλίου Δασκάλων των Μαθηματικών της Αμερικής (NCTM, 2000) είναι η ανάγκη για παροχή υψηλού επιπέδου εκπαίδευσης στους μαθητές μέσω έργων που «προκαλούν» τους μαθητές. Σύμφωνα με τον Lannin και τους συνεργάτες του (2011) ο μαθηματικός συλλογισμός από το νηπιαγωγείο μέχρι και τις μεγαλύτερες τάξεις του Λυκείου, συνδέεται με 9 βασικές ενδείξεις κατανόησης: ανάπτυξη υποθέσεων, γενίκευση για αναγνώριση κοινών στοιχείων, γενίκευση μέσω εφαρμογής, διατύπωση υποθέσεων χρησιμοποιώντας ορισμούς, σύμβολα ή αναπαραστάσεις, διερεύνηση του γιατί, αιτιολόγηση που βασίζεται σε ήδη γνωστές ιδέες, αναγνώριση μιας δήλωσης ως ψευδής, αιτιολόγηση και αναγνώριση της εγκυρότητας ενός επιχειρήματος και εγκυροποίηση της αιτιολόγησης.

Παρόλο που η έννοια της αίσθησης του αριθμού ορίζεται με διαφορετικούς τρόπους από τους ερευνητές, η πλειοψηφία των ερευνητικών δεδομένων φαίνεται να συγκλίνουν στο συμπέρασμα ότι η αίσθηση του αριθμού αποτελεί σύνθεση δύο βασικών διαστάσεων (Jordan, Kaplan, Olah, & Locuniak, 2006). Οι δύο αυτές διαστάσεις αναφέρονται στις βασικές αριθμητικές δεξιότητες καθώς και στις δεξιότητες που σχετίζονται με την τυπική διδασκαλία. Οι συνιστώσες αυτές είναι σημαντικές για την ανάπτυξη ανωτέρου επιπέδου μαθηματικής σκέψης. Μεταξύ των βασικών αριθμητικών δεξιοτήτων περιλαμβάνονται ικανότητες όπως η ικανότητα απαρίθμησης, γνώσης και τροποποίησης του αριθμού, η εκτέλεση αριθμητικών μοτίβων, οι μη λεκτικοί υπολογισμοί και η εκτίμηση ενώ μεταξύ των δεξιοτήτων του τυπικού αριθμητικού συλλογισμού περιλαμβάνονται και η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων όπως και οι υπολογισμοί.

Οι Stein και Smith (1998) στην προσπάθειά τους να κατηγοριοποιήσουν ένα μαθηματικό έργο δημιούργησαν δύο κατηγορίες έργων ανάλογα με τις γνωστικές τους απαιτήσεις α) μαθηματικά έργα χαμηλών γνωστικών απαιτήσεων και β) μαθηματικά έργα υψηλών γνωστικών απαιτήσεων. Οι ίδιοι, κατατάσσουν στην κατηγορία των έργων με χαμηλή γνωστική απαιτητικότητα, έργα που απαιτούν απομνημόνευση καθώς και έργα που για την επίλυσή τους απαιτούν απλές διαδικασίες χωρίς οποιαδήποτε διασύνδεση με εννοιολογική κατανόηση. Αντίθετα στη δεύτερη κατηγορία κατατάσσονται έργα που για την επίλυσή τους απαιτούνται διαδικασίες οι οποίες όμως συνδέονται με εννοιολογική κατανόηση καθώς και έργα εφαρμογής (Stein & Smith, 1998).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Δείγμα και διαδικασία έρευνας

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 2 μαθητές προδημοτικής διαφορετικών μαθησιακών ικανοτήτων, ηλικίας 5-5,5 ετών ενός αστικού νηπιαγωγείου στην Κύπρο. Η ανωνυμία των συμμετεχόντων εξασφαλίστηκε μέσω της χρήσης ψευδώνυμων. Η συγκεκριμένη έρευνα αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας που πραγματοποιήθηκε σε συνολικά 75 μαθητές προδημοτικής. Η επιλογή του συγκεκριμένου δείγματος έγινε σκόπιμα αφού οι συγκεκριμένοι μαθητές αντιπροσωπεύουν μαθητές διαφορετικών μαθησιακών ικανοτήτων και παρουσίασαν τη μεγαλύτερη ανάπτυξη σε σχέση με τους συνομηλίκους τους. Συγκεκριμένα, χαρακτηρίστηκαν από την εκπαιδευτικό της τάξης ως μαθητές μέτριας επίδοσης (Μιχάλης) και υψηλής επίδοσης (Μαρίνα). Όλοι οι μαθητές ήταν ικανοί να μετρούν προφορικά μέχρι το 16 και να αναγνωρίζουν αριθμούς τουλάχιστο μέχρι το 10. Οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να συμμετάσχουν σε μια σειρά 10 μαθημάτων διάρκειας 40λεπτών όπου είχαν την ευκαιρία σε δυάδες να χρησιμοποιήσουν την εφαρμογή "*TouchCounts*". Κατά την εφαρμογή των διδασκαλιών οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να έρθουν σε επαφή με όλες τις διαστάσεις της έννοιας του αριθμού (Jordan et al., 2006) ενώ δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση από τις ερευνήτριες στη χρήση ερωτήσεων που προάγουν διαφορετικά επίπεδα σκέψης.

Διαδικασία συλλογής δεδομένων

Οι μαθητές συμμετείχαν σε 2 ατομικές συνεντεύξεις που έγιναν από τις ερευνήτριες και είχαν διάρκεια περίπου 20 λεπτά. Κατά τη διάρκεια της προ-πειραματικής συνέντευξης οι μαθητές κλήθηκαν να βρουν διαφορετικούς τρόπους σύνθεσης του αριθμού 8. Με την ολοκλήρωση των διδασκαλιών οι μαθητές κλήθηκαν να επαναλάβουν το ίδιο έργο. Οι ατομικές συνεντεύξεις των μαθητών βιντεογραφήθηκαν και η συλλογή των δεδομένων έγινε κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς 2016-2017.

Μαθηματικό Πρόβλημα

Για τη συλλογή των δεδομένων της έρευνας χρησιμοποιήθηκε μια τροποποιημένη μορφή του μαθηματικού προβλήματος "*The seven apple task*" (Tsamir, Tirosh, Levenson, Tabach & Barkai, 2015). Το πρόβλημα αυτό μπορεί να χαρακτηριστεί ως ένα πρόβλημα τροποποίησης αριθμού σύμφωνα με τους Jordan et al. (2006) αφού προϋποθέτει τη σύνθεση και το διαχωρισμό του αριθμού 8. Αποτελεί ένα γνωστικά απαιτητικό πρόβλημα δεδομένου ότι δεν προϋποθέτει απλή απομνημόνευση από τους μαθητές, αλλά εννοιολογική κατανόηση αφού το άθροισμα είναι ήδη γνωστό στους μαθητές. Επιπρόσθετα η χρήση πολλών καρτελών αυξάνει το επίπεδο πολυπλοκότητας του έργου που έχουν να αντιμετωπίσουν οι μαθητές. Οι μαθητές αρχικά είχαν στη διάθεσή τους 2 είδη καρτελών (κόκκινες και μωβ) με διαφορετικό αριθμό καραμελών σε κάθε μια (0-8 καραμέλες σε κάθε καρτέλα) και ακολούθως 3 είδη καρτελών (κόκκινες, μωβ και ροζ) με διαφορετικό αριθμό καραμελών σε κάθε μια (1-6 καραμέλες σε κάθε καρτέλα). Στόχος των μαθητών ήταν να συνθέσουν τον αριθμό 8 αρχικά με δύο τρόπους και ακολούθως με τρεις τρόπους.

Ανάλυση δεδομένων

Για την ανάλυση των βιντεογραφημένων επεισοδίων, χρησιμοποιήθηκαν ποιοτικές μέθοδοι ανάλυσης δεδομένων. Η ανάλυση των δεδομένων βασίστηκε στο θεωρητικό πλαίσιο των Lannin et al. (2011) που συνδέουν το μαθηματικό συλλογισμό με 9 βασικές ενδείξεις κατανόησης.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει συνοπτικά την επίδοση των μαθητών κατά την επίλυση του μαθηματικού προβλήματος πριν και μετά την παρεμβατική διδασκαλία.

Μαθητής	Σύνολο σωστών απαντήσεων (προ-πειραματικό στάδιο)		Σύνολο σωστών απαντήσεων (μετά-πειραματικό στάδιο)	
	2 προσθετέοι	3 προσθετέοι	2 προσθετέοι	3 προσθετέοι
Μιχάλης	1	0	5	3
Μαρίνα	3	1	Όλοι οι συνδυασμοί	Όλοι οι συνδυασμοί

Πίνακας 1: Απαντήσεις μαθητών στο προ-πειραματικό και μετά-πειραματικό στάδιο

Ο Μιχάλης (μαθητής μέτριας επίδοσης) κατάφερε να αυξήσει τον αριθμό των σωστών απαντήσεων, στην ανάλυση του αριθμού 8 ως άθροισμα δύο προσθετέων, από 1 σε 5 και τον αριθμό των σωστών απαντήσεων για την ανάλυση του αριθμού 8 ως άθροισμα τριών προσθετέων από 0 σε 3. Στο προ-πειραματικό στάδιο ο Μιχάλης ήταν σε θέση να δηλώσει μόνο το άθροισμα 4+4 ως σωστό συνδυασμό ενώ στο μετα-πειραματικό στάδιο ήταν σε θέση να δηλώσει τους συνδυασμούς 0+8, 1+7, 2+6, 3+5, 4+4. Αντίστοιχα στην περίπτωση ανάλυσης του αριθμού 8 ως άθροισμα τριών προσθετέων ο Μιχάλης κατάφερε, χρησιμοποιώντας τη στρατηγική δοκιμή και έλεγχος, να δώσει 3 σωστούς συνδυασμούς (2+2+4, 6+1+1, 5+2+1). Τέλος η Μαρίνα, η μαθήτρια με την υψηλότερη επίδοση, κατάφερε να παρουσιάσει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς και στις δύο περιπτώσεις του μαθηματικού έργου.

Μαθηματικός Συλλογισμός

Η χρήση της συγκεκριμένης εφαρμογής φαίνεται να επηρέασε και τον μαθηματικό συλλογισμό των μαθητών. Ακολούθως παρουσιάζονται ενδεικτικά αποσπάσματα από τις συνεντεύξεις των δύο μαθητών που δείχνουν την επίδραση της εφαρμογής στο μαθηματικό τους συλλογισμό.

Η περίπτωση του Μιχάλη

Μέσα από την ανάλυση του προ-πειραματικού και μετά –πειραματικού επεισοδίου μπορεί να διαπιστωθεί η διαφοροποίηση όσον αφορά το μαθηματικό συλλογισμό του Μιχάλη. Κατά τη χορήγηση του μαθηματικού προβλήματος στο προ-πειραματικό στάδιο, ο Μιχάλης ήταν σε θέση χρησιμοποιώντας τη στρατηγική της δοκιμής και ελέγχου να αναγνωρίζει πότε μια δήλωση ήταν ψευδής ή όχι. Ωστόσο δεν ήταν σε θέση να διατυπώνει και να αναπτύσσει υποθέσεις. Επιπρόσθετα, οι αιτιολογήσεις που προέβαλε φαίνεται δεν σχετίζονταν με μαθηματικό περιεχόμενο. Ο πιο κάτω διάλογος προβάλλει τους πιο πάνω ισχυρισμούς:

Ερευνήτρια: Μπορείς να σκεφτείς ένα τρόπο ώστε ο Αντρέας να πάρει 8 καραμέλες; Θα πρέπει να πάρει μωβ και κόκκινες καραμέλες.

Μαθητής: Θα πρέπει να πάρει σίγουρα 4 μωβ και 4 κόκκινες καραμέλες!

Ερευνήτρια: Πώς είσαι τόσο σίγουρος γι' αυτό;

Μαθητής: Επειδή το ξέρω από πριν. Μου το είπε ο αδελφός μου!

Ερευνήτρια: Πολύ ωραία Μιχάλη. Τώρα θέλω να σκεφτείς και να μου πεις αν μπορεί να πάρει 8 μωβ και κόκκινες καραμέλες με άλλο τρόπο.

Μαθητής: Για να δοκιμάσω… Θα πάρω αυτή (6 μωβ καραμέλες) και αυτή (8 κόκκινες καραμέλες)…. είναι 14! Όχι δεν είναι σωστή … να αλλάξω αυτή την καρτέλα (αλλάζει την μωβ καρτέλα με τις 6 καραμέλες με αυτή που έχει 8 καραμέλες και μετρά)…. (ο μαθητής επανέλαβε ακόμη 3 φορές την ίδια διαδικασία επιλέγοντας τυχαία καρτέλες και ελέγχοντας την ορθότητα τους)… δεν μπορώ να βρω άλλο τρόπο, δεν υπάρχει!

Με την ολοκλήρωση των διδασκαλιών παρατηρήθηκε ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού και του επιπέδου κατανόησης του μαθητή. Ο Μιχάλης ανέπτυξε την ικανότητα διατύπωσης και ανάπτυξης υποθέσεων καθώς και την ικανότητα να αιτιολογεί την ορθότητα των επιχειρημάτων που έθετε. Επιπρόσθετα ήταν σε θέση να εκφράσει ένα είδος γενίκευσης. Για παράδειγμα στην περίπτωση που επέλεγε μια καρτέλα με «μεγάλο» αριθμό καραμελών τότε η άλλη καρτέλα που θα επέλεγε θα έπρεπε σίγουρα να έχει «μικρότερο» αριθμό καραμελών. Ήταν σε θέση ακόμη να αναγνωρίζει μια δήλωση ως ψευδή χωρίς να χρειάζεται να μετρήσει όλες τις καραμέλες που υπήρχαν πάνω σε αυτή:

Ερευνήτρια: Μιχάλη αν πάρω την καρτέλα που έχει 6 καραμέλες πάνω τότε μπορώ να πάρω αυτή την καρτέλα (την καρτέλα με 5 καραμέλες);

Μαθητής: Όχι! Όταν έχεις μια καρτέλα που έχει ήδη 6 καραμέλες σίγουρα η άλλη καρτέλα θα πρέπει να έχει…2 ή λιγότερες καραμέλες νομίζω. Να το δούμε εδώ στις καρτέλες. Αν πάρω αυτή την καρτέλα (6 καραμέλες) και αυτή (4 καραμέλες) υπάρχουν περισσότερες καραμέλες. Αφού 4+4 είναι 8!

Η περίπτωση της Μαρίνας

Όπως έχει προαναφερθεί η Μαρίνα είναι η μαθήτρια που έχει χαρακτηριστεί ως μαθήτρια υψηλής επίδοσης από την εκπαιδευτικό της τάξης. Η Μαρίνα κατά το προ-πειραματικό στάδιο ήταν σε θέση να αναπτύσσει υποθέσεις, να αναγνωρίζει την ορθότητα μιας δήλωσης καθώς και να αιτιολογεί και να αναγνωρίζει την εγκυρότητα ενός επιχειρήματος μέσω δοκιμής και ελέγχου, ενώ δεν ήταν σε θέση να φτάνει σε ένα επίπεδο γενίκευσης. Με την ολοκλήρωση των διδασκαλιών ήταν σε θέση να χρησιμοποιεί αιτιολόγηση που βασιζόταν σε ήδη γνωστές ιδέες, να φτάνει σε ένα επίπεδο γενίκευσης μέσω εφαρμογής και να διερευνά το γιατί:

Ερευνήτρια: Μαρίνα μπορείς να σκεφτείς ένα τρόπο για να πάρει 8 καραμέλες;

Μαθήτρια: Θα πρέπει να πάρει 4 μωβ και 4 κόκκινες καραμέλες… επειδή (μου δείχνει τα χέρια της στα οποία σχημάτισε 4+ 4).

Ερευνήτρια: Πολύ ωραία Μαρίνα. Μπορείς να βρεις και άλλο τρόπο;

Μαθήτρια: Ναι! Αν βγάλω ένα από εδώ (δείχνει στα δάχτυλά της 4+4) και το βάλω στο άλλο χέρι θα έχουμε 5+3 (αναζητά τις κατάλληλες καρτέλες). Είναι όπως έκανα και στο Ipad! Σχημάτισα πρώτα με τα δάχτυλά μου 4+4 και χτυπούσα στην οθόνη. Μετά πήρα τον ένα κύκλο από την μια ομάδα και τον έβαλα στην άλλη ομάδα! Όταν ένωσα τους δύο κύκλους ήταν 8 όλοι μαζί!

Ερευνήτρια: Πολύ ωραία! Μπορείς να βρεις και άλλο τρόπο;

Μαθήτρια: Όπως έκανα πριν! Αν βγάλω ένα από εδώ (δείχνει τις καρτέλες που χρησιμοποίησε στην προηγούμενη περίπτωση) και το βάλω εδώ θα έχουμε 6+2. (αναζητά τις κατάλληλες καρτέλες).

Ερευνήτρια: Μπορείς να μου εξηγήσεις πώς σκέφτεσαι κάθε φορά;

Μαθήτρια: Ξεκινώ από το 4+4. Βγάζω ένα κάθε φορά από τον ένα αριθμό και τον βάζω στον άλλο. Έτσι γίνεται πάντα. Για παράδειγμα αν είχα τον αριθμό 4 αφού ξέρω ότι 2+2 είναι 4. Αν βγάλω ένα από το 2 και το βάλω στο άλλο 2 θα γίνει 1+3. Αν βγάλω ακόμη ένα από το 1 και το βάλω στο άλλο θα γίνει 0+4! Αν αλλάξω τη θέση των αριθμών, βρίσκω ένα άλλο διαφορετικό τρόπο. Δηλαδή 3+1!

Ακόμη και στην περίπτωση με τους τρεις προσθετέους η Μαρίνα κατάφερε να γενικεύσει τη διαδικασία της:

Μαθήτρια: …Νομίζω θα δοκιμάσω όπως πριν…Θα πρέπει να πάρει 4 μωβ, 2 κόκκινες και 2 ροζ καραμέλες (βρίσκει τις σωστές καρτέλες).

Ερευνήτρια: Μπράβο! Μπορείς να μου εξηγήσεις πώς το σκέφτηκες;

Μαθήτρια: Είναι παρόμοιος ο τρόπος μου όπως πριν. Σκέφτομαι και βλέπω με τα δάχτυλά μου ότι 4+4 είναι 8. Μετά σπάζω ξανά τον ένα αριθμό. Για παράδειγμα το 4 σε 2+2! Έτσι έχω 4+2+2. Μετά αφαιρώ ένα από τον ένα αριθμό και τον προσθέτω σε κάποιον άλλο! Αν αλλάξω τη σειρά στις καρτέλες βρίσκω και άλλους.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Σκοπός της παρούσας έρευνας, είναι να διερευνήσει κατά πόσο η διδασκαλία με τη χρήση της εφαρμογής “*TouchCounts”* μπορεί να επηρεάσει την επίλυση γνωστικά απαιτητικών μαθηματικών έργων καθώς και τον μαθηματικό συλλογισμό μαθητών προδημοτικής. Όπως διαφάνηκε η εφαρμογή μπορεί να χαρακτηριστεί ως μεσολαβητής της διαδικασίας ανάπτυξης του συλλογισμού των μαθητών.

Ο Μιχάλης, κατάφερε να βελτιώσει την ικανότητα διατύπωσης και ανάπτυξης υποθέσεων καθώς και να αιτιολογεί την ορθότητα των επιχειρημάτων που έθετε. Παράλληλα φαίνεται να απέκτησε ένα υψηλότερο επίπεδο κατανόησης της διαδικασίας σύνθεσης του αριθμού αφού έφτασε σε ένα είδος γενίκευσης. Ήταν σε θέση να αναγνωρίζει ότι όταν είχε στη διάθεσή του μια καρτέλα με αριθμό καραμελών μεγαλύτερο από τον αριθμό 4, τότε η άλλη καρτέλα θα έπρεπε σίγουρα να έχει μικρότερο αριθμό καραμελών. Μέσα από τις δυνατότητες ελεύθερης εξερεύνησης και πειραματισμού που προσφέρει η εφαρμογή “*TouchCounts*” ο Μιχάλης κατάφερε να αναπτύξει την ικανότητα για εύρεση περισσότερων περιπτώσεων του συγκεκριμένου προβλήματος. Οι απτικές χειρονομίες του μαθητή σε συνδυασμό με την οπτική απεικόνιση των αντικειμένων, τη χρήση αριθμητικών συμβόλων και την άμεση ανατροφοδότηση που προσφέρει το “*TouchCounts*” τον βοήθησαν να συντομεύσει τις διαδικασίες και να αναγνωρίζει τους αριθμούς ως αντικείμενα (Sinclair & Heyd-Metzuyanim, 2014). Έτσι παρουσίασε μια ευέλικτη χρήση των αριθμών ως ποσότητες με αποτέλεσμα να μπορεί να διατυπώνει υποθέσεις και να αναγνωρίζει πότε οι ισχυρισμοί που έθετε ήταν σωστοί ή λανθασμένοι χρησιμοποιώντας αιτιολόγηση που σχετίζεται με τα μαθηματικά.

Βελτίωση της επίδοσης του επιπέδου συλλογισμού φαίνεται να παρουσιάζεται και στην περίπτωση της Μαρίνας. Η Μαρίνα κατάφερε να χρησιμοποιεί αιτιολογήσεις που βασίζονταν σε ήδη γνωστές ιδέες, να διερευνά το γιατί και να φτάνει σε ένα επίπεδο γενίκευσης μέσω εφαρμογής. Μέσω της εφαρμογής "*TouchCounts*" κατάφερε να αναπτύξει την ικανότητα άμεσης αναγνώρισης μέσω χειρονομιών (Sinclair & Pimm, 2015) κάτι που συνέβαλε ώστε να φτάσει σε ένα επίπεδο γενίκευσης μέσω εφαρμογής. Η Μαρίνα χρησιμοποίησε την ικανότητα άμεση αναγνώριση του αριθμού 4 μέσω χειρονομιών που ανέπτυξε από την εφαρμογή και προσπάθησε να βρει ένα τρόπο έτσι ώστε εύκολα να βρίσκει πολλές λύσεις. Κατάφερε να γενικεύσει το συγκεκριμένο τρόπο και στην περίπτωση των 3 προσθετέων όπως επίσης κατανόησε και εφάρμοσε την αντιμεταθετική ιδιότητα (Sinclair & Baccaglini – Frank, 2016).

Λαμβάνοντας υπόψη το περιορισμένο μέγεθος του δείγματος, τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας δεν μπορούν να γενικευτούν και αυτό αποτελεί έναν από τους περιορισμούς της εργασίας. Κατά συνέπεια κρίνεται απαραίτητη η διενέργεια περαιτέρω έρευνας που να δίνει έμφαση τόσο σε μεγαλύτερο αριθμό μαθητών όσο και σε μεγαλύτερο εύρος μαθησιακών ικανοτήτων αλλά παράλληλα και μέσα από διαφορετικές μορφές διδασκαλίας. ώστε να διαπιστωθεί πώς οι ψηφιακές τεχνολογίες επηρεάζουν μαθητές διαφορετικών ικανοτήτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Claessens, A., Engel, M., & Curran, F. C. (2014). Academic content, student learning, and the persistence of preschool effects. *American Educational Research Journal*, 51(2), 403-434. doi:10.3102/0002831213513634

Jordan, N.C., Kaplan, D., Olah, L., & Locuniak, M. (2006). Number Sense growth in kindergarten: A longitudinal investigation of children at risk for mathematics difficulties. *Child Development*, 77(1), 153-175. doi:10.1111/j.1467-8624.2006.00862.x

Lannin, J.K., Ellis, A.B., Elliott, R. (2011). Developing Essential Understanding of Mathematical Reasoning for Teaching Mathematics in *Prekindergarten-Grade 8*. R.M. Zbiek, (Ed.). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Moss, J., Bruce, C., Bobis, J. (2016). Young children's access to powerful mathematics ideas: A review of current challenges and new developments in the early years. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (3rd ed.), (pp. 153-190). New York: Taylor & Francis.

Moyer-Packenham, P. S., Salkind, G. W., Bolyard, J., & Suh, J. M. (2013). Effective choices and practices: Knowledgeable and experienced teachers' uses of manipulatives to teach mathematics. *Online Journal of Education Research*, 2(2), 18-33.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Association for the Education of Young Children. (2010). *Standards for initial and advanced early childhood professional preparation programs*. Washington, DC: NAEYC.

Sato, M., Cattaneo, L., Rizzolatti, G., & Gallese, V. (2007). Numbers within our hands: Modulation of corticospinal excitability of hand muscles during numerical judgment. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 19(4), 684-693. doi:10.1162/jocn.2007.19.4.684

Sinclair, N., & Baccaglini-Frank, A. (2016). Digital technologies in the early primary school classroom. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (3rd ed., pp. 662–685). New York: Taylor & Francis.

Sinclair, N., & Heyd-Metzuyanim, E. (2014). Learning number with TouchCounts: The role of emotions and the body in mathematical communication. *Technology, Knowledge and Learning*, 19(1-2), 81-99. doi:10.1007/s10758-014-9212-x

Sinclair, N., & Jackiw, N. (2011). TouchCounts [software application for the iPad]. https://itunes.apple.com/ca/app/touchcounts/id897302197?mt=8

Sinclair, N. & Pimm, D. (2015). Mathematics using multiple sense: Developing finger gnosis with three-and four-year-olds in an era of multi-touch technologies. *Asia-Pacific Journal of Research in Early Childhood Education*, 9(3), 99-109.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268-275.

Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Tabach, M., & Barkai, R. (2015). Analyzing number composition and decomposition activities in kindergarten from a numeracy perspective. *ZDM*, *47*(4), 639-651. doi:10.1007/s11858-015-0668-5.

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΕΞΩΤΕΡΙΚΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΦΑΙΡΕΣΗΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ: ΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΠΟ ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Διαμάντης Βασίλης, Τάτσης Κωνσταντίνος

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

v.n.diamantis@gmail.com, ktatsis@uoi.gr

Στην παρούσα εργασία μία μαθήτρια ΣΤ' Δημοτικού με μέτρια επίδοση στα Μαθηματικά κατασκευάζει μαθηματικές αφαιρέσεις για τα παραλληλόγραμμα (π.χ. το τετράγωνο ως ορθογώνιο) αξιοποιώντας εξωτερικές αναπαραστάσεις (δυναμική εικονική σε Η/Υ και ορισμούς). Επιχειρώντας τη μελέτη του ρόλου των εξωτερικών αναπαραστάσεων στη διαδικασία οικοδόμησης μαθηματικών αφαιρέσεων, διαπιστώσαμε ότι η «αντιληπτική μεταβλητότητα» της δυναμικής εικονικής αναπαράστασης σε συνδυασμό με τις πολλαπλές αναπαραστάσεις (σχήμα και ορισμοί) υποστήριξαν τη μαθήτρια στη μαθηματική αφαιρετική σκέψη. Επίσης, φάνηκε ότι η μαθήτρια αξιοποίησε πρώτα τις εικονικές αναπαραστάσεις (σχήμα) και στη συνέχεια τις συμβολικές (ορισμούς).

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η μαθηματική αφαίρεση

Η ανακάλυψη προτύπων ή μοτίβων, με βάση τα οποία συμπεριφέρεται η φυσική και κοινωνική ζωή, βρίσκεται στον πυρήνα της μαθηματικής γνώσης. Η νοητική διεργασία που σχετίζεται με την ανακάλυψη προτύπων, ιδιοτήτων και σχέσεων στα Μαθηματικά είναι κατά τον Dreyfus (1991) η μαθηματική αφαίρεση. Ο ίδιος αναφέρει ότι η μαθηματική αφαίρεση είναι μία «κατασκευαστική» νοητική διεργασία, χαρακτηριστική της μαθηματικής σκέψης υψηλού επιπέδου, που περιλαμβάνει τη μετατόπιση του ενδιαφέροντος «από τα [μαθηματικά] αντικείμενα αυτά καθ' αυτά στη δομή των ιδιοτήτων και των σχέσεων [που παρατηρούνται σε αυτά]» (σελ. 37). Ο Dubinsky (1991) εντοπίζει στα έργα του Piaget για την «αναστοχαστική αφαίρεση» τέσσερις μηχανισμούς με τους οποίους ο μαθητής κατασκευάζει αφαιρετικές δομές. Αυτοί είναι: α) η εσωτερίκευση, β) ο συντονισμός, γ) η ενσωμάτωση και δ) η γενίκευση. Ο ίδιος προσθέτει και έναν ακόμη μηχανισμό, αυτόν της αντιστροφής.

Η ενσωμάτωση (encaptulation), κατά τον Piaget, είναι η νοητική διεργασία κατά την οποία ο μαθητής κατασκευάζει νοητικά σχήματα που είναι υπερσύνολα ήδη υπαρχόντων, προκειμένου να επιτευχθεί η ενοποίησή τους (Dubinsky, 1991). Ο Dreyfus (1991) αναφέρεται στην ενσωμάτωση με τον όρο «σύνθεση», και τη θεωρεί ένα από τα δύο βασικά συστατικά της μαθηματικής αφαιρετικής σκέψης (μαζί με τη γενίκευση). Η αντίληψη του πολλαπλασιασμού ως «πρόσθεσης των προσθέσεων» (Dubinsky, 1991) αποτελεί ένα παράδειγμα αφαιρετικής σκέψης με ενσωμάτωση, διότι ο πολλαπλασιασμός αντιμετωπίζεται ως «γενικευμένη πρόσθεση».

Η μαθηματική αφαίρεση παραδοσιακά εμπίπτει στο φάσμα της αλγεβρικής σκέψης. Το NCTM την εντάσσει στο πλαίσιο της διδασκαλίας της Άλγεβρας όλων των ηλικιακών βαθμίδων, αναφέροντας ότι οι μαθητές καλούνται να κατανοούν πρότυπα, σχέσεις και μεταβολές (Van de Walle, 2007). Για το επίπεδο της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, η αφαιρετική μαθηματική σκέψη εμφανίζεται αρκετά στο πλαίσιο της «Προ-άλγεβρας» (Linchevski,1995) ή της «Πρώιμης Άλγεβρας» (Carraher, Martinez, & Schliemann, 2008) (όροι ταυτόσημοι), όπου οι στόχοι και η μεθοδολογία διδασκαλίας προσαρμόζονται κατάλληλα για αυτές τις ηλικίες. Διάφορες έρευνες έχουν αποδείξει ότι μαθητές μικρής ηλικίας μπορούν με κατάλληλη διδασκαλία να σκεφτούν αφαιρετικά. Ενδεικτικά, μαθητές ηλικίας 8 ετών κατάφεραν να γενικεύσουν τη λύση ενός αριθμητικού προβλήματος χρησιμοποιώντας μεταβλητές (Carraher et al, 2008).

Ωστόσο, θα ήταν σφάλμα αν υποστηρίζαμε ότι η μαθηματική αφαίρεση περιορίζεται μόνο στα όρια της Άλγεβρας ή της Προ-άλγεβρας. Ο Dubinsky (1991) περιγράφει παραδείγματα μαθηματικής αφαίρεσης από τα οποία φαίνεται ότι η μαθηματική αφαίρεση διατρέχει οριζόντια όλη τη μάθηση των Μαθηματικών, από την έννοια του αριθμού έως τις σύνθετες έννοιες του Διαφορικού και του Ολοκληρωτικού Λογισμού. Επίσης, είναι παρούσα και στη Γεωμετρία. Ο Van Hiele την εντάσσει στα υψηλότερα επίπεδα της θεωρίας του για τη γεωμετρική σκέψη (Κολέζα, 2009). Η αντίληψη του τετραγώνου ως ειδικής περίπτωσης ρόμβου αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα μαθηματικής αφαίρεσης στη Γεωμετρία με τον μηχανισμό της ενσωμάτωσης.

Ο ρόλος των εξωτερικών αναπαραστάσεων στην οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης

Η συνεισφορά των εξωτερικών αναπαραστάσεων στη μάθηση των Μαθηματικών κρίνεται θετική όπως δείχνουν διάφορες έρευνες (π.χ. Ainsworth, 1999). Ο Bruner (1966), ο Dienes (Sriraman, 2005) και η Ainsworth (1999, 2006) προτείνουν, μέσα από τις θεωρίες τους, διδακτικές στρατηγικές που υποστηρίζουν τη μάθηση μέσω των αναπαραστάσεων. Σύμφωνα με τον Dienes (Lesh, Post, & Behr, 1987) και τον Dreyfus (1991) η μαθηματική αφαίρεση είναι μία κατασκευαστική διαδικασία, στην οποία οι εξωτερικές αναπαραστάσεις διαδραματίζουν κομβικό ρόλο, υπό την έννοια ότι ο μαθητής την κατασκευάζει μέσα από την ενεργό επαφή του με κατάλληλες εξωτερικές αναπαραστάσεις. Από την επισκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας φαίνεται πως τα εξής χαρακτηριστικά των εξωτερικών αναπαραστάσεων μεγιστοποιούν την αποτελεσματικότητά τους στην ανάπτυξη της αφαιρετικής σκέψης:

- **Αντιληπτική μεταβλητότητα στις αναπαραστάσεις**: Ο Dienes (Lesh et al., 1987˙ Sriraman, 2005) υποστήριξε πως η μαθηματική αφαίρεση αναπτύσσεται όταν ο μαθητής εκτίθεται σε αναπαραστάσεις της έννοιας που, ενώ διαφέρουν αντιληπτικά, διατηρούν τις κοινές της ιδιότητες. Για παράδειγμα, η ολοκληρωμένη έννοια «παραλληλόγραμμο» αναπτύσσεται όταν ο μαθητής εκτίθεται σε διάφορες αναπαραστάσεις παραλληλογράμμων (τετράγωνο, ορθογώνιο, πλάγιο, κτλ.) που διατηρούν την κοινή ιδιότητα «οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες».
- **Πολλαπλή ενσωμάτωση της έννοιας σε ποικίλες αναπαραστάσεις:** Κατά τον Dienes (Ainsworth, 1999 & 2006˙ Lesh et al., 1987˙ Sriraman, 2005), η εμπειρία του μαθητή με πολλαπλές εκφάνσεις της έννοιας σε αναπαραστάσεις διαφορετικής μορφής (εικόνα, κείμενο, εμπράγματη αναπαράσταση, κτλ.), του παρέχει τη δυνατότητα για αναγνώριση των κοινών ιδιοτήτων και τον οδηγεί στην απαραίτητη αφαίρεση. Εδώ, σημαντικό ρόλο διαδραματίζει η ικανότητα «μετάφρασης» από τη μία αναπαράσταση στην άλλη (Ainsworth, 2006˙ Dreyfus, 1991).
- **Δυναμική διασύνδεση των αναπαραστάσεων**: Οι Lesh et al. (1987) και η Ainsworth (1999), ερμηνεύοντας τη θεωρία του Dienes για την οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης, τονίζουν τη σημαντικότητα της «δυναμικής σύνδεσης» (“dyna-linking”) μεταξύ των αναπαραστάσεων για την ανάπτυξη της μαθηματική αφαίρεσης. Η δυναμική διασύνδεση των αναπαραστάσεων μπορεί να οριστεί ως η σύνδεση που επιτρέπει την παρακολούθηση των αλλαγών σε μία αναπαράσταση, όταν πραγματοποιούνται αλλαγές σε μία άλλη (Lesh et al., 1987). Η δυναμική διασύνδεση συχνά καθίσταται δυνατή με τη βοήθεια των ΤΠΕ (π.χ. Περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας - DGEs) (Ainsworth, 1999).

- **Σταδιακή μετάβαση των αναπαραστάσεων από τις εμπράγματες, στις εικονικές και τελικά στις συμβολικές**: Σύμφωνα με τη θεωρία του Bruner (1966) οι μαθητές μαθαίνουν με αναπαραστάσεις των οποίων ο βαθμός αφαίρεσης αυξάνεται σταδιακά. Βέβαια, οι Behr, Post, & Lesh (1981, όπ. αναφ στο Πατσιομίτου & Εμβαλωτής, 2009) υποστηρίζουν ότι η πορεία εξέλιξης των αναπαραστάσεων δεν είναι κατ' ανάγκη τόσο γραμμική αλλά περισσότερο αλληλεπιδραστική. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να υπάρχουν και «πισωγυρίσματα», όπου και όταν απαιτείται. Παρόλα αυτά, η θεωρία του Bruner μπορεί να αποτελέσει έναν οδηγό για την ανάπτυξη της αφαιρετικής σκέψης.
- **Ευκαιρίες για δραστηριοποίηση του μαθητή:** Η μαθηματική αφαίρεση κατασκευάζεται από τον μαθητή, όταν αυτός έχει προσωπική εμπλοκή στην κατασκευαστική διαδικασία, σύμφωνα με τον Dienes (Lesh et al., 1987). Αρκετά συχνά, οι εφαρμογές των ΤΠΕ στη μάθηση των Μαθηματικών περιέχουν «κλειστές» αναπαραστάσεις και η δυναμική διασύνδεση, που υπάρχει μεταξύ τους, πραγματοποιείται αυτόματα. Με τον τρόπο αυτό, ο μαθητής καθίσταται παθητικός δέκτης και όχι κυρίαρχος της μάθησής του (Ainsworth, 1999). Σημαντικό ζητούμενο, λοιπόν, είναι η πρόβλεψη για δραστηριοποίηση του μαθητή σε τέτοια ή πιο «παραδοσιακά» περιβάλλοντα (π.χ. «χαρτί και μολύβι»).

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη του ρόλου των εξωτερικών αναπαραστάσεων στη διαδικασία οικοδόμησης μαθηματικών αφαιρέσεων για τα παραλληλόγραμμα από μαθητές του Δημοτικού Σχολείου. Για τον σκοπό αυτό, σχεδιάστηκε μία γεωμετρική δραστηριότητα με τα χαρακτηριστικά που αναφέρθηκαν πιο πάνω, στην οποία μαθητές της ΣΤ' τάξης κλήθηκαν να σκεφτούν αφαιρετικά με τον μηχανισμό της ενσωμάτωσης. Η διάρκεια της δραστηριότητας ήταν περίπου δύο διδακτικές ώρες. Προηγουμένως, κάθε μαθητής είχε μελετηθεί ατομικά με pre-test διάρκειας μισής περίπου ώρας, ειδικά κατασκευασμένο για να σκιαγραφηθεί το υπάρχον επίπεδο κατανόησης για τα παραλληλόγραμμα. Στην έρευνα ακολουθήθηκε το ποιοτικό σχέδιο έρευνας και συγκεκριμένα οι μελέτες περίπτωσης (Robson, 2010). Η συλλογή των δεδομένων προέκυψε από τα φύλλα εργασίας των μαθητών και από την ανάλυση των βίντεο από τις διδακτικές παρεμβάσεις και τις συνεντεύξεις. Η ποιοτική ανάλυση των δεδομένων βασίστηκε στο μοντέλο AiC (Dreyfus, Hershkowitz, & Schwarz, 2015), κατάλληλο για τη μελέτη της αναδυόμενης αφαιρετικής σκέψης. Το μοντέλο αυτό προβλέπει πέντε φάσεις: α) ανάγκη για μαθηματική αφαίρεση, β) αναγνώριση προηγούμενων γνώσεων ή εργαλείων που μπορούν να αξιοποιηθούν για τη μαθηματική αφαίρεση, γ) εργασία με τις γνώσεις και τα εργαλεία με στόχο τη μαθηματική αφαίρεση, δ) κατασκευή της μαθηματικής αφαίρεσης και ε) εμπέδωση της μαθηματικής αφαίρεσης. Επίσης, για την ανάλυση αξιοποιήθηκε και η θεωρία των επιπέδων της γεωμετρικής σκέψης του Van Hiele (Κολέζα, 2009): 1^{ο} επίπεδο: ολιστικό, 2^{ο} επίπεδο: περιγραφικό, 3^{ο} επίπεδο: άτυπης αφαίρεσης, 4^{ο} επίπεδο: αφαίρεσης και 5^{ο} επίπεδο: αυστηρότητας.

Ειδικότερα, τρεις μαθητές (μία μαθήτρια με υψηλή, μία μαθήτρια με μέτρια και ένας μαθητής με χαμηλή επίδοση στα Μαθηματικά) εργάστηκαν ομαδικά στα εξής θέματα: α) ο ρόμβος ως ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου με όλες τις πλευρές ίσες, β) το τετράγωνο ως ειδική περίπτωση ρόμβου με όλες τις γωνίες ορθές, γ) το ορθογώνιο ως ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου με όλες τις γωνίες ορθές, δ) το τετράγωνο ως ειδική περίπτωση ορθογωνίου με όλες τις πλευρές ίσες και ε) το τετράγωνο ως ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου με όλες τις πλευρές ίσες και όλες τις γωνίες ορθές. Οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους: α) δυναμική εικονική αναπαράσταση παραλληλογράμμου στην “Geogebra” (που μπορούσε να μετατραπεί από τους ίδιους τους μαθητές σε ρόμβο, τετράγωνο και ορθογώνιο) β) ορισμούς των σχημάτων και γ) διάφορες βοηθητικές αναπαραστάσεις με τη μορφή ενδείξεων (μήκος, πλάτος, γωνίες, παραλληλία, ισότητα). Οι ορισμοί κατασκευάστηκαν στην αρχή της διδακτικής παρέμβασης από τους ίδιους τους μαθητές με την καθοδήγηση του ερευνητή-εκπαιδευτικού, ώστε να μην υπάρχουν θέματα ορθότητά τους και να μπορούν να αξιοποιηθούν στη συνέχεια για την οικοδόμηση μαθηματικών αφαιρέσεων. Η κατασκευή των ορισμών έγινε με τρόπο που διευκολύνει τους μαθητές στη διατύπωση λογικών συνεπαγωγών. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν οι εξής προτάσεις: (P) οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες, (Q) όλες οι πλευρές είναι ίσες, (R) όλες οι γωνίες είναι ορθές. Ο ορισμός για το παραλληλόγραμμο, για παράδειγμα, περιείχε την πρόταση P ενώ ο ορισμός για τον ρόμβο την πρόταση $P \wedge Q$. Για τους ρόμβους η πρόταση $P \wedge Q$ είναι αληθής, κάτι που συνεπάγεται ότι και η πρόταση P είναι αληθής. δηλαδή ένας ρόμβος είναι και παραλληλόγραμμο. Να σημειωθεί ότι οι ορισμοί διατυπώθηκαν μόνο σε φυσική γλώσσα χωρίς τη χρήση συμβόλων λογικής.

Ο όγκος των δεδομένων που προέκυψε ήταν μεγάλος (συνολική διάρκεια βίντεο 164 λεπτά και 2 δευτερόλεπτα) και δεν επιτρέπει την αναλυτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων και από τους τρεις μαθητές. Για τον λόγο αυτό, στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας θα παρουσιαστούν μόνο τα αποτελέσματα από τη μαθήτρια με μέτρια επίδοση.

Τα ερευνητικά ερωτήματα που προκύπτουν κατηγοριοποιούνται στους εξής βασικούς θεματικούς άξονες:

ΑΞΟΝΑΣ Α: Οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης

Σε τι επίπεδο μαθηματικής αφαίρεσης έφτασε η μαθήτρια με μέτρια επίδοση (σύμφωνα με τα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης του Van Hiele) και ποια πορεία ακολούθησε στη διαδικασία οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης; (ανάλυση σύμφωνα με τα μοντέλο AiC)

ΑΞΟΝΑΣ Β: Τα χαρακτηριστικά των αναπαραστάσεων στην οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης

Ποιος ο ρόλος της αντιληπτικής μεταβλητότητας, της πολλαπλής ενσωμάτωσης, της δυναμικής διασύνδεσης, της σταδιακής αφαίρεσης και της ενεργού συμμετοχής στις εξωτερικές αναπαραστάσεις, κατά τη διαδικασία οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης;

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Pre-test (συνέντευξη)

Η μαθήτρια με μέτρια επίδοση είχε συγκεχυμένες απόψεις σχετικά με το αν υπάρχουν σχέσεις ενσωμάτωσης μεταξύ των παραλληλογράμμων. Από τη μία θεωρούσε ότι το τετράγωνο είναι ειδική περίπτωση ρόμβου και το ορθογώνιο ειδική περίπτωση παραλληλογράμμου, π.χ.:

Ερευνητής: Μπορούμε να πούμε ότι το τετράγωνο είναι ειδική περίπτωση ρόμβου, δηλαδή ανήκει στην ίδια οικογένεια με τον ρόμβο; Ναι ή όχι και γιατί;

Μαθήτρια: Ναι, γιατί και τα δύο σχήματα έχουν τις ίδιες πλευρές… ίσες πλευρές…

Από την άλλη, δεν θεωρούσε τον ρόμβο και το τετράγωνο ως ειδικές περιπτώσεις παραλληλογράμμου, ούτε το τετράγωνο ως ορθογώνιο, π.χ.:

Ερευνητής: Μπορούμε να πούμε ότι ένα τετράγωνο είναι μια ειδική περίπτωση ορθογωνίου; Ναι, όχι και γιατί;

Μαθήτρια: Ε… Σ’ αυτό θα πω «όχι» γιατί το τετράγωνο έχει όλες τις πλευρές ίσες… ε… το ορθογώνιο μόνο οι απέναντι.

Γενικότερα, από τις διατυπώσεις και τις απαντήσεις της μαθήτριας στις διάφορες δραστηριότητες του pre-test, συγκλίνουμε προς την άποψη ότι βρισκόταν στο $2^{ο}$ επίπεδο γεωμετρικής σκέψης (περιγραφικό) με κάποια, ίσως, δείγματα προόδου προς το $3^{ο}$ (άτυπης αφαίρεσης).

Διδακτική παρέμβαση

ΑΞΟΝΑΣ Α: Οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης

Από τις ενέργειες και τις διατυπώσεις της, η μαθήτρια με μέτρια επίδοση έδειξε σημάδια προόδου προς το 3ο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης αναγνωρίζοντας τις σχέσεις ενσωμάτωσης και στις πέντε υπό μελέτη περιπτώσεις. Από αυτές η ενσωμάτωση του τετραγώνου στο ορθογώνιο την προβλημάτισε περισσότερο. Αρχικά, εξέφρασε την άποψη «δεν μου πάει στον νου [ότι τα τετράγωνα] είναι [και ορθογώνια]» αλλά στη συνέχεια, η άποψη αυτή ανασκευάστηκε καθώς η μαθήτρια ενεπλάκη στη διαδικασία οικοδόμησης της μαθηματικής αφαίρεσης που παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα:

Φάση		Περιγραφή
1η	Ανάγκη για μαθηματική αφαίρεση	Η ανάγκη προέκυψε από σχετική δραστηριότητα του φύλλου εργασίας στην οποία η μαθήτρια κλήθηκε να διατυπώσει την άποψή της πάνω σε μία εικόνα που παρουσίαζε ένα σακί με τον τίτλο «τετράγωνα» μέσα σε ένα σακί με τίτλο «ορθογώνια».
2η	Αναγνώριση προϋπαρχουσών γνώσεων και εργαλείων	Η μαθήτρια αναγνώρισε ότι μπορεί να στηριχθεί τόσο στη δυναμική εικονική αναπαράσταση όσο και στους ορισμούς προκειμένου για να δώσει λύση στο πρόβλημά της.
3η	Εργασία με τις γνώσεις και τα εργαλεία	Αρχικά, αξιοποίησε τη δυναμική εικονική αναπαράσταση μετατρέποντας ένα ορθογώνιο σε τετράγωνο και στη συνέχεια κατέφυγε στους ορισμούς για επιβεβαίωση όσων παρατήρησε στο σχήμα.
4η	Κατασκευή της μαθηματικής αφαίρεσης	Η μαθήτρια τελικά φτάνει στο συμπέρασμα ότι τα τετράγωνα είναι και ορθογώνια υιοθετώντας την άποψη της συμμαθήτριας της ότι «και στο τετράγωνο και στο ορθογώνιο οι απέναντι [πλευρές] είναι παράλληλες και είναι οι γωνίες ορθές. Απλά στο τετράγωνο όλες [οι πλευρές] είναι ίσες. Στο ορθογώνιο μόνο οι απέναντι».

Πίνακας 1: Η διαδικασία που ακολούθησε η μαθήτρια με μέτρια επίδοση για την οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης «το τετράγωνο ως ορθογώνιο» σύμφωνα με το μοντέλο AiC.

ΑΞΟΝΑΣ Β: Τα χαρακτηριστικά των αναπαραστάσεων στην οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης

Αντιληπτική μεταβλητότητα: Το χαρακτηριστικό αυτό φαίνεται ότι διαδραμάτισε ουσιαστικό ρόλο στην κατασκευή των μαθηματικών αφαιρέσεων, διότι η μαθήτρια αξιοποιώντας το στο πλαίσιο της δυναμικής εικονικής αναπαράστασης, κατάφερε σε σύντομο χρονικό διάστημα να αντιληφθεί τις σχέσεις ενσωμάτωσης στα παραλληλόγραμμα. Ακόμα και στη δυσκολότερη (για τη μαθήτρια) περίπτωση της συμπερίληψης των τετραγώνων στα ορθογώνια, η αντιληπτική μεταβλητότητα λειτούργησε ως εργαλείο υπέρβασης γνωστικών εμποδίων: «Κοιτάξτε… Εδώ το έκανα το ορθογώνιο τετράγωνο και γίνεται».

Πολλαπλή ενσωμάτωση: Σε διάφορα σημεία της δραστηριότητας η μαθήτρια δεν περιορίστηκε στην αξιοποίηση μίας μόνο μορφής αναπαράστασης (μόνο το σχήμα ή μόνο οι ορισμοί) προκειμένου να συνειδητοποιήσει τις σχέσεις ενσωμάτωσης μεταξύ των παραλληλογράμμων:

Ερευνητής: Σας βοήθησε περισσότερο για να πάρετε την απόφαση [συμπερίληψη των τετραγώνων στους ρόμβους] το σχήμα ή οι ορισμοί των σχημάτων […];

Μαθήτρια: Και τα σχήματα και από τους ορισμούς. Και τα δύο.

Από την ανάλυση του βίντεο, προέκυψε ότι οι μαθήτρια επιχείρησε να μεταφράσει το νόημα της εικονικής αναπαράσταση στους ορισμούς. Επίσης, φάνηκε ότι η χρήση της εικονικής αναπαράστασης ήταν συχνότερη από αυτή των ορισμών.

Σταδιακή μετάβαση από τις εικονικές στις συμβολικές αναπαραστάσεις: Με κάποια επιφύλαξη μπορεί αν διατυπωθεί η άποψη ότι η μαθήτρια αξιοποίησε πρώτα την εικονική αναπαράσταση και στη συνέχεια τους ορισμούς προκειμένου να κατασκευάσει τις μαθηματικές αφαιρέσεις, γεγονός που αποτυπώνεται στη διαδικασία ενσωμάτωσης των τετραγώνων στα ορθογώνια του πίνακα 1. Η εικονική αναπαράσταση αποτέλεσε την πρώτη της επιλογή, ωστόσο όταν κρίθηκε αναγκαία η αναζήτηση πηγών επιβεβαίωσης των παρατηρήσεων που προέρχονταν από το σχήμα, η μαθήτρια κατέφυγε στους ορισμούς.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συνοψίζοντας, από την εφαρμογή της γεωμετρικής δραστηριότητας, φαίνεται πως η μαθήτρια με μέτρια επίδοση ωφελήθηκε από αυτή και υποστηρίχθηκε στην αφαιρετική αντίληψη των σχημάτων (ενσωμάτωση). Αξίζει να αναφέρουμε ότι θετικά μαθησιακά αποτελέσματα παρατηρήθηκαν και για τη μαθήτρια με υψηλή επίδοση αλλά μέτρια έως αρνητικά για τον μαθητή με χαμηλή επίδοση. Τον βασικό ρόλο φαίνεται πως διαδραμάτισε η εικονική αναπαράσταση (σχήμα), ωστόσο, στις περιπτώσεις όπου απαιτείτο επιβεβαίωση (π.χ. το τετράγωνο ως ορθογώνιο) οι ορισμοί των σχημάτων (συμβολικές αναπαραστάσεις) βοήθησαν στην υπερπήδηση των γνωστικών εμποδίων. Υπάρχουν ενδείξεις ότι η αντιληπτική μεταβλητότητα της εικονικής αναπαράστασης συνεπικουρούμενη από τις πολλαπλές αναπαραστάσεις (σχήμα και ορισμοί), συνέβαλαν θετικά στην οικοδόμηση των μαθηματικών αφαιρέσεων. Δυστυχώς, όμως, από την έρευνα δεν κατέστη δυνατή η παρατήρηση του ρόλου που διαδραματίζουν στη διαδικασία οικοδόμησης μαθηματικών αφαιρέσεων η δυναμική διασύνδεση των αναπαραστάσεων και η δυνατότητα για ενεργό εμπλοκή των μαθητών στον χειρισμό τους.

Γενικότερα, η αντιληπτική μεταβλητότητα, ως χαρακτηριστικό των δυναμικών εικονικών αναπαραστάσεων σε Η/Υ, επιτρέπει την υπέρβαση της δυσκολίας που προκύπτει κατά την αναπαράσταση πολλών περιπτώσεων ενός σχήματος σε χαρτί (Goldin, 1998), υποστηρίζοντας τη μαθηματική αφαίρεση στη Γεωμετρία. Το χαρακτηριστικό της πολλαπλής ενσωμάτωσης πιθανότατα υποστήριξε τη μαθηματική αφαίρεση των μαθητών, δεδομένου ότι «όσο περισσότερους τρόπους προσφέρουμε στα παιδιά να σκεφτούν και να δοκιμάσουν μία αναπτυσσόμενη ιδέα, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα να διαμορφωθεί αυτή σωστά» (Van de Walle, 2007, σελ. 73). Τέλος, η πορεία μετάβασης από τις εικονικές στις συμβολικές αναπαραστάσεις που προτείνεται από τον Bruner (1966) φαίνεται (με κάποια επιφύλαξη) πως ακολουθήθηκε από τους μαθητές. Η ανάγκη για αξιοποίηση των ορισμών (συμβολικές αναπαραστάσεις) εμφανίστηκε αφού πρώτα εξαντλήθηκε η αξιοποίηση του σχήματος (εικονική αναπαράσταση).

Οι αναπαραστάσεις αποτελούν μόνο έναν από τους πολλούς παράγοντες της αποτελεσματικής μάθησης και διδασκαλίας των Μαθηματικών. Η μελέτη της επιρροής του κοινωνικού παράγοντα (ο οποίος επηρέασε τη μαθηματική σκέψη των μαθητών στην έρευνα), σε συνδυασμό με τις αναπαραστάσεις, στην οικοδόμηση της μαθηματικής αφαίρεσης, θα μπορούσε να αποτελέσει θέμα μελλοντικής έρευνας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ainsworth, S. (1999). The Functions of Multiple Representations. *Computers & Education*, 33, 131–152.

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A Conceptual Framework for Considering Learning with Multiple Representations. *Learning & Instruction*, 16, 183–198.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge, Mass: Belk

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann A. D. (2008). Early Algebra and Mathematical Generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40, 3–22.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. Στο D.O. Tall (Επιμ.), *Advanced mathematical thinking* (σσ. 25–41). New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic publishers

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwartz, B. (2015). The Nested Epistemic Actions Model for Abstraction in Context: Theory as Methodological Tool and Methodological Tool as Theory. Στο A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Επιμ.), *Approaches to Qualitative Research, Advances in Mathematical Education* (σσ. 185-217). Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. Στο D.O. Tall (Επιμ.), *Advanced mathematical thinking* (σσ. 95–123). New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic publishers.

Goldin, G. (1998). The PME Working Group on Representations. *Journal of Mathematical Behavior, 17* (2), 283-301.

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και Πράξη στη Διδασκαλία των Μαθηματικών* (4η έκδ.). Αθήνα: Τόπος.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Dienes revisited: Multiple embodiments in computer environments. Στο I. Wirsup & R. Streit (Επιμ.), *Development in School Mathematics Education Around the World* (σσ. 647-680). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Linchevski, L. (1995). Algebra With Numbers and Arithmetic With Letters: A Definition of Pre-Algebra. *Journal of Mathematical behavior*, 14, 113-120.

Πατσιομίτου, Σ., & Εμβαλωτής Α. (2009). Οι αναπαραστάσεις μαθηματικών αντικειμένων ως μέσο οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης: Τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας ως αναπαραστατικά εργαλεία. *Θέματα Επιστημών και Τεχνολογίας στην Εκπαίδευση, 2* (3), 247-272.

Robson, C. (2010). *Η Έρευνα του Πραγματικού Κόσμου* (2η έκδ.) (μτφ: Νταλάκου Β. & Βασιλικού Κ.). Αθήνα: Gutenberg. (έτος έκδοσης πρωτοτύπου 1993)

Sriraman, B., & English, L. D. (2005). On the Teaching and Learning of Dienes' Principles. *ZDM, 37* (3), 258-262.

Van de Walle, J. A. (2007). *Διδάσκοντας Μαθηματικά* (6η εκδ.) (μτφ.: *Σ. Σταφυλίδου*). Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο.

Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥ ΦΥΛΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΗΛΙΚΙΑΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ ΝΟΗΤΙΚΗΣ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ευσταθίου Μαρίνος[1] και Ρίτα Παναούρα [2]

Πανεπιστήμιο Frederick

efstathioumarinos@gmail.com, pre.pm@frederick.ac.cy

Στην παρούσα έρευνα έχει διερευνηθεί η επίδραση του φύλου και της ηλικίας στην ικανότητα νοητικής περιστροφής σε σχέση με τα μαθηματικά σε μαθητές Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν στατιστικά σημαντικές επιδράσεις του φύλου και της ηλικίας, ενώ δεν εντοπίστηκε στατιστικά σημαντική αλληλεπίδραση των δύο μεταβλητών. Τα αγόρια είχαν υψηλότερες επιδόσεις από τα κορίτσια και οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου ήταν καλύτεροι από τους μαθητές της Α΄. Η ικανότητα νοητικής περιστροφής έχει άμεση σύνδεση με την επίδοση στη γεωμετρία και στη στερεομετρία, ως εκ τούτου συζητούνται οι εκπαιδευτικές προεκτάσεις της αντιμετώπισης των έμφυλων διαφορών στο πλαίσιο της μαθηματικής παιδείας.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην Ευρωπαϊκή Ένωση, με τη συμβολή της Ευρωπαϊκής Επιτροπής έχει γίνει μία σημαντική προσπάθεια τις τελευταίες δεκαετίες, για την διασφάλιση της ισότητας ανάμεσα στους άνδρες και τις γυναίκες, σε θέματα επαγγελματικού προσανατολισμού και απασχόλησης. Παρά τις προσπάθειες για άμβλυνση φαινομένων ανισότητας των δύο φύλων, σε έκθεση της, το 2017, η Ευρωπαϊκή Επιτροπή αναφέρει ότι οι γυναίκες υπο-εκπροσωπούνται σε κάποια επαγγέλματα, που συνδέονται με τομείς όπως της Επιστήμης, της Τεχνολογίας, της Μηχανικής και των Μαθηματικών. Υπάρχουν ενδείξεις ότι η κοινωνική αυτή διαφοροποίηση έχει τις ρίζες της στα αρχικά στάδια της εκπαίδευσης και συνδέεται με τις διαφορετικές ασχολίες των δύο φύλων στην καθημερινότητα (Castillo, Grazzi, & Tacsir, 2014). Οι διαφορετικές αυτές ασχολίες, ακόμη και στο επίπεδο του παιχνιδιού, οδηγεί σε διαφοροποίηση ως προς την ανάπτυξη της χωρικής ικανότητας, όπως είναι η ικανότητα νοητικής περιστροφής (Connor & Serbin, 1977˙ Servin, Bolhin, & Berlin, 1999). Η σύνδεση συγκεκριμένων γνωστικών ικανοτήτων, όπως η νοητική περιστροφή, με την επίδοση σε τομείς των Μαθηματικών, όπως η γεωμετρία και η στερεομετρία, δίνει κατευθυντήριες γραμμές για την ανάπτυξη παρεμβατικών προγραμμάτων με σκοπό την αντιμετώπιση του φαινομένου αυτού, όσο τα άτομα βρίσκονται στο εκπαιδευτικό σύστημα.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η χωρική σκέψη, ορίζεται ως η σκέψη που βρίσκει νόημα σε έννοιες όπως σχήμα, μέγεθος, προσανατολισμός, τοποθεσία, κατεύθυνση της τροχιάς αντικειμένων, διαδικασιών ή φαινομένων και η οποία χρησιμοποιεί τις ιδιότητες του χώρου σαν όχημα για τη δόμηση προβλημάτων, την εύρεση απαντήσεων και για τη διατύπωση των λύσεων Collage (2012). Ο Reber (1985) όρισε τις χωρικές ικανότητες ως τις γνωστικές λειτουργίες, που επιτρέπουν στα άτομα να αντιμετωπίζουν αποτελεσματικά χωρικές σχέσεις, οπτικά χωρικά έργα και προσανατολισμούς αντικειμένων στο χώρο. Η νοητική περιστροφή (ΝΠ) χαρακτηρίζεται ως η ικανότητα του ατόμου να περιστρέφει νοερά δισδιάστατα και τρισδιάστατα σχήματα και να εμπλέκει τον μετασχηματισμό μιας νοητικής εικόνας ενός αντικειμένου, ούτως ώστε να προβλέπεται πώς θα εμφανίζεται το αντικείμενο αν περιστραφεί στον χώρο (Moore & Johnson, 2011).

Έρευνες έχουν δείξει ότι οι χωρικές ικανότητες και ιδιαίτερα η νοητική περιστροφή σχετίζονται άμεσα με τα Μαθηματικά (Delgado & Prieto, 2004˙ Reuhkala, 2001˙ Weckbacher & Okamoto, 2014), την Επιστήμη, την Τεχνολογία και τη Μηχανική (Wai, Lubinski, & Benbow, 2009). Επίσης βρέθηκε υψηλή συσχέτιση της επίδοσης σε έργα ΝΠ με την τρισδιάστατη Βιολογία (Russell-Gebbett, 1985), την οργανική στερεοχημεία (Stieff, 2004, 2007) και τον αθλητισμό, όπως το ποδόσφαιρο. Οι χωρικές ικανότητες των παιδιών βελτιώνονται και εμπλουτίζονται με τα βιώματα της καθημερινότητας, την ωρίμανσή τους και τη διδακτική παρέμβαση γενικά και στα Μαθηματικά ειδικότερα. Σε έρευνα τους οι Hoyek, Collet, Fargier και Guillot (2012) έδειξαν ότι η ικανότητα ΝΠ στα παιδιά αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου, νοουμένου ότι έχουν κάποιες εμπειρίες τυπικής ή άτυπης μάθησης. Σύμφωνα με τη Newcombe (2010), με κατάλληλη διδασκαλία και χρήση τεχνολογίας, μπορεί να καλλιεργηθεί η χωρική σκέψη και να μεγιστοποιηθούν οι ικανότητες των ατόμων στις χωρικές ικανότητες. Η επίδραση σχετικών εμπειριών που προκαλούνται σκόπιμα (Ericsson, Nandagopal, & Roring, 2005) μπορούν να οδηγήσουν σε βελτίωση των χωρικών ικανοτήτων όπως τη ΝΠ (Terlecki, Newcombe, & Litle, 2008).

Η επίδοση στη γεωμετρία και ιδιαίτερα στη στερεομετρία επηρεάζεται σε σημαντικό βαθμό από τις χωρικές ικανότητες των μαθητών καθώς με τη χρήση των ικανοτήτων αυτών οπτικοποιούν και χειρίζονται νοερά αντικείμενα. Σε δοκίμια που περιέχουν τομές στερεών με επίπεδα, τα άτομα με υψηλές χωρικές ικανότητες έχουν υψηλότερες επιδόσεις από τα άτομα με χαμηλές (Cohen & Hegarty, 2007, 2012).

Οι Vandenberg και Kuse (1978) σε έρευνά τους εξέτασαν διαφορές ανάμεσα στα δύο φύλα, σε τρεις ηλικιακές ομάδες, φοιτητές, μαθητές γυμνασίου-λυκείου και μαθητές δημοτικού ως προς την ικανότητα ΝΠ. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στα δύο φύλα, υπέρ των αγοριών σε όλο το εύρος των ηλικιών που διερευνήθηκαν. Σε μετά-ανάλυση που διεξήγαγαν οι Voyer, Voyer και Bruten (1995) με 286 έρευνες, φάνηκε ότι οι διαφορές των δύο φύλων στην επίδοση σε χωρικές ικανότητες και ιδιαίτερα στη ΝΠ αυξάνεται με την αύξηση της ηλικίας.

Ο σκοπός αυτής της έρευνας είναι η διερεύνηση διατομικών διαφορών ανάμεσα στα αγόρια και τα κορίτσια στην ικανότητα ΝΠ και η μελέτη της ανάπτυξης της σε μαθητές Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου, καθώς στην Γ΄ Γυμνασίου οι μαθητές διδάσκονται στερεομετρία και η ικανότητα ΝΠ αποτελεί μία βασική χωρική ικανότητα. Επιδιώκεται η σύνδεση των ευρημάτων με τη διαδικασία διδασκαλίας και μάθησης, σε μία εποχή που τα smartphone και tablet φαίνεται να επηρεάζουν την ανάπτυξη χωρικών ικανοτήτων και η ενασχόληση και από τα δύο φύλα σε διάφορες ηλικίες ίσως διαφοροποιούν τα ευρήματα προηγούμενων ερευνών.

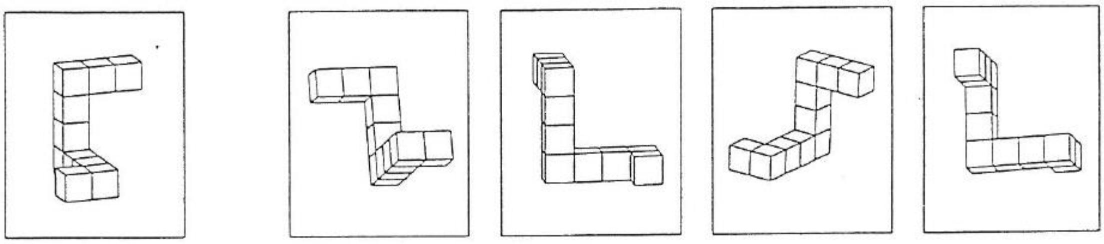
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Δείγμα

Για το σκοπό της έρευνας επιλέγηκαν 403 μαθητές Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου από τέσσερα γυμνάσια στην πόλη της Πάφου, τρία αστικά και ένα περιφερειακό. Αφού αφαιρέθηκαν τα άκυρα δοκίμια για τις στατιστικές αναλύσεις χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα των δοκιμίων 369 μαθητών (177 αγόρια και 192 κορίτσια), (207 μαθητές Α΄ και 162 μαθητές Γ΄ Γυμνασίου). Το συγκεκριμένο δείγμα δεν είναι αντιπροσωπευτικό με βάση το γεγονός ότι δεν έγινε επιλογή των μαθητών με τυχαίο τρόπο, όπως έγινε με τυχαίο τρόπο η επιλογή των σχολείων από τη συγκεκριμένη επαρχία.

Μέσα Συλλογής Δεδομένων

Για το σκοπό της έρευνας χρησιμοποιήθηκε ένα δοκίμιο νοητικής περιστροφής, που αποτελείτο από 24 έργα και το κάθε ένα αποτελείται από πέντε μαυρόασπρες δισδιάστατες εικόνες τρισδιάστατων σχημάτων, που σχεδιάστηκαν σε ηλεκτρονικό υπολογιστή (Peters, Laeng, Lathem, Jackson, Zaiyouna & Richarson, 1995). Από τις πέντε φιγούρες η πρώτη φιγούρα στα αριστερά θεωρείται η φιγούρα «στόχος» και τα υποκείμενα κλήθηκαν να επιλέξουν δύο φιγούρες από τις άλλες τέσσερεις με τις οποίες η φιγούρα «στόχος» μετά από κατάλληλη περιστροφή ταυτίζεται. Οι άλλες δύο που δεν ταυτίζονται αποτελούν είτε το είδωλο της φιγούρας «στόχος» στον καθρέφτη είτε μία άλλη διαφορετική φιγούρα. Οι μαθητές πήραν 1 μονάδα μόνο αν και οι δύο επιλογές τους ήταν ορθές και 0 μονάδες για κάθε άλλο είδος απάντησης. Η ελάχιστη βαθμολογία που μπορούσαν να πάρουν ήταν 0 μονάδες και η μέγιστη 24. Το συγκεκριμένο δοκίμιο επιλέγηκε από ένα σύνολο δοκιμίων ΝΠ λόγω της ευρείας χρήσης του από πολλές ερευνητικές ομάδες (Peters κ.ά. 1995˙ Peters & Batista, 2007˙ Tsui, Venator & Xiaoying, 2014), καθώς και για την καταλληλότητά του σε μαθητές γυμνασίου. Ένα ενδεικτικό έργο του δοκιμίου παρουσιάζεται στην Εικόνα 1.



Εικόνα 6: Έργο από το δοκίμιο νοητικής περιστροφής

Ερευνητική Διαδικασία

Η ερευνητική διαδικασία πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια του πρώτου τετραμήνου του σχολικού έτους, πριν από τη διδασκαλία του κεφαλαίου της στερεομετρίας στη Γ΄ Γυμνασίου, ενώ τόσο στην Α΄ όσο και στην Β΄ Γυμνασίου δεν διδάσκεται οποιοδήποτε κεφάλαιο στερεομετρίας. Οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα ενημερώθηκαν με τον ίδιο τρόπο για την σημαντικότητα της ικανότητας ΝΠ και σε όλους δόθηκε ο ίδιος χρόνος επίλυσης του δοκιμίου (25΄).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Για την επίδραση του φύλου καθώς και της ηλικίας στην ικανότητα νοητικής περιστροφής, αρχικά πραγματοποιήθηκε περιγραφική στατιστική ανάλυση για μία πρώτη εικόνα εντοπισμού διαφορών ανάμεσα στους μαθητές της Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου, καθώς και ανάμεσα στα δύο φύλα ως προς την επίδοση στο δοκίμιο ΝΠ. Τα αποτελέσματα της περιγραφικής στατιστικής έδειξαν διαφορές ανάμεσα στους μαθητές της Α΄ ($M = 8.15, SD = 4.40$) και της Γ΄ Γυμνασίου ($M = 11.61, SD = 5.41$), οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου είχαν υψηλότερη μέση επίδοση από τους μαθητές της Α΄ Γυμνασίου, καθώς και διαφορές ανάμεσα στα δύο φύλα, τα αγόρια ($M = 10.81, SD = 5.34$) είχαν υψηλότερη μέση επίδοση από τα κορίτσια ($M = 8.63, SD = 4.76$). Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται οι μέσοι όροι και οι τυπικές αποκλίσεις των δύο ηλικιών και των δύο φύλων.

Ομάδα	N	Μέση Τιμή	Τυπική Απόκλιση
Αγόρια			
Α-Γυμνασίου	98	9.29	4.78
Γ-Γυμνασίου	79	12.68	5.44
Σύνολο	177	10.80	5.34
Κορίτσια			
Α-Γυμνασίου	109	7.13	3.77
Γ-Γυμνασίου	83	10.60	5.21
Σύνολο	192	8.63	4.76
Όλοι της Α-Γυμν.	207	8.15	4.40
Όλοι της Γ-Γυμν.	162	11.61	5.41

Πίνακας 1: Μέσοι όροι και τυπικές αποκλίσεις των δύο φύλων και τάξεων ως προς την επίδοση στο δοκίμιο ΝΠ

Για τον εντοπισμό στατιστικά σημαντικών διαφορών ανάμεσα στα αγόρια και τα κορίτσια, καθώς και ανάμεσα σε μαθητές Α και Γ΄ Γυμνασίου διεξάχθηκε διπλής κατεύθυνσης ανάλυση διακύμανσης (Two-way Anova), 2(Αγόρι, Κορίτσι)×2(Α-Γυμν., Γ Γυμν.) ως προς το δοκίμιο ΝΠ. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν στατιστικά σημαντική κύρια επίδραση του φύλου $F(1,\ 365) = 17.851,\ p < .001$ και $\eta^2 = .047$, τα αγόρια είχαν υψηλότερη επίδοση από τα κορίτσια. Επίσης, βρέθηκε στατιστικά σημαντική κύρια επίδραση της ηλικίας $F(1,\ 365) = 47.002,\ p < .001$ και $\eta^2 = .114$, οι μαθητές της Γ Γυμνασίου είχαν υψηλότερη επίδοση από τους μαθητές Α Γυμνασίου. Δεν βρέθηκε στατιστικά σημαντική αλληλεπίδραση φύλου × ηλικίας, $F(1,\ 365) = .004,\ p = .947 > .05$. Τέλος έγινε υπολογισμός του μεγέθους των αποτελεσμάτων (α) στο συνολικό δείγμα το μέγεθος της διαφοράς ανάμεσα στα δύο φύλα ήταν $d = .42$, που θεωρείται μικρό προς μεσαίο μέγεθος, (β) στους μαθητές της Α΄ Γυμνασίου ήταν $d = .50$, που θεωρείται μεσαίο μέγεθος του αποτελέσματος και (γ) στους μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου ήταν $d = .39$, που θεωρείται μικρό προς μεσαίο μέγεθος του αποτελέσματος. Η διαφορά ανάμεσα στα δύο φύλα στη Α΄ Γυμνασίου ήταν μεγαλύτερη σε σύγκριση με τη διαφορά στη Γ΄

Γυμνασίου. Όσον αφορά στη διαφοροποίηση της ικανότητας ΝΠ ως προς την ηλικία φάνηκε ότι η ικανότητα ΝΠ αυξάνεται με την αύξηση της ηλικίας. Η διαφορά ανάμεσα στα δύο φύλα στη Α΄ Γυμνασίου ήταν μεγαλύτερη σε σύγκριση με τη διαφορά στη Γ΄ Γυμνασίου, κάτι που ήταν μη αναμενόμενο. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.

Πηγή	df	F	p	η^2
Φύλο	1	17.851	<.001	.046
Τάξη	1	47.02	<.001	.114
Φύλο × Τάξη	1	.004	.947	<.001

Πίνακας 2: Ανάλυση διακύμανσης διασποράς διπλής κατεύθυνσης με ανεξάρτητες μεταβλητές το φύλο και την τάξη, και εξαρτημένη την επίδοση στο δοκίμιο νοητικής περιστροφής.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι διαφορές ανάμεσα στα δύο φύλα σε χωρικές ικανότητες και ιδιαίτερα της ΝΠ αποτέλεσε και αποτελεί αντικείμενο έρευνας και μελέτης εδώ και δεκαετίες. Στην παρούσα έρευνα φάνηκε ότι τα αγόρια είχαν υψηλότερη επίδοση από τα κορίτσια, παρά τους διαφορετικούς στόχους που τίθενται από το επίσημο εκπαιδευτικό σύστημα για την αντιμετώπιση έμφυλων διαφορών. Το εύρημα αυτό είναι συναφές με ευρήματα προηγούμενων ερευνών (Vandenberg & Kuse, 1978˙ Lippa, Collaer, & Peters, 2010˙ Jansen, Zayed, & Osmann, 2016). Μέσα από τη βιβλιογραφία υπάρχουν ενδείξεις ότι μία πιθανή αιτία αυτού του φαινομένου είναι οι διαφορετικές ασχολίες των δύο φύλων στην καθημερινή τους ζωή, με τα αγόρια να χρησιμοποιούν περισσότερες χωρικές δραστηριότητες από τα κορίτσια (Geiser, Lehmann, & Eid, 2008α). Επίσης, οι διαφορές αυτές πιθανόν να οφείλονται στον διαφορετικό τρόπο προσέγγισης των ασκήσεων από τα δύο φύλα καθώς και τις διαφορετικές στρατηγικές που χρησιμοποιούν (Geiser, Lehmann, Corth, & Eid, 2008β˙ Pasrons, Larson, Kratz, Thiebaux, Bluestein, Buckwalter & Rizzo, 2004). Για περαιτέρω διερεύνηση των διαφορών ανάμεσα στα δύο φύλα υπολογίστηκε το μέγεθος του αποτελέσματος. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η διαφορά στην ικανότητα ΝΠ, ανάμεσα στα δύο φύλα υπέρ των αγοριών μειώθηκε στους μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου σε σύγκριση με την Α΄ Γυμνασίου, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με ευρήματα προηγούμενων ερευνών, όπως την μετά-ανάλυση των Voyer, Voyer και Bruten (1995) με 286 έρευνες, στην οποία φάνηκε αύξηση της διαφοράς των δύο φύλων στην επίδοση σε χωρικές ικανότητες και ιδιαίτερα στη ΝΠ με την αύξηση της ηλικίας τους.

Όσο αφορά στη διαφοροποίηση στην ικανότητα ΝΠ ως προς την ηλικία, τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας έδειξαν αύξηση της ικανότητας ΝΠ στους μαθητές κατά την περίοδο του γυμνασιακού κύκλου. Οι ενδοσχολικές αλλά και εξωσχολικές δραστηριότητες των μαθητών, περιλαμβάνουν εμπειρίες που φαίνεται ότι βοηθούν στην ανάπτυξη της ικανότητας ΝΠ. Η παρούσα έρευνα δεν μπορεί να καθορίσει το είδος των δραστηριοτήτων και την επίδρασή τους, προβαίνει στην καταγραφή κάποιων εικασιών που θα μπορούσαν να αποτελέσουν αντικείμενο διερεύνησης μίας επόμενης μελέτης. Οι δραστηριότητες των μαθητών εκτός σχολείου, όπως η συμμετοχή σε διάφορα αθλήματα, τα ηλεκτρονικά παιγνίδια, καθώς και κάθε άλλο είδος παιγνιδιών ενδεχομένως να βοηθά στην ανάπτυξη της ικανότητας ΝΠ. Μία μελλοντική έρευνα θα ήταν χρήσιμο να διερευνήσει τη δυνατότητα επιτάχυνσης της διαδικασίας ανάπτυξης αναπτύσσοντας την κατάλληλη διδακτική παρέμβαση, η οποία ενδεχόμενα να σχετίζεται με την αξιοποίηση των «έξυπνων ηλεκτρικών συσκευών».

Διαχρονικά διάφοροι επαγγελματικοί προσανατολισμοί έχουν χαρακτηρισθεί στερεότυπα ανδρικοί ή γυναικείοι. Με την πάροδο του χρόνου παρατηρήθηκε μία τάση αντιμετώπισης τέτοιων στερεότυπων και στο επίπεδο της Ε.Ε γίνονται σημαντικές προσπάθειες για εξάλειψη κάθε είδους έμφυλης διαφοροποίησης μέσω της εκπαίδευσης. Παρά τις σημαντικές αυτές προσπάθειες που γίνονται, τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας επιβεβαίωσαν σημαντικές διαφορές ανάμεσα στα δύο φύλα στην ικανότητα ΝΠ υπέρ των αγοριών, έδειξαν όμως και μία σημαντική διαφοροποίηση που μπορεί να στηρίζεται σε άτυπες διαδικασίες μάθησης, όπως είναι η καθημερινή ενασχόληση με τεχνολογικά μέσα ή κάποιες άλλες εμπειρίες που πρέπει να διερευνηθούν. Στόχος της έρευνας στη μαθηματική παιδεία όσον αφορά στον συγκεκριμένο τομέα θα πρέπει να είναι η διερεύνηση αντίστοιχων μορφών παρέμβασης στο πλαίσιο τυπικής μάθησης. Η βελτίωση της ικανότητας ΝΠ και στα δύο φύλα θα οδηγήσει σε καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα στη γεωμετρία και στερεομετρία, τόσο στις ηλικίες του δημοτικού όσο και της μέσης εκπαίδευσης.

Μία πρόσθετη εισήγηση για μελλοντική έρευνα είναι η διερεύνηση της επίδρασης της μαζικής χρήσης των ηλεκτρονικών συσκευών smartphones και tablets από τους εφήβους, όπου η χρήση ηλεκτρονικών παιγνιδιών που σχετίζονται με χωρική ικανότητα έχουν επίδραση τόσο στα αγόρια όσο και στα κορίτσια. Ενδεχομένως δηλαδή τη διαφορά που δημιουργούν τα lego, οι κατασκευές με τουβλάκια, τα αυτοκινητάκια κλπ, που αξιοποιούνται περισσότερο από τα αγόρια, μειώνεται στην εφηβική ηλικία λόγω της ενασχόλησης και των κοριτσιών με δραστηριότητες που αναπτύσσουν την ΝΠ, μέσω των ηλεκτρονικών συσκευών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Castillo, R., Grazzi, M., & Tacsir, E. (2014). *Women in science and technology: What does the literature say?* Inter-American Development Bank.

Cohen, C. A., & Hegarty, M. (2007). Sources of difficulty in imagining cross sections of 3D objects. In D. S. McNamara, & J. G. Trafton (Eds.). *Proceedings of the Twenty-Ninth Annual Conference of the Cognitive Science Society*, (pp. 179-184). Austin TX: Cognitive Science Society.

Cohen, C. A., & Hegarty, M. (2012). Inferring cross sections of 3D objects: A new spatial thinking test. *Learning the individual Differences, 22*, 868-874.

Connor, J. M., & Serbin, L. A. (1977). Behaviorally based masculine- and feminine-activity-preference scales for preschoolers: correlates with other classroom behaviors and cognitive tests. *Child Development, 48*, 1411-1416.

Delgado, A. R., & Prieto, G. (2004). Cognitive mediators and sex-related differences in mathematics. *Intelligence, 32*, 25-32.

Ericsson, K. A., Nandagopal, K., & Roring, R. W. (2005). Giftness viewed from the expert-performance perspective. *Journal for the Education of the Gifted, 28 (3-4)*, 287-311.

Geiser, C., Lehmann, W., & Eid. (2008α). A note on sex differrences in mental rotation in different age groups. *Intelligence, 36*, 556-663.

Geiser, C., Lehmann, W., Corth, M., & Eid, M. (2008β). Quantitive and qualitative change in children's mental rotation performance. *Learning and Individual Differences, 18*, 419-429.

Hoyek, N., Collet, C., Fargier, P., & Guillot, &. A. (2012). The use of the vandenberg and kuse mental rotation test in children. *Journal of Individual Differences, 33*(1), 62-67.

Jansen, P., Zayed, K., & Osmann, R. (2016). Gender differences in mental rotation in Oman and Germany. *Learning the Individual Differences, 51*, 284-290. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.lindif.2016.08.033

Lippa, R. A., Collaer, M. L., & Peters, M. (2010). Sex differences in mental rotation and line angle judgments are positively assosiated with gender equality and economic development across 53 nations. *Arch Sex Behav*, *39*, 990-997.

Moore, D., & Johnson, S. P. (2011). Mental rotation of dynamic, three-dimensional stimuli by 3-month-old infaants. *Infancy*, *16*(4), 435-445.

Newcombe, N. S. (2010). Picture this: Increasing math and science learning by improving spatial thinking. *American educator*, 29-43.

Parsons, T. D., Larson, P., Kratz, K., Thiebaux, M., Bluestein, B., Buckwalter, J. G., & Rizzo, A. A. (2004). Sex differences in mental rotation and spatia rotation in a virtual environment. *Neuropsychologia*, *42*, 555-562.

Peters, M., & Batista, C. (2007). Applications of mental rotation figures of the Shepard and Metzler. *Brain and Cognition*, *103*, 260-264.

Peters, M., Laeng, B., Latham, K., Jakson, M., Zaiyouna, R., & Richarson, C. (1995). A redrawn Vandenberg and Kuse mental rotations test: Different versions and factors that affect performance. *Brain and Cognition*, *28*, 39-58.

Reber, A. S. (1985). *The Penguin dictionary of psychology*. Harmondsworth, Middlesex, England: Viking.

Reuhkala, M. (2001). Ma thematical skills in ninth graders: Relationship with visuo-spatial abilities and working memory. *Educational Psychology*, *21*, 387-399.

Russell-Gebbett. (1985). Skills and strategies–pupils' approaches to three-dimensional problems in biology. *Journal of Biological Education*, *19*(4), 293-298.

Servin, A., Bohlin, G., & Berlin, L. (1999). Sex differences in 1-3 and 5-year-olds' toy choice in structured play-session. *Scandinavian Journal of Psychology*, *40*, 43-48.

Stieff, M. (2004). A localized model of spatial cognition in chemistry. (Doctoral Dissertation). Northwestern University, Evanston, IL.

Stieff, M. (2007). Mental rotation and diagrammatic reasoning in science. *Learning and Instruction*, *17*, 219-234.

Terlecki, M. S., Newcombe, N. S., & Litle, M. (2008). Durable and generalized effects of spatial experience on mental rotation: Gender differences on growth patterns. *Applied cognitive Psychology*, *22*, 996-1013.

Tsui, M., Venator, E., & Xiaoying, X. (2014). Mental rotation test performance of chinese male and female university students. *Scientific Research, 3*, 41-46.

Vandenberg, S. G., & Kuse, A. R. (1978). Mental rotation, a group test of three dimensional spatial visualization. *Perceptual and Motor skills, 47*, 599-604.

Voyer, D., Voyer, S., & Bryden, M. P. (1995). Magnitude of sex differences in spatial abilities: A meta-analysis and consideration of critical variables. *Psychological Bulletin*, *117*, 250-270.

Wai, J., Lubinski, D., & Benbow, C. P. (2009). Spatial ability for STEM domains: Aligning over 50 years of cumulative psychological knowledge solidifies its importance. *Journal of Educational Psychology*, *101*, 817-835.

Weckbacher, L. M., & Okamoto, Y. (2014). Mental rotation ability in relation to self-perceptions of high school geometry. *Learning and individual differences*.

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΣΤΗ ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΕΥΣΗΣ ΩΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Ζούπα Αγγελική και Ψυχάρης Γιώργος

Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

mekkapsaki@math.uoa.gr, gpsych@math.uoa.gr

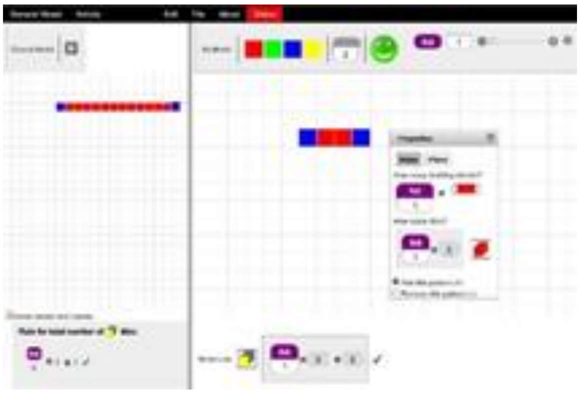
Το παρόν άρθρο παρουσιάζει αποτελέσματα έρευνας σχετικά με τη νοηματοδότηση και έκφραση σχέσεων γενίκευσης (με ή χωρίς τη χρήση συμβόλων) από μαθητές Α΄ Γυμνασίου, όταν εμπλέκονται σε διερευνητικές δραστηριότητες που βασίζονται στη χρήση κατάλληλα σχεδιασμένων ψηφιακών εργαλείων. Στα αποτελέσματα καταγράφεται ο ρόλος που παίζει ο πολυσύνθετος παράγοντας πλαίσιο, έτσι όπως το συνθέτει ο συνδυασμός ενός ψηφιακού περιβάλλοντος, μιας ρεαλιστικής διερευνητικής δραστηριότητας και των μέσων συμβολικής έκφρασης των σχέσεων γενίκευσης.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στο παρόν άρθρο παρουσιάζουμε αποτελέσματα μιας έρευνας που στοχεύει στη διερεύνηση του ρόλου του πλαισίου, έτσι όπως αυτό συντίθεται από τον συνδυασμό ενός ειδικά σχεδιασμένου ψηφιακού περιβάλλοντος, μιας ρεαλιστικής διερευνητικής δραστηριότητας και των μέσων συμβολικής έκφρασης εντός και εκτός του ψηφιακού περιβάλλοντος (π.χ. αλγεβρικών συμβόλων, εικονικών μεταβλητών), στην πορεία νοηματοδότησης της μαθηματικής γενίκευσης από μαθητές της Α' γυμνασίου. Οι μαθητές συνεργάστηκαν σε ομάδες των τριών ατόμων χρησιμοποιώντας το διερευνητικό λογισμικό eXpresser (Noss et al., 2009) το οποίο παρέχει τη δυνατότητα κατασκευής μοτίβων με τετραγωνάκια διαφορετικών χρωμάτων. Το eXpresser επιτρέπει στους μαθητές να χρησιμοποιήσουν εικονικές μεταβλητές για να αναπαράγουν τις κατασκευές τους για διαφορετικό αριθμό επαναλήψεων, να εκφράζουν σχέσεις γενίκευσης και να ελέγχουν την ορθότητά τους μέσα από κατάλληλη ανατροφοδότηση. Η έρευνα στηρίζεται σε έναν χαρακτηρισμό της αλγεβρικής σκέψης βασισμένο στην αναλυτική της φύση και εστιάζεται στο σημειωτικό σύστημα που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να εκφράσουν τις μεταβλητές που χειρίζονται. Η εστίαση στους σημειωτικούς τρόπους έκφρασης μας οδηγεί στο να αναγνωρίσουμε ενσώματες (embodied) μη-συμβολικές και αλφαριθμητικές προ αλγεβρικές γενικεύσεις καθώς και την εξελισσόμενη κατανόηση των μεταβλητών από τους μαθητές. Ο Radford (2010) ανέπτυξε την θεωρία της αντικειμενικοποίησης (objectification) με την οποία περιγράφει τη σημειωτική διαδικασία μετάβασης των μαθητών από τη διάκριση μιας ομοιότητας στην έκφρασή της ως σχέση γενίκευσης με περισσότερο μαθηματικοποιημένους τρόπους μέσα από τη χρήση σημείων (χειρονομιών, λέξεων, συμβόλων). Στην προσπάθειά του να μελετήσει τη συγκρότηση σχέσεων γενίκευσης από τους μαθητές ως αλγεβρική δραστηριότητα, υπέδειξε τρία χαρακτηριστικά της αλγεβρικής σκέψης: (1) την ύπαρξη αγνώστων ποσοτήτων (π.χ. μεταβλητών, παραμέτρων), (2) την ανάγκη να ονομαστούν και να συμβολιστούν αυτές οι ποσότητες με διαφορετικούς τρόπους (όχι αποκλειστικά με τη χρήση του αλγεβρικού συμβολισμού, αλλά και με αλφαριθμητικά σύμβολα, φυσική γλώσσα, κινήσεις ή συνδυασμό τους), (3) τον χειρισμό (π.χ. με πράξεις όπως πρόσθεση, πολλαπλασιασμός) των απροσδιόριστων ποσοτήτων σαν να είναι γνωστές (Radford, 2014). Ένας τρόπος να εισαχθούν οι μαθητές στην άλγεβρα είναι να αντιληφθούν ένα μοτίβο ή μια κανονικότητα και μετά να προσπαθήσουν να το εκφράσουν με μια σχέση (Mason, Graham, Pimm & Gowar 1985, p.8). Ενώ οι ερευνητές σχετίζουν την άλγεβρα με την γενίκευση, δεν έχουν τις ίδιες απόψεις για τον ρόλο των συμβόλων. Κάποιοι ερευνητές θεωρούν ότι ο αλφαριθμητικός συμβολισμός δεν αποτελεί συνθήκη για αλγεβρική σκέψη, ενώ για άλλους για να θεωρηθεί μια συμβολική δραστηριότητα ως αλγεβρική, απαιτείται συμβολισμός. Στην παρούσα έρευνα λαμβάνουμε υπόψη πρόσφατες προσεγγίσεις σύμφωνα με τις οποίες η χρήση συμβολισμού δεν αποτελεί ούτε απαραίτητη, ούτε αναγκαία προϋπόθεση για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης (Radford, in press). Η έρευνα τονίζει τη σχέση γνωστικής λειτουργίας και πλαισίου (Cole, 1996) και, σύμφωνα με τη θεωρία της αντικειμενικοποίησης, (Radford, 2015) η γνώση μπορεί να μελετηθεί μόνο καθώς εξελίσσεται μια δραστηριότητα. Το πλαίσιο, περιλαμβάνοντας μια σειρά από δυναμικούς παράγοντες, όπως οι αλληλεπιδράσεις των μαθητών με τους συνομηλίκους, τους εκπαιδευτικούς, την τεχνολογία, το ρεαλιστικό σενάριο και τα μέσα αλγεβρικής έκφρασης, μπορεί να επηρεάσει μια διαδικασία αφαίρεσης. Ο ρόλος του πλαισίου είναι κρίσιμος για τις διαδικασίες μάθησης και η πολυπλοκότητα των μαθησιακών διαδικασιών οφείλεται, τουλάχιστον εν μέρει, στις επιρροές του πλαισίου πάνω στην κατασκευή της γνώσης του μαθητή. Ως εκ τούτου, η μελέτη του ρόλου του πλαισίου είναι πιθανό να οδηγήσει σε βαθύτερη κατανόηση των διαδικασιών μάθησης (Ben-Zvi, 2012). Οι Noss et al. (2009) τοποθετούν την αφαιρετική διαδικασία σε σχέση με τα μέσα που οι μαθητές έχουν στη διάθεσή τους. Το θεωρητικό πλαίσιο της πλαισιοθετημένης αφαίρεσης (Abstraction in Context – AiC, Hershkowitz et al., 2001) βασίζεται σε τρεις επιστημικές ενέργειες για την περιγραφή μιας αφαιρετικής διαδικασίας. Αυτές οι ενέργειες είναι η αναγνώριση, η οικοδόμηση με το εργαλείο και η κατασκευή (RBC). Η αναγνώριση μιας ήδη γνωστής μαθηματική έννοιας, διαδικασίας ή ιδέας, εμφανίζεται όταν ένας μαθητής την αναγνωρίζει ως εγγενή σε μια δεδομένη μαθηματική κατάσταση. Η οικοδόμηση με το εργαλείο αφορά τον συνδυασμό των υπαρχόντων στοιχείων γνώσης προκειμένου να επιτευχθεί ένας στόχος, όπως η επίλυση ενός προβλήματος (Dreyfus, 2010). Η κατασκευή, πραγματοποιείται μέσα από τη συναρμολόγηση ή την ενσωμάτωση στοιχείων της γνώσης για την παραγωγή μιας νέας κατασκευής. Οι μαθητές προσαρμόζουν πρακτικές από προηγούμενα πλαίσια σε νέα, δημιουργούν συνδέσεις με προηγούμενες παρόμοιες δραστηριότητες και αξιοποιούν τα εργαλεία που έχουν στη διάθεσή τους για να κατασκευάσουν νέες μαθηματικές γνώσεις. Συνοψίζοντας, στην παρούσα έρευνα μελετάμε την διαδικασία της αντικειμενικοποίησης της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών όταν αυτοί προσπαθούν να συγκροτήσουν σχέσεις γενίκευσης για μοτίβα με ή χωρίς σύμβολα. Επειδή η θεωρία της αντικειμενικοποίησης τονίζει την σχέση μεταξύ κατασκευής της γνώσης και πλαισίου, αναλύουμε σε ένα μικρο-αναλυτικό επίπεδο τον ρόλο του τρισδιάστατου πλαισίου (ψηφιακό περιβάλλον-δραστηριότητα-διαθέσιμα μέσα συμβολικής έκφρασης) στην αφαιρετική διαδικασία αντικειμενικοποίησης των σχέσεων γενίκευσης από τους μαθητές.

ΤΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

Το eXpresser αποτελείται από δύο κύριες περιοχές: (α) μια περιοχή εργασίας (My Model, Σχ.1 δεξιά στην οθόνη) και (β) μια προβολής (Computer’s Model, Σχ.1 αριστερά στην οθόνη). Στην περιοχή My Model οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν επαναλαμβανόμενα μοτίβα μέσα από την επανάληψη μιας σύνθεσης από τετράγωνα διαφορετικών χρωμάτων που ονομάζεται δομική μονάδα (building block) (Σχ.1).



Σχ. 1 Μοτίβο στο eXpresser

Οι ποσότητες στο eXpresser μπορεί να είναι σταθεροί αριθμοί, που εμφανίζονται μέσα σε γκρι ορθογώνιο πλαίσιο, ή εικονικές μεταβλητές, η τρέχουσα τιμή των οποίων εμφανίζεται σε ροζ ορθογώνιο πλαίσιο. Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να μετατρέψουν ένα σταθερό αριθμό (γκρι πλαίσιο) σε εικονική μεταβλητή (πλαίσιο με χρώμα) 'ξεκλειδώνοντάς' τον με την εντολή Ξεκλείδωμα. Με το πάτημα του κουμπιού Play το πρόγραμμα αποδίδει τυχαίες τιμές στις εικονικές μεταβλητές που έχει ορίσει ο χρήστης. Σε αυτή την περίπτωση το μοτίβο εμφανίζεται χρωματισμένο στο My Model μόνο όταν οι μαθητές συμπληρώσουν σωστά τα ειδικά εικονίδια με '?' στις ιδιότητες του μοτίβου (Σχ.4). Σε αντίθετη περίπτωση και ως ένδειξη της ύπαρξης λάθους, το μοτίβο εμφανίζεται χωρίς χρώμα. Μια επιπλέον λειτουργία που προσφέρει η διαδικτυακή έκδοση του eXpresser είναι ότι επιλέγοντας το εικονίδιο "γρανάζι" οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να ρυθμίσουν το "πεδίο ορισμού" της μεταβλητής και να καθορίσουν το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές και το βήμα μεταβολής (Σχ.2). Τέλος, το μοτίβο στο Computer's Model χρωματίζεται όταν συμπληρωθεί σωστά με χρήση μεταβλητής το κάθε «?» στον πίνακα των ιδιοτήτων. Αυτό που συμβαίνει όταν οι μαθητές βρουν τον γενικό κανόνα στο Model Rule είναι το πρόσωπο που βρίσκεται πάνω στο κεντρικό πλαίσιο εργαλείων να γίνει πράσινο και χαμογελαστό.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

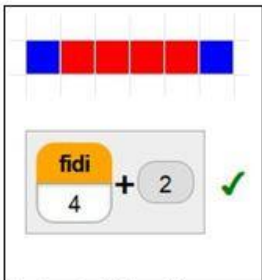
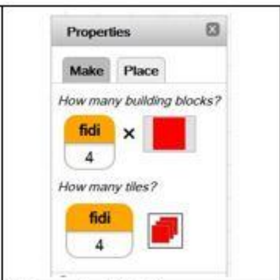
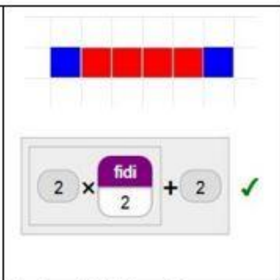
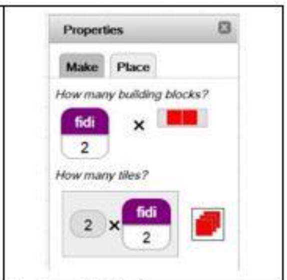
Οι δραστηριότητες των παρεμβάσεων αναπτύχθηκαν σε τρεις φάσεις. Είχαν ως κοινό γνώμονα ένα ρεαλιστικό πλαίσιο, ήταν βασισμένες σε κάποιο μοτίβο και δημιουργούσαν την ανάγκη της χρήσης του λογισμικού για την σύλληψη και γενίκευση της αλγεβρικής έκφρασης των μοτίβων. Στην πρώτη φάση οι μαθητές ανέλαβαν τον ρόλο ενός Ερπετολόγου μελετώντας την ανάπτυξη φιδιών, τα οποία παρέπεμπαν σε απλά γραμμικά μοτίβα. Η δεύτερη φάση αφορούσε την οργάνωση χώρων εστίασης με στόχο την κατάλληλη τοποθέτηση καλεσμένων. Αρχικά με χειραπτικά μέσα διερεύνησαν ένα πρόβλημα 38 ατόμων και στη συνέχεια μέσω του λογισμικού τα 132 άτομα οδηγούμενοι σε ένα πιο σύνθετο γραμμικό μοτίβο ενωμένων τραπεζιών. Στην τρίτη φάση οι μαθητές ως κατασκευαστές πισίνας έπρεπε να μελετήσουν μοτίβα δευτέρου βαθμού μεταβαίνοντας έτσι από την γραμμική, στην πολλαπλασιαστική δόμηση ενός μοτίβου. Πιο συγκεκριμένα η δραστηριότητα του επεισοδίου που αναλύεται στα αποτελέσματα αφορά την πρώτη φάση, όπου οι μαθητές ανέλαβαν να μελετήσουν τον ρυθμό ανάπτυξης του πύθωνα της Βιρμανίας, ο οποίος ζει 25 χρόνια και το μήκος του φτάνει τα 6 μέτρα, με σκοπό την παραγγελία κατάλληλου μεγέθους κλουβιού. Οι μαθητές κλήθηκαν να κατασκευάσουν στο λογισμικό eXpresser ένα απλό μοτίβο που θα αναπαριστούσε το φίδι σε οποιονδήποτε μήνα της ζωής του. Στη συνέχεια οι μαθητές έπρεπε να φανταστούν ότι το παράθυρο του eXpresser με το πλέγμα είναι το κλουβί του φιδιού και να κατασκευάσουν ένα πιο σύνθετο μοτίβο το οποίο θα αναπαριστούσε το φίδι κουλουριασμένο. Τέλος, δόθηκε στους μαθητές ένα έτοιμο κατασκευασμένο μοτίβο, το οποίο αναπαριστούσε τον ρυθμό ανάπτυξης της αιγυπτιακής Cobra και οι μαθητές έπρεπε παρατηρώντας το να ανακαλύψουν τον αλγεβρικό τύπο. Ο γενικός στόχος μας ήταν μέσα από την ενασχόληση με τα μοτίβα οι μαθητές να οδηγηθούν στη λύση του αρχικού προβλήματος διερευνώντας τη σχέση των συνολικών τετραγώνων του μοτίβου με την ηλικία του φιδιού.

ΜΕΘΟΔΟΣ

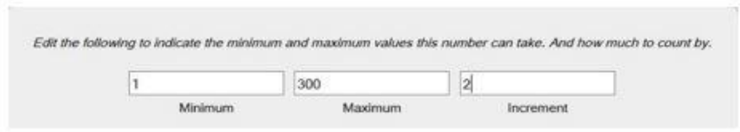
Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 18 μαθητές της Α' Γυμνασίου ενός δημοσίου γυμνασίου της Αθήνας. Οι μαθητές εργάστηκαν σε ομάδες των τριών για 6 δίωρες παρεμβάσεις σε διάστημα 2 μηνών ανά βδομάδα. Μετά την αποπεράτωση των δραστηριοτήτων η κάθε ομάδα συμμετείχε σε συνέντευξη διάρκειας 1 ώρας με σκοπό την περαιτέρω κατανόηση και ανάλυση των τρόπων με τους οποίους νοηματοδοτήθηκε η αλγεβρική σκέψη μέσα από ενσώματους, μη-συμβολικούς ή συμβολικούς τρόπους επηρεασμένοι από το τρισυπόστατο πλαίσιο. Η ακολουθούμενη μέθοδος αντιστοιχεί σε έρευνα σχεδιασμού (Cobb et al., 2003). Καθώς γνωρίζαμε ότι η επαφή των μαθητών με μοτίβα ήταν από ανύπαρκτη έως αποσπασματική μέχρι εκείνη τη στιγμή, αναμέναμε να δούμε αν και με ποιο τρόπο η αλληλεπίδρασή τους με τα πλαίσια, του λογισμικού, του σεναρίου και των αλγεβρικών συμβόλων, θα επηρέαζε τα νοήματα που θα δημιουργούσαν για τη γενίκευση. Η συλλογή δεδομένων έγινε με τη βοήθεια ψηφιακού μαγνητόφωνου και κάμερας. Για την ανάλυση των δεδομένων απομαγνητοφωνήθηκαν κομμάτια διαλόγων των μαθητών. Μονάδα ανάλυσης αποτέλεσε το θεματικό επεισόδιο, το οποίο ορίστηκε ως ένα απόσπασμα διαλόγων και δράσεων των μαθητών γύρω από την νοηματοδότηση και έκφραση σχέσεων γενίκευσης (εντός ή εκτός του ψηφιακού περιβάλλοντος). Σε πρώτο επίπεδο, τα επεισόδια αναλύθηκαν μέσα από μικρο-γενετική ανάλυση (Sullivan, 2015) έτσι ώστε να αναδυθεί η εξέλιξη των εννοιολογικών δράσεων των μαθητών κατά την αλληλεπίδρασή τους με διαφορετικές πτυχές του πλαισίου (ψηφιακά εργαλεία, δραστηριότητα, μέσα συμβολικής έκφρασης σχέσεων γενίκευσης). Σε δεύτερο επίπεδο, έγινε ανάλυση των επεισοδίων με βάση το πλαίσιο της πλαισιοθετημένης αφαίρεσης ώστε να φωτιστεί η διαδικασία νοηματοδότησης των σχέσεων γενίκευσης ως αφαιρετική διαδικασία. Στο παρόν άρθρο αναλύουμε ένα επεισόδιο από την συνέντευξη μιας ομάδας 3 μαθητών, και είναι ενδεικτικό της μεθόδου ανάλυσης που θα εξαπλωθεί στο σύνολο των δεδομένων.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Το επεισόδιο αυτό έλαβε χώρα κατά την διάρκεια της συνέντευξης μιας ομάδας μαθητών (ομάδα 1), αφού είχαν ολοκληρωθεί οι παρεμβάσεις. Σκοπός της συνέντευξης ήταν να μελετηθεί σε βάθος ο τρόπος με τον οποίο απάντησαν οι μαθητές στα ερωτήματα των φύλλων εργασίας, πώς νοηματοδότησαν τα σύμβολα καθώς και να εξηγήσουν με ποιον τρόπο έφτασαν στην κατασκευή του αλγεβρικού τύπου. Στο συγκεκριμένο επεισόδιο οι μαθητές έπρεπε να κατασκευάσουν στο λογισμικό το μοτίβο ενός φιδιού θεωρώντας ότι το ένα τετράγωνο αντιστοιχεί σε 1 cm. Σύμφωνα με τις οδηγίες το φίδι κάθε μήνα θα αναπτυσσόταν κατά 2 cm. Παραδείγματα ερωτήσεων: Πόσα κόκκινα τετράγωνα θα έχει το μοτίβο όταν το φίδι θα είναι 5 μηνών; (αντίστοιχα για 10, 25, 100). Περιγράψτε με απλά λόγια πως δουλεύει το μοτίβο κάθε μήνα. Περιγράψτε με αλγεβρικό τύπο πόσα κόκκινα εικονίδια εμφανίζονται κάθε μήνα. Οι μαθητές αντίστοιχα απάντησαν ότι επειδή κάθε μήνα το φίδι μεγαλώνει 2 cm, για τους 5 μήνες πρέπει να κάνουμε την πράξη 2x5, για τους 10, 2x10 και ούτω καθεξής 2x25 και 2x100. Εξήγησαν ότι στους 5 μήνες μέτρησαν ένα-ένα τα κόκκινα τετράγωνα στο λογισμικό για επιβεβαίωση αλλά στα υπόλοιπα ερωτήματα όχι. Η γενίκευσή τους σε αυτό το σημείο έχει όνομα, πλέον όχι αλγεβρικό αλλά αριθμητικό, όπως και η απάντησή σχετικά με την περιγραφή της διαδικασία του μοτίβου "αυξάνεται κατά 2". Στη συνέχεια η απάντηση των μαθητών όσον αφορά τον αλγεβρικό τύπο για το μοτίβο ήταν "x+2". Φαινομενικά θα μπορούσε κανείς να τον θεωρήσει λάθος, ωστόσο η κουβέντα που ακολούθησε με σκοπό την αιτιολόγηση της επιλογής των συμβόλων σε συνδυασμό με την κατασκευή του μοτίβου στο λογισμικό παρουσίασε μεγάλο ενδιαφέρον. Αρχικά οι μαθητές αναγνώρισαν ότι το μοτίβο αποτελείται από 2

			
Σχ. 3 Μοτίβο ομάδα 1	**Σχ. 4** Ιδιότητες μοτίβου ομάδα 1	**Σχ. 5** Μοτίβο ομάδα 2	**Σχ. 6** Ιδιότητες μοτίβου ομάδα 2

σταθερά μπλε τετράγωνα τα οποία αφορούσαν το κεφάλι και την ουρά του φιδιού και στη συνέχεια πέρασαν στην κατασκευή της δομικής μονάδας του σώματος του φιδιού, η οποία θα έπρεπε να αυξάνεται ανά 2 κόκκινα τετράγωνα κάθε μήνα. Οι μαθητές μεταφέροντας ένα κόκκινο τετράγωνο στο My Model ξεκλείδωσαν τον αριθμό των επαναλήψεων δημιουργώντας έτσι μια (κίτρινη) εικονική μεταβλητή (Σχ. 4) την οποία στη συνέχεια έσπευσαν να την ρυθμίσουν από το γρανάζι εμφανίζοντας το παράθυρο της εικόνας του Σχ.2. Στο πρώτο κενό που αφορά το κατώτατο όριο της μεταβλητής έβαλαν τον αριθμό 2, επιχειρηματολογώντας ότι έτσι κι αλλιώς το φίδι όταν γεννιέται είναι 2 cm, στο δεύτερο κενό που αφορά το ανώτατο όριο της μεταβλητής



Σχ. 2 Ρυθμίσεις εικονικής μεταβλητής ομάδα 1

συμπλήρωσαν 300, γιατί η εκφώνηση λέει ότι το φίδι αναπτύσσεται για 25 χρόνια και φτάνει τα 6 μέτρα και τέλος στο τρίτο κενό που αφορούσε το βήμα της μεταβλητής έβαλαν 2, γιατί κάθε μήνα αναπτύσσεται ανά 2. Στη συνέχεια οι μαθητές για τον σωστό χρωματισμό των κόκκινων τετραγώνων έσυραν την ίδια κίτρινη εικονική μεταβλητή (Σχ.4) και στη συνέχεια συμπληρώνοντας το Model Rule (Σχ.3) πρόσθεσαν τον σταθερό αριθμό 2 στην εικονική μεταβλητή η οποία εξέφραζε τα 2 μπλε σταθερά τετράγωνα. Αυτή η μη αναμενόμενη ρύθμιση της μεταβλητής από το γρανάζι ενώ από τη μία αφομοίωσε εξολοκλήρου τους περιορισμούς του ρεαλιστικού πλαισίου, άλλαξε από την άλλη το πεδίο ορισμού της μεταβλητής με αποτέλεσμα την διαφορετική συμβολική γενίκευση από τους μαθητές x+2.

11 Ερευνητής: Εδώ στον μαθηματικό τύπο μου έχετε συμπληρώσει x+2. Τι σημαίνει για σας αυτός ο τύπος;

12 Μαθητής1: x είχαμε βάλει το σώμα και 2 το κεφάλι με την ουρά

13 Ε: Άρα το x αφορά τα κόκκινα και το 2 τα μπλε.

14 Μ1: Ναι για την ουρά και το κεφάλι (Recognising)

15 Ε: Άρα αυτός ο τύπος θα μας βόλευε για να απαντήσουμε το φύλλο εργασίας; Δηλαδή σου λέει για τους 5 μήνες τι θα έλεγες;

16 Μ1: 5 επί 2

17 Ε: Εδώ λέει +2 πάντως

18 Μ1: Το x εκεί ουσιαστικά δεν θα βοήθαγε πολύ γιατί εκεί σου λέει τι υπάρχει ήδη στο μοτίβο και αν δεν ξέρεις τα κόκκινα δεν μπορείς να το βρεις και πολύ εύκολα. Άρα αυτό το x είναι για τα κόκκινα και εκφράζει ουσιαστικά αυτό που είναι ήδη έτοιμο. Για τους μήνες…Μάλλον…ναι 2 επί

μήνες ουσιαστικά, γιατί είναι 2 πόσοι είναι επί μήνες και ναι ουσιαστικά το x αν θες να βοηθήσει θα πρέπει το x να εκφράζει για τους μήνες *(Building-with)*

Στον παραπάνω διάλογο τα αποτελέσματα μας δίνουν μια σημειωτική κατασκευή η οποία μας αποκαλύπτει έναν μηχανισμό, όπου το κάθε σύμβολο έχει το δικό του νόημα. Ένα νόημα το οποίο δεν μπορεί να περιοριστεί αποκλειστικά σε ένα πλαίσιο. Με μικρο-γενετική ανάλυση μπορούμε να οργανώσουμε τα νοήματα σε 4 επίπεδα διαφορετικών πλαισίων (Σχ.7). Το πρώτο πλαίσιο είναι αυτό όπου τα σύμβολα αναφέρονται στο πλαίσιο του φιδιού ενός πραγματικού κόσμου, στο δεύτερο τα σύμβολα αναφέρονται σε ένα φίδι που ζει στο λογισμικό, στο τρίτο πλαίσιο αποκτούν αλγεβρικές ιδιότητες που τις καθορίζει το λογισμικό και τέλος στο τέταρτο τα σύμβολα έχουν μόνο αλγεβρική υπόσταση. Για παράδειγμα όταν οι μαθητές χρησιμοποιούν το x αναφέρονται στο σώμα φιδιού ενώ με τον αριθμό 2 στο κεφάλι και ουρά αντίστοιχα. Στη συνέχεια το ίδιο x μέσα στο λογισμικό αποτελεί το σύνολο των κόκκινων τετραγώνων. Μάλιστα μετά από ερώτηση του ερευνητή, αν αυτός ο τύπος μπορεί να μας βοηθήσει να υπολογίσουμε τα κόκκινα τετράγωνα σε σχέση με τους μήνες ζωής του φιδιού, οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι αυτή η μεταβλητή δεν μπορεί να ενσαρκώσει αυτή τη λειτουργία και για να μπορεί να μετατραπεί σε μεταβλητή που αναφέρεται σε μήνες πρέπει να γίνει 2*x. Στη συνέχεια του επεισοδίου ο ερευνητής τους παρουσιάζει ένα μοτίβο που έφτιαξε μια άλλη ομάδα (ομάδα 2) με διαφορετικό τρόπο (Σχ.6) χωρίς να πειράξει τις ρυθμίσεις από το γρανάζι με αποτέλεσμα η εικονική μεταβλητή να παίρνει τιμές όλους τους θετικούς ακέραιους και όχι μόνο τους ζυγούς όπως πριν.

26 Μ1: Ναι αυτό στην ουσία δίνει τιμή που εκφράζει για τον ένα μήνα… αν αυτοί που κάνανε έτσι δεν κάνανε το επί 2 θα λέγανε μόνο για το μισό μήνα ουσιαστικά, αλλά κάνανε επί 2 δείχνει για όλο το μήνα, άρα δείχνανε ουσιαστικά το μισό μέρος του φιδιού, άρα το κάνουμε επί 2 για να βρούνε το ολόκληρο *(Recognising)*

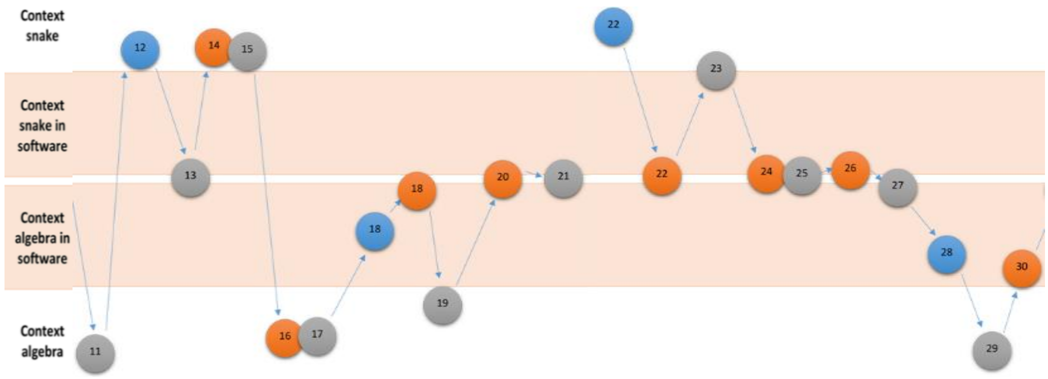
27 Ε: Άρα όταν είναι στο 2 μας δείχνει πόσο θα είναι στους 2 μήνες. Επομένως εδώ ο τύπος που βλέπετε πως θα ήτανε;

28 Μ2: 6 νομίζω, 2 επί 2 συν 2 *(Building-with)*

29 Ε: Και με κάποιο σύμβολο τι θα λέγατε;

30 Μ1: 2 επί x + 2, γιατί το x εδώ εκφράζει κάτι διαφορετικό από το δικό μας. Είναι οι μήνες *(Construction)*

Οι μαθητές (ομάδα 1) παρατηρώντας το μοτίβο της άλλης ομάδας (ομάδα 2) αναγνωρίζουν ότι τώρα το σύμβολο x ταυτόχρονα αναφέρεται σε κόκκινα τετράγωνα και σε μήνες ζωής του φιδιού, για αυτό και βρίσκεται ακριβώς στη μέση δύο διαφορετικών επιπέδων στο Σχ.7. Έχοντας ταυτίσει την εικονική μεταβλητή του λογισμικού με το σύμβολο x,



Σχ. 7 Μικρο-γενετική ανάλυση επεισοδίου ομάδας 1. Με γκρι είναι ο Ερευνητής, πορτοκαλί ο μαθητής 1 και μπλε ο μαθητής 2

αμέσως μεταφράζουν αυτό που βλέπουν στην οθόνη (Σχ.5) σε αλγεβρικό τύπο, που όμως για αυτούς δεν είναι απλά αλγεβρικά σύμβολα, αλλά σύμβολα με συγκεκριμένα νοήματα. Τα ίδια σύμβολα εμπεριέχουν νοήματα στο ρεαλιστικό πλαίσιο, στο πλαίσιο του λογισμικού σε συνδυασμό με το ρεαλιστικό και στο πλαίσιο του λογισμικού σε συνδυασμό με την άλγεβρα.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης δείχνουν πως ο κλασικός διαχωρισμός του πλαισίου από τα δεδομένα παρουσιάζει μόνο μια μερική εικόνα της πολύπλοκης διαδικασίας της αλγεβρικής σκέψης. Κατά την διαδικασία κατασκευής νοημάτων, οι μαθητές συμμετέχουν σε πολλές δραστηριότητες συναφείς με το περιβάλλον του λογισμικού, όπως για παράδειγμα, το να προβάλουν τις αφαιρετικές τους κατασκευές μέσα από ένα φίδι που αναπτύσσεται σε τετράγωνα και χρησιμοποιώντας τες για να υποστηρίξουν τα συμπεράσματά τους, να αναπτύξουν τις νοηματοδοτήσεις τους. Για πρώτη φορά, οι μαθητές αναγνωρίζουν γλωσσολογικά τις μεταβλητές με σαφήνεια. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα οι γενικεύσεις που παρήγαγαν να είναι πολύ πιο εκλεπτυσμένες, καθώς το αλγεβρικό σύμβολο x ήταν ταυτόχρονα σώμα φιδιού, διαδικασία διπλασιασμού κόκκινων τετραγώνων και μήνες. Βλέπουμε λοιπόν ότι το ρεαλιστικό πλαίσιο της δραστηριότητας διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στις επεξηγήσεις των μαθητών, καθώς συγκρίνουν τα αποτελέσματα με τις προηγούμενες γνώσεις και προσδοκίες τους και προσπαθούν να βρουν αιτίες και νόημα για τα φαινόμενα και τα δεδομένα που ερευνούν ώστε να επικυρώσουν τον αλγεβρικό τους τύπο. Πιο συγκεκριμένα, μέσα από την σύγκριση του μοτίβου τους με το μοτίβο μιας άλλης ομάδας οι μαθητές αναγνώρισαν τον διαφορετικό τρόπο ερμηνείας του συμβόλου x που έδωσαν οι ίδιοι και ήταν σε θέση να τον αιτιολογήσουν με εμπιστοσύνη. Χρησιμοποιήσαμε μια μικρογενετική ερμηνευτική ανάλυση για να προσδιορίσουμε, να αναλύσουμε και να συζητήσουμε το ρόλο του πλαισίου στις αναδυόμενες αλγεβρικές αντιλήψεις των μαθητών καθώς ανέπτυξαν τις ιδέες και τις δεξιότητές τους. Αυτή η μελέτη παρέχει ορισμένες αρχικές ενδείξεις ότι οι επεξηγήσεις των μαθητών, όταν επιλύουν ή διερευνούν ένα ρεαλιστικό πρόβλημα, μερικές φορές ενσωματώνονται όχι αποκλειστικά στην αλγεβρική σφαίρα ή στην σφαίρα του πλαισίου αλλά μάλλον σε έναν συνδυασμό των δύο όπου η καθεμιά δεν διακρίνεται εύκολα από την άλλη. Ο συνδυασμός ρεαλιστικού πλαισίου και του λογισμικού φάνηκε να εμπλουτίζει τον τρόπο κατασκευής γνωστικών δομών. Η δυνατότητα πρόσβασης στη δομή των μοτίβων μέσω των προσφερόμενων συμβολικών και εικονικών αναπαραστάσεων του eXpresser φάνηκε να ευνόησε την εννοιολογική εμπλοκή των μαθητών σε αφαιρετικές διαδικασίες για έκφραση σχέσεων γενίκευσης. Συγκεκριμένα, ο ρόλος της μεταβλητής στην γενίκευση ήρθε στην επιφάνεια μέσα από το λογισμικό το οποίο έδινε τυχαίες τιμές στην εικονική μεταβλητή. Το σύμβολο x συνδέθηκε άμεσα από τους μαθητές με την εικονική μεταβλητή και αφορούσε το πλήθος των κόκκινων τετραγώνων σε σχέση με την ηλικία του φιδιού, ενώ οι πολλαπλές και αλληλοσυνδεόμενες αναπαραστάσεις του expresser φάνηκε να περιγράφουν για τους μαθητές μια μαθηματική πραγματικότητα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ben-Zvi, D. (2010). The role of context in the development of students' informal inferential reasoning. In C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the 8th International Conference on Teaching Statistics*. Ljubljana, Slovenia.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32, 1: 9 – 13.

Cole, M. (1996) *Culture in mind*. Cambridge, MA: Harvard Univ. Press.

Dreyfus, T. (2010). Interacting parallel constructions of knowledge in a CAS context. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*(2), 129–149.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 195-222.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1985). *Routes to/roots of algebra*. Walton Hall, Milton Keynes: The Open University Press.

Noss, R., Hoyles, C., Mavrikis, M., Geraniou, E., Gutierrez-Santos, S. & Pearce, D. (2009). Broadening the sense of ‘dynamic’: a microworld to support students’ generalization. *ZDM*, *41*(4), *4*93-503.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257-277.

Radford, L. (2015). Methodological aspects of the theory of objectification. *Perspectivas da Educação Matemática*, 8, 547-567.

Radford, L. (to appear). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5 to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. New York: Springer.

Sullivan, F. (2015). Microgenetic Learning Analytics: A computational approach to research on student learning. *Annual meeting of the American Educational Research Association*, Chicago, IL, April 16 – 20, 2015.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΚΟΙΝΩΝΙΚΗΣ ΔΙΚΤΥΩΣΗΣ EDMODO

Καραμούτσιου Σοφία, Τάτσης Κωνσταντίνος

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

sophia.karamoutsiou@gmail.com, ktatsis@uoi.gr

Η ανάπτυξη δεξιοτήτων κατασκευής προβλημάτων είναι εξίσου σημαντική με την ανάπτυξη δεξιοτήτων επίλυσης. Στην έρευνά μας ζητήσαμε από μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού να κατασκευάσουν προβλήματα Μαθηματικών και να τα σχολιάσουν, κατά τη διάρκεια ενός «εικονικού διαγωνισμού» στην ηλεκτρονική πλατφόρμα του edmodo. Από τα αποτελέσματα της έρευνας προκύπτει πως η χρήση του συγκεκριμένου μέσου κοινωνικής δικτύωσης αποτελεί ιδιαίτερο κίνητρο για την αλληλεπίδραση των μαθητών και την ενασχόλησή τους με δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα προβλήματα που επιλύουν συνήθως οι μαθητές παρέχονται έτοιμα από τα σχολικά εγχειρίδια και άλλα βοηθήματα. Στην καθημερινή ζωή τους όμως, οι μαθητές θα χρειαστεί μόνοι τους να ανακαλύψουν και να κατασκευάσουν τα προβλήματα που στη συνέχεια θα επιλύσουν. Επομένως, η κατασκευή προβλημάτων, και όχι μόνο η επίλυση, αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της μαθηματικής εκπαίδευσης. Διάφορες έρευνες δείχνουν πως ενώ οι μαθητές είναι ικανοί να κατασκευάσουν ενδιαφέροντα μαθηματικά προβλήματα, πολλές φορές δυσκολεύονται ή κατασκευάζουν προβλήματα που δεν περιέχουν επαρκείς μαθηματικές πληροφορίες (π.χ. Silver & Cai, 1996). Επομένως, η ανάπτυξη δραστηριοτήτων κατασκευής προβλημάτων αποτελεί θέμα υψίστης σημασίας, καθώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν είτε ως μαθησιακό εργαλείο είτε ως εργαλείο αξιολόγησης των μαθηματικών γνώσεων των μαθητών, προσφέροντας ιδιαίτερα εφόδια στους μαθητές και ευνοώντας τη σύνδεση άτυπων και σχολικών Μαθηματικών (English, 1998˙ Silver & Cai, 1996˙ Σακονίδης & Δεσλή, 2007).

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Κατά καιρούς πολλοί ερευνητές έχουν προσπαθήσει να αποδώσουν έναν ορισμό στην έννοια της κατασκευής προβλημάτων. Σύμφωνα με τις Stoyanova & Ellerton (1996), κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων θεωρείται η διαδικασία κατά την οποία «οι μαθητές βασιζόμενοι στην μαθηματική τους εμπειρία, κατασκευάζουν προσωπικές αναπαραστάσεις συγκεκριμένων καταστάσεων και τις διατυπώνουν ως σημαντικά μαθηματικά προβλήματα» (σελ. 518). Οι ίδιες μάλιστα (1996) όρισαν τρία πλαίσια κατασκευής προβλημάτων, τα οποία διαφοροποιούνται σύμφωνα με τα χαρακτηριστικά και τη δομή των καταστάσεων. Στο ελεύθερο πλαίσιο το πρόβλημα προκύπτει από σκηνοθετημένες ή πραγματικές καταστάσεις και δεν περιλαμβάνει κανέναν περιορισμό, στο ημι-δομημένο πλαίσιο δίνεται η κατάσταση η οποία πρέπει να εξερευνηθεί για τη διατύπωση του προβλήματος, ενώ στο δομημένο πλαίσιο η διαδικασία κατασκευής προβλημάτων βασίζεται σε έναν συγκεκριμένο τρόπο επίλυσης ή σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα.

Συνήθως οι μαθητές κατασκευάζουν προβλήματα όμοια με αυτά που έχουν συναντήσει και επιλύσει, ενώ φαίνεται να περιορίζονται σε προβλήματα που απαιτούν γρήγορες και απλές απαντήσεις (English, 1998˙ Silver & Cai, 1996). Η English (1998) ανέλυσε προβλήματα που κατασκεύασαν μαθητές Γ΄ Δημοτικού και εκτός των άλλων κατέληξε στο συμπέρασμα πως εν συγκρίσει με τα τυπικά συμβολικά πλαίσια που χρησιμοποιούνται συνήθως, οι πιο άτυπες καταστάσεις, όπως μία φωτογραφία, διευκολύνουν τους μαθητές να κατασκευάσουν ένα ευρύτερο φάσμα προβλημάτων. Κάτι τέτοιο θα μελετήσουμε και στην παρούσα εργασία˙ αν δηλαδή οι μαθητές προτιμούν τα άτυπα πλαίσια κατασκευής προβλημάτων έναντι των τυπικών και αν η επιλογή αυτών των πλαισίων απασχολεί τους μαθητές για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα αποτελώντας κίνητρο για την παραγωγή περισσότερων προβλημάτων.

Ωθώντας τους μαθητές να σχολιάσουν τα προβλήματα που έχουν κατασκευάσει δημιουργούνται αρκετές ευκαιρίες ώστε οι μαθητές να μάθουν από τους συνομηλίκους, καθώς μια λύση μπορεί να διαφέρει από αυτή που περιμένει ο δημιουργός του προβλήματος και αυτό να οδηγήσει σε ανταλλαγή ιδεών (Imaoka, Shimomura & Kanno, 2015). Η δυνατότητα όμως να μοιραστεί κάποιος τη δουλειά του με τους συνομηλίκους του είναι μερικές φορές περιορισμένη στην παραδοσιακή διδασκαλία.

Οι Web 2.0. τεχνολογίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως προέκταση της παραδοσιακής διδασκαλίας για να διευκολύνουν την αλληλεπίδραση αυτή και κατά προέκταση να ενισχύσουν τις διαδικασίες και τα αποτελέσματα της μάθησης μέσα σε ένα συνεργατικό πλαίσιο (Arroyo, 2011). Τα κοινωνικά δίκτυα συγκαταλέγονται σε αυτές τις τεχνολογίες και πλέον αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της κουλτούρας της νέας γενιάς (Won, Evans, Carey & Schnittka 2015). Επομένως μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στη διδασκαλία, καθώς η χρήση τους ενισχύει τα κίνητρα για μάθηση και την αυτονομία των μαθητών (Balasubramanian, Jaykumar & Fukey, 2014) σε ένα περιβάλλον άτυπης μάθησης.

Κατασκευή προβλημάτων και Νέες Τεχνολογίες - Edmodo

Λαμβάνοντας υπόψη τα πλεονεκτήματα και την ενισχυτική επίδραση των Νέων Τεχνολογιών στις ικανότητες κατασκευής και επίλυσης προβλημάτων οι Beal & Cohen (2012) δημιούργησαν το Teach Ourselves (TO), ένα διαδικτυακό, συνεργατικό μαθησιακό περιβάλλον που υποστηρίζει τη δημιουργία εκπαιδευτικού υλικού από μαθητές και τον διαμοιρασμό του με άλλους. Οι μαθητές μπορούσαν να γράφουν, να μοιράζονται, να επιλύουν και να αξιολογούν προβλήματα Μαθηματικών και Φυσικής υπό την επίβλεψη των καθηγητών τους. Το σύστημα αυτό περιελάμβανε και πτυχές των κοινωνικών δικτύων, αφού οι μαθητές μπορούσαν να επιλέξουν αν τους άρεσε ή όχι το πρόβλημα των συμμαθητών τους.

Από τα προηγούμενα προήλθε και η ιδέα μας να ασχοληθούμε με το Edmodo, το οποίο αποτελεί μία δωρεάν και ασφαλή πλατφόρμα μάθησης και δημιουργήθηκε από τους Nick Borg, Jeff O'Hara και Crystal Hutter το 2008. Μοιάζει με το facebook, αλλά είναι πιο ασφαλές, καθώς επιτρέπει αποκλειστικά σε εκπαιδευτικούς να δημιουργήσουν λογαριασμό και να τον διαχειριστούν. Μόνο οι μαθητές τους μπορούν να έχουν πρόσβαση λαμβάνοντας έναν μοναδικό κωδικό. Όπως και τα υπόλοιπα μέσα κοινωνικής δικτύωσης, επιτρέπει την άμεση αλληλεπίδραση με τρίτους σε ένα εικονικό περιβάλλον, γεγονός που το καθιστά χρήσιμο και ευχάριστο μέσο επικοινωνίας (Balasubramanian et al, 2014). Επιπλέον, ο μαθητής εξασκεί ταυτόχρονα ικανότητες επικοινωνίας και κριτικής σκέψης διευκολύνοντας την κοινωνική και ενεργή μάθηση μέσα σε ένα άτυπο και ασφαλές περιβάλλον μάθησης (Holland & Muilenburg, 2011).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Ερευνητικά ερωτήματα

Μελετώντας τη σχετική βιβλιογραφία, συγκεντρώσαμε έξι πλαίσια κατασκευής προβλημάτων προηγούμενων ερευνών και ζητήσαμε από μαθητές της ΣΤ΄ τάξης να κατασκευάσουν τα δικά τους προβλήματα, βασιζόμενοι σε αυτά, και να τα σχολιάσουν. Στόχος ήταν να διερευνήσουμε αν η χρήση του συγκεκριμένου μέσου κοινωνικής δικτύωσης από τους μαθητές και οι γλωσσικές αλληλεπιδράσεις τους σε ένα περιβάλλον άτυπης μάθησης μπορούν να ενισχύσουν την ενασχόλησή τους με δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων. Τα ερευνητικά ερωτήματα που μας απασχόλησαν ήταν τα εξής: α) Η χρήση του edmodo και οι διαδικασίες αξιολόγησης μεταξύ των χρηστών λειτουργούν υποστηρικτικά στην ενασχόληση των μαθητών με την κατασκευή νέων προβλημάτων; β) Ποιο πλαίσιο επιλέγουν οι μαθητές περισσότερο για να κατασκευάσουν τα δικά τους μαθηματικά προβλήματα, εικονικό ή λεκτικό, ελεύθερο, ημι-δομημένο ή δομημένο; γ) Ποιες γλωσσικές ανταλλαγές παρατηρούνται κατά την αλληλεπίδραση των μαθητών στην ηλεκτρονική πλατφόρμα και πώς αυτές επηρεάζουν την επιτυχημένη κατασκευή προβλημάτων; δ) Ποιες είναι οι απόψεις των μαθητών για το edmodo;

Ερευνητικό πλαίσιο

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε 20 μαθητές της ΣΤ΄ τάξης ενός ιδιωτικού σχολείου των Ιωαννίνων. Οι μαθητές δεν είχαν χρησιμοποιήσει προηγουμένως το edmodo, ενώ ορισμένοι από αυτούς ήταν χρήστες του facebook. Η έρευνα διήρκησε δύο εβδομάδες περίπου, όπου επισκεφτήκαμε το σχολείο για 5 διδακτικές ώρες. Οι μαθητές χωρίστηκαν τυχαία σε πέντε ομάδες των τεσσάρων ατόμων. Μέσω της πλατφόρμας δόθηκαν έξι πλαίσια κατασκευής προβλημάτων και ο καθένας έπρεπε να κατασκευάσει τα δικά του προβλήματα Μαθηματικών και να σχολιάσει τα προβλήματα των υπόλοιπων μελών της ομάδας, σε όποιο από τα έξι πλαίσια επιθυμούσε.

Να κατασκευάσεις προβλήματα χρησιμοποιώντας πληροφορίες από την εικόνα. Το μαθηματικό πρόβλημα μπορεί να είναι είτε δύσκολο είτε εύκολο. Πρέπει όμως να είναι γραμμένο σε κατανοητή γλώσσα και να είναι ενδιαφέρον για σένα και τους συμμαθητές σου.

Εικόνα 1: Ημι-δομημένο άτυπο πλαίσιο (παραλλαγή από Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi & Sriraman, 2005)

Για κάθε πρόβλημα που κατασκεύαζαν, συγκέντρωναν ορισμένους πόντους σε έναν «εικονικό διαγωνισμό». Η απόδοση των πόντων γίνονταν βάσει ορισμένων κριτηρίων τα οποία συζητήθηκαν και συμφωνήθηκαν με τους μαθητές πριν την έναρξη της έρευνας (Εικόνα 1). Αν κάποιο από τα προβλήματα δεν περιείχε τις απαραίτητες μαθηματικές πληροφορίες δεν επιβραβεύονταν, παρά μόνο όταν γίνονταν οι απαραίτητες διορθώσεις. Στόχος τους ήταν να συγκεντρώσουν όσο το δυνατόν περισσότερους πόντους για την ανάδειξη του νικητή. Τα δεδομένα προέκυψαν από την ελεγχόμενη παρατήρηση των μαθητών κατά τη διάρκεια των επισκέψεων και από την καταμέτρηση των προβλημάτων που κατασκευάστηκαν, ενώ οι απόψεις των μαθητών για το edmodo και τη συμμετοχή τους στη διαδικασία προέκυψαν από τη συμπλήρωση ερωτηματολογίου, το οποίο βασίστηκε στην έρευνα εξόδου των Beal & Cohen (2012) και περιελάμβανε στην πλειοψηφία του κλειστού τύπου ερωτήσεις, διατακτικής κλίμακας.

Για την ανάλυση των γλωσσικών ανταλλαγών των μαθητών χρησιμοποιήθηκε το εργαλείο “system of negotiation”, το οποίο παρέχει περιγραφή των διαφορετικών κινήσεων των ομιλητών κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασής τους (DeJarnette & González, 2015). Σύμφωνα με το συγκεκριμένο εργαλείο οι κινήσεις των ομιλητών χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, τις *συνοπτικές κινήσεις* (synoptic moves), οι οποίες περιγράφουν τις βασικές και αναμενόμενες κινήσεις του λόγου, όπου ο ομιλητής θα ανταλλάξει αγαθά ή πληροφορίες και τις *δυναμικές κινήσεις* (dynamic moves), οι οποίες περιγράφουν την πολυπλοκότητα ενός διαλόγου. Ο διαχωρισμός των διαφορετικών κινήσεων των ομιλητών γίνεται ανάλογα με τον σκοπό και τη λειτουργία που εξυπηρετεί η εκάστοτε κίνηση. Το πλαίσιο εφαρμογής μας διέφερε από αυτό των DeJarnette & González (2015), οπότε πριν την αξιοποίησή του έγιναν αλλαγές και προσθήκες ώστε να ανταποκρίνεται στις ανάγκες μας. Η λειτουργικότητα της πλατφόρμας και του «εικονικού διαγωνισμού», καθώς και του ερωτηματολογίου ελέγχθηκε από πέντε μεταπτυχιακούς φοιτητές, απόφοιτους Παιδαγωγικών Τμημάτων.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Κατασκευή προβλημάτων

Συνολικά κατασκευάστηκαν 65 προβλήματα Μαθηματικών, πέντε από τα οποία δεν ανήκαν σε κάποιο από τα πλαίσια που δόθηκαν και τέσσερα δεν περιείχαν τις απαραίτητες μαθηματικές πληροφορίες για να επιλυθούν. Οι μαθητές δεν φάνηκε να αντιμετωπίζουν ιδιαίτερο πρόβλημα στη κατασκευή των προβλημάτων και η χρήση του edmodo υπήρξε ιδιαίτερο κίνητρο για την ενασχόλησή τους με αυτές τις δραστηριότητες. Μάλιστα τέσσερις από αυτούς ασχολήθηκαν και εκτός σχολείου με τη κατασκευή προβλημάτων. Κατά τη διάρκεια των επισκέψεών μας οι μαθητές σταμάτησαν να κατασκευάζουν προβλήματα με τον ίδιο ρυθμό. Αυτό συνέβη όμως, γιατί ανακαλύφθηκαν οι επιμέρους δυνατότητες της πλατφόρμας (π.χ. σχόλια, προσωποποίηση avatar, δωρεάν παιχνίδια γνώσεων κ.α.), οι οποίες μονοπώλησαν το ενδιαφέρον τους.

Ορισμένοι μαθητές αξιολόγησαν τα προβλήματα των συμμαθητών τους βασιζόμενοι στα κριτήρια που τους δόθηκαν αλλά οι περισσότεροι δεν ασχολήθηκαν με το να ελέγξουν αν τα προβλήματα των υπόλοιπων μελών της ομάδας μπορούσαν ή όχι να λυθούν.

Πλαίσια κατασκευής προβλημάτων

Οι ομάδες διαφοροποιήθηκαν στην επιλογή των πλαισίων (Πίνακας 1).

Ομάδες	Πλαίσιο κατασκευής προβλημάτων					
	Ελεύθερο άτυπο	Ελεύθερο λεκτικό	Ημι-δομημένο άτυπο	Ημι-δομημένο λεκτικό	Δομημένο άτυπο	Δομημένο λεκτικό
Αλιγάτορες	1	5	2	0	1	2
Βάτραχοι	0	8	3	3	2	3
Ζέβρες	1	6	4	2	0	1
Λεοπαρδάλεις	2	4	2	0	0	1
Παπαγάλοι	1	5	1	0	1	0
Σύνολο	5	28	12	5	4	7

Πίνακας 1: Πλήθος προβλημάτων ανά πλαίσιο κατασκευής

Γλωσσικές ανταλλαγές

Συνολικά εντοπίστηκαν 257 γλωσσικές ανταλλαγές συμπεριλαμβανομένης και της επιλογής «Μου αρέσει» των μαθητών, η οποία αν και αποτελεί μια μη γλωσσική κίνηση θεωρήθηκε απαραίτητο στοιχείο στη διερεύνηση των ερωτημάτων μας. Οι γλωσσικές ανταλλαγές περιλαμβάνουν τόσο τα προβλήματα που κατασκεύασαν οι μαθητές όσο και τα σχόλια που έκαναν, είτε αυτά ήταν σχετικά με τα προβλήματα είτε αφορούσαν κάποια άλλη θεματική (π.χ. πειράγματα μεταξύ των μαθητών). Από την ανάλυση των γλωσσικών ανταλλαγών προκύπτει πως οι μαθητές πραγματοποίησαν σχεδόν όλους τους τύπους των γλωσσικών ανταλλαγών, ενώ κάθε ομάδα εργάστηκε με διαφορετικό τρόπο.

<u>Αλιγάτορες – (37 γλωσσικές ανταλλαγές)</u>

Σε αυτή την ομάδα οι μαθητές αρκέστηκαν στο να κατασκευάζουν προβλήματα. Δεν υπήρξε ιδιαίτερη αλληλεπίδραση μεταξύ των χρηστών πέραν του ότι χρησιμοποιήθηκε συχνά η επιλογή «Μου αρέσει» (13%).

<u>Βάτραχοι – (79 γλωσσικές ανταλλαγές)</u>

Πραγματοποίησαν τις περισσότερες γλωσσικές ανταλλαγές, ενώ παρατηρήθηκε ποικιλία γλωσσικών αλληλεπιδράσεων, οι οποίες περιελάμβαναν τόσο συνοπτικές όσο και δυναμικές κινήσεις.

Πλαίσιο κατασκευής	Ανταλ-λαγή	Σειρά	Ομιλητής	Κίνηση	Κωδικοποίηση
Μαθηματικός διαγωνισμός	14	1	ΚΜΕ	Τα παιδιά ενός σχολείου πήγαν σε έναν μαθηματικό διαγωνισμό […] Πόσο έγραψαν συνολικά τα παιδιά;	<u>K2/pp</u> *(Secondary knower/ problem poser)*
	14	2	ΜΚ	Γράψε πιο καθαρά την ερώτηση	<u>A2</u> *(Secondary actor)*
	14	3	ΚΜΕ	Για μένα λες;	cfrq *(Request for confirmation)*
	14	4	ΜΚ	Ναι!	cf *(Give confirmation)*
	14	5	ΚΜΕ	Τώρα;	<u>K2</u> *(Secondary knower)*

Πίνακας 2: Παράδειγμα κωδικοποίησης από την ομάδα των Βατράχων. Οι υπογραμμισμένες κινήσεις αφορούν τις συνοπτικές κινήσεις του λόγου

Οι μαθητές κατασκεύασαν 18 προβλήματα Μαθηματικών ενώ στη συνέχεια όλα τα μέλη της ομάδας τα επίλυαν. Δύο μέλη της ομάδας ασχολήθηκαν σε καθημερινή βάση με την κατασκευή προβλημάτων, ακόμη και εκτός σχολείου. Τέλος, η συγκεκριμένη ομάδα χρησιμοποίησε στο έπακρο τις κοινωνικές πτυχές της πλατφόρμας και ήταν η νικήτρια του διαγωνισμού.

<u>Ζέβρες – (66 γλωσσικές ανταλλαγές)</u>

Παρατηρήθηκαν αρκετές γλωσσικές ανταλλαγές μεταξύ των μαθητών, αλλά οι περισσότερες από αυτές αφορούσαν θέματα εκτός πλαισίων. Οι μαθητές κατασκεύασαν 14 προβλήματα στο σύνολο, αλλά αντί στη συνέχεια να τα αξιολογούν, συζητούσαν για θέματα που αφορούσαν την εκτός σχολείου καθημερινότητα. Ένας μαθητής αποφάσισε να ασχοληθεί και εκτός σχολείου με την κατασκευή προβλημάτων, αλλά η μη συμμετοχή των υπόλοιπων μελών τον εμπόδισε να συνεχίσει. Επιπλέον, εντοπίστηκαν προβλήματα με ελλιπείς μαθηματικές πληροφορίες, αλλά μόνο ένας μαθητής το έθεσε ως θέμα συζήτησης, το οποίο όμως δεν σχολιάστηκε περισσότερο, ενώ το πρόβλημα δεν επιδιορθώθηκε.

Λεοπαρδάλεις – (28 γλωσσικές ανταλλαγές)

Κατασκεύασαν τα λιγότερα προβλήματα και πραγματοποίησαν τις λιγότερες γλωσσικές ανταλλαγές. Τα προβλήματά τους ήταν ενδιαφέροντα, αλλά οι μαθητές έχασαν γρήγορα το ενδιαφέρον τους και περιορίστηκαν στο να λένε πόσο ωραίο είναι το πρόβλημα που δημιούργησαν οι συμμαθητές τους.

Παπαγάλοι – (47 γλωσσικές ανταλλαγές)

Πραγματοποίησαν αρκετές γλωσσικές ανταλλαγές όλων των τύπων, αν και οι περισσότερες περιελάμβαναν θετικά ή αρνητικά σχόλια για τα προβλήματα των συμμαθητών τους, χωρίς όμως να προτείνουν συγκεκριμένες αλλαγές. Εδώ παρατηρήθηκε και η κατασκευή προβλημάτων εκτός των έξι πλαισίων, γεγονός που οι μαθητές δεν σχολίασαν. Αντίθετα, φάνηκε να τους ενθουσίασε.

Απόψεις μαθητών για το edmodo

Από τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου προκύπτει πως η χρήση του edmodo αποτελεί κίνητρο για την ενασχόληση των μαθητών με τις δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων. Οι ίδιοι δήλωσαν ότι η δυνατότητα επικοινωνίας και αξιολόγησης των προβλημάτων των υπόλοιπων μαθητών αποτέλεσε σημαντικό συστατικό για την κατασκευή περισσότερων προβλημάτων (95%), ενώ η συνεργασία στα μέλη των ομάδων υπερίσχυσε του ανταγωνισμού μεταξύ των ομάδων για την δημιουργία πιο ενδιαφερόντων προβλημάτων (85% έναντι 15%). Οι μαθητές διασκέδαζαν να χρησιμοποιούν το edmodo, ενώ ταυτόχρονα σχολιάστηκε θετικά η δυνατότητα προσωποποίησης avatar και τα παιχνίδια γνώσεων που περιλάμβανε η πλατφόρμα. Τέλος, οι περισσότεροι δήλωσαν ότι θα χρησιμοποιούσαν το edmodo εκτός σχολείου, ιδιαίτερα εάν το χρησιμοποιούσαν και οι φίλοι τους (85%).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως οι μαθητές είναι ικανοί να κατασκευάσουν τα δικά τους μαθηματικά προβλήματα, αφού στην πλειοψηφία τους κατασκεύασαν προβλήματα που περιείχαν όλες τις απαραίτητες μαθηματικές πληροφορίες ώστε να μπορούν να λυθούν. Τα προβλήματα που δημιουργήθηκαν αρχικά ήταν παρόμοια με αυτά που οι μαθητές έχουν συναντήσει στα σχολικά εγχειρίδια (English, 1998˙ Silver & Cai, 1996). Σε αντίθεση με την English (1998), οι μαθητές δεν προτίμησαν τα άτυπα πλαίσια περισσότερο από τα τυπικά, αλλά η επιλογή έγινε βάσει άλλων κριτηρίων. Έδειξαν μεγαλύτερη προτίμηση στο ελεύθερο πλαίσιο έναντι των άλλων δύο, παρόλο που η Stoyanova (1997) υποστηρίζει ότι αυτού του είδους οι δραστηριότητες μπορεί να δυσκολέψουν τους μαθητές κατά την πρώτη τους επαφή με μία τέτοια εργασία. Πέραν αυτών των δεδομένων, δεν παρατηρήθηκε κάποιο συγκεκριμένο μοτίβο, οπότε θα είχε ενδιαφέρον στο μέλλον να εντοπίσουμε τα κριτήρια με τα οποία οι μαθητές επιλέγουν το πλαίσιο στο οποίο θα ανήκει το πρόβλημα που θα κατασκευάσουν, καθώς η γνώση των προτιμήσεων των μαθητών σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο κατασκευής προβλημάτων μπορεί να συμβάλλει στην πιο ορθή ένταξη τέτοιου είδους δραστηριοτήτων στη σχολική τάξη (Stoyanova, 1997).

Η χρήση του edmodo αποτέλεσε ιδιαίτερο κίνητρο για τους μαθητές, οι οποίοι διασκέδαζαν να το χρησιμοποιούν. Με τη συμμετοχή τους στον «εικονικό διαγωνισμό» οι μαθητές δήλωσαν πως κατάφεραν να κατασκευάσουν πιο εύκολα περισσότερα προβλήματα Μαθηματικών ενώ η δυνατότητα αλληλεπίδρασης με τους συμμαθητές τους στο περιβάλλον του edmodo τους βοήθησε να συνεργαστούν καλύτερα και να μοιραστούν τις ιδέες τους (Balasubramanian et al, 2014˙ Won et al., 2015).

Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ομιλητών επηρέασαν την «πρόοδο» των ομάδων, καθώς κάθε ομάδα ακολούθησε το δικό της μοτίβο αλληλεπιδράσεων. Η αξιολόγηση των προβλημάτων μεταξύ των μαθητών συνέβαλε στην ανταλλαγή ιδεών και στην κατασκευή πιο ενδιαφερόντων, επιλύσιμων προβλημάτων (Imaoka et al, 2015). Φαίνεται πως η προσωπικότητα των μαθητών επηρεάζει τις αλληλεπιδράσεις τους με αποτέλεσμα οι μαθητές με τις περισσότερες γλωσσικές ανταλλαγές να έχουν καλύτερες επιδόσεις σε σχέση με εκείνους που απλά κατασκεύαζαν προβλήματα, αλλά δεν αξιολογούσαν τα προβλήματα των υπολοίπων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arroyo, C.G. (2011) On-Line Social Networks: Innovative Ways towards the Boost of Collaborative Language Learning. *ICT for Language Learning (4th ed.).*

Balasubramanian, K., Jaykumar, V., & Fukey, L. N. (2014). A study on “Student preference towards the use of Edmodo as a learning platform to create responsible learning environment”, *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 144,* 416-422.

Beal, C. R., & Cohen, P. R. (2012). Teach ourselves: Technology to support problem posing in the STEM classroom. *Creative Education, 3,* 513-519.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *Zentralbatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, 37, 149-158.

DeJarnette, A. F. & Gonzáles, G. (2015). Positioning during group work on a novel task in Algebra II. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*, 378-422.

Edmodo.com. https://www.edmodo.com/

English, L. D. (1998). Children’s problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education, 29* (1), 83–106.

Holland, C. & Muilenburg, L. (2011). Supporting Student Collaboration: Edmodo in the Classroom. In M. Koehler & P. Mishra (Eds.), *Proceedings of Society for Information Technology & Teacher Education International Conference 2011* (pp. 3232-3236). Chesapeake, VA: Association for the Advancement of Computing in Education.

Imaoka, M., Shimomura, T., & Kanno, E. (2015). Problem posing in the upper grades using computers. In F. M. Singer, N. F. Ellerton & J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing: From research to effective practice* (pp. 257-272). New York: Springer.

Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 521–539.

Stoyanova, E. (1997). Extending and exploring students’ problem solving via problem posing: A study of years 8 and 9 students involved in mathematics challenge and enrichment stages of Euler enrichment program for young Australians. Thesis, Edith Cowan University, Faculty of Education. *For the Degree of Doctor of Philosophy in Education.*

Stoyanova, E., & Ellerton, N. (1996). A Framework for Research into Students' Problem Posing in School Mathematics Recognition of Problem Posing. In P. C. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518–525). Mathematics Education Research Group of Australasia: The University of Melbourne.

Σακονίδης, Χ. & Δεσλή, Δ. (2007). Τυπικά και άτυπα μαθηματικά: χαρακτηριστικά, σχέσεις και αλληλεπιδράσεις στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης. *Εν.Ε.Δι.Μ: Πρακτικά συνεδρίου (Αλεξανδρούπολη 2007)*. Αθήνα: Τυπωθήτω.

Won, S., Evans, M., Carey, C., & Schnittka, C. (2015). Youth appropriation of social media for collaborative and facilitated design-based learning. *Computers in Human Behavior*, 50, *385*-391.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΜΙΑΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ ΜΕ ΤΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ TINKERPLOTS ΣΤΗΝ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Κατσίλλη Μαρία, Φεσάκης Γεώργιος, Γιαννακόπουλος Παύλος

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

psemdt14017@rhodes.aegean.gr, gfesakis@rhodes.aegean.gr, psemdt14007@rhodes.aegean.gr

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μια διδακτική παρέμβαση για την κατανόηση γραφημάτων από μαθητές Γυμνασίου, στην οποία αξιοποιείται το εκπαιδευτικό λογισμικό επεξεργασίας δεδομένων TinkerPlots. Παρουσιάζεται, επίσης, η πειραματική διερεύνηση της επίδρασης της διδακτικής παρέμβασης στην επίδοση των μαθητών. Από τα ερευνητικά ευρήματα φαίνεται η θετική συμβολή της διδακτικής παρέμβασης στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να εντοπίζουν πληροφορίες σε στατιστικά γραφήματα, να αναγνωρίζουν τάσεις και σχέσεις στα δεδομένα αυτών, να τις συγκρίνουν, να κάνουν προβλέψεις και να εξάγουν συμπεράσματα με βάση τα γραφήματα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η γνώση και η μελέτη της Στατιστικής και ειδικότερα η μελέτη των γραφημάτων θεωρούνται σήμερα σημαντική ικανότητα κάθε εγγράμματου πολίτη. Ένα γράφημα μπορεί να επηρεάσει την κοινή γνώμη και τον τρόπο λήψης αποφάσεων των πολιτών, καθιστώντας ευανάγνωστα και εγκυρότερα τα ερευνητικά δεδομένα και πειστικότερες τις ερμηνείες τους. Το γράφημα αποτελεί μία σημαντική διεπιστημονική έννοια που έχει εισχωρήσει και ενσωματωθεί σε όλες σχεδόν τις επιστήμες όπου απαιτείται συλλογή και επεξεργασία δεδομένων. Από την άποψη αυτή, το εκπαιδευτικό τους ενδιαφέρον είναι αυξημένο. Στα Μαθηματικά, έχουν προταθεί αρκετοί ορισμοί για την έννοια γράφημα. Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας ο όρος «γράφημα» ή «γραφική παράσταση» ορίζεται ως *«ένα σύνολο σημείων σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν μια συγκεκριμένη συνήθως συναρτησιακή σχέση»* (Rogers, 1987). Τα στατιστικά διαγράμματα συνήθως συνοδεύονται από α) τον *τίτλο* (title), β) την *κλίμακα* (scale) με τις τιμές των μεγεθών που απεικονίζονται, γ) το *υπόμνημα* (key) που επεξηγεί, τις περισσότερες φορές, τις τιμές της μεταβλητής και δ) την *πηγή* (source) των δεδομένων (Αδαμόπουλος, Δαμιανού & Σβέρκος, 1999).

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι γραφικής παρουσίασης, ανάλογα με το είδος των δεδομένων που έχουμε και τις πληροφορίες που επιθυμούμε να μεταδοθούν. Οι πιο συνηθισμένες μορφές γραφημάτων που ενσωματώνονται στην υποχρεωτική εκπαίδευση είναι τα *εικονογράμματα* (picturegraphs), τα *ραβδογράμματα* (bargraphs), τα *κυκλικά διαγράμματα* ή *πίτες* (piegraphs), τα *γραμμογραφήματα* (linegraphs) και τα *ιστογράμματα* (histograms). Στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, συναντάμε επιπλέον τα *διαγράμματα διασποράς* (scatterdiagrams). Στα σύγχρονα διεθνή πρότυπα για τα Προγράμματα Σπουδών (ΠΣ) εμφανίζονται και νεότερες τεχνικές γραφικής απεικόνισης που περιλαμβάνουν τα *γραμμοδιαγράμματα* (line plots), τα *γραφήματα μίσχου και φύλλου* (stem and leaf plots) και τα *θηκογράμματα* (box plots) (NCTM, 2000). Η ανάπτυξη της ψηφιακής τεχνολογίας έχει φέρει σημαντική πρόοδο στην επεξεργασία και τη γραφική αναπαράσταση των δεδομένων. Το πώς επηρεάζει την εκπαίδευση των Μαθηματικών το σύγχρονο τεχνολογικό περιβάλλον στον τομέα των γραφημάτων είναι ένα επίκαιρο ερώτημα. Στην παρούσα εργασία γίνεται μια σύντομη ανάλυση της υπάρχουσας κατάστασης σχετικά με την αξιοποίηση της ψηφιακής τεχνολογίας στην εκπαίδευση για τα γραφήματα και στη συνέχεια παρουσιάζεται μια προτεινόμενη διδακτική παρέμβαση με βάση το λογισμικό TinkerPlots καθώς και τα αποτελέσματα της πειραματικής εφαρμογής της στην κατανόηση των γραφημάτων από μαθητές Γυμνασίου.

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΕΡΕΥΝΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Γενικά, η κατανόηση των πληροφοριών σε γραπτή ή συμβολική μορφή περιλαμβάνει τρία είδη ικανοτήτων (Wood, 1968) που φαίνεται να σχετίζονται με τη γραφική κατανόηση. Συγκεκριμένα, Μετάφραση (translation), Ερμηνεία (interpretation) και Παρέκταση/Παρεμβολή (extrapolation/interpolation). Η Curcio (1987), έχει προτείνει ένα μοντέλο τριών διακριτών επιπέδων κατανόησης γραφήματος, ανεξάρτητα από τον τύπο του. Τα επίπεδα του μοντέλου το οποίο υιοθετείται στο πλαίσιο της εργασίας είναι:

1^o. Ανάγνωση των δεδομένων (Reading the data): Στο πρώτο επίπεδο κατανόησης απαιτείται η ανάγνωση του γραφήματος «κατά λέξη». Ο αναγνώστης απλά «αντλεί» πληροφορίες που αναφέρονται ρητά στο γράφημα ή πληροφορίες που βρίσκονται στον τίτλο και τις ετικέτες του, κατευθείαν από το γράφημα. Δεν υπάρχει ερμηνεία σε αυτό το επίπεδο. Η ανάγνωση που απαιτεί αυτού του είδους την κατανόηση θεωρείται χαμηλής γνωστικής απαίτησης.

2ο. Ανάγνωση μεταξύ των δεδομένων (Reading between the data): Αυτό το επίπεδο κατανόησης συμπεριλαμβάνει ερμηνεία και ενσωμάτωση των δεδομένων στο γράφημα. Απαιτεί την ικανότητα σύγκρισης ποσοτήτων (π.χ. μεγαλύτερο από, ψηλότερο, κοντύτερο) και τη χρήση πρόσθετων μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων (π.χ. πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση) που επιτρέπουν στον αναγνώστη να συνδυάζει και να ενοποιεί δεδομένα και να αναγνωρίζει τις μαθηματικές σχέσεις που εκφράζονται μέσα στο γράφημα. Κατά τους Pearson & Johnson (1978) η ανάγνωση και ερμηνεία μεταξύ των δεδομένων απαιτεί «την εξαγωγή τουλάχιστον ενός βήματος, λογικού συμπεράσματος, απαραίτητου να ληφθεί στην πορεία από το ερώτημα στην απάντηση, όπου και τα δύο (ερώτημα και απάντηση) προέρχονται από το κείμενο».

3ο. Ανάγνωση πέραν των δεδομένων (Reading beyond the data): Στο τρίτο επίπεδο κατανόησης ο αναγνώστης αντλώντας από τα υπάρχοντα γνωστικά σχήματα (π.χ. γνώση πλαισίου, γνώση στη μνήμη) καλείτε να διατυπώνει προβλέψεις και να εξάγει συμπεράσματα από τα δεδομένα για πληροφορίες που αναφέρονται άμεσα ή έμμεσα στο γράφημα. Ενώ στο δεύτερο επίπεδο απαιτεί από τον αναγνώστη να εξάγει ένα συμπέρασμα, που βασίζεται στα δεδομένα που παρουσιάζονται στο γράφημα, η ανάγνωση πέρα από τα δεδομένα, απαιτεί το συμπέρασμα να εξάγεται στη βάση των πληροφοριών που βρίσκονται στο κεφάλι του αναγνώστη.

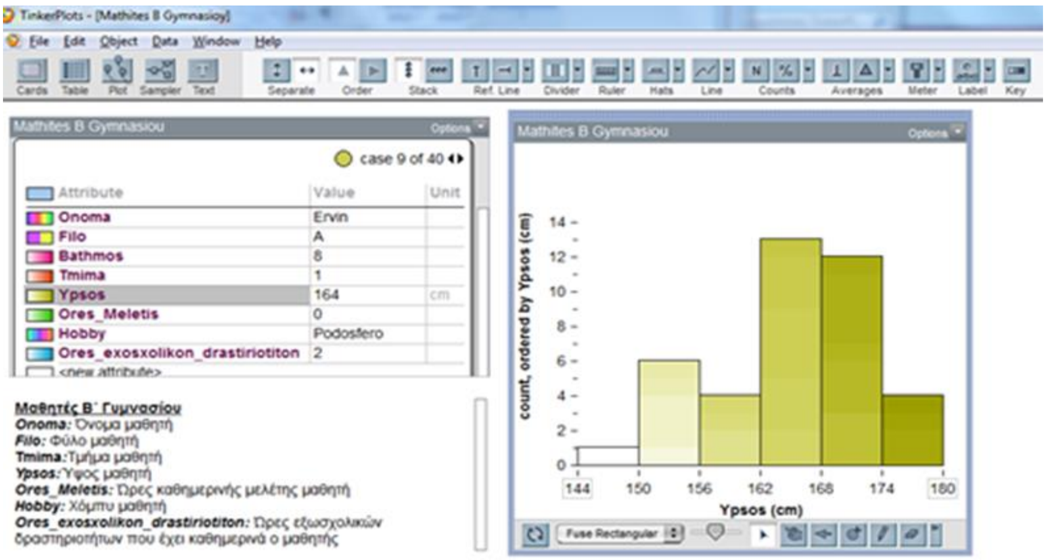
Έρευνες έχουν δείξει ότι οι μαθητές εμφανίζουν δυσκολίες όταν ερμηνεύουν γραφήματα (Janvier, 1998; Shah, Freedman & Vekiri, 2005). Ειδικότερα, οι μαθητές δεν έχουν ιδιαίτερα αναπτυγμένες τις ικανότητες να εντοπίζουν πληροφορίες, να αναγνωρίζουν και να συγκρίνουν τάσεις σε μέρη των δεδομένων ενός γραφήματος (Carswell, 1992). Οι Friel, Curcio & Bright (2001), παρουσιάζουν μια μελέτη σχετικά με τους κρίσιμους παράγοντες που επηρεάζουν την κατανόηση γραφημάτων και τις εκπαιδευτικές τους επιπτώσεις. Ο Μιχάλης (2006) διερεύνησε τις αντιλήψεις των μαθητών των τριών τελευταίων τάξεων του Δημοτικού για τα γραφήματα καθώς και τα επίπεδα κατανόησης τους. Από την έρευνά του προκύπτει πως η πλειονότητα των μαθητών, κυρίως της Στ΄ αλλά και της Ε΄, χωρίς προηγούμενη ενασχόληση με γραφικές απεικονίσεις, φαίνεται να μπορεί να ερμηνεύει και να κατανοεί ποσοτικές πληροφορίες που αναπαρίστανται σε γραφικές απεικονίσεις δεδομένων σε ικανοποιητικό επίπεδο.

Οι πρόσφατες εξελίξεις στην ψηφιακή τεχνολογία προσφέρουν στους εκπαιδευτικούς εργαλεία, ειδικά σχεδιασμένα για να διευκολύνουν την απεικόνιση των στατιστικών εννοιών, ενώ, ταυτόχρονα παρέχουν ένα μέσο για το σχεδιασμό δραστηριοτήτων που ενσωματώνουν αυθεντικά κομμάτια της γνώσης, επιτρέποντας στους μαθητές να κάνουν άμεσες συνδέσεις μεταξύ της φυσικής εμπειρίας και των επίσημων αναπαραστάσεων (Paparistodemou, Noss & Pratt, 2008 όπως αναφέρεται στο Fessakis, 2012). Για παράδειγμα, οι Paparistodemou & Meletiou-Mavrotheris (2010), για να διερευνήσουν τρόπους με τους οποίους τα θεμέλια της αιτιολογικής σκέψης μπορεί να τεθούν σε πολύ μικρή ηλικία, χρησιμοποίησαν μια ομάδα μαθητών της Γ΄ Δημοτικού, η οποία, διατύπωσε και αξιολόγησε συμπεράσματα με βάση δεδομένα. Οι μαθητές, με τη βοήθεια του λογισμικού TinkerPlots, εισήχθησαν σε άτυπη συμπερασματολογία που βασίστηκε στην ανάγνωση, τη σύγκριση και τη συλλογιστική από την κατανομή των δεδομένων. Οι Allmond & Makar (2014) μελέτησαν πώς μπορεί η τεχνολογία σε μια Στατιστική έρευνα να βοηθήσει τους μαθητές να μεταβαίνουν από τα γραφήματα «καπέλο» (hat plots) στα θηκογράμματα παρέχοντας ουσιαστικά ποσοτικά στοιχεία προκειμένου να απαντήσουν σε στατιστικά ερωτήματα. Από την έρευνά τους βρέθηκε ότι η χρήση της τεχνολογίας επέτρεψε στους μαθητές να λειτουργούν με ευελιξία και να απεικονίζουν με σαφήνεια τις κατανομές ώστε να επικεντρώνονται στην κατανόηση των δεδομένων παρά στη μηχανική της κατασκευής και ανάλυσης αυτών.

Παρά τον σημαντικό ρόλο που παίζει η ερμηνεία και κατανόηση γραφημάτων και τη διαφαινόμενη βελτίωση που μπορούν να φέρουν τα ψηφιακά εργαλεία, υπάρχουν λίγες σχετικά έρευνες που να εστιάζουν στην ικανότητα κατανόησης αυτών με σύγχρονα λογισμικά. Κάποιες έρευνες, έχουν πραγματοποιηθεί στο δημοτικό ή το νηπιαγωγείο (Fessakis, 2012). Από αυτές προκύπτει ότι η χρήση τέτοιου λογισμικού, σε συνδυασμό με κατάλληλα προγράμματα σπουδών και εκπαιδευτικές παρεμβάσεις, μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν μια ισχυρή εννοιολογική βάση πάνω στην οποία θα οικοδομήσουν μια πιο επίσημη μελέτη της Στατιστικής αργότερα. Ειδικότερα, η έρευνα με χρήση λογισμικού και διερευνητική προσέγγιση είναι περιορισμένη. Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, περισσότερο. Εκτός του λογισμικού TinkerPlots υπάρχουν και άλλα ισχυρά και δημοφιλή ψηφιακά εκπαιδευτικά περιβάλλοντα για επεξεργασία δεδομένων και γραφήματα όπως το Fathom. Τα λογισμικά αυτά επιτρέπουν την επεξεργασία μεγάλου όγκου δεδομένων, διαθέτουν έτοιμες συλλογές με αυθεντικά δεδομένα και ενδιαφέρον εκπαιδευτικό, επιτρέπουν την εύκολη παραγωγή δυναμικών γραφημάτων και την αλλαγή του είδους και των παραμέτρων τους. Η σύγκριση των γραφημάτων είναι ευκολότερη και ο υπολογισμός στατιστικών παραμέτρων αυτοματοποιημένος ώστε οι μαθητές να απελευθερώνουν χρόνο από την κατασκευή των γραφημάτων για να τον αξιοποιήσουν στη διερεύνηση σχέσεων, την ερμηνεία, την επίλυση προβλημάτων και την κατανόηση των γραφημάτων και των στατιστικών μέτρων. Αυτά τα χαρακτηριστικά είναι τα πλεονεκτήματα της ψηφιακής τεχνολογίας για την μάθηση των γραφημάτων σε σχέση με την συμβατική τεχνολογία του χαρτιού. Στην παρούσα εργασία επιλέχθηκε να μελετηθεί το πρώτο επειδή φαίνεται καταλληλότερο για τη βαθμίδα του Γυμνασίου.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Στόχος της έρευνας είναι η διερεύνηση της συμβολής μιας διδακτικής παρέμβασης, με τη χρήση Τ.Π.Ε., στην ανάπτυξη της ικανότητας 20 μαθητών της Β΄ Γυμνασίου να ερμηνεύουν γραφικές απεικονίσεις, ως προς τα 3 επίπεδα κατανόησης και ερμηνείας γραφημάτων. Η ερευνητική μεθοδολογία που εφαρμόστηκε είναι η μελέτη περίπτωσης (Cohen et al, 2000). Για τη συλλογή ερευνητικών δεδομένων χρησιμοποιήθηκε ένα ερωτηματολόγιο το οποίο δόθηκε πριν και μετά από τη διδακτική παρέμβαση και δύο φύλλα εργασίας με χρήση του λογισμικού TinkerPlots (Konold & Miller, 2005).



Εικόνα 1: Στιγμιότυπο από τη Δραστηριότητα 3 της 2ης φάσης της διδακτικής διαδικασίας

Περιγραφή της διδακτικής παρέμβασης

Σε ότι αφορά στον τρόπο οργάνωσης της διδακτικής διαδικασίας, χωρίστηκε σε τρεις διαδοχικές φάσεις. Καθεμία διήρκεσε περίπου μια διδακτική ώρα. Στην 1η φάση έγινε μια εισαγωγή των μαθητών στη χρήση του λογισμικού TinkerPlots με προβολή ενός βίντεο-οδηγού κατασκευής και ερμηνείας διαφόρων τύπων γραφημάτων με το λογισμικό. Στη συνέχεια οι μαθητές, σε ομάδες, πειραματίστηκαν με το λογισμικό ώστε να εξοικειωθούν και να αποκτήσουν ευχέρεια στη χρήση του χρησιμοποιώντας δεδομένα από πρότυπες δραστηριότητες του λογισμικού. Στη 2η φάση δόθηκε στους μαθητές το φύλλο εργασίας 1 με δραστηριότητες κατασκευής γραφημάτων για πραγματικά δεδομένα που αφορούσαν στους ίδιους τους μαθητές. Με το λογισμικό οι χρήστες για τις ίδιες μεταβλητές κλήθηκαν να σχεδιάσουν περισσότερα από ένα, είδη γραφημάτων, που τις απεικόνιζαν αποτελεσματικά. Παράλληλα, μέσω των γραφημάτων, οι μαθητές καλούνταν να απαντήσουν σε ερωτήσεις που αντιστοιχούσαν στα 3 επίπεδα κατανόησης. Στην 3η φάση δόθηκε στους μαθητές το φύλλο εργασίας 2. Οι μαθητές κλήθηκαν να ανοίξουν ένα αρχείο με το λογισμό TinkerPlots, το οποίο περιλάμβανε δεδομένα για τους χρόνους, τα ύψη ή τις αποστάσεις που έκαναν οι αθλητές/αθλήτριες που κέρδισαν χρυσό μετάλλιο στα βασικότερα αγωνίσματα του στίβου στους Ολυμπιακούς Αγώνες από το 1896 έως το 2008. Οι δραστηριότητες της 3η φάσης ήταν παρόμοιες με αυτές της 2ης με τη διαφορά ότι διαπραγματεύονταν διαφορετικά είδη γραφημάτων. Όλες οι δραστηριότητες ήταν ατομικές και υλοποιήθηκαν με τη βοήθεια δύο φύλλων εργασίας, στο εργαστήριο πληροφορικής του σχολείου. Τα φύλλα εργασίας της παρέμβασης καθώς και το ερωτηματολόγιο είναι διαθέσιμα στο φάκελο: https://goo.gl/nLh2Hy. Με τη χρήση του λογισμικού οι μαθητές εξοικονόμησαν χρόνο από την κατασκευή των γραφημάτων αξιοποιώντας τον στη μελέτη εναλλακτικών γραφημάτων για τα ίδια δεδομένα και στην απάντηση ερωτήσεων 2ου και 3ου επιπέδου κατανόησης γραφημάτων.

Εργαλεία συλλογής ερευνητικών δεδομένων

Εκτός από την παρατήρηση και τις σημειώσεις της εκπαιδευτικού-ερευνήτριας, χρησιμοποιήθηκε ερωτηματολόγιο για την εκτίμηση του επιπέδου κατανόησης των γραφημάτων από τους μαθητές, πριν και μετά την παρέμβαση. Το ερωτηματολόγιο περιελάμβανε δέκα (10) είδη γραφικών απεικονίσεων και ακολούθησε το πνεύμα του ερωτηματολογίου που δόθηκε σε μαθητές δημοτικού σχολείου από τον Μιχάλη (2006), ο οποίος, με τη σειρά του, επηρεάστηκε από παρόμοιες έρευνες (Curcio, 1987; Watson & Moritz, 2001). Κάποια από τα είδη γραφημάτων που χρησιμοποιήθηκαν υιοθετήθηκαν από την έρευνα της Curcio (1987) και του Μιχάλη (2006), κάποια άλλα πάρθηκαν από τις προτεινόμενες δραστηριότητες του Α.Π.Σ. της Κύπρου (2010), ενώ σε κάποια άλλα χρησιμοποιήθηκαν γραφήματα από το σχολικό εγχειρίδιο της Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης & Ρεκούμης, 2007). Για την παρούσα εργασία συμπεριλαμβάνεται επιπλέον και το διάγραμμα διασποράς. Για κάθε γραφική απεικόνιση χρησιμοποιήθηκαν έξι ερωτήματα που αντιστοιχούν στα τρία επίπεδα ερμηνείας και κατανόησης γραφημάτων, δύο ερωτήματα για κάθε επίπεδο. Τα ερωτήματα που αφορούσαν στο 1ο επίπεδο ήταν συνολικά 18, στο 2ο ήταν 26 και στο 3ο ήταν 23. Μέχρι την εφαρμογή της διδακτικής παρέμβασης, η μόνη εμπειρία των μαθητών με τα στατιστικά γραφήματα, ήταν η διδασκαλία κατασκευής κάποιων ειδών γραφήματος (ραβδόγραμμα, πίτα) με τη βοήθεια του Excel, στο μάθημα της Πληροφορικής.

Το ερευνητικό ερώτημα έχει ως εξής: *Πώς επηρεάζεται η επίδοση των μαθητών με τη χρήση του λογισμικού TinkerPlots 2 στη διδασκαλία γραφημάτων στο 1ο επίπεδο (Reading the Data) στο 2ο επίπεδο (Reading Between the Data) και στο 3ο επίπεδο (Reading Beyond the Data);*

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ο τρόπος διδασκαλίας των γραφημάτων με τη χρήση του TinkerPlots ενεργοποίησε τους μαθητές αυξάνοντάς τους τα κίνητρα.

		pre-test			post-test		
Επίπεδο	**max**	**Μ.Τ**	**Τ.Α**	**f%**	**Μ.Τ**	**Τ.Α**	**f%**
1	18	15,40	2,28	85,56	15,55	1,82	86,39
2	26	19,20	3,86	73,85	21,65	2,60	83,27
3	23	12,20	3,24	53,04	14,25	4,39	61,96
ΣΥΝΟΛΟ				69,85			76,79

Πίνακας 1: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα περιγραφικής στατιστικής για την επίδοση ανά επίπεδο στο pre και post-test

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα της επίδοσης των μαθητών/τριών ως προς τα τρία επίπεδα κατανόησης και ερμηνείας γραφημάτων, όπως αυτή αξιολογήθηκε στην 1η Ποσοτική Μέτρηση (pre-test) και τη 2η Ποσοτική Μέτρηση (post-test), σύμφωνα με τα στοιχεία της περιγραφικής στατιστικής: μέση τιμή, τυπική απόκλιση και μέγιστη τιμή.

Επίπεδο 1: Εντοπισμός πληροφοριών από τα δεδομένα ενός γραφήματος.

Οι μαθητές παρουσίασαν αύξηση στην επίδοση ως προς τα ερωτήματα εντοπισμού πληροφοριών σε ένα στατιστικό γράφημα (86,39% των μαθητών ήταν ικανοί να εντοπίσουν πληροφορίες από ένα γράφημα μετά την παρέμβαση έναντι 85,14% που ήταν πριν) (Πίνακας 1 γραμμή 1η). Ο έλεγχος με το μη παραμετρικό κριτήριο του Wilcoxon για εξαρτημένα δείγματα δεν έδειξε στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση (Z=-0.371,

$p=0.711>0.05$) στην ήδη υψηλή επίδοση ανάμεσα στο pre-test και στο post-test. Παρόμοια αποτελέσματα βρήκε και ο Μιχάλης (2006).

Επίπεδο 2: Αναγνώριση τάσεων και σχέσεων από τα δεδομένα ενός γραφήματος.

Οι μαθητές παρουσίασαν αύξηση στην επίδοση ως προς τα ερωτήματα αναγνώρισης τάσεων και σχέσεων στα δεδομένα ενός στατιστικού γραφήματος (83,27% των μαθητών ήταν ικανοί να αναγνωρίσουν σωστά τάσεις και σχέσεις στα δεδομένα ενός γραφήματος μετά την παρέμβαση έναντι 73,66% που ήταν πριν) (Πίνακας 1, γραμμή 2η). Με τη χρήση του μη παραμετρικού κριτηρίου του Wilcoxon για εξαρτημένα δείγματα προέκυψε στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση ($Z=-2.892$, $p=0.004<0.05$).

Επίπεδο 3: Σύγκριση τάσεων και ανάλυση σχέσεων στα δεδομένα ενός γραφήματος, εξαγωγή συμπερασμάτων ή διατύπωση προβλέψεων.

Οι μαθητές παρουσίασαν αύξηση στην επίδοση ως προς τα ερωτήματα της σύγκρισης τάσεων που εκφράζονται στα δεδομένα ενός (στατιστικού) γραφήματος, της εξαγωγής συμπερασμάτων από τα δεδομένα αυτά ή της πρόβλεψης (61,96% των μαθητών ήταν ικανοί να αναγνωρίσουν σωστά τάσεις και σχέσεις σε ένα γράφημα μετά την παρέμβαση έναντι 50,22% που ήταν πριν) (Πίνακας 1, γρ. 3η). Με τη χρήση του παραμετρικού κριτηρίου t-test για συσχετιζόμενα δείγματα προέκυψε και εδώ στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση ($t_{2\text{-tailed}}(19)=2.428$, $df=19$, $p=0.025<0.05$, $d=0.54$).

Άρα, η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να ερμηνεύουν γραφήματα, με τη χρήση ΤΠΕ, είναι εφικτή. Ειδικότερα, υπάρχει σημαντική βελτίωση στις ικανότητες των μαθητών να αναγνωρίζουν και να συγκρίνουν τάσεις στα δεδομένα ενός γραφήματος.

ΣΥΝΟΨΗ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Λόγω του μεγάλου όγκου δεδομένων γύρω μας έχει αυξηθεί και η χρήση γραφημάτων για τη μετάδοση πληροφοριών. Οι μαθητές και αυριανοί πολίτες, είναι απαραίτητο να μπορούν να κατανοούν γραφικές απεικονίσεις και να τις ερμηνεύουν ώστε να παίρνουν και τις κατάλληλες αποφάσεις. Είναι επομένως, αναγκαία και η εκπαίδευσή τους στην κατανόηση και την κατασκευή γραφημάτων σε ψηφιακή μορφή. Παρά το σημαντικό ρόλο που διαδραματίζει η ερμηνεία γραφημάτων σε όλες τις καταστάσεις της καθημερινής ζωής, είναι περιορισμένη η έρευνα που μελετά την επίδραση διδασκαλιών στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να τα ερμηνεύουν.

Από την παρούσα έρευνα φάνηκε, ότι, παρά τη μικρή της διάρκεια, η προτεινόμενη διδακτική παρέμβαση που αξιοποιεί το ψηφιακό μαθησιακό περιβάλλον TinkerPlots κατάφερε να αυξήσει το ποσοστό των μαθητών του δείγματος που πέτυχε να συγκρίνει με σωστό τρόπο τις τάσεις. Μάλιστα, προέκυψε ότι υπάρχει σημαντική βελτίωση στις ικανότητες των μαθητών να αναγνωρίζουν τάσεις και να συγκρίνουν τάσεις στα δεδομένα ενός γραφήματος. Όσο ανεβαίνει το επίπεδο τόσο μειώνονται τα ποσοστά επίδοσης. Ανάλογα συμπεράσματα προκύπτουν και από άλλες έρευνες (Μιχάλης, 2006; Paparistodemou & Meletiou-Mavrotheris, 2010).

Οι περιορισμοί της έρευνας που θα πρέπει να αναφερθούν είναι η ολιγομελής ομάδα (20 άτομα) από ένα μόνο σχολείο της πόλης της Ρόδου, ο περιορισμένος χρόνος που είχαν στη διάθεσή τους οι μαθητές προκειμένου να απαντήσουν στα ερωτηματολόγια και η μικρής διάρκειας παρέμβαση (3 διδακτικές ώρες).Σε μελλοντική έρευνα θα μπορούσε με το ίδιο ερωτηματολόγιο να διερευνηθεί ποιο είναι το επίπεδο ικανότητας των μαθητών να επιλέγουν το κατάλληλο γράφημα ή ποιες είναι οι απόψεις ή οι στάσεις των μαθητών για τη διδασκαλία γραφημάτων με τη βοήθεια των Τ.Π.Ε.. Ακόμα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια ομάδα ελέγχου ώστε να γίνουν συγκριτικές μελέτες. Τέλος, διαφαίνεται η ανάγκη για ολοκληρωμένη διεπιστημονική προσέγγιση του ζητήματος της εκπαίδευσης στην επιστήμη των δεδομένων τα Μαθηματικά και τη Στατιστική.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Allmond, S., & Makar, K. (2014). From hat plots to box plots in tinkerplots: supporting students to write conclusions which account for variability in data. In *ICOTS9: 9th International Conference on Teaching Statistics 2014* (pp. 1-6). International Association for Statistical Education.

Carswell, C.M. (1992). Choosing specifiers: An evaluation of the basic tasks model of graphical perception. *Human Factors, 34,* 535-554.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2000). *Research Methods in Education.* 5th Ed, London: Routledge Falmer.

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of Mathematical Relationships Expressed in Graphs. *Journal for Research in Mathematics Education,18*(5), 382-393.

Fessakis, G. (2012). ICT enhanced Data and Graphs comprehension activities in the kindergarten. Preparing the citizens of modern democracies. *Proceedings of the CIEAM64: Mathematics Education* *and Democracy: learning and teaching practices Conference*, Rhodes, Greece, 23-27 July 2012.

Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education*, 124-158.

Janvier, C. (1998). The notion of chronicle as an epistemological obstacle to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 79-103.

Konold, C., & Miller, C. (2005). TinkerPlots: Dynamic Data Exploration. Statistics software for middle school curricula (software).

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics. Reston: Va, NCTM.*

Paparistodemou, E., & Meletiou-Mavrotheris, M. (2010). Engaging young children in informal statistical inference. In *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics, Ljubljana, Slovenia. Voorburg, the Netherlands: ISI*.

Pearson, D., & Johnson, D. (1978). *Teaching Reading Comprehension.* New York: Holt, Rinehart and Winston.

Rogers, H. (1987). *Theory of Recursive Functions and Effective Computation*. MIT Press. (p. 1–2).

Shah, P., Freedman, E., & Vekiri, I. (2005). The comprehension of quantitative information in graphical displays. In P. Shah & A. Miyake (Eds.), *The Cambridge handbook of visuospatial thinking* (pp. 426–476). New York: Cambridge University Press.

Watson, J. M., & Moritz, J. B. (2001). Development of reasoning associated with pictographs: Representing, interpreting, and predicting. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 47-81.

Wood, R. (1968). Objectives in the teaching of mathematics. *Educational Research, 10*, 83-98.

Αδαμόπουλος, Λ., Δαμιανού, Χ., & Σβέρκος, Α. (1999). *Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γ΄ Ενιαίου Λυκείου.* Πάτρα: Ινστιτούτο Τεχνολογίας και Εκδόσεων «Διόφαντος».

Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών (2010). Κύπρος: Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού-Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2007). *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Μιχάλης, Ι. (2006). *Το Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της Στατιστικής στο Δημοτικό σχολείο και οι αντιλήψεις – γνώση, ερμηνεία και κατανόηση – των μαθητών / τριών των τελευταίων τάξεων για τις γραφικές απεικονίσεις των δεδομένων.* Διδακτορική Διατριβή, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

ΕΠΙΠΕΔΑ ΝΟΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΩΣ ΣΥΜΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΜΑΘΗΣΙΑΚΩΝ ΤΡΟΧΙΩΝ

Καφετζόπουλος Γεώργιος – Ιγνάτιος, Ψυχάρης Γιώργος

Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

gkafetzo@math.uoa.gr, gpsych@math.uoa.gr

Πρόσφατες έρευνες δίνουν έμφαση στη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής. Στόχος του άρθρου είναι η διερεύνηση σύνδεσης δύο συμμεταβαλλόμενων μεγεθών από μαθητές Β΄ Λυκείου στο πλαίσιο της μοντελοποίησης ρεαλιστικών προβλημάτων. Με τη χρήση των μαθησιακών τροχιών προσδιορίζονται τα επίπεδα ανάπτυξης της συνάρτησης ως συμμεταβολής που προέκυψαν κατά την εμπλοκή των μαθητών με μία σειρά από δραστηριότητες μοντελοποίησης στο λογισμικό Casyopée.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήσαμε το λογισμικό Casyopée για να μελετήσουμε τις διαδικασίες νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής από μαθητές Β΄ Λυκείου. Μας ενδιέφερε ο εντοπισμός των επιπέδων νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής όταν οι μαθητές εμπλέκονται σε ρεαλιστικά προβλήματα μοντελοποίησης που περιλαμβάνουν το χειρισμό συμμεταβαλλόμενων μεγεθών στο γεωμετρικό πλαίσιο, τη διερεύνηση των μεταξύ τους σχέσεων και τη μετάβαση στο αλγεβρικό πλαίσιο για τη μελέτη των αντίστοιχων συναρτήσεων.

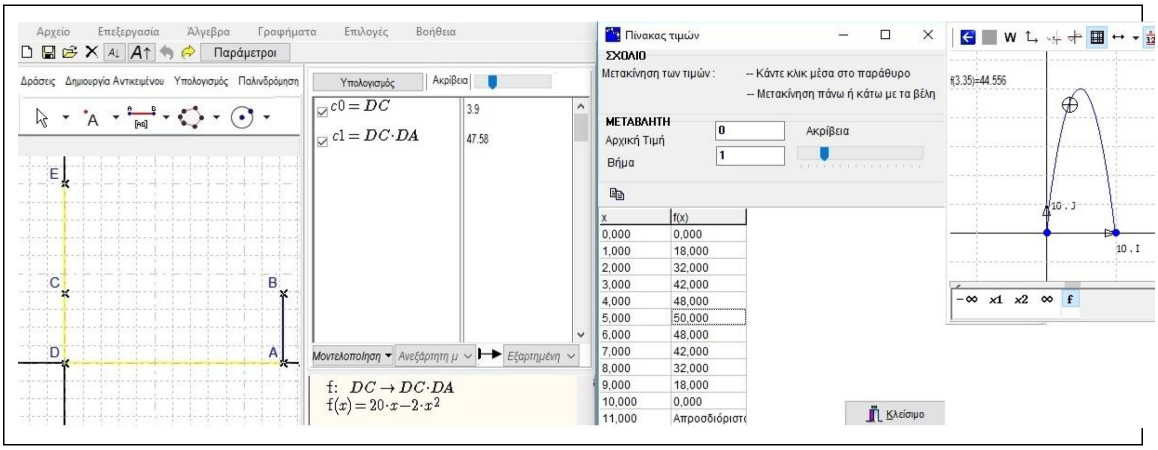
Η συνάρτηση κατέχει κυρίαρχο ρόλο στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και προσεγγίζεται με δύο τρόπους: ως αντιστοιχία δύο μεταβλητών και ως συμμεταβολή, όπου μεταβάλλοντας τις τιμές της μίας μεταβλητής μεταβάλλονται οι τιμές της άλλης (Carlson et al., 2002). Η προσέγγιση της συμμεταβολής συνδέεται στην έννοια του ρυθμού μεταβολής και αναδεικνύεται ως ουσιώδης για την κατανόηση θεμελιωδών εννοιών των προχωρημένων μαθηματικών. Οι Carlson et al. (2002) μελέτησαν την ανάπτυξη της σκέψης φοιτητών σχετικά με τη συμμεταβολή ποσοτήτων σε δυναμικές καταστάσεις όπως το γέμισμα φιάλης με νερό. Τα ερευνητικά τους αποτελέσματα οδήγησαν στην διαμόρφωση ενός πλαισίου πέντε επιπέδων συμμεταβολής που περιγράφηκαν με βάση τις αντίστοιχες νοητικές διεργασίες: *Εξάρτηση* (παρατήρηση των αλλαγών στις δύο μεταβλητές), *Κατεύθυνση μεταβολής* (συσχέτιση της μεταβολής μίας μεταβλητής - αύξηση ή μείωση – με αλλαγές της άλλης), *Ποσοτική συσχέτιση* (συσχέτιση του ποσού της αλλαγής μίας μεταβλητής με αλλαγές της άλλης), *Μέσος ρυθμός* (συσχέτιση του μέσου ρυθμού μεταβολής με ομοιόμορφες αυξήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής) και *Στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής* (συσχέτιση του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής με συνεχείς αυξήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής). Επομένως, η συμμεταβολή διασυνδέει τις συναρτησιακές σχέσεις με τον ρυθμό μεταβολής και άρα, η αναζήτηση πεδίων νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής αποτελεί κρίσιμη παράμετρο στη μελέτη της εξέλιξης της συναρτησιακής σκέψης των μαθητών και των φοιτητών.

Οι δραστηριότητες μοντελοποίησης με ψηφιακά εργαλεία έχουν υποδειχτεί ως πεδίο ευκαιριών για την εμπλοκή των μαθητών με τη συναρτησιακή σκέψη και κατ' επέκταση για τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής (Lagrange & Psycharis, 2014; Psycharis, 2015). Ο Lagrange (2014) περιέγραψε τη διαδικασία μοντελοποίησης ενός προβλήματος στο ψηφιακό περιβάλλον Casyopée μέσω του «κύκλου μοντελοποίησης», ο οποίος περιλαμβάνει τέσσερα πεδία: (α) ένα φυσικό αντικείμενο (π.χ. χαρτί), το οποίο επιτρέπει στους μαθητές να πειραματιστούν εμπειρικά με εξαρτήσεις ποσοτήτων (π.χ. μήκος πλευράς και εμβαδόν ορθογωνίου), (β) το δυναμικό σχήμα που προκύπτει από τη μοντελοποίηση των εξαρτήσεων σε ένα ψηφιακό εργαλείο (π.χ. ένα δυναμικό ορθογώνιο στο παράθυρο Δυναμικής Γεωμετρίας), (γ) τα μεγέθη (π.χ. πλευρά - επιφάνεια) ανεξάρτητα από τις μονάδες μέτρησης και (δ) τις αλγεβρικές συναρτήσεις που απαντούν στο πρόβλημα. Σε μια τέτοια προσέγγιση, η μετάβαση των μαθητών από τον πειραματισμό με το φυσικό αντικείμενο (ποσότητες) προς την έννοια της συνάρτησης (μεταβλητές) διαμεσολαβείται από την εργασία με τα συμμεταβαλλόμενα μεγέθη και τις μετρήσεις, μέσω της χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων όπως αλγεβρικών τύπων, γραφικών παραστάσεων και πινάκων (Lagrange, 2014). Στην παρούσα έρευνα, χρησιμοποιούμε ρεαλιστικά προβλήματα και ειδικά σχεδιασμένα ψηφιακά εργαλεία για τον σχεδιασμό δραστηριοτήτων μοντελοποίησης ώστε να ενθαρρύνουμε τις μεταβάσεις των μαθητών στα πεδία του κύκλου μοντελοποίησης.

Προκειμένου να περιγράψουμε την εξέλιξη της νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής από τους μαθητές επιλέγουμε τη χρήση των μαθησιακών τροχιών (learning trajectories, Clements & Sarama, 2009). Μια μαθησιακή τροχιά περιλαμβάνει τρία στοιχεία: (α) μαθηματικούς στόχους, (β) εκπαιδευτικές δραστηριότητες για την επίτευξη των στόχων και (γ) περιγραφή της ανάπτυξης της σκέψης των μαθητών καθώς εμπλέκονται με τις δραστηριότητες. Οι τροχιές ορίζουν επίπεδα νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής από απλές σε πιο σύνθετες μορφές. Ωστόσο, τα επίπεδα αυτά δεν υποδεικνύουν μια ακολουθία σταδίων από τα οποία διέρχονται με τον ίδιο τρόπο όλοι οι μαθητές. Οι μαθητές μπορούν να μεταβαίνουν σε διαφορετικά επίπεδα και προς τις δύο κατευθύνσεις στο πλαίσιο μιας δραστηριότητας ανάλογα με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν (Clements & Sarama, 2014). Στην παρούσα έρευνα, θεωρήσαμε τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής σε κάθε επίπεδο αλλά και κατά τις μεταβάσεις μεταξύ των επιπέδων ως αφαιρετική διαδικασία. Προκειμένου να μελετήσουμε τον ρόλο του πλαισίου και των διαθέσιμων μέσων στην μαθησιακή διαδικασία, χρησιμοποιούμε τη θεωρία Αφαίρεση εντός Πλαισίου (ΑεΠ) (Abstraction in Context, Hershkowitz et al., 2001). Με βάση την ΑεΠ, η οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο λαμβάνει χώρα μέσα από τρεις επιστημικές δράσεις: (α) την *αναγνώριση* μιας προηγούμενης κατασκευής ως σχετικής με μια προβληματική κατάσταση, (β) την *επαναδόμηση* της υπάρχουσας γνώσης για την επίτευξη ενός στόχου (π.χ. λύση ενός προβλήματος) και (γ) την *παραγωγή μιας νέας κατασκευής* μέσα από την ενσωμάτωση και ενοποίηση προηγούμενων κατασκευών. Συνεπώς, στην παρούσα έρευνα εστιάσαμε στον προσδιορισμό των επιπέδων νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής με τη χρήση των μαθησιακών τροχιών και την περιγραφή της κατασκευής των νοημάτων των μαθητών με τη βοήθεια της ΑεΠ.

ΤΟ ΨΗΦΙΑΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ CASYOPÉE

Το Casyopée διαθέτει ένα παράθυρο Άλγεβρας και ένα παράθυρο Δυναμικής Γεωμετρίας, τα οποία αλληλοσυνδέονται. Οι μαθητές μπορούν να δημιουργούν στο Casyopée ελεύθερα και εξαρτώμενα γεωμετρικά αντικείμενα και να ορίζουν ανεξάρτητα και εξαρτημένα μεγέθη ως αντικείμενα (c0, c1, c2,…).



Σχήμα 1: Τα παράθυρα γεωμετρίας, γεωμετρικών υπολογισμών, πίνακα τιμών και γραφικών παραστάσεων στο Casyopée.

Επιπλέον, μέσω της λειτουργίας της «αυτόματης μοντελοποίησης» οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να ελέγξουν αν μπορεί να οριστεί συνάρτηση μεταξύ δύο συμμεταβαλλόμενων μεγεθών (σχ. 1). Σε περίπτωση που μπορεί να οριστεί συνάρτηση, εξάγεται αυτόματα ο αλγεβρικός τύπος της στο παράθυρο της Άλγεβρας, διαφορετικά παρέχεται κατάλληλη πληροφόρηση. Τέλος, μία συνάρτηση μπορεί να μελετηθεί με τη χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων, όπως πίνακα τιμών και γραφικής παράστασης.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Μέθοδος, πλαίσιο, δραστηριότητες και συλλογή δεδομένων

Στην έρευνα συμμετείχε ένα τμήμα Β΄ Λυκείου από ένα Πειραματικό Λύκειο της Αθήνας. Οι 23 μαθητές εργάστηκαν σε 8 ομάδες των 3 για 14 ώρες (45λ.) στη διάρκεια 4 μηνών. Συμμετείχε ο εκπαιδευτικός της τάξης ως ερευνητής και ένας ερευνητής ως συμμετοχικός παρατηρητής. Η παρούσα έρευνα χαρακτηρίζεται ως έρευνα σχεδιασμού (Cobb et al., 2003; Prediger et al., 2015) καθώς: (α) βασίζεται σε καινοτόμες διδακτικές εφαρμογές στο σχολικό πλαίσιο, (β) στοχεύει στη δημιουργία θεωρίας λαμβάνοντας υπόψη τη διδακτική πράξη και τα μέσα που την υποστηρίζουν, (γ) είναι αναστοχαστική, με την έννοια ότι ο σχεδιασμός ενημερώνεται από τη θεωρία και (δ) είναι προσανατολισμένη στην καθημερινή σχολική πρακτική.

Οι δραστηριότητες που εφαρμόστηκαν (πρόβλημα *Υδρορροής, Πρόσοψης καταστήματος, Δεξαμενής πετρελαίου*) αναφέρονταν σε ρεαλιστικά προβλήματα μεγιστοποίησης και η αλληλουχία τους ήταν τέτοια ώστε η συμμεταβολή να εμφανίζεται από απλές σε περισσότερο σύνθετες καταστάσεις, σύμφωνα με τις μαθησιακές τροχιές που αναμένονταν. Στο πρόβλημα της *Υδρορροής* ζητήθηκε ο βέλτιστος σχεδιασμός μιας υδρορροής, ώστε να μεγιστοποιείται η ροή του νερού. Τα υποερωτήματα ακολουθούσαν τον κύκλο μοντελοποίησης και αφορούσαν: (1) πειραματισμό με τη δίπλωση ενός χαρτιού (10cm X 20cm), παρατήρηση των συμμεταβολών και έκφραση αλγεβρικής σχέσης με τη χρήση μίας μεταβλητής, (2) σχεδιασμό και διερεύνηση ενός δυναμικού σχήματος που μοντελοποιεί το πρόβλημα στο Casyopée, (3) δημιουργία της συνάρτησης που μοντελοποιεί το πρόβλημα και (4) επίλυση του προβλήματος μέσω των διαθέσιμων αναπαραστάσεων. Σε επίπεδο μαθηματικών στόχων, αναμενόταν η μετάβαση των μαθητών από τη διαισθητική προσέγγιση της συμμεταβολής μέσω της δίπλωσης του χαρτιού στη νοηματοδότησή της μέσα από τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων. Τα δεδομένα που συλλέχτηκαν αποτελούνται βιντεοσκοπήσεις (τάξης και δύο ομάδων εστίασης) και μαγνητοφωνήσεις (τεσσάρων ομάδων μαθητών). Τα δεδομένα απομαγνητοφωνήθηκαν για την ανάλυση. Στο παρόν άρθρο αναλύουμε τα δεδομένα από τις δύο ομάδες εστίασης (ομ2 – Μ1,Μ2 ομ4 – Μ4,Μ5) κατά την εφαρμογή της δραστηριότητας της *Υδρορροής* (διάρκειας 3 ωρών).

Μέθοδος ανάλυσης

Στην πρώτη φάση της ανάλυσης κωδικοποιήσαμε επεισόδια στα δεδομένα (ανοικτή κωδικοποίηση, Strauss & Corbin, 1998), στα οποία οι μαθητές αναφέρονταν σε συμμεταβαλλόμενα μεγέθη για κάθε διαφορετικό πεδίο του κύκλου μοντελοποίησης. Ακολούθως, αναλύθηκε η εμφάνιση ποιοτικών στοιχείων στη σκέψη των μαθητών για τη συνάρτηση ως συμμεταβολή λαμβάνοντας υπόψη υπάρχουσες κατηγοριοποιήσεις (π.χ. Carlson et al., 2002) και τις μαθησιακές τροχιές που θα μπορούσαν να προκύψουν από την ακολουθία δραστηριοτήτων της *Υδρορροής*. Με συνεχείς συγκρίσεις διαχωρίσαμε κάποιες αρχικές κατηγορίες, ανάλογα με ομοιότητες και διαφορές που εμφανίζονταν στα αντίστοιχα επεισόδια με αποτέλεσμα τον προσδιορισμό έξι διαφορετικών επιπέδων νοηματοδότησης της συμμεταβολής από διαισθητικές σε περισσότερο μαθηματικοποιημένες εκδοχές. Στην δεύτερη φάση της ανάλυσης, αναλύθηκαν γραμμή-γραμμή οι διάλογοι των μαθητών στα επιλεγμένα επεισόδια με τη βοήθεια της ΑεΠ (αναγνώριση-επαναδόμηση-νέα κατασκευή), προκειμένου να περιγραφεί η κατασκευή νοημάτων από τους μαθητές ως αφαιρετική διαδικασία.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Επίπεδο 1: Αναγνώριση των αλληλεξαρτήσεων

Στο επίπεδο 1 οι μαθητές αναγνώριζαν τις αλληλεξαρτήσεις των συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων που είναι απαραίτητες στη μοντελοποίηση του προβλήματος. (π.χ. το μήκος της πλευράς και το εμβαδό διατομής). Όλοι οι μαθητές στην πρώτη ώρα διερεύνησης πειραματίστηκαν με ένα μοντέλο από χαρτί και στη συνέχεια μοντελοποίησαν το πρόβλημα στο λογισμικό δημιουργώντας ένα δυναμικό ορθογώνιο που αναφέρεται στην διατομή της υδρορροής. Το επίπεδο 1 εμφανίστηκε κατά την πρώτη ώρα πειραματισμού των μαθητών (α) με τη βοήθεια του μοντέλου από χαρτί (φυσικό αντικείμενο) και (β) με το δυναμικό ορθογώνιο που κατασκεύασαν στο Casyopée, στο οποίο αναγνώρισαν την αλληλεξάρτηση μεταξύ της πλευράς DC και του εμβαδού του ορθογωνίου στο παράθυρο Δυναμικής Γεωμετρίας (σχ.1). Για παράδειγμα, οι μαθητές της ομάδας 2 πειραματίζονταν στο μοντέλο από χαρτί με κατάλληλες διπλώσεις και παρατηρούσαν την αλληλεξάρτηση των πλευρών με στόχο τη μεγιστοποίηση της ποσότητας του νερού που περνάει από την υδρορροή, δηλαδή του εμβαδού διατομής.

1. Μ1: Για τη μέγιστη ροή νερού θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε το πλάτος, αλλά μέχρι ένα σημείο. Όσο πιο μεγάλο είναι τόσο περισσότερο νερό θα περνάει, όμως τόσο μικρότερα θα είναι τα πλαϊνά τοιχώματα. Συναρτήσει και των δύο πρέπει να βρούμε το…
2. Μ2: Α! Το εμβαδό [ενν. το εμβαδό της διατομής]. Αυτό το ορθογώνιο.

Στο παραπάνω απόσπασμα ο πειραματισμός των μαθητών με το μοντέλο χαρτιού οδήγησε στην αναζήτηση του βέλτιστου τρόπου δίπλωσης. Μέσω της δίπλωσης η Μ1 *αναγνώρισε* την αλληλεξάρτηση των δύο πλευρών με στόχο να μεγιστοποιήσει την ποσότητα νερού και στη συνέχεια παρατηρεί ότι είναι και οι δύο πλευρές απαραίτητες για την εύρεση του άλλου μεγέθους (*επαναδόμηση*). Τέλος, η Μ2 *κατασκευάζει* την αναγνώριση των αλληλεξαρτήσεων, σημειώνοντας ότι το ένα μέγεθος είναι το εμβαδό.

Επίπεδο 2: Σύνδεση της συμμεταβολής ποσοτήτων με τη συμμεταβολή μεγεθών

Στο επίπεδο 2 οι μαθητές αναγνώριζαν ότι η μεταβολή ενός μεγέθους προκαλεί μία αντίστοιχη μεταβολή σε ένα άλλο μέγεθος, δηλαδή το κύριο χαρακτηριστικό είναι η σύνδεση των συμμεταβαλλόμενων μεγεθών. Το επίπεδο 2 εμφανίστηκε κατά τη δεύτερη ώρα μοντελοποίησης του προβλήματος στην προσπάθεια των μαθητών να συνδέσουν τη συμμεταβολή των ποσοτήτων (Δυναμική Γεωμετρία) με τη συμμεταβολή των μεγεθών και των μετρήσεών τους (παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών) (σχ. 1). Ωστόσο, οι μαθητές στο επίπεδο 2 δεν μπορούσαν να δώσουν περαιτέρω πληροφορίες για το είδος της συμμεταβολής. Για παράδειγμα έλεγαν: «Όσο μεταβάλλεται το ένα μεταβάλλεται και το άλλο».

Επίπεδο 3: Κατεύθυνση των μεταβολών των μετρήσεων

Στο επίπεδο 3 οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να περιγράφουν την κατεύθυνση των μεταβολών μεταξύ δύο αλληλοεξαρτώμενων μεγεθών, συσχετίζοντας τα συμμεταβαλλόμενα μεγέθη. Το επίπεδο 3 εμφανίστηκε τη δεύτερη ώρα πειραματισμού των μαθητών, κατά την παρατήρηση των αλλαγών που εμφανίζονται στα παράθυρα του Casyopée και είναι πιο εξεζητημένο από το προηγούμενο επίπεδο καθώς οι μαθητές έδιναν έμφαση στην κατεύθυνση των μεταβολών. Για παράδειγμα έλεγαν: «Όσο το ένα μειώνεται, μειώνεται και το άλλο». Μέσω της μετακίνησης του ελεύθερου σημείου στη Δυναμική Γεωμετρία η ομάδα 4 παρατήρησε ότι προκαλούνται ταυτόχρονες μεταβολές στο δυναμικό σχήμα και στις μετρήσεις των μεγεθών στο παράθυρο γεωμετρικών υπολογισμών.

1. Ε: Πώς κατασκευάσατε το ορθογώνιο;
2. M4: Κοιτάξτε το εμβαδό εδώ. Βλέπουμε ότι το μέγιστο εμβαδό είναι 50 και καθώς αλλάζουμε αυτή την τιμή… [ενν. την τιμή του DC]
3. M5: Ωραία. Επιλέξαμε το σημείο C και φέραμε παράλληλη. Βάλαμε την τεταγμένη ίση με μηδέν, αλλά η τετμημένη είναι ίση με AD.
4. M4: Εντάξει. Εδώ δεν μπορούμε να πούμε ότι είναι το μέγιστο. Μπορούμε να δούμε ότι αν αλλάξουμε το σημείο C σε αυτό το ευθύγραμμο τμήμα [ενν. Το DC] το εμβαδό συνέχεια μειώνεται και μεγιστοποιείται όταν πάρει τη μέγιστη τιμή του.
5. M5: Κοιτάξτε στους γεωμετρικούς υπολογισμούς. Έχουμε τη μέγιστη τιμή του ευθύγραμμου τμήματος DC. Όσο μετακινούμε το C προς τα κάτω, βλέπουμε ότι και το εμβαδό μειώνεται.

Στο επεισόδιο οι μαθητές μετακινώντας το σημείο C, συσχέτισαν τις μεταβολές στο μήκος του ευθυγράμμου τμήματος DC με τις μεταβολές του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με σκοπό να μεγιστοποιήσουν το εμβαδό διατομής της υδρορροής. Πράγματι, οι διασυνδεόμενες αναπαραστάσεις βοήθησαν τον μαθητή Μ4 να νοηματοδοτήσει την κατεύθυνση των μεταβολών μεταξύ των μετρήσεων (στίχος 2), από την παρατήρηση των συμμεταβαλλόμενων μετρήσεων των μεγεθών. Οι μαθητές *αναγνώρισαν* ότι οι μεταβολές των τιμών του μήκους του DC μεταβάλλουν τις τιμές του εμβαδού. Στη συνέχεια, έκαναν σύντομη παρουσίαση της διερεύνησής τους με σκοπό τη σύνδεση των δύο μεγεθών (*επαναδόμηση* -στίχος 4) για να δώσουν απάντηση στο πρόβλημα. Τέλος, η ομάδα μαθητών *κατασκεύασε* την κατεύθυνση της μεταβολής των συμμεταβαλλόμενων μεγεθών (στίχος 5), όπου ο μαθητής Μ5 αναφέρει ότι η τιμή του εμβαδού μειώνεται καθώς μετακινεί προς την αρχή των αξόνων το ελεύθερο σημείο C, δηλαδή καθώς ελαττώνει το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος DC.

Επίπεδο 4: Νοηματοδότηση της συμμεταβολής μεγεθών ως συμμεταβολή μεταβλητών

Στην αρχή της τρίτης ώρας οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να παρατηρήσουν ότι το ζεύγος από τα συμμεταβαλλόμενα μεγέθη μπορεί να αποτελέσει ένα ζεύγος συμμεταβαλλόμενων μεταβλητών. Στο επίπεδο 4 οι μαθητές παρατηρούσαν ότι η μία μεταβλητή μπορεί να θεωρηθεί ως ανεξάρτητη μεταβλητή, καθώς προκαλεί τις μεταβολές και η άλλη ως εξαρτημένη με σκοπό τη δημιουργία μίας συνάρτησης που μοντελοποιεί το πρόβλημα. Μάλιστα είναι περισσότερο εξεζητημένο από το προηγούμενο καθώς τονίζεται η συναρτησιακή σχέση που έχουν οι δύο μεταβλητές. Για παράδειγμα: «Αν πούμε εξαρτημένη το DA*DC (το εμβαδό), τότε η ανεξάρτητη πρέπει να είναι το DC, αφού αυτό κουνάμε [ενν. το DC]».

Επίπεδο 5: Νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής με βάση τον αλγεβρικό συμβολισμό

Στο επίπεδο 5 οι μαθητές έκαναν περιγραφή της συμμεταβολής των δύο μεταβλητών με μαθηματικούς όρους, δηλαδή γινόταν μια περιγραφή της συμμεταβολής με τη χρήση μόνο αλγεβρικών στοιχείων. Η νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής έγινε σταδιακά την τρίτη ώρα πειραματισμού ξεκινώντας από τη νοηματοδότηση της μεταβολής της κάθε μεταβλητής χωριστά και καταλήγοντας στη σύνδεση των δύο μεταβολών. Για παράδειγμα, οι μαθητές της ομάδας 2 είχαν μοντελοποιήσει το σχήμα στο λογισμικό, είχαν ορίσει την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή και είχαν προσδιορίσει το μέγιστο σημείο (5,50) από τη γραφική παράσταση και τον αλγεβρικό τύπο παρατηρώντας τις μεμονωμένες μεταβολές των δύο μεταβλητών. Στο επόμενο επεισόδιο, οι μαθητές της ομάδας 2 συζητούσαν τους τρόπους με τους οποίους θα έδιναν απάντηση στο πρόβλημα και παράλληλα νοηματοδότησαν τη συνάρτηση ως συμμεταβολή παρατηρώντας τις επιμέρους μεταβολές των στηλών στο παράθυρο του πίνακα τιμών.

1. Μ1: Από τον πίνακα τιμών βλέπουμε τη μέγιστη τιμή, ότι στο 5.. [το εμβαδόν είναι 50]
2. Μ2: Μας δείχνει το εμβαδό για κάθε τιμή που μπορεί να πάρει το x με τον περιορισμό που του θέσαμε.
3. Μ1: Αν αλλάξουμε τα βήματα μας λέει το εμβαδό σε σχέση με την πλευρά DC που μεταβάλλεται με 0.5 βήμα. Βλέπουμε ότι το 5 παραμένει η τιμή που μπορεί να πάρει η πλευρά DC του παρ/μου για να έχει μέγιστο εμβαδό. Παρατηρούμε ότι για τις διάφορες τιμές του x το εμβαδό μεταβάλλεται και βρίσκει μέγιστο στο DC [ενν. ίσο με 5]
4. Μ3: Περίμενε. Για τις διάφορες τιμές του x το εμβαδό μεταβάλλεται και βρίσκει μέγιστο για x=5 και με εμβαδό ίσο με f(5)=50.

Στο επεισόδιο παρατηρούμε τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής της πλευράς του ορθογωνίου με το εμβαδό από τις μαθήτριες της ομάδας 2, με στόχο τη μεγιστοποίηση του εμβαδού διατομής της υδρορροής. Ο πίνακας τιμών του Casyopée βοήθησε τη μαθήτρια Μ2 να παρατηρήσει τη μεταβολή των τιμών της πλευράς DC (στίχος 2), παρατηρώντας τις διαφορετικές τιμές. Οι μαθητές *αναγνώρισαν* τη μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής (στίχος 3, επίπεδο 4), καθώς η M2 συσχετίζει τη μεταβολή της πλευράς DC με τη στήλη x του πίνακα τιμών. Ακολούθως, (στίχος 3, επίπεδο 4) η M1 εξετάζει ενδελεχώς τις τιμές της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής με σκοπό τον προσδιορισμό του μέγιστο το εμβαδό, καθώς αλλάζει το βήμα (*επαναδόμηση*). Τέλος, (στίχος 3, επίπεδο 5) η ομάδα μαθητριών *κατασκευάζει* τη νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής ερμηνεύοντας τις δύο στήλες του πίνακα τιμών.

Επίπεδο 6: Νοηματοδότηση της συμμεταβολής σε διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης

Στο επίπεδο 6 οι μαθητές περιέγραφαν τη συνάρτηση ως συμμεταβολή με μαθηματικούς όρους, συνδέοντας ταυτόχρονα διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Το επίπεδο 6 εμφανίστηκε στις τρεις από τις τέσσερις καταγραφόμενες ομάδες κατά την τρίτη ώρα πειραματισμού όταν οι μαθητές προσπάθησαν να χρησιμοποιήσουν τη συνάρτηση που δημιούργησαν στο λογισμικό για να απαντήσουν στο πρόβλημα. Για παράδειγμα οι μαθητές της ομάδας 2 έκαναν σύνδεση του πίνακα τιμών και της γραφικής παράστασης για να περιγράψουν το πώς έφτασαν στην τελική τους απάντηση νοηματοδοτώντας παράλληλα τη συνάρτηση ως συμμεταβολή με βάση αλγεβρικούς όρους: «Εμφανίζουμε τη συνάρτηση στα γραφήματα και παρατηρούμε ότι είναι μια παραβολή και χρησιμοποιώντας τον πίνακα τιμών του προγράμματος παρατηρούμε ότι για τις διάφορες τιμές του x το εμβαδόν μεταβάλλεται [ενν. η G(x)], και βρίσκει μέγιστο στο G(5)».

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία εστιάσαμε στη διερεύνηση των διαδικασιών νοηματοδότησης της συνάρτησης ως συμμεταβολής από μαθητές Β΄ Λυκείου, κατά τη μοντελοποίηση προβλημάτων στο λογισμικό Casyopée. Σε αυτό το πλαίσιο με τη χρήση των μαθησιακών τροχιών εντοπίσαμε έξι πρωτότυπα ιεραρχημένα επίπεδα για τη συμμεταβολή: (α) αναγνώριση των αλληλεξαρτήσεων, (β) σύνδεση της συμμεταβολής των ποσοτήτων με τη συμμεταβολή μεγεθών, (γ) κατεύθυνση των μεταβολών των μετρήσεων, (δ) νοηματοδότηση της συμμεταβολής μεγεθών ως συμμεταβολή μεταβλητών, (ε) νοηματοδότηση της συνάρτησης ως συμμεταβολής με βάση τον αλγεβρικό συμβολισμό και (στ) νοηματοδότηση της συμμεταβολής σε διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης. Τα συγκεκριμένα επίπεδα νοηματοδότησης διαφωτίζουν την υπάρχουσα έρευνα παρέχοντας ποιοτικά στοιχεία που χαρακτηρίζουν την εξέλιξη της συναρτησιακής σκέψης των μαθητών μέσα από οι συνδέσεις διαφορετικών αναπαραστάσεων και σταδιακές μεταβάσεις από τις ποσότητες στα μεγέθη και στις μεταβλητές.

Παράλληλα, η περιγραφή της κατασκευής νοημάτων από τους μαθητές με τη χρήση της ΑεΠ ανέδειξε τον κρίσιμο ρόλο του πλαισίου και του λογισμικού Casyopée στην εξέλιξη της μαθησιακής διαδικασίας.

Ευχαριστίες: Η παρούσα εργασία υποστηρίχθηκε από τον Ειδικό Λογαριασμό Κονδυλίων Έρευνας του ΕΚΠΑ (70/3/13297).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352-378.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York, NY: Routledge.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). Learning trajectories: Foundations for effective, research-based education. In A. P. Maloney, J. Confrey, & K. H. Nguyen (Eds.), *Learning over time: Learning trajectories in mathematics education* (pp. 1–30). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, v.32, 9-13.

Hershkowitz, R., Schwarz, B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 195-222.

Lagrange, J.-B. & Psycharis, G. (2014). Investigating the potential of computer environments for the teaching and learning of functions: A double analysis from two research traditions. *Technology, Knowledge and Learning, 19*(3), pp. 255-286.

Lagrange, J.-B. (2014). New representational infrastructures: broadening the focus on functions. *Teaching Mathematics and Its Applications, 33*(3), 179-192.

Prediger, S., Gravemeijer, K., & Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: an overview on achievements and challenges. *ZDM*, *47*(6), 877-891.

Psycharis, G. (2015). Formalising functional dependencies: The potential of technology. *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME) (pp.2388-2395), Prague, Czech Republic.

Strauss, A., & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research: Procedures and techniques for developing grounded theory*. Thousand Oaks, CA: Sage.

ΑΓΡΟΤΟΜΠΕΡΔΕΜΑΤΑ: Η ΧΡΗΣΗ ΕΝΟΣ ΕΠΙΤΡΑΠΕΖΙΟΥ ΠΑΙΧΝΙΔΙΟΥ ΣΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΕΞΙΟΤΗΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ Δ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Κοκιοπούλου[1] Παναγιώτα, Τάτσης[1] Κωνσταντίνος, Σκουμπουρδή[2] Χρυσάνθη

[1]Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, [2]Πανεπιστήμιο Αιγαίου

panagiotakokiopoulou@gmail.com, ktatsis@uoi.gr, kara@aegean.gr

Στην παρούσα εργασία, μέσω της ανάπτυξης και εφαρμογής ενός επιτραπέζιου παιχνιδιού ερευνήθηκε η σχέση της επίδοσης των μαθητών στα Μαθηματικά και της απόδοσής τους στο παιχνίδι. Από τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνεται πως οι μαθητές υψηλών μαθηματικών δεξιοτήτων είχαν καλύτερη απόδοση στο επιτραπέζιο παιχνίδι, κάνοντας χρήση στρατηγικών και γνωστών μαθηματικών διαδικασιών, σε αντίθεση με τους μαθητές χαμηλών μαθηματικών δεξιοτήτων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι διαχρονικά αποδεκτό πως το παιχνίδι διαδραματίζει κεντρικό ρόλο κατά την παιδική ηλικία και είναι μία δραστηριότητα που δεν εκλείπει καθ' όλη τη διάρκεια της ζωής του ανθρώπου. Εκτός του ότι εμπεριέχει την έννοια της διασκέδασης και της εσωτερικής ικανοποίησης, αποτελεί ένα μέσο ανάπτυξης και κοινωνικοποίησης του παιδιού (Whitebread, 2012). Επίσης, αποτελεί τρόπο εκτόνωσης της επιθετικότητας και τρόπο εκμάθησης των βασικών αρχών επιβίωσης (Mostowfi, Mamaghani & Khorramar, 2016). Το παιχνίδι συχνά χρησιμοποιείται ως πλαίσιο στην εκπαιδευτική διαδικασία, αποτελώντας πολύτιμο εργαλείο για τη διδασκαλία και τη μάθηση. Έτσι, προσαρμοζόμενο στις απαιτήσεις της εκπαίδευσης, κατά την οποία διαρκώς αναζητούνται νέοι, πιο αποτελεσματικοί και δημιουργικοί τρόποι διδασκαλίας, παίρνει τη μορφή του εκπαιδευτικού παιχνιδιού και χρησιμοποιείται για τη διδασκαλία διαφόρων γνωστικών αντικειμένων, μεταξύ των οποίων και τα μαθηματικά (Prayaga & Rasmussen, 2008).

Στη βιβλιογραφία προσδιορίζονται ορισμένα χαρακτηριστικά του παιχνιδιού: α) είναι εθελοντικό, δηλαδή ο παίκτης εμπλέκεται αυθόρμητα σε αυτό, με δική του πρωτοβουλία, β) δεν έχει εξωτερικό σκοπό, υφίσταται μόνο για να ικανοποιεί τους δικούς του εσωτερικούς σκοπούς, γ) είναι διασκεδαστικό, προκαλεί δηλαδή ευχαρίστηση και απόλαυση στους συμμετέχοντες, δ) έχει κανόνες οι οποίοι χρησιμεύουν τόσο στην οργάνωση και διαχείρισή του, όσο και στην απόδοση δικαιοσύνης κατά τη διάρκειά του και ε) είναι κάτι έξω από την πραγματική ζωή, κυρίως αναφορικά με τη διάρκειά του (Henricks, 2009).

Τα εκπαιδευτικά παιχνίδια αποτελούν ένα υποσύνολο των παιχνιδιών. Το στοιχείο που τα διαφοροποιεί από τα υπόλοιπα παιχνίδια είναι η προτεραιότητα των στόχων. Βασικός στόχος τους δεν είναι μόνο η ευχαρίστηση των συμμετεχόντων αλλά σχεδιάζονται και εφαρμόζονται συνδυάζοντας τη διδασκαλία ενός γνωστικού αντικειμένου με το παιχνίδι, προκειμένου να δοθεί η δυνατότητα στους μαθητές να κατανοήσουν και να εφαρμόσουν τη γνώση στον πραγματικό κόσμο (Noemi & Maximo, 2014). Το κυριότερο χαρακτηριστικό των εκπαιδευτικών παιχνιδιών είναι η ικανότητά τους να δημιουργούν εσωτερικό κίνητρο στους μαθητές να εμπλακούν και να εξερευνήσουν το εκπαιδευτικό περιεχόμενο του παιχνιδιού, προκαλώντας την περιέργειά τους και διατηρώντας το ενδιαφέρον τους καθ' όλη τη διάρκειά του (Prayaga & Rasmussen, 2008). Όσον αφορά την εκπαιδευτική τους αποτελεσματικότητα, στοιχεία τα οποία την επηρεάζουν είναι, μεταξύ άλλων, η φύση της γνώσης που το παιχνίδι επιχειρεί να ενισχύσει, τα χαρακτηριστικά του ίδιου του παιχνιδιού και ο τρόπος εφαρμογής του στη διαδικασία διδασκαλίας και μάθησης (Ke, 2015). Επιπλέον, η αποτελεσματικότητά του εξαρτάται τόσο από τους συμμετέχοντες στο εκπαιδευτικό παιχνίδι, όσο και από τον ίδιο τον εκπαιδευτικό. Ως προς τους συμμετέχοντες, οι παράγοντες που επηρεάζουν το παιχνίδι των παιδιών είναι η ύπαρξη πρότερης εμπειρίας, η εξοικείωση με το παιχνίδι και η σύνθεση της ομάδας (Σκουμπουρδή, 2015). Αναφορικά με τον εκπαιδευτικό, ιδανικά, κατά την εφαρμογή ενός εκπαιδευτικού παιχνιδιού πρέπει να έχει το ρόλο του συμβούλου και του διευκολυντή (Bartolini & Martignone, 2014), καθοδηγώντας τους παίκτες στη χρήση της προ-υπάρχουσας γνώσης (Noemi & Maximo, 2014). Παρά το γεγονός πως το εκπαιδευτικό παιχνίδι δεν καταλαμβάνει κάποια ιδιαίτερη θέση στην ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα, στη διεθνή βιβλιογραφία αναφέρονται ορισμένα βασικά πλεονεκτήματά του. Αρχικά, παρέχει καταστάσεις που έχουν νόημα για τους μαθητές (Nachimuthu & Vijayakumari, 2011), εμπλέκοντάς τους σε μία δυναμική κατάσταση, στην οποία γίνονται πρωταγωνιστές της προσωπικής τους διαδικασίας μάθησης (Noemi & Maximo, 2014). Τόσο τα εκπαιδευτικά παιχνίδια, όσο και τα παιχνίδια γενικότερα, προσομοιώνουν περιβάλλοντα και καταστάσεις που είναι αδύνατον να βιώσουν τα παιδιά στην πραγματική ζωή, λόγω έλλειψης ασφάλειας και χρόνου ή λόγω υψηλού κόστους (Susi, Johannesson & Backlund, 2007). Επιπλέον, ενισχύεται η συναισθηματική και κοινωνική ανάπτυξη των παιδιών μέσω των στρατηγικών και δεξιοτήτων που χρησιμοποιούν για την αύξηση της επίδοσής τους στο παιχνίδι (Ke, 2015).

Κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών είναι απαραίτητη η χρήση δημιουργικών δραστηριοτήτων, καθώς έτσι δίνεται η δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να καθοδηγήσει τη διαδικασία της μάθησης, και κατ' επέκταση στο μαθητή να κατανοήσει επαρκώς τη διαδικασία αυτή (Bartolini & Martignone, 2014). Επομένως, για να αναπτυχθούν οι μαθηματικές γνώσεις των μαθητών απαιτείται η ενεργή συμμετοχή τους σε δημιουργικές μαθηματικές δραστηριότητες, όπως είναι τα εκπαιδευτικά παιχνίδια. Δίνουν κίνητρο στους μαθητές να ασχοληθούν με τα Μαθηματικά, τους δίνουν αφορμές για συζήτηση και αλληλεπίδραση, βελτιώνουν τόσο τις μαθηματικές και κοινωνικές τους δεξιότητες, όσο και τις ικανότητές τους για κατανόηση και επίλυση προβλημάτων και προωθούν τη συνεργασία και την ομαδικότητα μεταξύ των συμμετεχόντων. Η μάθηση επιτυγχάνεται καλύτερα και αποτελεσματικότερα όταν οι μαθητές εμπλέκονται σε απαιτητικές δραστηριότητες, οι οποίες παρέχουν στους συμμετέχοντες το στοιχείο της πρόκλησης. Στη μαθηματική εκπαίδευση έχει αποδειχθεί πως το παιχνίδι αποτελεί αποτελεσματικότερο μέσο διδασκαλίας σε σχέση με άλλες προσεγγίσεις ως προς την ανάπτυξη των γνωστικών δεξιοτήτων των μαθητών (Bartolini & Martignone, 2014). Επίσης, μέσω των παιγνιωδών δραστηριοτήτων διευκολύνεται σημαντικά η ανάπτυξη μεταγλωσσικών και μεταγνωστικών δεξιοτήτων και παρέχεται στους συμμετέχοντες το κίνητρο που ενισχύει την ενασχόληση των μαθητών με τα Μαθηματικά χωρίς το φόβο της αποτυχίας (Caswell, 2005).

Όλα τα παραπάνω αποτέλεσαν την αφορμή διεξαγωγής της παρούσας έρευνας, η οποία περιλαμβάνει την κατασκευή και εφαρμογή του επιτραπέζιου παιχνιδιού «ΑγροτοΜπερδέματα» με σκοπό να διερευνηθούν θέματα που αφορούν στο πώς σχετίζεται η επίδοση των μαθητών Δ΄ δημοτικού στα Μαθηματικά με την επίδοσή τους στο συγκεκριμένο παιχνίδι, καθώς και τη χρήση στρατηγικών και γνωστών μαθηματικών διαδικασιών κατά τη διάρκειά του. Πιο συγκεκριμένα, τα ερευνητικά ερωτήματα ήταν: α) Σε ποιο βαθμό οι μαθηματικές δεξιότητες των μαθητών σχετίζονται με την επίδοσή τους στα επιτραπέζια παιχνίδια;, β) Ποιες στρατηγικές και σε ποιο βαθμό χρησιμοποιούν οι μαθητές για να ανταπεξέλθουν στις απαιτήσεις ενός επιτραπέζιου παιχνιδιού; και γ) Κατά πόσο οι μαθητές χρησιμοποιούν γνωστές μαθηματικές διαδικασίες κατά τη διάρκεια του επιτραπέζιου παιχνιδιού;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

Επιτραπέζιο παιχνίδι «Αγροτομπερδέματα»

Ο βασικός μηχανισμός του παιχνιδιού είναι αυτός της κατανομής πόρων (allocation games), σύμφωνα με τον οποίο η κίνηση του κάθε παίκτη αποτελείται από την κατανομή συγκεκριμένου αριθμού πόρων σε προκαθορισμένες από τους κανόνες του παιχνιδιού ενέργειες. Το ταμπλό του επιτραπέζιου παιχνιδιού «Αγροτομπερδέματα» αποτελείται από διαδρομές οι οποίες σε ορισμένα σημεία εμπλέκονται μεταξύ τους και περιλαμβάνουν ορισμένα «ειδικά» τετράγωνα που επιτρέπουν στους παίκτες να κάνουν προκαθορισμένες ενέργειες και να αλληλεπιδράσουν μεταξύ τους (βλ. Εικόνα 1). Οι ενέργειες αυτές είτε τους επιτρέπουν να ενισχύσουν τη δική τους θέση στο παιχνίδι, είτε να εμποδίσουν τους συμπαίκτες τους. Το παιχνίδι τελειώνει είτε όταν κάποιος παίκτης έχει καλλιεργήσει τουλάχιστον τρία μήλα και έχει φτάσει σε κάποιο από τα τρία σημεία τερματισμού, είτε μετά την ολοκλήρωση έντεκα γύρων παιχνιδιού. Νικητής είναι ο παίκτης με τους περισσότερους πόντους νίκης. Οι πόντοι νίκης προκύπτουν από τα μήλα που έχει καλλιεργήσει ο παίκτης, από τους σπόρους που έχει φυτέψει και από τους σπόρους που δεν έχει φυτέψει ακόμα. Στην αρχή του παιχνιδιού κάθε παίκτης έχει στην κατοχή του δεκαπέντε σπόρους συγκεκριμένου χρώματος. Το παιχνίδι παίζεται σε μία σειρά από γύρους, όπου σε κάθε γύρο ο κάθε παίκτης έχει στη διάθεσή του δέκα ώρες, τις οποίες έχει τη δυνατότητα να τις διαθέσει σε πέντε πιθανές ενέργειες, με το αντίστοιχο κόστος σε ώρες: μετακίνηση σε γειτονικό τετράγωνο, φύτεμα ενός σπόρου, μετατροπή τριών φυτεμένων σπόρων σε ένα μήλο, χρήση μυρμηγκιού και χρήση πουλιού.

Το επιτραπέζιο παιχνίδι εφαρμόστηκε σε τρεις ομάδες μαθητών Δ’ τάξης Δημοτικού (συνολικός αριθμός συμμετεχόντων: 9), οι οποίες επιλέχθηκαν από τη δασκάλα του τμήματος βάσει της επίδοσης των μαθητών στο μάθημα των Μαθηματικών. Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει τρεις μαθητές υψηλών μαθηματικών δεξιοτήτων, η δεύτερη μαθητές χαμηλών μαθηματικών δεξιοτήτων και η τρίτη μαθητές διαφορετικών βαθμών μαθηματικών δεξιοτήτων. Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν ήταν ποιοτικά και οι συμμετέχοντες αξιολογήθηκαν με βάση τις διαδρομές που ακολούθησαν στο ταμπλό, με βάση την αξιοποίηση ή μη των «ειδικών» τετραγώνων, βάσει των επιλογών τους και βάσει της λεκτικής τους επικοινωνίας κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού. Επίσης, μελετήθηκαν οι στρατηγικές που χρησιμοποιήθηκαν από τους συμμετέχοντες, καθώς και οι μαθηματικές διαδικασίες που αξιοποιήθηκαν.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η ανάλυση των δεδομένων πραγματοποιήθηκε με βάση τις διαφορετικές ομάδες. Πιο συγκεκριμένα:

Ομάδα υψηλών μαθηματικών δεξιοτήτων: Οι παίκτες κατανόησαν αμέσως τους κανόνες του παιχνιδιού. Το παιχνίδι είχε αξιοσημείωτα μεγάλη διάρκεια, καθώς όλοι οι παίκτες κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού υπολόγιζαν τους πόντους νίκης, τους συνέκριναν και εκτιμούσαν αν θα ήταν νικητές σε περίπτωση που έφταναν σε κάποιο σημείο τερματισμού. Επομένως, το παιχνίδι τελείωσε λόγω της ολοκλήρωσης των έντεκα γύρων και όχι λόγω του ότι κάποιος παίκτης πληρούσε τις προδιαγραφές για να τερματίσει. Επίσης, όλοι οι παίκτες εξαντλούσαν όλους τους πόρους και τις δυνατότητες που τους παρείχε το παιχνίδι. Και οι τρεις συμμετέχοντες επέλεξαν να διασχίσουν διαδρομές πλούσιες σε «ειδικά» τετράγωνα, τα οποία αξιοποιούσαν κάθε φορά. Όλοι οι συμμετέχοντες κατέστρωναν στρατηγικές, όπως για παράδειγμα μετέτρεπαν κατευθείαν τους σπόρους τους σε μήλα προκειμένουν να τους κατοχυρώσουν, τις αναπροσάρμοζαν ανάλογα με τις αποφάσεις των συμπαικτών τους («εγώ σκέφτομαι την τακτική που θα κάνω την ώρα που παίζουν οι άλλοι παίκτες», «πρέπει να αρχίσω να μειώνω τους σπόρους των υπολοίπων γιατί αν τερματίσει κάποιος θα νικήσουν», «εγώ θέλω να παίξω τελευταία για να βλέπω τι έχουν κάνει οι άλλοι πρώτα»), προσπαθούσαν να προβλέψουν τις κινήσεις των συμπαικτών τους, επέλεγαν προσεκτικά τα αγροκτήματα που εκμεταλλεύονταν, έτσι ώστε να μην είναι εύκολα προσβάσιμα από τους «εχθρούς» του παιχνιδιού (πουλί και μυρμήγκια) («δε θέλω να πάω κοντά στα μυρμήγκια γιατί θα μου πάρουν όλους τους σπόρους») και φύτευαν σε αυτά επιπλέον σπόρους για να έχουν τη δυνατότητα να τους μετατρέψουν σε μήλα, ακόμα κι αν κάποιος συμπαίκτης τους έπαιρνε κάποιο σπόρο (υπολόγιζαν οι σπόροι που θα απομείνουν στο αγρόκτημά τους να είναι πολλαπλάσιο του τρία- «να φυτέψεις τέσσερις σπόρους για να μπορέσεις να κάνεις μήλο»). Επίσης, συνέκριναν τις αποστάσεις στο ταμπλό, προκειμένου να βρουν τη συντομότερη διαδρομή ώστε να εξοικονομήσουν πόρους. Παρόλα αυτά, όλοι οι παίκτες συμβούλευαν τους συμπαίκτες τους όταν ήταν η σειρά τους και τους παρουσίαζαν εναλλακτικές επιλογές διανομής των πόρων τους, χωρίς να αποσκοπούν σε προσωπικό τους όφελος. Σε όλη τη διάρκεια του παιχνιδιού οι μαθητές χρησιμοποίησαν τις εξής μαθηματικές διαδικασίες: απαρίθμηση βημάτων, αντίστροφα μειώνω, πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και σύγκριση αποστάσεων και πόντων νίκης. Οι τελικοί πόντοι νίκης ήταν 17 για το νικητή του παιχνιδιού, 15 για το δεύτερο παίκτη και 12 πόντοι νίκης για τον τρίτο παίκτη.

Ομάδα χαμηλών μαθηματικών δεξιοτήτων: Η συγκεκριμένη ομάδα δεν κατανόησε πλήρως τους κανόνες του παιχνιδιού και αυτό έγινε αντιληπτό κατά τη διάρκειά του, που έθεταν ερωτήσεις και με συνεργασία και συζήτηση έδιναν απαντήσεις. Το παιχνίδι διήρκησε περίπου μισό χρόνο σε σχέση με την ομάδα μαθητών υψηλών μαθηματικών δεξιοτήτων και ολοκληρώθηκε μετά από επτά γύρους. Οι διαδρομές που επέλεγαν να ακολουθήσουν οι παίκτες της συγκεκριμένης ομάδας ήταν οι συντομότερες που υπήρχαν, χωρίς να περιλαμβάνουν πολλά «ειδικά» τετράγωνα, τα οποία πολλές φορές επέλεγαν να μην αξιοποιήσουν, χάνοντας ευκαιρίες να πάρουν ένα προβάδισμα στο παιχνίδι ή να εμποδίσουν και να καθυστερήσουν τους υπόλοιπους παίκτες. Επιπλέον, απέφευγαν να αξιοποιήσουν σε κάθε γύρο όλους τους πόρους που είχαν στη διάθεσή τους («δε θέλω να κάνω κάτι άλλο, κι ας έχω ακόμα έξι ώρες»). Παρόλα αυτά, προσπαθούσαν να καταστρώσουν στρατηγικές, («εγώ έχω ετοιμάσει σχεδιάκι τώρα»), όπως για παράδειγμα να κρατούν αφύτευτους σπόρους προκειμένου να μην μπορεί να τους πάρει κάποιος αντίπαλος, οι οποίες, όμως, δεν ήταν τόσο αποδοτικές και αδυνατούσαν να τις αναπροσαρμόσουν στις αλλαγές που δημιουργούνταν από τις αποφάσεις των συμπαικτών τους («εγώ δεν είχα τόσο καλή στρατηγική και ξέμεινα από σπόρους»). Αδυνατούσαν να προβλέψουν τις κινήσεις των συμπαικτών τους, ενώ όταν δεν ήταν η σειρά τους σκέφτονταν πώς θα δράσουν στον επόμενο γύρο, μην μπορώντας να παρακολουθήσουν τις κινήσεις των υπολοίπων παικτών και τις εξελίξεις στο παιχνίδι. Δυσκολεύονταν στη σύγκριση αποστάσεων ή αριθμών και δεν μπορούσαν να βρουν τι είναι πιο συμφέρον και πιο αποτελεσματικό για τους ίδιους. Επιπλέον, κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού έθεταν διευκρινιστικές ερωτήσεις («μπορούμε να πάρουμε και τα μήλα των αντιπάλων;»), κάτι που καταδεικνύει ίσως τη μη πλήρη κατανόηση των κανόνων του παιχνιδιού. Όσον αφορά στις μαθηματικές δεξιότητες, οι παίκτες περιορίστηκαν στην απαρίθμηση βημάτων, την πρόσθεση, την αφαίρεση και τον πολλαπλασιασμό. Επίσης, αν και προσπαθούσαν, δυσκολεύονταν να κάνουν νοερές πράξεις («τέσσερις εφτά εικοσιτέσσερα»), χρησιμοποιώντας πολλές φορές και τα δάκτυλα των χεριών τους. Επίσης, σε ορισμένες περιπτώσεις ρωτούσαν την εκπαιδευτικό για το αποτέλεσμα κάποιας, ακόμα και απλής, μαθηματικής πράξης. Στο τέλος του παιχνιδιού, δυσκολεύονταν στον υπολογισμό των πόντων νίκης που είχαν συγκεντρώσει. Οι συνολικοί πόντοι νίκης της ομάδας αυτής ήταν αρκετά μεγάλοι αριθμοί με μικρή απόκλιση μεταξύ τους, με το νικητή να συγκετρώνει 29 πόντους νίκης, το δεύτερο παίκτη 25 πόντους νίκης και τον τρίτο παίκτη 23 πόντους νίκης.

Μικτή ομάδα: Η ομάδα αυτή, η οποία αποτελούταν από δύο παίκτες υψηλών μαθηματικών δεξιοτήτων και έναν παίκτη χαμηλών, έπαιξε πέντε γύρους παιχνιδιού. Οι μαθητές υψηλών μαθηματικών δεξιοτήτων προσπαθούσαν να προστατεύσουν, να συμβουλεύσουν και να βοηθήσουν τον τρίτο μαθητή («δε θα αρχίσω από τώρα τις εχθροπραξίες γιατί θα είναι άδικο») και τον βοηθούσαν στις μαθηματικές πράξεις υπενθυμίζοντάς του πόσους πόρους έχει ακόμα στη διάθεσή του («έχεις ακόμα έξι ώρες»). Ορισμένες φορές μετακινούσαν και το πιόνι του τρίτου μαθητή προκειμένου να έρθει πιο γρήγορα η σειρά τους. Διαφορά ανάμεσα στις κατηγορίες παικτών φαινόταν και στις μετακινήσεις τους στο ταμπλό του παιχνιδιού, μιας και οι μαθητές υψηλών μαθηματικών δεξιοτήτων μετακινούνταν σε ένα πολύ μεγάλο μέρος του ταμπλό, σε αντίθεση με τον τρίτο παίκτη που περιοριζόταν σε ένα μόνο μικρό μέρος του. Επιπλέον, οι «εχθροί» των σπόρων χρησιμοποιούνταν συνήθως εναντίον του παίκτη χαμηλών μαθηματικών δεξιοτήτων («γιατί όλο μου τα τρώτε;»), τον οποίο προσπαθούσαν να επηρεάσουν οι συμπαίκτες του εναντίον του άλλου παίκτη. Όσον αφορά στις στρατηγικές, οι μαθητές υψηλών μαθηματικών δεξιοτήτων κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού, προσπαθούσαν να προβλέψουν τις κινήσεις των αντιπάλων τους και υπολόγιζαν τους πόντους νίκης τους προκειμένου να δουν αν τους συμφέρει να φτάσουν σε σημείο τερματισμού και να τελειώσει το παιχνίδι. Ο τρίτος παίκτης απλά προσπαθούσε να συλλέξει πόντους νίκης χωρίς να τα καταφέρνει λόγω παρεμπόδισης από τους αντιπάλους του. Επίσης, στους τελευταίους γύρους του παιχνιδιού είχαν εξαντληθεί όλοι οι σπόροι του, με αποτέλεσμα να μην έχει διαθέσιμες επιλογές. Τα παραπάνω γίνονται αντιληπτά και από τα αποτελέσματα του παιχνιδιού τα οποία ήταν τα εξής: 38 πόντοι νίκης για τον πρώτο παίκτη, 33 πόντοι νίκης για το δεύτερο και 15 πόντοι νίκης για τον τρίτο παίκτη.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός πως οι μαθητές της ομάδας υψηλών μαθηματικών δεξιοτήτων συγκέντρωσαν σχετικά μικρό αριθμό πόντων νίκης, σε αντίθεση με τις άλλες ομάδες, κάτι που καταδεικνύει πως οι παίκτες αυτοί αξιοποίησαν όλες τις δυνατότητες που τους παρείχε το παιχνίδι. Δηλαδή επέλεγαν να επενδύσουν τους πόρους τους όχι τόσο για να πάρουν οι ίδιοι ένα προβάδισμα αλλά για να εμποδίσουν τους αντιπάλους τους, χρησιμοποιώντας τα «ειδικά» τερτάγωνα και τους «εχθρούς» των σπόρων προκειμένου να χάσουν σπόρους οι αντίπαλοί τους και να μην μπορούν να δημιουργήσουν μήλα, κάτι που θα τους επέτρεπε να συγκεντρώσουν και περισσότερους πόντους νίκης.

Εικόνα 1: Το ταμπλό του παιχνιδιού «Αγροτομπερδέματα» και ενδεικτικές διαδρομές που ακολούθησαν οι παίκτες

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας παρουσιάζονται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα:

	ΟΜΑΔΑ Υ.Μ.Δ.	**ΟΜΑΔΑ Χ.Μ.Δ.**	**ΜΙΚΤΗ ΟΜΑΔΑ**
Χρήση στρατηγικών	Διαρκής χρήση πολύπλοκων στρατηγικών και αναπροσαρμογή τους	Χρήση απλών στρατηγικών, αδυναμία αναπροσαρμογής τους	Μερική χρήση στρατηγικών (εναντίον των επικίνδυνων αντιπάλων)
Χρήση μαθηματικών διαδικασιών	Σωστοί νοεροί μαθηματικοί υπολογισμοί (π.χ. 2×7+2+1=17, 2×4=8), αντίστροφη μέτρηση	Λανθασμένες μαθηματικές πράξεις, αδυναμία αντίστροφης μέτρησης, χρήση δακτύλων	Σωστοί μαθηματικοί υπολογισμοί από τους παίκτες ΥΜΔ-βοήθεια προς τον παίκτη ΧΜΔ
Κατανόηση κανόνων	Γρήγορη κατανόηση κανόνων	Μη κατανόηση των κανόνων, άτοπες διευκρινιστικές ερωτήσεις	Επαρκής κατανόηση των κανόνων

Χρήση «ειδικών» τετραγώνων/ πόρων	Διαρκής επιδίωξη και αξιοποίηση «ειδικών» τετραγώνων και πόρων	Αποφυγή χρήσης «ειδικών» τετραγώνων και εξάντληση των πόρων (ακόμα κι αν είχαν την επιλογή)	Ικανοποιητική αξιοποίηση «ειδικών» τετραγώνων, αποφυγή εξάντλησης των πόρων από την παίκτρια ΧΜΔ
Επιλογή διαδρομών	Επιλογή μεγάλων και σύνθετων διαδρομών	Επιλογή σύντομων και απλών διαδρομών	Επιλογή μεγάλων και σύνθετων διαδρομών από τους παίκτες ΥΜΔ, σε αντίθεση με την παίκτρια ΧΜΔ
Σύγκριση πόντων νίκης	Μικρός αριθμός πόντων νίκης με μικρή απόκλιση μεταξύ τους	Μεγάλος αριθμός πόντων νίκης με μικρή απόκλιση μεταξύ τους	Μεγάλος αριθμός πόντων νίκης για τους παίκτες ΥΜΔ- μεγάλη απόκλιση από την παίκτρια ΧΜΔ
Αριθμός γύρων παιχνιδιού	Έντεκα γύροι παιχνιδιού	Επτά γύροι παιχνιδιού	Πέντε γύροι παιχνιδιού
Κλίμα ομάδας	Συνεργασία, συζήτηση, πρόταση εναλλακτικών επιλογών	Συνεργασία, επίλυση αποριών από τους συμπαίκτες	Συνεργασία, παρέμβαση στη σειρά της παίκτριας ΧΜΔ

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Με σκοπό τη διερεύνηση της σχέσης που υπάρχει ανάμεσα στις επιδόσεις μαθητών Δ΄ Δημοτικού στα Μαθηματικά και στις επιδόσεις τους στα επιτραπέζια παιχνίδια πραγματοποιήθηκε έρευνα η οποία έδειξε πως οι προαναφερθέντες παράγοντες συνδέονται στενά. Οι μαθητές οι οποίοι έχουν υψηλές μαθηματικές δεξιότητες προβλέπουν τις κινήσεις των αντιπάλων τους, καταστρώνουν τις δικές τους στρατηγικές και τις αναπροσαρμόζουν ανάλογα με τις εξελίξεις προκειμένου να νικήσουν. Ακολουθούν συλλογισμούς και κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού κάνουν εκτιμήσεις της δεδομένης κατάστασης και τελικά αναδεικνύονται νικητές του παιχνιδιού.

Εκτός των μεταγνωστικών δεξιοτήτων των μαθητών, η επίδοσή τους στο παιχνίδι φαίνεται να επηρεάζεται και από τις γνωστικές μαθηματικές δεξιότητες, τη γνώση των μαθηματικών πράξεων και διαδικασιών. Οι μαθητές που είχαν εξοικειωθεί μαζί τους και τα κατείχαν σε πολύ καλό βαθμό, είχαν την ικανότητα να αξιοποιούν πλήρως τις δυνατότητες που τους παρείχε το παιχνίδι, σε αντίθεση με τους υπόλοιπους οι οποίοι απέφευγαν να εξαντλούν τους πόρους που είχαν στη διάθεση τους είτε λόγω της ατελούς κατανόησης των κανόνων, είτε προκειμένου να μη χρειαστεί να κάνουν μαθηματικούς υπολογισμούς. Επίσης, δεν εμπλέκονταν τόσο ενεργά στο παιχνίδι, δεν επεδίωκαν να βρουν τις πιο συμφέρουσες κινήσεις για τους ίδιους και επηρεάζονταν από τους υπόλοιπους μαθητές ως προς τις ενέργειές τους. Βέβαια, αξιοσημείωτο είναι το γεγονός πως όλα τα παραπάνω συνέβησαν σε ένα περιβάλλον θεμιτού ανταγωνισμού και αλληλοβοήθειας, όχι απαραίτητα προς το προσωπικό συμφέρον κάποιου. Και στις τρεις ομάδες που έλαβαν μέρος στην έρευνα υπήρχε κλίμα συνεργασίας, οι μαθητές συμβούλευαν τους συμπαίκτες τους και τους πρότειναν εναλλακτικές επιλογές.

Προτάσεις για περαιτέρω έρευνα θα μπορούσαν να αποτελούν η εφαρμογή του παιχνιδιού στις ίδιες ακριβώς ομάδες μαθητών, προκειμένου να καταγραφούν και να συγκριθούν οι επιδόσεις τους, η επανάληψη της έρευνας σε μεγαλύτερο δείγμα παιδιών ή ακόμα και σε διαφορετικές ομάδες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bartolini, M., & Martignone, F. (2014). Manipulatives in Mathematics Education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 365- 463.

Henricks, T. (2009). Orderly and Disorderly Play: A Comparison. *American Journal of Play*, 2, 12–40.

Ke, F. (2015). Designing and integrating purposeful learning in game play: a systematic review. *Education Tech Research*, 64, 219–244.

Mostowfi, S., Mamaghani, N., & Khorramar, M. (2016). Designing Playful Learning by Using Educational Board Game for Children In The Age Range of 7-12: (A Case Study: Recycling and Waste Separation Education Board Game). *International Journal of Environmental and Science Education*, 11 (12), 5453- 5476

Nachimuthu, K., & Vijayakumari, G. (2011). Role of educational games improves meaningful learning. *Journal of Educational Technology*, 2(8), 25-33.

Noemi, P., & Maximo, S. (2014). Educational Games for Learning. *Universal Journal of Educational Research*, 2(3): 230-238.

Prayaga, L., & Rasmussen, K. (2008). Ontology of serious games. *Journal of Educational Technology*, 2(5), 10-21

Σκουμπουρδή, Χ. (2015). *Το παιχνίδι στη μαθηματική εκπαίδευση των μικρών παιδιών.* Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράματα και Βοηθήματα.

Susi, T., Johannesson, M., & Backlund, P. (2007). *Serious games – An overview.* Technical Report HS- IKI -TR-07-001 School of Humanities and Informatics, University of Skövde, Sweden.

Whitebread, D. (2012). *The importance of play: A report on the value of children's play with a series of policy recommendations*. University of Cambridge.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΜΑΘΗΤΩΝ Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΣΤΗ ΧΕΛΩΝΟΣΦΑΙΡΑ

Κυνηγός Χρόνης και Διαμαντίδης Δημήτρης

Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, ΦΣ, ΕΚΠΑ

kynigos@ppp.uoa.gr, dimitrd@ppp.uoa.gr

Η δομή που αποκτά το μαθηματικό περιεχόμενο όταν πρόκειται να διδαχθεί δεν είναι ανεξάρτητη από τα διαθέσιμα εργαλεία. Φώς στη σχέση αυτή μπορεί να «ρίξει» η διερεύνηση των νοημάτων που δημιουργούν οι μαθητές για τις έννοιες με τη χρήση συγκεκριμένων εργαλείων. Στην παρούσα έρευνα τάξης, αναζητούμε τα νοήματα που δημιούργησαν μαθητές/τριες της Β΄ Γυμνασίου για τη συμμετρία και άλλες έννοιες, αντιμετωπίζοντας ένα πρόβλημα κατασκευής με ψηφιακό εργαλείο. Με τη χρήση του θεωρητικού δομήματος των νοητικών πεδίων αναζητούμε τις αντίστοιχες μαθηματικές έννοιες. Μέσα από το παράδειγμα αυτό, περιγράφουμε έναν τρόπο αναζήτησης συνδέσεων μεταξύ των εννοιών, με κριτήριο τις αυθόρμητες ενέργειες των παιδιών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Με χρήση ψηφιακών μέσων τα παιδιά μπορούν να διερευνήσουν αυθόρμητα πλευρές των μαθηματικών εννοιών, που με άλλα μέσα διδασκαλίας και διερεύνησης δεν είναι φανερές (Wilensky, 2010). Αυτό μπορεί να οδηγήσει τους ερευνητές της ΔτΜ να ξανασκεφτούν τη δομή, την οργάνωση και την επιστημολογικη προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών που διδάσκονται (ibid). Για παράδειγμα, ο εντοπισμός του συμμετρικού σημείου ως προς μία ευθεία στο επίπεδο, με χειραπτικά μέσα σχετίζεται κυρίως με την έννοια της απόστασης, ενώ σε δραστηριότητα με λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας μπορεί να συσχετιστεί και με αλγεβρικές έννοιες· αφού το παιδί κατασκευάσει το συμμετρικό σημείο, τότε με σύρσιμο του αρχικού σημείου βλέπει ότι και το συμμετρικό αλλάζει θέση, άρα είναι συνάρτηση του αρχικού. Συνεπώς η έννοια της συμμετρίας, που συνηθέστερα διδάσκεται ως μέρος της Γεωμετρίας, θα μπορούσε να συνδεθεί και με έννοιες τις Άλγεβρας. Στην παρούσα έρευνα, μελετούμε τις ενέργειες των μαθητών που κάνουν κατασκευές με ψηφιακό εργαλείο, χρησιμοποιώντας αυθόρμητα τη συμμετρία και δημιουργούν προσωπικά νοήματα για αυτή (Kynigos,2015;Kynigos et al,in press). Μέσα από τις παρατηρήσεις μας και με το θεωρητικό δόμημα των νοητικών πεδίων του Vergnaud (2009), ως εργαλείο ανάλυσης των μαθηματικών έννοιων, εντοπίζουμε -στο πνεύμα του Wilensky (2010)- περαιτέρω συσχετίσεις της συμμετρίας με άλλες έννοιες, όπως αυτή των μοτίβων (ibid).

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ο όρος νοητικό πεδίο χρησιμοποιείται από το Vergnaud (2009) για να περιγράψει το αμάλγαμα ενός συνόλου καταστάσεων και ενός συνόλου μαθηματικών εννοιών με αναγκαίες τις διάθεσιμες αναπαραστάσεις των εννοιών, αλλά και τα γνωστικά σχήματα που επιστρατεύει το άτομο για να αντιμετωπίσει τις καταστάσεις αυτές. Για παράδειγμα, για τον εντοπισμό του συμμετρικού ενός σημείου ως προς μία ευθεία επιστρατεύονται σχήματα, όπως το δίπλωμα του χαρτιού πάνω στην ευθεία. Η κατάσταση διερμηνεύεται από τις έννοιες του μήκους, του μέσου ενός ευθ. τμήματος και του άξονα συμμετρίας. Το γνωστικό σχήμα λειτουργεί χρησιμοποιώντας μαθηματικές ιδιότητες ή προτάσεις, όπως «το μέσο του ευθ. τμήματος με άκρα τα συμμετρικά σημεία, βρίσκεται στον άξονα συμμετρίας». Ο Vergnaud, για να ερμηνεύσει τη λειτουργία των γνωστικών σχημάτων του ατόμου χρησιμοποιήσε τους όρους έννοιες-σε-δράση και θεωρήματα-σε-δράση (ibid). Για παράδειγμα, οι έννοιες του μήκους, του μέσου και του άξονα είναι έννοιες-σε-δράση και η παραπάνω πρόταση που αφορά τις έννοιες είναι ένα θεώρημα-σε-δράση. Λειτουργικά, οι έννοιες και τα θεωρήματα-σε-δράση έχουν αμετάβλητο χαρακτήρα συγκριτικά με τα σχήματα του ατόμου. Σημαντική για την παρούσα έρευνα είναι η οπτική της μαθηματικής έννοιας ως ένα σύνολο καταστάσεων, ένα σύνολο λειτουργικών σταθερών (έννοιες και θεωρήματα-εν-δράση) και ένα σύνολο αναπαραστάσεων (Vergnaud, 2009).

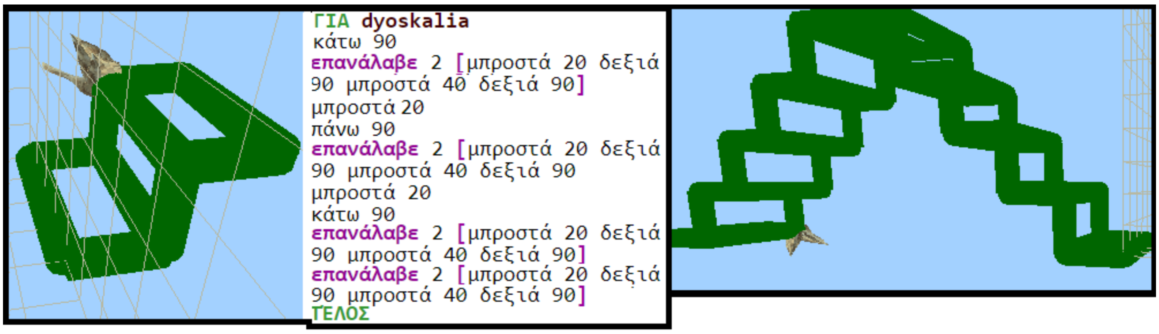
Ο ρόλος των ψηφιακών εργαλείων έκφρασης, στην παρούσα έρευνα είναι διττός. Από τη μία στοχεύσαμε στο σχεδιασμό ενός προβλήματος σε μαθησιακό περιβάλλον που έδωσε ευκαιρίες στα παιδιά να εμπλακούν σε γνήσια διερευνητικές δραστηριότητες και αυθόρμητα να δημιουργήσουν προσωπικά νοήματα για τα μαθηματικά (Hoyles, 2005; Kynigos, 2006). Από την άλλη μας βοήθησε να παρατηρήσουμε λεπτομερέστερα μέσα από τις ενέργειες των παιδιών, τους μηχανισμούς δημιουργίας τέτοιων νοημάτων και άρα να διακρίνουμε τα γνωστικά σχήματα που λειτούργησαν, προσπαθώντας να χρησιμοποιήσουν μαθηματικές έννοιες για να λύσουν το πρόβλημα που τους θέσαμε. Το λογισμικό που χρησιμοποιήσαμε στην έρευνα είναι η 'Χελωνόσφαιρα', που υποστηρίζει τον προγραμματισμό σε Logo, σε συνδυασμό με το δυναμικό χειρισμό των σχημάτων. Η δυνατότητα της συμβολικής έκφρασης μέσω της Logo πιστεύουμε ότι χρησιμοποιήθηκε από τους μαθητές/τριες όπως περιμέναμε, δηλαδή ως μέσο χειρισμού σχέσεων με νόημα για αυτούς/ες στην υλοποίηση της κατασκευής τους (Dubinsky, 2000; Kynigos & Psycharis, 2003). Αυτό είναι συμβατό με το λειτουργικό χαρακτήρα των νοητικών πεδίων του Vergnaud (2009) κάτι που αιτιολογεί την επιλογή των θεωρητικών δομημάτων που χρησιμοποιήσαμε στην ανάλυσή μας. Οι μαθητές/τριες έκαναν κατασκευές ξεκινώντας από έναν «μικρόκοσμο» στη Χελωνόσφαιρα, δηλαδή από ένα ψηφιακό εργαλείο σχεδιασμένο να ευνοεί την υλοποίηση προσωπικών κατασκευών και τη δημιουργία νοημάτων από τα παιδιά, που δούλευαν κατά ομάδες και δημοσιοποιώντας τα δομήματά τους. Σε ένα τέτοιο μαθησιακό περιβάλλον, σύμφωνα με τους Papert και Harel (1991) η δημιουργία νοημάτων συμβαίνει φυσιολογικά. Η αρχική κατασκευή που δόθηκε στα παιδιά είχε τα χαρακτηριστικά ενός «μισοψημένου μικρόκοσμου» (Kynigos, 2007). Οι μισοψημένοι μικρόκοσμοι προκαλούν τα παιδιά να εμπλακούν με το μαστόρεμα υποστηρίζοντας τη μάθηση μέσα αυτό (Healy & Kynigos, 2010), αφού σχεδιάζονται ώστε να είναι ημιτελείς και ταυτόχρονα να αποτελούν πρόκληση για τους μαθητές, να τους επιδιορθώσουν, λύνοντας προβλήματα που συναντούν και προσπαθώντας να φτιάξουν νέες κατασκευές, όπως στην δική μας περίπτωση.

Για την ανάλυση, λόγω του είδους του ψηφιακού εργαλείου και του μικρόκοσμου, χρησιμοποιήσαμε το μοντέλο UDGS των Hoyles και Noss (1987) που περιγράφει τη διαδικασία εμπλοκής των μαθητών/τριών σε μαθηματικές δραστηριότητες (Kynigos, 2006). Πρώτα χρησιμοποιούν (Use) μαθηματικές και μη μαθηματικές έννοιες χωρίς να έχουν να έχουν πλήρη συναίσθηση της σημασίας τους. Στη συνέχεια διακρίνουν (Discriminate) στοιχεία μαθηματικών και τη χρήση τους πίσω από τις κατασκευές τους. Μέσα από την παρατήρηση μοτίβων των εντολών Logo που χρησιμοποιήθηκαν οι μαθητές γενικεύουν (Generalize) τις ιδέες τους και τέλος τις συσχετίζουν (Synthesize) με τα τυπικά μαθηματικά που τις διέπουν.

Η ΕΡΕΥΝΑ

Στην έρευνα αυτή δώσαμε σε μαθητές/τριες Β΄ Γυμνασίου έναν μισοψημένο μικρόκοσμο στη Χελωνόσφαιρα (http://etl.ppp.uoa.gr/malt2/), όπως προαναφέρθηκε. Πρόκειται για ένα διαδικτυακό περιβάλλον τρισδιάστατης Γεωμετρίας (προϊόν του ΕΚΠΑ/ΕΕΤ) που ενσωματώνει το μαθηματικό συμβολισμό μέσω του προγραμματισμού, με γλώσσα Logo, και το δυναμικό χειρισμό τρισδιάστατων αντικειμένων με χρήση ολισθητών. Στο περιβάλλον φαίνονται τρία κύρια παράθυρα. Στο ένα ο χρήστης γράφει εντολές ή συνθέτει προγράμματα, στο δεύτερο υπάρχει η οντότητα που θα εκτελέσει τις εντολές με τις κινήσεις της και στο τρίτο υπάρχει η δυνατότητα εμφάνισης ολισθητών. Μία οντότητα βρίσκεται μέσα σε μία 3D 'σκηνή' και κινείται μπροστά και πίσω κατά συγκεκριμένο αριθμό βημάτων, στρίβει δεξιά, αριστερά, πάνω, κάτω και περιστρέφεται κατά συγκεκριμένο αριθμό μοιρών, σύμφωνα με την αντίστοιχη εντολή. Π.χ. με τη σειρά εντολών 'μπροστά 30 δεξιά 60 μπροστά 40' η χελώνα κινείται μπροστά 30 βήματα, στρίβει δεξιά 60^o και κινείται μπροστά 40 βήματα, σχηματίζοντας με το ίχνος της μια γωνία 120^o στον τρισδιάστατο χώρο.

Ο μισοψημένος μικρόκοσμος που δόθηκε στα παιδιά ήταν 'τα δύο-σκαλιά' (εικόνα 1α). Πρόκειται για ένα πρόγραμμα Logo κατασκευής δύο σκαλοπατιών, που χρησιμοποιεί εντολές κίνησης μπροστά, στροφής δεξιά και κάτω και δομή επανάληψης. Η πρόκληση για τους μαθητές (και το ζητούμενο της δραστηριότητας) ήταν αρχικά να κατασκευάσουν μία σκάλα με περισσότερα σκαλιά (όσα ήθελαν) και στη συνέχεια να φτιάξουν δύο σκάλες συνεχόμενες, που η μία να ήταν ανοδική (όπως στο δοσμένο μικρόκοσμο) και η άλλη καθοδική. Ο αρχικός μικρόκοσμος δεν μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως είχε για την κατασκευή της σκάλας, γιατί οδηγούσε σε κατασκευές που δεν ήταν οι ζητούμενες. Η επιλογή του μικρόκοσμου έγινε ώστε να είναι ανοικτός σε διαφορετικές λύσεις, κατασκευές και προεκτάσεις, χωρίς να «υπονοεί» την ανάγκη χρήσης συγκεκριμένου μαθηματικού περιεχομένου (όπως π.χ. η συμμετρία ή χρήση μεταβλητής) από τα παιδιά. Μια μορφή της ζητούμενης σκάλας φαίνεται στην εικόνα 1β.



Εικόνα 1: α) Αριστερά τα «δύο σκαλιά» και β) δεξιά μία περίπτωση του σχήματος της ζητούμενης σκάλας.

Το κεντρικό ερευνητικό μας ερώτημα ήταν: Ποια είναι τα προσωπικά νοήματα για τα μαθηματικά που δημιουργούν αυθόρμητα οι μαθητές/τριες σε μία κατασκευαστική δραστηριότητα, χωρίς εμφανές μαθηματικό περιεχόμενο; Ποιες σχετικές μαθηματικές έννοιες αναδεικνύονται;

Η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Κατά την εφαρμογή στην τάξη, η μεθοδολογία που χρησιμοποιήσαμε ήταν αυτή της ‘έρευνας σχεδιασμού’ (‘design experiments’, (Collins et al., 2004)). Εφαρμόσαμε μια διδακτική παρέμβαση αναζητώντας τις σχέσεις μεταξύ της δημιουργίας μαθηματικών νοημάτων από τους/τις μαθητές/τριες, της χρήσης του μικρόκοσμου που χρησιμοποίησαν οι μαθητές/τριες και των εργαλείων-λειτουργιών της ‘Χελωνόσφαιρας’. Η παρέμβαση πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο πληροφορικής Γυμνασίου της Αθήνας, στα πλαίσια του ομίλου μαθηματικών και είχε διάρκεια τέσσερις διδακτικές ώρες, σε δύο δίωρα μέσα σε δύο εβδομάδες. Στην εφαρμογή συμμετείχαν οκτώ μαθητές/τριες της Β΄ τάξης του Γυμνασίου και δύο ερευνητές, ως συμμετέχοντες παρατηρηρές. Από τους ερευνητές ένας ήταν μαθηματικός και ένας εκπαιδευτικός πληροφορικής. Ο μαθηματικός ήταν και καθηγητής των παιδιών, τα οποία ήταν εξοικειωμένα με τη Χελωνόσφαιρα και αυτό ήταν ένα κριτήριο επιλογής τους, για την έρευνα. Για τις ανάγκες της έρευνας χωρίστηκαν σε τέσσερις διμελείς ομάδες με ένα Η/Υ διαθέσιμο σε κάθε ομάδα. Η ανάλυση έγινε με βάση τα δεδομένα που συλλέχθηκαν, δηλαδή αρχεία ήχου από όλες τις συνομιλίες μαθητών μεταξύ τους, αλλά και με εκπαιδευτικούς, αρχεία βίντεο από τις οθόνες των Η/Υ με χρήση λογισμικού καταγραφής οθόνης, τα παραγόμενα και τα χειρόγραφα των μαθητών/τριών και οι σημειώσεις των ερευνητών.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Για να κατασκευάσουν οι μαθητές/τριες τη σκάλα θα βοηθούσε πρώτα να ερμηνεύσουν τις εντολές του προγράμματος των δύο σκαλιών· μετά, αφού τροποποιήσουν το αρχικό πρόγραμμα, να ορίσουν νέο πρόγραμμα επαναλαμβάνοντας την κατάλληλη ομάδα εντολών που φτιάχνει ένα σκαλοπάτι (εικόνα 2α, μπλέ πλαίσιο) τόσες φορές, όσες το πλήθος των σκαλοπατιών που ήθελαν να έχει η σκάλα. Για να κατασκευάσουν τη συνεχόμενη καθοδική σκάλα ένας τρόπος ήταν να μετατρέψουν το πρόγραμμα της ‘ανοδικής’ σκάλας, ώστε η οντότητα να φτιάχνει σκάλα ‘κατεβαίνοντας’, όπως τελικά έκαναν αρκετές ομάδες παιδιών της έρευνας. Η ανάλυση εστιάζει σε σχετικές ιδέες ομάδων μαθητών/τριων για την καθοδική σκάλα και στις κατασκευές τους.

Μία ομάδα μαθητών (Α) σκέφτηκε να φτιάξει ένα πρόγραμμα ως εξής. Για την ανοδική σκάλα επανέλαβαν τις εντολές του μπλε πλαισίου αρκετές φορές στο πρόγραμμα. Στο κατέβασμα θα έκαναν το ίδιο αλλά με μία διαφορά. Αντικατέστησαν παντού την εντολή ‘πάνω’ με την εντολή ‘κάτω’ και αντίστροφα (εικόνα 2α, β). Στο παρακάτω απόσπασμα φαίνεται μέρος των συζητήσεών τους (ονομάζουμε τους μαθητές Α1 και Α2) μέχρι να καταλήξουν στην παραπάνω κατασκευή-λύση:

135 Α1: Για τα «δύο σκαλιά» (η οντότητα) πάει μπροστά 20, μετά στρίβει δεξιά 90 μοίρες και ξανά μπροστά. Κάνει γωνιά και ξανά γωνία.

136 Α2: Για κάτσε, άρα φτιάχνει ορθογώνιο και μετά το ξαναφτιάχνει «όρθιο», αφού πρώτα πάει «πάνω 90».

137 Α1: Ναι, για να γίνει η γωνία αυτή του σκαλιού. Το «πάνω 90» είναι για να γίνουν τα δύο ορθογώνια κάθετα μεταξύ τους, για να φτιαχτεί σκαλοπάτι. Βλέπεις; Μετά ξανά «κάτω 90» για να φτιάξει το επόμενο σκαλοπάτι.

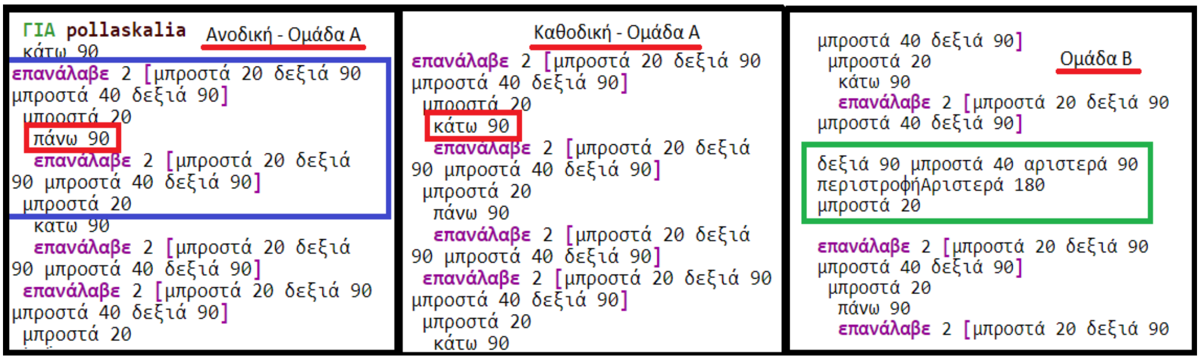
Στο παραπάνω απόσπασμα φαίνεται ότι οι μαθητές αρχικά χρησιμοποιούν μαθηματικές και μη μαθηματικές έννοιες (136: […] φτιάχνει ορθογώνιο […]) για να περιγράψουν την κατασκευή. Στη συνέχεια (137) ο Α1 περιγράφει την κατασκευή μίας δίεδρης γωνίας, λέγοντας «δύο ορθογώνια κάθετα μεταξύ τους», μία έκφραση πιο τυπική από το «όρθιο ορθογώνιο» ως προς τα μαθηματικά που χρησιμοποιεί. Άρα, σύμφωνα με το UDGS οι μαθητές μεταβαίνουν από τη φάση της χρήσης σε αυτή της διάκρισης.

152 Α1: Άρα εμείς, για να κατεβαίνει θα πάμε «κάτω 90», αντί για «πάνω 90», θα αλλάξουμε τα «κάτω» με τα «πάνω» στο πρόγραμμα. Εκεί που η μία (σκάλα) ανεβαίνει, η άλλη θα κατεβαίνει.

153 Α2: Ωραία, ας δούμε τις γραμμές του προγράμματος… ανάμεσα σε 2 «επανάλαβε» έχει «πάνω», αυτό θα γίνει «κάτω» και τα άλλα «κάτω» θα γίνουν «πάνω», ομοιόμορφα. Θα έχουμε ακριβώς το ίδιο πρόγραμμα, αλλά με αυτές τις αλλαγές. Πάει σε κάθε σκαλί είτε της αριστερής, είτε της δεξιάς σκάλας «μπροστά 20», άρα οι σκάλες είναι «ίδιες».

154 Α1: Τότε να βάλουμε π.χ. τόσες φορές, ας πούμε χ φορές τις ίδιες εντολές όπως λέει «επανάλαβε 2», να βάλουμε επανάλαβε χ όλα αυτά, για χ να έχουμε σκαλιά; Να ρωτήσουμε αν γίνεται.

Στο απόσπασμα φαίνεται ότι οι μαθητές περνούν στη φάση της γενίκευσης, παρατηρώντας το μοτίβο που υπάρχει (153: ένα «πάνω» ανάμεσα από δύο «επανάλαβε») και που κατασκευάζει ολόκληρη τη σκάλα. Η παρατήρηση αυτή αιτιολογείται και από την πρόταση του Α1, για τη χρήση του γενικευμένου αριθμού χ, ως πλήθος των σκαλιών.



Εικόνα 2: α) Αριστερά η ανοδική σκάλα και β) στη μέση η καθοδική σκάλα της ομάδας Α. γ) Δεξιά οι εντολές που χρησιμοποίησε η ομάδα Β για να «αναποδογυρίσει» την οντότητα.

Χρησιμοποιώντας το μοτίβο, εφαρμόζουν την ιδέα τους, που είναι να κάνουν «ομοιόμορφες» αλλαγές σε αυτό (153), ώστε η νέα σκάλα να είναι «ίδια» με την ανοδική, αλλά να κατεβαίνει (152-154). Η παρατήρηση του μαθητή Α2 για την εντολή «μπροστά 20» (153) εξασφαλίζει ότι πρόκειται ουσιαστικά για το ίδιο μοτίβο που επαναλαμβάνεται κατοπτριζόμενο. Χωρίς να εκφράζεται με τυπικά μαθηματικά, η συμμετρία του σχήματος υποδηλώνεται από τη συμμετρία των δύο προγραμμάτων-μοτίβων.

Οι μαθήτριες Β1 και Β2 της ομάδας Β, για την ανοδική σκάλα έκαναν το ίδιο με την Α, όμως για την καθοδική έστεψαν την οντότητα πάνω-κάτω και πρόσθεσαν στη συνέχεια τις εντολές της ανοδικής σκάλας, με αποτέλεσμα το αντικείμενο που προέκυπτε να ήταν η καθοδική σκάλα. Ενδιαφέρον έχει το σημείο που αποφάσισαν πώς θα κατασκευάσουν την καθοδική σκάλα:

257 Β1: Αν γυρίσουμε την ανοδική σκάλα, ανάποδα, τότε αυτή γίνεται καθοδική.

258 Β2: Πώς θα τη γυρίσουμε ανάποδα; Να την περιστρέψουμε;

259 Β1: Αν γυρίσουμε το σπουργίτι πάνω-κάτω δηλ 180 μοίρες τότε, όταν θα πηγαίνει πάνω, θα είναι σαν να κατεβαίνει για εμάς.

Μετά από αρκετές δοκιμές κατασκεύασαν μια μικρή ομάδα εντολών (εικόνα 2γ, πράσινο πλαίσιο) και με την προσθήκη της σε κατάλληλο σημείο του προγράμματος πέτυχαν το στόχο τους:

283 Β1: Με περιστροφήΑριστερά 180, απλά γυρίζει ανάποδα το σπουργίτι! Δεν είναι στη σωστή θέση και η καθοδική σκάλα βγαίνει αλλού!

284 Β2: Τότε να προσθεσουμε κάποιες εντολές, να φτιάχνει ορθογώνιο με διαστάσεις 20 και 40, ώστε να βρεθεί (το σπουργίτι) στην

σωστή θέση πριν αρχίσει να φτιάχνει την καθοδική σκάλα.

Οι μαθήτριες ξεκίνησαν παρατηρώντας το σχήμα και τη συμμετρία του, όπως φαίνεται από τη φράση «ανάποδα η ανοδική σκάλα γίνεται καθοδική» (257). Στα 258-259 οι μαθήτριες μιλούν για περιστροφή 180 μοιρών κάνοντας πιο συγκεκριμένο τι είδους συμμετρία τους είναι χρήσιμη, άλλα χωρίς να χρησιμοποιούν μόνο τυπικούς όρους. Η δήλωση της Β1 (283) περιγράφει τι κάνει η εντολή «περιστροφήΑριστερα 180» και γιατί αυτό δεν αρκεί. Με μαθηματικούς όρους θα λέγαμε ότι η απλή περιστροφή της οντότητας γύρω από τον άξονά της δεν αρκεί για την κατασκευή της συμμετρικής σκάλας καθώς η θέση της στο 3D χώρο δεν είναι κατάλληλη. Έτσι επιλέγουν (284) να «μεταφέρουν» το κέντρο περιστροφής. Οι μαθήτριες φαίνεται να χρησιμοποιούν τις εντολές Logo, για να μεταβάλουν τον τρόπο λειτουργίας της συμμετρίας εκ περιστροφής στο συγκεκριμένο μικρόκοσμο και να υλοποιήσουν την ιδέα τους. Σύμφωνα με το UDGS θα λέγαμε ότι περνούν από τη φάση της χρήσης στη φάση της διάκρισης.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Αναλύοντας τις ενέργειες των μαθητών/τριών φαίνεται ότι αντιμετωπίζοντας την πρόκληση με τη διπλή σκάλα δημιούργησαν νοήματα σχετικά με τη συμμετρία στο χώρο. Δεν ισχυριζόμαστε ότι η συμμετρία ήταν μία νέα έννοια για τους μαθητές, αφού η σχετική χωρική αντίληψη των παιδιών ήταν καλλιεργημένη. Όμως ως γεωμετρική έννοια δεν ήταν οικεία καθώς μέχρι την περίοδο που πραγματοποιήθηκε η έρευνα οι μαθητές δεν είχαν διδαχθεί πώς να κατασκευάζουν συμμετρικά μέρη σε ήδη δοσμένα σχήματα. Η τρισδιάστατη υπόσταση της σκάλας δημιούργησε μία πρόσθετη πολυπλοκότητα στην κατασκευή. Η συμμετρία εκφράστηκε με δύο συνδεδεμένες αναπαραστάσεις από κάθε ομάδα· την οπτική στην 3D σκηνή της Χελωνόσφαιρας που προέκυψε όμως από την συμβολική, δηλαδή τις εντολές που άλλαξαν. Και ενώ το οπτικό αποτέλεσμα ήταν ίδιο και για τις δύο ομάδες, η ανάλυση των ενεργειών με τις εντολές Logo δείχνει τη διαφορετικότητα των στρατηγικών. Στην περίπτωση της ομάδας Α έχουμε αλλαγή των εντολών ‘πάνω’ με ‘κάτω’, ενώ η ομάδα Β αντιμετωπίζει το πρόβλημα καθολικότερα προκαλώντας μία στροφή 180 μοιρών κάνοντας τη σκάλα από ανοδική, καθοδική (αποσπάσματα 257-284 και εικόνα 2γ). Πώς όμως μπορούμε να δούμε τη δημιουργία νοημάτων για τη συμμετρία κάτω από το πρίσμα της θεωρίας των νοητικών πεδίων;

Θα λέγαμε ότι οι δύο ομάδες είχαν να αντιμετωπίσουν την ίδια κατάσταση, την κατασκευή συμμετρικού σχήματος. Όμως για να την αντιμετωπίσουν χρησιμοποίησαν διαφορετικά γνωστικά σχήματα. Η ομάδα Α χρησιμοποίησε τη συμμετρική αλλαγή των εντολών του προγράμματος, που ως γνωστικό σχήμα ας το ονομάσουμε «συμμετρικές αλλαγές σημείο-σημείο». Οι μαθητές διερεύνησαν το μοτίβο της ανοδικής σκάλας και άλλαξαν, ότι έπρεπε να αλλάξει σε κάθε όρο του, ώστε να κατασκευάσουν το πρόγραμμα της καθοδικής σκάλας. Οι διαφορές μεταξύ των δύο προγραμμάτων είναι κατά μία έννοια κατοπτρικές. Αυτό ανταποκρίνεται και στο σχήμα της σκάλας που είναι συμμετρικό ως προς κατακόρυφο επίπεδο. Ως λειτουργικές σταθερές θα μπορούσαν να θεωρηθούν οι νόμοι του κατοπτρισμού και της αναγνώρισης-τροποποίησης μοτίβου (θεωρήματα-σε-δράση), το μοτίβο και το επίπεδο συμμετρίας (έννοιες-σε-δράση). Η ομάδα Β φαίνεται να χρησιμοποίησε ένα διαφορετικό γνωστικό σχήμα, αυτό της περιστροφής μέρους ενός σχήματος γύρω από άξονα και η μετατόπισή του, ώστε να προκύψει συμμετρικό σχήμα· οι αλλαγές στις εντολές δεν έγιναν σημείο-σημείο, όπως στην περίπτωση της ομάδας Α, αλλά μετέβαλαν τη θέση της οντότητας που θα κατασκεύαζε την καθοδική σκάλα σε σχέση με την ανοδική. Οι μαθήτριες αντιμετώπισαν το αντικείμενο-σκάλα καθολικότερα και όχι ως επαναλαμβανόμενο μοτίβο. Οι λειτουργικές σταθερές μοιάζουν να είναι οι κανόνες της μετατόπισης, της συμμετρίας λόγω περιστροφής (θεώρημα-σε-δράση) και ο άξονας περιστροφής (έννοια-σε-δράση). Η ομάδα Β δε χρησιμοποίησε το μοτίβο ως έννοια-σε-δραση και αυτό υπό το πρίσμα του UDGS, ίσως σχετίζεται με το εξής: Η ομάδα Α, έφτασε στη γενίκευση, γιατί χρειάστηκε να μπει στις λεπτομέρειες του μοτίβου (συμμετρικές αλλαγές σημείο-σημείο), ώστε να το αλλάξει. Αντιθέτως, η ομάδα Β που χρησιμοποίησε την ανοδική σκάλα σαν ενιαίο αντικείμενο και όχι ως μοτίβο, έφτασε μέχρι τη φάση της διάκρισης.

Το κοινό σημείο, μέσα από την ανάλυση των δεδομένων για τους/τις μαθητές/τριες των δύο ομάδων είναι ότι τα μαθηματικά νοήματα που δημιούργησαν μέσω των κατασκευών τους, σύμφωνα με τη σχετική θεωρία, αντιστοιχούν στο νοητικό πεδίο της συμμετρίας. Στην περίπτωση της ομάδας Α διαφαίνεται η έννοια της κατοπτρικής συμμετρίας αλλά και η χρήση ενός μοτίβου (ταυτόχρονα σε σχήμα και πρόγραμμα Logo), ενώ σε αυτή της Β η συμμετρία εκ περιστροφής και η μετατόπιση· ενώ η ομάδα Β παρέμεινε σε γεωμετρικό πλαίσιο, η ομάδα Α θα μπορούσε, ίσως, να συνεχίσει την κατασκευή με χρήση αλγεβρικού συμβολισμού.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην παρούσα έρευνα προσπαθήσαμε να διακρίνουμε τις λεπτομέρειες στις αυθόρμητες ενέργειες των μαθητών/τριών που ενεπλάκησαν σε μία κατασκευή χωρίς πρόδηλο μαθηματικό περιεχόμενο. Βασικά στοιχεία της μελέτης ήταν, η Χελωνόσφαιρα που προσέφερε την ευκαιρία στους/στις μαθητές/τριες να υλοποιήσουν τις ιδέες τους και η επιλογή του θεωρητικού πλαισίου που μας βοήθησε να μιλήσουμε για τα νοήματα που δημιούργησαν τα παιδιά σε σχέση με τις τυπικές έννοιες των μαθηματικών, όχι σε σύγκριση με αυτές. Θεωρούμε ότι αντίστοιχες έρευνες με χρήση ψηφιακών εργαλείων έκφρασης θα μπορούσαν να δείξουν την ευρύτητα του νοητικού πεδίου της συμμετρίας και άλλων πεδίων. Τα συμπεράσματα θα ήταν χρήσιμα στον αναστοχασμό επί της δομής του μαθηματικού περιεχομένου που διδάσκεται και στην έρευνα του εκπαιδευτικού σχεδιασμού με βάση τα σύγχρονα μαθησιακά μέσα ή περιβάλλοντα και τις λειτουργικότητές τους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyz, K. (2004). Design Research: Theoretical And Methodological Issues. *The Journal of Learning Sciences*, *13*(1), 15-42.

Dubinsky, E. (2000). Meaning and Formalism in Mathemtics. *International Journal of Computers for Mathmatical Learning*, *5*, 211-240.

Healy, L., & Kynigos, C. (2010). Charting the microworld territory over time: design and construction in mathematics education. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *42*(1), 63-76.

Hoyles, C. (2005). Making Mathematics and Sharing Mathematics: Two Paths to Co-costructingg Meaning? Στο *Meaning in Mathematics Education*. New York, USA: Spinger.

Hoyles, C., & Noss, R. (1987). Seeing what matters: Developing an understanding of the concept of parallelogram through a Logo micrworld. Στο J. Bergeron, N. Herscovics, & K. C. (Επιμ.), *Proceedings of the 12th PME International COnferenc*, *2*, σσ. 17-24.

Kynigos, C. (2007a). Half-baked Microworlds in Use in Challenging teacher educators' knowing. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *12*(2), σσ. 87-111.

Kynigos, C. (2015). Constructionism: Theory of Learning or Theory of Design? Στο S. J. Cho (Επιμ.), *Constructionism: Theory of Learning or Theory of Design?* (σσ. 417- 438). Springer International Publishing.

Kynigos, C., & Psycharis, G. (2003). 13 year old's Meanings Around Intrinsic Curves with a Medium for Symbolic Expression and Dynamic Manipulation. Στο N. Paterman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Επιμ.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, *3*, σσ. 165-172.

Kynigos, C., & Zantzos, I. (in press). Constructing the shortest path on a cylindrical surface. *Proceedings of the 10th CERME conference.* Dublin.

Vergnaud, G. (2009). The Theory of Conceptual Fields. *Human Development*, *52*, 83-94.

Wilensky, U. (2010). Restructurations: Reformulating knowledge disciplines throw new representational forms. Στο J. Clayson, & I. Kalas (Επιμ.), *Constructionism 2010.* Paris.

Κυνηγός, Χ. (2006). *Το Μάθημα της Διερεύνησης.* Αθήνα: Ελληνικά γράμματα.

ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΓΙΓΜΑ ΟΘΟΝΗΣ ΜΑΘΕ, ΣΧΕΔΙΑΣΕ ΚΑΙ ΔΙΔΑΞΕ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΑΝΑΦΥΟΜΕΝΕΣ ΣΚΕΨΕΙΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΔΙΕΤΟΥΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΕΠΙΜΟΡΦΩΣΗΣ ΣΤΟ ΚΥΠΡΙΑΚΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

Κυριακίδης Ο. Ανδρέας και Μελετίου-Μαυροθέρη Μαρία

Ευρωπαϊκό Πανεπιστήμιο Κύπρου

A.Kyriakides@external.euc.ac.cy M.Mavrotheris@euc.ac.cy

Στην παρούσα ερευνητική εργασία υποστηρίζουμε την ανάγκη επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών στο πώς μπορεί η τεχνολογία φορητών συσκευών iPad ή android tablet να αξιοποιηθεί στη διδασκαλία των μαθηματικών. Οι ερευνητές συνοψίζουν τα βασικά στάδια σχεδιασμού και εκπόνησης μιας πολυδιάστατης διετούς ενδοσχολικής επιμόρφωσης σε δύο δημοτικά σχολεία της κυπριακής επαρχίας. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων υπογραμμίζει την αναγνώριση εκ μέρους των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών της αξίας μιας καλοσχεδιασμένης ενσωμάτωσης τεχνολογίας φορητών συσκευών στη διδακτική πράξη και, αφετέρου, καταδεικνύει την προθυμία των εν υπηρεσία εκπαιδευτικών να επιμορφωθούν βιωματικά.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αν και η παραδοσιακή, δασκαλοκεντρική προσέγγιση στη διδασκαλία των μαθηματικών αρνείται πεισματικά να εγκαταλείψει τη σχολική τάξη, μια τάση προς υιοθέτηση ενός πιο ενεργητικού, τεχνολογικά υποστηριγμένου μαθησιακού περιβάλλοντος διαφαίνεται σε αριθμό πρωτοβουλιών παγκοσμίως. Μια υποσχόμενη πρόταση αφορά στη χρησιμοποίηση των οθονών αφής όπως τα Apple iPads και τα Android tablets ως εργαλεία εννοιολογικής οικοδόμησης μαθηματικής γνώσης. Τα tablets, τα smart phones και άλλες κινητές συσκευές καθίστανται υπό τον φακό αυτής της προοπτικής τυπικά μαθησιακά εργαλεία και η υιοθέτησή τους στην τάξη προβάλλει πλέον ως μια αναγκαιότητα (Johnson et al., 2013). Η υπάρχουσα βιβλιογραφία υπογραμμίζει τη σημαντική δυναμική της τεχνολογίας φορητών συσκευών προς την κατεύθυνση του εμπλουτισμού της μαθηματικής παιδαγωγικής. Αυτό επιτυγχάνεται με τη δημιουργία εκπαιδευτικών πλαισίων απόλυτα συμβατών με τα δεδομένα και απαιτήσεις του 21ου αιώνα (Clark & Luckin, 2013; Henderson & Yeow, 2012; Melhuish & Falloon, 2010).

Στον αντίποδα όμως της πληθώρας των υποσχόμενων πλεονεκτημάτων της τεχνολογίας αυτής καθαυτήν, στέκει η παραδοχή ότι η επιτυχία των συσκευών αφής ως εργαλεία αναζωογόνησης της μαθηματικής διδασκαλίας εξαρτάται από τις ικανότητες του εκπαιδευτικού να αξιοποιήσει στο μέγιστο την προσφερόμενη τεχνολογία (Becker, 2007). Ερευνητικοί κύκλοι (π.χ. Blackwell, 2014) υποστηρίζουν ότι είναι πολύ πιο απαιτητικό, από ότι θα μπορούσε κανείς να προβλέψει, για τους εκπαιδευτικούς να παρακολουθούν ενεργά την καλπάζουσα πορεία της ψηφιακής τεχνολογίας. Ως εκ τούτου, πολλοί εκπαιδευτικοί παραμένουν απροετοίμαστοι και αδυνατούν να εφαρμόσουν τις συγκεκριμένες τεχνολογίες στη διδακτική πράξη. Για να επιτευχθούν λοιπόν οι απαραίτητες αλλαγές στη διδασκαλική νοοτροπία που θα καταστήσουν ικανό το σώμα της μαθηματικής παιδείας να επωφεληθεί των δυνατοτήτων των οθονών αφής, είναι ζωτικής σημασίας να δοθεί υψηλής ποιότητας επιμόρφωση τόσο σε εν ενεργεία όσο και σε υποψήφιους εκπαιδευτικούς η οποία θα τους εξοπλίσει με την απαιτούμενη γνώση και δεξιότητες.

Η παρούσα έρευνα εστιάζεται στην επιμόρφωση του διδακτικού προσωπικού δύο δημοτικών σχολείων της κυπριακής επαρχίας. Βασιζόμενοι στο εννοιολογικό πλαίσιο των Mishra και Koehler (2006) της Τεχνολογικής Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου (ΤΠΓΠ – TPACK), οι ερευνητές οργάνωσαν και διεκπεραίωσαν μια πολυδιάστατη ενδοσχολική επιμόρφωση. Το πρόγραμμα αποσκοπούσε στην υποστήριξη των δασκάλων των συμμετεχόντων σχολείων με γνώση, δεξιότητες, αυτοπεποίθηση και πρακτική εμπειρία, συστατικά απαιτούμενα για μια αποτελεσματική αξιοποίηση των οθονών αφής ως εργαλεία για ενίσχυση των κινήτρων των μαθητών και κατ’ επέκταση της μάθησης ουσιαστικών μαθηματικών.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Δείγμα – Ερωτήματα προς διερεύνηση

Η συγκεκριμένη έρευνα ήταν διετής και έλαβε χώρα σε δύο δημόσια δημοτικά σχολεία της κυπριακής επαρχίας. Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν τα τριάντα μόνιμα μέλη του διδακτικού προσωπικού των σχολείων συμπεριλαμβανομένων και των δύο διευθυντών [4 άνδρες - 11 γυναίκες (Σχολείο Α΄) & 3 άνδρες - 12 γυναίκες (Σχολείο Β΄)]. Τα ερωτήματα που τέθηκαν προς διερεύνηση είναι τρία και όλα αξιολογούν τη δυνατότητα του προγράμματος επιμόρφωσης:

1. Να επηρεάσει τις στάσεις και αντιλήψεις των εκπαιδευτικών όσο αφορά στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών μέσω της τεχνολογίας οθονών αφής (Apple iPads και Android tablets).

2. Να μεταδώσει στους εκπαιδευτικούς γνώση τεχνολογικού, παιδαγωγικού περιεχομένου (TPACK) σχετική με την ενσωμάτωση των οθονών αφής στη διδασκαλία.
3. Να καταστήσει ικανούς τους εκπαιδευτικούς να μεταφέρουν και να υιοθετήσουν τις αποκτηθείσες δεξιότητες TPACK στη διδακτική πράξη.

Συλλογή και ανάλυση δεδομένων

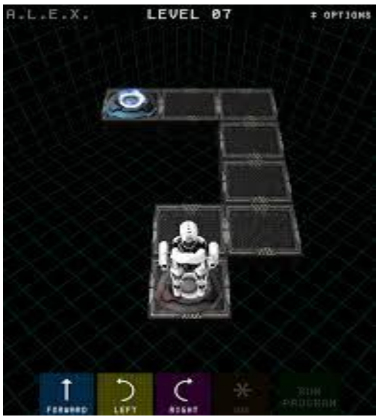
Η επιμόρφωση αναπτύχθηκε κυρίως σε τρεις φάσεις ανά έτος. Κατά το πρώτο έτος του προγράμματος οι ερευνητές συνεργάστηκαν με το διδακτικό προσωπικό του Σχολείου Α΄ ενώ κατά το δεύτερο έτος με τους εκπαιδευτικούς του Σχολείου Β΄. Καθ' όλη τη διάρκεια εφαρμογής του παρόντος ερευνητικού εγχειρήματος οι δύο πρώτες φάσεις συνέπεσαν χρονικά την ίδια μέρα ενώ η τρίτη υλοποιήθηκε δύο μήνες μετά.

Πρόγραμμα επιμόρφωσης – Φάση 1

Κατά την πρώτη φάση οι εκπαιδευτικοί του εκάστοτε συμμετέχοντος σχολείου παρακάθισαν σε βιωματικό εργαστήρι το οποίο οργάνωσε ένας εκ των ερευνητών σε ένα από τα δύο τμήματα Στ΄ τάξης του σχολείου. Η διάρκεια του εργαστηρίου ήταν 80 λεπτά, δηλαδή, δύο συνεχόμενες διδακτικές περίοδοι. Για την εύρυθμη λειτουργία της σχολικής μονάδας, 7 εκπαιδευτικοί παρακολούθησαν το εργαστήρι την πρώτη διδακτική περίοδο και οι υπόλοιποι 8 τη δεύτερη. Δάσκαλοι και διευθυντής υπό την ιδιότητα του μαθητή παρακάθισαν μαζί με τους μαθητές του συμμετέχοντος τμήματος της Στ΄ τάξης (20 μαθητές – Σχολείο Α΄ & 21 μαθητές – Σχολείο Β΄) σε 7 ομάδες (τετραμελείς ή πενταμελείς). Κάθε μικτή ομάδα (δάσκαλοι και μαθητές) είχαν το δικό τους iPad στο οποίο ήταν εγκατεστημένη η εφαρμογή A.L.E.X. Όπως εξηγούν οι Kyriakides, Meletiou-Mavrotheris και Prodromou (2015), η εν λόγω εφαρμογή συνιστά ένα διασκεδαστικό παιχνίδι, κατάλληλο για εγκατάσταση σε φορητές συσκευές iPad ή Android tablet. Έχει τη δυναμική να προάγει έμμεσα έναν αριθμό μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών ενσωματωμένων στο κυπριακό αναλυτικό πρόγραμμα. Αυτό καθίσταται εφικτό με την παροχή στον χρήστη της ευκαιρίας να σκεφτεί λογικά και να εκπονήσει στο μυαλό του σχέδια, καθώς προγραμματίζει το ρομπότ A.L.E.X. (Βλ. Εικόνα 1) με μια σειρά εντολών.

Εικόνα 1: Το ρομπότ A.L.E.X.

Στόχος είναι το καθοδηγούμενο ρομπότ να μπορέσει να διέλθει κάθε στάδιο του παιχνιδιού από την αφετηρία μέχρι το τέλος. Οι χρήστες δύνανται επίσης να «κατασκευάσουν» τα δικά τους στάδια, τα οποία θα ήθελαν ο A.L.E.X. να ακολουθήσει. Οι οδηγίες εκτέλεσης είναι απλές και συμβολικά διατυπωμένες. Για παράδειγμα, οι εντολές «προχώρησε αριστερά, δεξιά» ή «προχώρησε ευθεία» δίνονται όταν ο χρήστης αγγίξει την οθόνη της συσκευής στο συγκεκριμένο βέλος που δείχνει προς την αντίστοιχη κατεύθυνση (Βλ. Εικόνα 2).



Εικόνα 2: Εκτέλεση εντολών με ένα άγγιγμα

Οι ερευνητές ακολούθησαν την ίδια εργαστηριακή δομή και περιεχόμενο που υιοθέτησαν σε προηγούμενή τους έρευνα (Kyriakides et al, 2015). Ο σχεδιασμός του φύλλου εργασίας ήταν τέτοιος, ώστε η προσφερόμενη τεχνολογία να λειτουργήσει υποστηρικτικά στο περιβάλλον μάθησης της έννοιας της συμμετρίας.

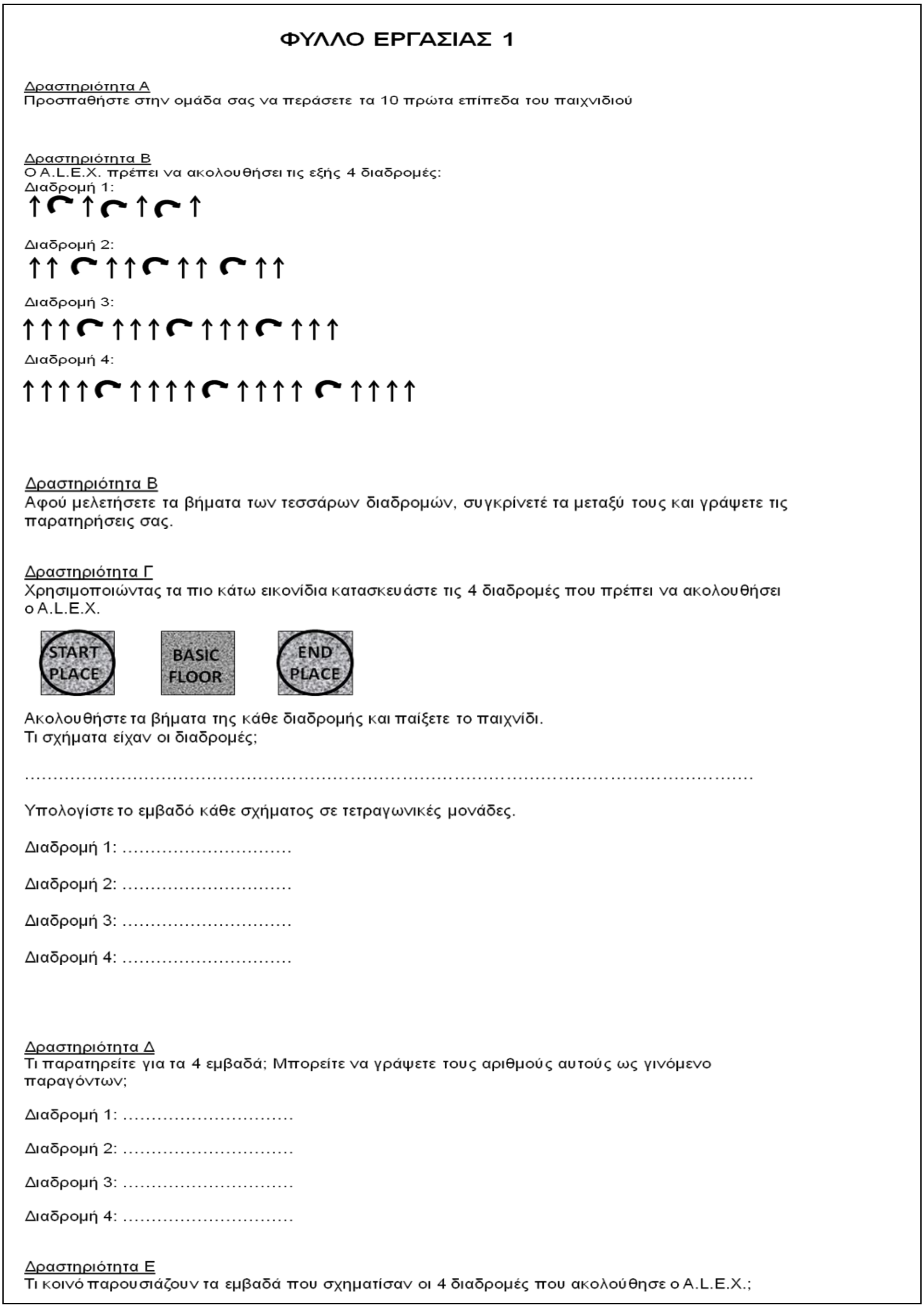
Πρόγραμμα επιμόρφωσης – Φάση 2

Κατά τη δεύτερη φάση της επιμόρφωσης παρουσιάστηκε στους συμμετέχοντες εκπαιδευτικούς των δύο σχολείων ερευνητική πρόταση. Η παρουσίαση διήρκεσε μία ώρα και έλαβε χώρα με το πέρας των μαθημάτων της μέρας που διεξήχθη το βιωματικό εργαστήρι (Βλ. Πρόγραμμα επιμόρφωσης - Φάση 1). Ένας εκ των ερευνητών αφού έκανε βιβλιογραφική ανασκόπηση σχετική με τις τεχνολογίες φορητών συσκευών αφής, ανέλυσε στους παρευρισκόμενους δεδομένα προηγούμενης διδακτικής παρέμβασης των ερευνητών (Kyriakides et al, 2015). Τα ευρήματα που συζητήθηκαν αφορούσαν μαθητικό πληθυσμό με χαρακτηριστικά όμοια με τα παιδιά των Σχολείων Α΄ και Β΄ που συμμετείχαν στο βιωματικό εργαστήρι της Φάσης 1 της επιμόρφωσης. Με τη λήξη της παρουσίασης ακολούθησε συζήτηση.

Για να εξασφαλίσουν οι ερευνητές όσο το δυνατόν πληρέστερη εικόνα των εντυπώσεων που αποκόμισαν οι εκπαιδευτικοί καθώς επίσης και των εισηγήσεών τους για την εφαρμογή των τεχνολογιών φορητών συσκευών στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών, διεξήγαγαν τις επόμενες μέρες προσωπικές συνεντεύξεις με τους εκπαιδευτικούς. Κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων οι ερευνητές ανίχνευσαν μια δεδηλωμένη προθυμία εκ μέρους των εκπαιδευτικών να εφαρμόσουν στην πράξη (Βλ. Πρόγραμμα επιμόρφωσης - Φάση 3) τη γνώση τεχνολογικού, παιδαγωγικού περιεχομένου (TPACK) που απέκτησαν.

Πρόγραμμα επιμόρφωσης - Φάση 3

Οι ερευνητές συμπρογραμμάτισαν σχέδια μαθήματος με εκπαιδευτικούς που εξέφρασαν βούληση να ενσωματώσουν τις οθόνες αφής στη διδασκαλία τους και κατόπιν προχώρησαν συλλογικά (δάσκαλος και ερευνητές) στην υλοποίηση των διδακτικών τους προτάσεων. Οι συνδιδασκαλίες έλαβαν χώρα στα τμήματα Στ΄ τάξης των δύο σχολείων δύο μήνες μετά την πρώτη και δεύτερη φάση του προγράμματος επιμόρφωσης. Για σκοπούς του παρόντος άρθρου συνοψίζεται μία εκ των διδακτικών παρεμβάσεων η οποία διήρκεσε 40 λεπτά (μια διδακτική περίοδο) και αποσκοπούσε στη διερεύνηση της έννοιας των τετράγωνων αριθμών μέσω της εφαρμογής A.L.E.X. Παρών τη μέρα του προγραμματισμένου μαθήματος ήταν πέρα από τους 20 μαθητές του συγκεκριμένου τμήματος της Στ΄ τάξης του Σχολείου Α΄ και ο διευθυντής. Ο ρόλος του τελευταίου περιορίστηκε απλά στην παρατήρηση της διδασκαλίας και μάθησης μέσω των τεχνολογιών φορητών συσκευών αφής. Τα παιδιά εργάστηκαν στη βάση δοσμένου Φύλλου Εργασίας (Βλ. Εικόνα 3) σε ομάδες των τεσσάρων ατόμων και η μέθοδος που ακολουθήθηκε ήταν η ίδια με αυτή του βιωματικού εργαστηρίου (Βλ. Πρόγραμμα επιμόρφωσης – Φάση 1).



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

Δραστηριότητα Α
Προσπαθήστε στην ομάδα σας να περάσετε τα 10 πρώτα επίπεδα του παιχνιδιού

Δραστηριότητα Β
Ο A.L.E.X. πρέπει να ακολουθήσει τις εξής 4 διαδρομές:

Διαδρομή 1:
↑ ↶ ↑ ↶ ↑ ↶ ↑

Διαδρομή 2:
↑↑ ↶ ↑↑ ↶ ↑↑ ↶ ↑↑

Διαδρομή 3:
↑↑↑ ↶ ↑↑↑ ↶ ↑↑↑ ↶ ↑↑↑

Διαδρομή 4:
↑↑↑↑ ↶ ↑↑↑↑ ↶ ↑↑↑↑ ↶ ↑↑↑↑

Δραστηριότητα Β
Αφού μελετήσετε τα βήματα των τεσσάρων διαδρομών, συγκρίνετέ τα μεταξύ τους και γράψετε τις παρατηρήσεις σας.

Δραστηριότητα Γ
Χρησιμοποιώντας τα πιο κάτω εικονίδια κατασκευάστε τις 4 διαδρομές που πρέπει να ακολουθήσει ο A.L.E.X.

START PLACE | BASIC FLOOR | END PLACE

Ακολουθήστε τα βήματα της κάθε διαδρομής και παίξετε το παιχνίδι.
Τι σχήματα είχαν οι διαδρομές;

……………………………………………………………………………………………………

Υπολογίστε το εμβαδό κάθε σχήματος σε τετραγωνικές μονάδες.

Διαδρομή 1: …………………………

Διαδρομή 2: …………………………

Διαδρομή 3: …………………………

Διαδρομή 4: …………………………

Δραστηριότητα Δ
Τι παρατηρείτε για τα 4 εμβαδά; Μπορείτε να γράψετε τους αριθμούς αυτούς ως γινόμενο παραγόντων;

Διαδρομή 1: …………………………

Διαδρομή 2: …………………………

Διαδρομή 3: …………………………

Διαδρομή 4: …………………………

Δραστηριότητα Ε
Τι κοινό παρουσιάζουν τα εμβαδά που σχημάτισαν οι 4 διαδρομές που ακολούθησε ο A.L.E.X.;

Εικόνα 3: Δραστηριότητες στους τετράγωνους αριθμούς

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι ερευνητές ανάλυσαν τις συνεντεύξεις των συμμετεχόντων εκπαιδευτικών και από τα δύο σχολεία και υπογράμμισαν τις κοινές εκφρασθείσες απόψεις. Σε συνάρτηση με τις παρατηρήσεις που αποκόμισαν από τις διδακτικές παρεμβάσεις της τρίτης φάσης, οργάνωσαν τα δεδομένα τους στη βάση των τριών αρχικών ερωτημάτων προς διερεύνηση. Η απάντηση σε κάθε ερώτημα συνοδεύεται από αποσπάσματα σχετικής απομαγνητοφωνημένης συζήτησης.

Ερώτημα 1: *Μπορεί το πρόγραμμα επιμόρφωσης να επηρεάσει τις στάσεις και αντιλήψεις των εκπαιδευτικών όσο αφορά στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών μέσω της τεχνολογίας οθονών αφής (Apple iPads και Android tablets);*

Όλο το δείγμα της έρευνας ανέδειξε τον καταλυτικό ρόλο της επιμόρφωσης στην υπέρβαση αρνητικών αντιλήψεων και στη διαμόρφωση νέων θετικών θεωρήσεων σχετικών με τη χρησιμοποίηση της οθόνης αφής στη διδακτική πράξη. Ενδιαφέρον προκαλεί το γεγονός ότι οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί δεν περιορίστηκαν μόνο στον εαυτό τους αλλά υπογράμμισαν την ανάγκη ευρύτερης επαφής του εκπαιδευτικού κόσμου με τις τεχνολογίες φορητών συσκευών. Ενδεικτική είναι η εισήγηση της Αντιγόνης για συμπερίληψη της εν λόγω τεχνολογίας στα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών.

> Αρκετοί δάσκαλοι δεν έχουν καμία επαφή με την καινούρια τεχνολογία, τη βλέπουν καχύποπτα και με κάποιο κόμπλεξ ότι δεν θα τα καταφέρουν. Η σημερινή επιμόρφωση βοηθά όλους να δούμε την ευκολία χρήσης της οθόνης αφής, πόσο εύκολο είναι να χρησιμοποιήσεις tablet και έτσι αποκτούμε μια πιο θετική στάση απέναντί τους (Άριστος).

> Βλέποντας το μάθημα, διότι αν δεν δεις νομίζω δεν μπορείς να καταλάβεις τι σημαίνει να κάνεις μαθηματικά με τις οθόνες αφής, σκέφτηκα ότι ίσως θα έπρεπε να κάνουμε κάποιες εισηγήσεις σ' αυτούς που ασχολούνται με τη συγγραφή των αναλυτικών προγραμμάτων ώστε μέσα στα μαθήματα των μαθηματικών να υπάρχει η χρήση των οθόνων αφής. Είναι κάτι που κεντρίζει το ενδιαφέρον τους, και απολαμβάνουν περισσότερο το μάθημα (Αντιγόνη).

Ερώτημα 2: *Μπορεί το πρόγραμμα επιμόρφωσης να μεταδώσει στους εκπαιδευτικούς γνώση τεχνολογικού, παιδαγωγικού περιεχομένου (TPACK) σχετική με την ενσωμάτωση των οθονών αφής στη διδασκαλία;*

Η μελέτη των συνεντεύξεων καταδεικνύει ότι οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί μπόρεσαν να διακρίνουν τα πλεονεκτήματα της τεχνολογίας που χρησιμοποιήθηκε (εφαρμογή A.L.E.X.) και να τα ερμηνεύσουν υπό τον φακό της μεγιστοποίησης των μαθησιακών αποτελεσμάτων. Αξιοσημείωτη είναι και η αναπόφευκτη σύγκριση που έγινε με τις υφιστάμενες τεχνολογίες στα σχολεία (Βλ. Ουρανία).

> Ήταν πολύ εύχρηστη η συγκεκριμένη εφαρμογή επειδή δεν ήταν πολλές οι εντολές για τα παιδιά. Ακόμα και οι πιο αδύνατοι μαθητές το βρήκαν εύκολο (Λουκία).
>
> Δεν είχαν το keyboard, το mouse και την οθόνη. Είχαν απλά ένα πράγμα μπροστά τους που το άγγιζαν άμεσα με τα δάχτυλά τους. Νομίζω δεν έχουν πρόβλημα τα παιδιά αυτής της ηλικίας, αυτής της γενιάς να το χρησιμοποιήσουν το εργαλείο αυτό γιατί είναι πολύ εξοικειωμένοι θεωρώ (Κωνσταντίνος).
>
> Το να κουβαλήσω τα laptops μέσα στην τάξη είναι κάτι πολύ χρονοβόρο, να τα στήσω είναι ολόκληρη διαδικασία. Οι οθόνες αφής είναι πολύ πιο εύχρηστες, είναι πιο μικρές και θεωρώ ότι στις μέρες μας επειδή ασχολούνται παραπάνω τα παιδιά με τα συγκεκριμένα είναι πιο εύκολο να γίνεται με τα tablets ή με τα iPads το μάθημα παρά είτε με τους σταθερούς υπολογιστές είτε με τα laptops που παίρνουμε στην τάξη (Ουρανία).

Ερώτημα 3: *Μπορεί το πρόγραμμα επιμόρφωσης να καταστήσει ικανούς τους εκπαιδευτικούς να μεταφέρουν και να υιοθετήσουν τις αποκτηθείσες δεξιότητες TPACK στη διδακτική πράξη;*

Η προθυμία των εκπαιδευτικών να καταστούν μεταλαμπαδευτές των όσων αποκόμισαν αποδεικνύεται έμπρακτα στη Φάση 3 του προγράμματος επιμόρφωσης. Πέρα όμως από τη συγκεκριμένη εκπαιδευτικό με την οποία οι ερευνητές συνεργάστηκαν στο περιβάλλον της δικής της τάξης, διάχυτη σε όλους τους συμμετέχοντες ήταν η θέληση για επέκταση των αποκτηθέντων και μάλιστα με συγκεκριμένες εισηγήσεις (Βλ. Μαρία). Αξιοσημείωτη είναι και η παραδοχή του διευθυντή του Σχολείου Α΄ ότι η οποιαδήποτε εφαρμογή και αξιοποίηση της γνώσης TPACK εναπόκειται στον κάθε δάσκαλο ξεχωριστά.

> Αυτής της μορφής οι επιμορφώσεις αποδίδουν πάρα πολύ. Τώρα απ' εκεί και πέρα επαφίεται στην καλή θέληση του καθενός μας αν θα εφαρμόσουμε κάτι που μαθαίνουμε ή όχι (Διευθυντής Σχολείου Α΄).
>
> Φαντάζομαι ότι μπορείς και ηλικιακά να το διαφοροποιήσεις δηλαδή εγώ που έχω δευτέρα τάξη ίσως να έκανα κάτι πιο απλό. Π.χ. ίσως να έκανα τετράγωνο και ορθογώνιο. Να κάνουν κατασκευή των δύο σχημάτων και να δουν τις ιδιότητες (Μαρία).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η παρούσα έρευνα αναδεικνύει, στο ίδιο μήκος κύματος με προηγούμενες (π.χ. Landry 2010; Niess et al. 2009), τη χρησιμότητα της γνώσης τεχνολογικού, παιδαγωγικού περιεχομένου (TPACK) ως μέσο μελέτης και ανάπτυξης της επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών στον τομέα της αξιοποίησης της τεχνολογίας φορητών συσκευών στη διδασκαλία των μαθηματικών. Μια κριτική ανάγνωση των αποτελεσμάτων μπορεί να οδηγήσει στο συμπέρασμα πως η συγκεκριμένη μορφή επιμόρφωσης ήταν διπλά επιτυχής. Κατάφερε, αφενός, να βοηθήσει αυτή την ομάδα εκπαιδευτικών να υπερβούν τις ίσως περιορισμένες αντιλήψεις τους για τα ψηφιακά παιχνίδια ως εκπαιδευτικά εργαλεία και, αφετέρου, να ενδυναμώσει την αυτοπεποίθηση και ικανότητά τους να τα ενσωματώσουν στο αναλυτικό πρόγραμμα.

Ο σχεδιασμός και η πορεία της επιμόρφωσης καθώς και τα όσα λέχθηκαν εκ μέρους των συμμετέχοντων εκπαιδευτικών συνιστούν ένα παράδειγμα του τι θα μπορούσε να περιλαμβάνει ένα προπτυχιακό πρόγραμμα παιδαγωγικού τμήματος έτσι ώστε να προετοιμάσει κατάλληλα τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς με γνώση σχετική με τα ψηφιακά παιχνίδια ή άλλα τεχνολογικά εργαλεία. Τα αποτελέσματα της έρευνας εσωκλείουν επίσης χρήσιμες στρατηγικές για στήριξη των εκπαιδευτικών να προχωρήσουν σε υψηλά επίπεδα γνώσης τεχνολογικού, παιδαγωγικού περιεχομένου. Για να επιτευχθεί όμως το τελευταίο είναι απαραίτητη η παροχή ευκαιριών στο διδακτικό προσωπικό μιας σχολικής μονάδας τόσο για θεωρητική όσο και για βιωματική μάθηση τεχνολογικά βασισμένων παιδαγωγικών προσεγγίσεων.

Παρόλο ότι η συγκεκριμένη έρευνα προσφέρει τεκμηριωμένη πληροφόρηση και καλλιεργεί προβληματισμούς είναι σημαντικό να τονιστεί ότι το δείγμα των εκπαιδευτικών που έλαβαν μέρος δεν είναι αντιπροσωπευτικό της εκπαιδευτικής κοινότητας στο σύνολό της. Περισσότερη έρευνα στον τομέα της επιμόρφωσης στις σύγχρονες τεχνολογίες χρειάζεται να γίνει τόσο εντός όσο και εκτός Κύπρου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Becker, K. (2007). Teaching teachers about Serious Games. In C. Montgomerie & J. Seale (Eds.), *Proceedings of World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications 2007* (pp. 2389-2396). Chesapeake, VA: AACE.

Blackwell, C. (2014). Teacher practices with mobile technology: Integrating tablet computers into the early childhood classroom. *Journal of Education Research, 7*, 1-25.

Clark, W. and Luckin, R. (2013). *What the research says - iPads in the classroom.* London Knowledge Lab, Institute of Education: University of London.

Henderson, S., & Yeow, J. (2012). IPad in education - A case study of iPad adoption and use in a primary school. HICSS. *Proceedings of the 2012 45th Hawaii International Conference on System Sciences* (pp. 78-87), Grand Wailea, Maui, HI, USA.

Johnson, L., Adams Becker, S., Cummins, M., Estrada V., Freeman, A., & Ludgate, H. (2013). *NMC Horizon Report: 2013 K-12 Edition.* Austin, Texas: The New Media Consortium.

Kyriakides, A. O., Meletiou-Mavrotheris, M., & Prodromou, T. (2015) Changing children's stance towards mathematics through mobile teaching: The case of robot A.L.E.X. In M. Meletiou-Mavrotheris, K. Mavrou & E. Paparistodemou (Eds.), *Integrating Touch-Enabled and Mobile Devices into Contemporary Mathematics Education* (pp. 122-145). IGI Global, USA.

Landry, G. A. (2010). Creating and validating an instrument to measure middle school mathematics teachers' technological pedagogical content knowledge (TPACK). Unpublished doctoral dissertation. University of Tennessee.

Melhuish, K., & Falloon, G. (2010). Looking to the future: M-learning with the iPad. *Computers in New Zealand Schools: Learning, Leading, Technology, 22*(3), 1-16.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017-1054.

Niess, M. L., Ronau, R. N., Shafer, K. G., Driskell, S. O., Harper, S. R., & Johnston, C. (2009). Mathematics teacher TPACK standards and development model. Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 9, 4–24.

ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΜΟΡΦΩΤΙΚΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Μιχαήλ – Χρυσάνθου Παρασκευή, Χριστοδούλου Θεοδώρα, Ηλία Ιλιάδα και Γαγάτσης Αθανάσιος

Πανεπιστήμιο Κύπρου

pmicha@ucy.ac.cy, theodoraco@yahoo.gr, elia.iliada@ucy.ac.cy, gagatsis@ucy.ac.cy

Το παρόν άρθρο ασχολείται με τη διαμορφωτική αξιολόγηση και σκοπός του είναι να αναδείξει τις σχέσεις μεταξύ των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών για τη διαμορφωτική αξιολόγηση και των τεχνικών αξιολόγησης που χρησιμοποιούν στα μαθηματικά. Στην έρευνα έλαβαν μέρος 65 εκπαιδευτικοί μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, στους οποίους χορηγήθηκε ερωτηματολόγιο που εξέταζε τις πεποιθήσεις τους για τον σκοπό και τα χαρακτηριστικά της διαμορφωτικής αξιολόγησης, καθώς και τους τρόπους αξιολόγησης που χρησιμοποιούν. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για τη φύση και τα χαρακτηριστικά της αξιολόγησης φαίνεται να συνδέονται με τις τεχνικές αξιολόγησης που εφαρμόζουν στην τάξη των μαθηματικών. Οι εκπαιδευτικοί που προσδίδουν διαμορφωτικό χαρακτήρα στην αξιολόγηση, υποστηρίζουν πιο μαθητοκεντρικές τεχνικές αξιολόγησης, ενώ σε αντίθετη περίπτωση υιοθετούν λιγότερο μαθητοκεντρικές τεχνικές αξιολόγησης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η διαμορφωτική αξιολόγηση αποτελεί μια διαδικασία που χρησιμοποιείται από τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές κατά τη διδασκαλία, η οποία παρέχει ανατροφοδότηση για την αναπροσαρμογή της τρέχουσας διδασκαλίας και μάθησης, ώστε να βελτιωθούν τα επιτεύγματα των μαθητών σε σχέση με τους διδακτικούς στόχους που έχουν τεθεί (Popham, 2008). Πέρα από την πλούσια βιβλιογραφία σχετικά με τους σκοπούς και τη λειτουργία της αξιολόγησης, η έρευνα σχετικά με τις σχετικές πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών, και ειδικότερα των μαθητών, είναι περιορισμένη (Struyven, Dochy & Janssens, 2005). Η σημασία της έρευνας των πεποιθήσεων τόσο των εκπαιδευτικών όσο και των μαθητών καταδεικνύεται έντονα μέσα από τα αποτελέσματα προηγούμενων ερευνητικών εργασιών, σύμφωνα με τις οποίες οι διδακτικές τεχνικές των εκπαιδευτικών επηρεάζονται τόσο από τις δικές τους πεποιθήσεις για τις προσεγγίσεις που εφαρμόζουν, αλλά και από τις πεποιθήσεις των μαθητών τους (Thompson, 1992). Στο άρθρο αυτό, λοιπόν, γίνεται μια προσπάθεια να μελετηθεί η σχέση μεταξύ των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών και των τεχνικών που υιοθετούν με βάση αυτές.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στη βιβλιογραφία εντοπίζονται διάφοροι ορισμοί σχετικά με τη διαμορφωτική αξιολόγηση. Παρόλα αυτά, ανάμεσα στους ορισμούς που προτάθηκαν από τους ερευνητές, εντοπίζονται κοινά σημεία στα οποία δίνονται έμφαση. Αρκετοί από τους ορισμούς αυτούς τοποθετούν τη σχέση εκπαιδευτικού – μαθητή στο κέντρο της διαδικασίας αξιολόγησης, ενώ πολλοί άλλοι δίνουν έμφαση και στην επίδραση της διαμορφωτικής αξιολόγησης στην αναπροσαρμογή της διδασκαλίας ανάλογα με τις ανάγκες των μαθητών. Οι Van De Walle, Karp και Bay-Williams (2013) ορίζουν, λοιπόν, τη διαμορφωτική αξιολόγηση ως «μια συντρέχουσα με τη διδασκαλία διαδικασία αξιολόγησης, η οποία ελέγχει και ρυθμίζει ποιος μαθαίνει και ποιος όχι και βοηθά τους εκπαιδευτικούς να οργανώσουν την επόμενή τους διδασκαλία». Ο Wiliam (2007) συμπληρώνει ότι «για να είναι διαμορφωτική, η αξιολόγηση πρέπει να περιλαμβάνει μια πρόταση για μελλοντικές δράσεις» (σ. 41).

Η ανατροφοδότηση είναι επίσης μία σημαντική διάσταση της διαμορφωτικής αξιολόγησης, που είτε παρέχεται από τους εκπαιδευτικούς στους μαθητές μέσω ερωτήσεων, σχολίων και άλλων τεχνικών είτε από τους μαθητές στον εκπαιδευτικό ή από τους μαθητές μεταξύ τους μέσα από τεχνικές αυτο-αξιολόγησης και ετερο-αξιολόγησης. Η δύναμη της ανατροφοδότησης γίνεται εμφανής σε διαφορετικούς ορισμούς της διαμορφωτικής αξιολόγησης, οι οποίοι τονίζουν τη σημασία της ενσωμάτωσής της στη διδασκαλία. Σύμφωνα με αυτούς, η διαμορφωτική αξιολόγηση ορίζεται ως «μια διαδικασία κατά την οποία συλλέγονται μέσα από την αξιολόγηση στοιχεία για τη μάθηση των μαθητών και η διδασκαλία τροποποιείται σε σχέση με την ανατροφοδότηση που θα δοθεί» (Cauley & McMillan, 2010). Στα ίδια πλαίσια, για τους Nicol και Macfarlane-Dick (2004), η διαμορφωτική αξιολόγηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τους μαθητές για να βελτιώσουν τη μάθησή τους και από τους εκπαιδευτικούς για να προσαρμόσουν τη διδακτική τους διαδικασία με βάση τις ανάγκες των μαθητών τους. Συνεπώς, μια καθοριστική επίδραση της διαμορφωτικής αξιολόγησης στη μάθηση είναι η εποικοδομητική ανατροφοδότηση για τους μαθητές ως προς το τι μαθαίνουν, πού κάνουν λάθη και πού δημιουργούνται παρανοήσεις (Hattie, 2009).

Η έρευνα καταδεικνύει ότι οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών, οι αντιλήψεις και οι στάσεις τους απέναντι στα μαθηματικά και τη διδασκαλία και μάθησή τους επηρεάζουν τις διδακτικές τους προσεγγίσεις (Philipp, 2007). Οι εκπαιδευτικοί ασκούν μια αξιοσημείωτη επίδραση στη δημιουργία των πεποιθήσεων των μαθητών τους μέσα από τους τρόπους που παρουσιάζουν το θέμα διδασκαλίας, τα έργα που χρησιμοποιούν για να το διδάξουν και τις μεθόδους, τα κριτήρια και τις διαδικασίες αξιολόγησης που επιλέγουν (Pehkonen, 1998). Ενώ η φύση αυτής της σχέσης φαίνεται να είναι «διαλεκτική» (Wood et al., 1991) δεν είναι σαφές κατά πόσο οι πεποιθήσεις επηρεάζουν την τεχνική ή η τεχνική επηρεάζει τις πεποιθήσεις (McGalliard, 1983). Συνεπώς, η κατανόηση των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών και των μαθητών σχετικά με την αξιολόγηση είναι εξίσου σημαντική με την κατανόηση του περιεχομένου και της φιλοσοφίας του αναλυτικού προγράμματος, αφού πρόκειται για ένα βήμα προς την επίτευξη πιο αποτελεσματικής αξιολόγησης που να επικεντρώνεται στην ποιοτική μάθηση και διδασκαλία (Pastore & Pentassuglia, 2016).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα

Γενικότερος σκοπός του άρθρου είναι να αναδείξει τη σχέση μεταξύ των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών για τη διαμορφωτική αξιολόγηση και των τεχνικών αξιολόγησης που χρησιμοποιούν στα μαθηματικά. Ειδικότερα, η παρούσα εργασία αποσκοπεί να απαντήσει στα εξής δύο ερευνητικά ερωτήματα:

(α) Υπάρχει σχέση μεταξύ των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών για την αξιολόγηση και των τεχνικών αξιολόγησης που χρησιμοποιούν;

(β) Πώς οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών καθορίζουν τις τεχνικές που χρησιμοποιούν;

Δείγμα και ερευνητικό εργαλείο

Στην έρευνα συμμετείχαν 65 εν ενεργεία εκπαιδευτικοί μαθηματικών από Γυμνάσια αστικών και αγροτικών περιοχών της Κύπρου. Οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να συμπληρώσουν ένα ερωτηματολόγιο με 31 δηλώσεις, οι οποίες εξέταζαν τις πεποιθήσεις τους για τη διαμορφωτική αξιολόγηση (και την αξιολόγηση, γενικότερα) και τη χρήση διαφόρων τεχνικών αξιολόγησης. Οι εκπαιδευτικοί έπρεπε να εκφράσουν τον βαθμό συμφωνίας τους για κάθε μία δήλωση χωριστά, χρησιμοποιώντας κλίμακα Likert από 1-4 (διαφωνώ απόλυτα-συμφωνώ απόλυτα). Ενδεικτικά παραδείγματα δηλώσεων που εξετάζουν τις πεποιθήσεις των συμμετεχόντων για τον σκοπό της αξιολόγησης και τη χρήση τεχνικών που αποσκοπούν στην εφαρμογή διαμορφωτικής αξιολόγησης παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.

Πεποιθήσεις για τον σκοπό της αξιολόγησης	
P2	Η αξιολόγηση προσδιορίζει τα δυνατά και αδύνατα σημεία των μαθητών στα μαθηματικά.
P4	Η αξιολόγηση πρέπει να στηρίζεται στις απαντήσεις των μαθητών παρά στη διαδικασία που χρησιμοποιούν για να φτάσουν σε αυτές.
P10	Η αξιολόγηση των μαθητών είναι πολύ χρήσιμη για μένα, διότι μου δίνει την ευκαιρία να αναγνωρίσω την αξία της δουλειάς μου.
Χρήση τεχνικών διαμορφωτικής αξιολόγησης	
T13	Η διαμορφωτική αξιολόγηση είναι πιο αποτελεσματική όταν οι μαθητές έχουν ξεκάθαρη εικόνα για το τι αναμένει ο εκπαιδευτικός από αυτούς.
T16	Η διαμορφωτική αξιολόγηση είναι πιο αποτελεσματική όταν οι εκπαιδευτικοί προσφέρουν ανατροφοδότηση σχετικά με την πρόοδο των μαθητών προς την επίτευξη συγκεκριμένων μαθησιακών στόχων.
T17	Η διαμορφωτική αξιολόγηση είναι πιο αποτελεσματική όταν οι εκπαιδευτικού ενθαρρύνουν την αυτο-αξιολόγηση των μαθητών.

Πίνακας 1: Παραδείγματα δηλώσεων για τις πεποιθήσεις και τεχνικές των εκπαιδευτικών για τη διαμορφωτική αξιολόγηση

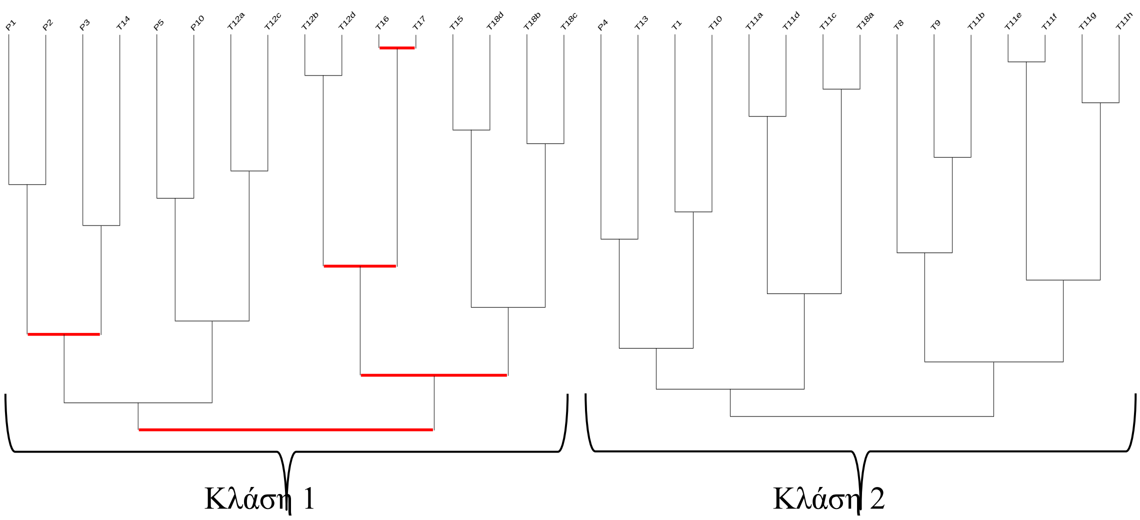
Ανάλυση δεδομένων

Για την ανάλυση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα C.H.I.C. (Classification Hiérarchique, Implicative et Cohésitive), με το οποίο πραγματοποιήθηκε η ανάλυση ομοιότητας (Bodin, Coutourier, & Gras, 2000) και η συνεπαγωγική ανάλυση (Gras, Régnier, Marinica & Guillet, 2013). Και οι δύο στατιστικές μέθοδοι προσδιορίζουν σχέσεις μεταξύ μεταβλητών, οι οποίες βασίζονται σε δείκτες ομοιότητας ή συνεπαγωγής στο διάστημα (0-1) και δεν εκφράζουν γραμμικές σχέσεις. [1]

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι σχέσεις μεταξύ των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών για τον σκοπό της διαμορφωτικής αξιολόγησης και των τεχνικών αξιολόγησης, οι οποίες συνδέονται με το συγκεκριμένο είδος αξιολόγησης παρουσιάζονται στο ακόλουθο διάγραμμα ομοιότητας (Σχήμα 1). Οι μεταβλητές χωρίζονται σε δύο κλάσεις ομοιότητας, οι οποίες είναι εντελώς διακριτές μεταξύ τους.

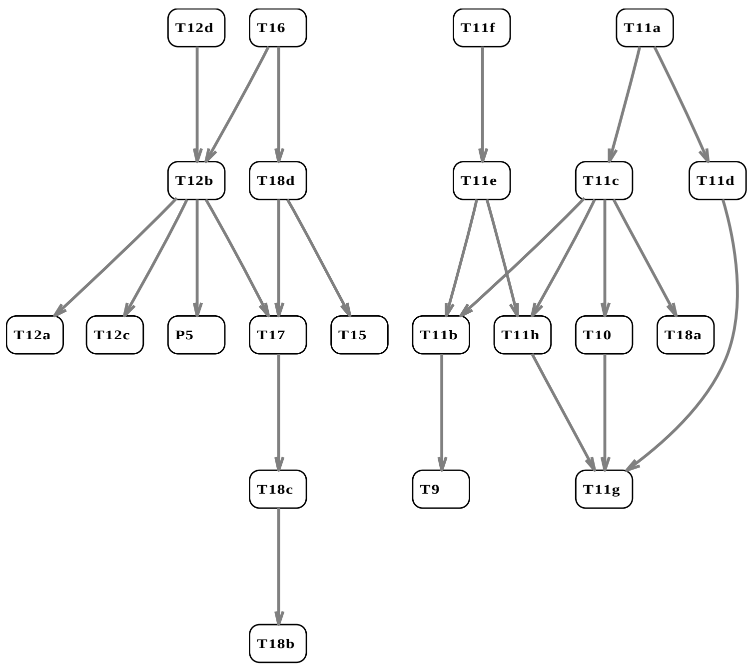
Στην πρώτη κλάση, η οποία αποτελείται από 16 μεταβλητές, ομαδοποιούνται 4 δηλώσεις που αφορούν στις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών και 12 δηλώσεις που αντανακλούν τις τεχνικές τους. Πιο συγκεκριμένα, στην κλάση αυτή δημιουργούνται δύο υποομάδες, οι οποίες συνδέονται σημαντικά μεταξύ τους. Στην πρώτη υποομάδα, 3 πεποιθήσεις (P1, P2, P3) που προσδίδουν διαμορφωτικά χαρακτηριστικά στην αξιολόγηση (όπως, ο προσδιορισμός μαθησιακών αποτελεσμάτων και μαθηματικού τρόπου σκέψης των μαθητών) συνδέονται σημαντικά με την τεχνική της παροχής παραδειγμάτων άρτιας και ελλιπούς μαθηματικής εργασίας, ώστε να καταστούν ξεκάθαρα τα αναμενόμενα μαθησιακά αποτελέσματα στους μαθητές (T14). Στη δεύτερη υποομάδα, η πεποίθηση ότι η διαμορφωτική αξιολόγηση επιτρέπει την αυτο-αξιολόγηση των εκπαιδευτικών (P10) και την εφαρμογή μαθηματικών στην καθημερινότητά τους συνδέεται (P5) με την τεχνική της κοινοποίησης μαθησιακών στόχων στους μαθητές (T12b) και την τεχνική της αυτο-αξιολόγησης των μαθητών (T12d). Η δεύτερη υποομάδα περιλαμβάνει 8 δηλώσεις που αφορούν σε τεχνικές των εκπαιδευτικών, οι οποίες συνδέονται επίσης σημαντικά μεταξύ τους. Ειδικότερα, ισχυρή και σημαντική σχέση ομοιότητας προκύπτει μεταξύ 4 μεταβλητών που σχετίζονται με την παροχή ανατροφοδότησης (T12b, T16) και την αυτο-αξιολόγηση των μαθητών (T12d, T17). Οι 4 αυτές μεταβλητές συνδέονται σημαντικά με άλλες 4 μεταβλητές, οι οποίες σχετίζονται με την κοινοποίηση των μαθησιακών στόχων από τους εκπαιδευτικούς (T15), την παροχή ανατροφοδότησης (T18d) αντί βαθμολόγησης (T18b) και τη δυνατότητα αυτο-αξιολόγησης από τους μαθητές (T18c).



Σχήμα 1. Διάγραμμα ομοιότητας για τις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για τον σκοπό και τις τεχνικές αξιολόγησης

Η δεύτερη κλάση ομοιότητας σχηματίζεται από τρεις υποομάδες, ανάμεσα στις οποίες υπάρχει μια ασθενής σχέση. Η πρώτη υποομάδα περιλαμβάνει μία δήλωση που αφορά στον σκοπό της αξιολόγησης (P4) και συνδέεται με τρεις δηλώσεις που καταδεικνύουν τη χρήση τεχνικών αξιολόγησης από τους εκπαιδευτικούς. Ειδικότερα, η δήλωση αυτή αντανακλά έναν αθροιστικό χαρακτήρα στην αξιολόγηση, αφού τη συνδέει με τις απαντήσεις των μαθητών παρά με τη διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε για να καταλήξουν σε αυτές. Η πεποίθηση αυτή συνδέεται με την αξιολόγηση μέσα από τη χρήση τυποποιημένων ασκήσεων (T1), εργασιών χωρίς βαθμολόγηση (T10) και με τον προσδιορισμό μαθησιακών αποτελεσμάτων (T13). Η δεύτερη υποομάδα αφορά καθαρά τη διαμορφωτική αξιολόγηση και περιλαμβάνει τις δηλώσεις T11a, T11c, T11d και T18a. Η τρίτη υποομάδα περιλαμβάνει δύο μικρότερες υποομάδες. Η πρώτη από αυτές αφορά, επίσης, σε μεγάλο βαθμό τη διαμορφωτική αξιολόγηση και συγκεκριμένα τρεις δηλώσεις (T8, T9, T11b). Η τελευταία υποομάδα σχηματίζεται από τις μεταβλητές που αφορούν την τελική αξιολόγηση (T11e, T11f, T11g, T11h).

Οι μεταβλητές που περιλαμβάνονται στο συνεπαγωγικό διάγραμμα (Σχήμα 2), διακρίνονται επίσης σε δύο ομάδες, όπως και στο διάγραμμα ομοιότητας.



Σχήμα 2. Συνεπαγωγικό διάγραμμα για τις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για τον σκοπό και τις τεχνικές αξιολόγησης

Στο διάγραμμα αυτό περιλαμβάνονται κυρίως οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών για τη χρήση τεχνικών αξιολόγησης και μία μόνο δήλωση που αφορά σε πεποίθησή τους για την αξιολόγηση. Ειδικότερα, η πεποίθηση των εκπαιδευτικών σχετικά με το ότι η αξιολόγηση πρέπει να αξιολογεί την ικανότητα των μαθητών να εφαρμόζουν τα μαθηματικά σε άγνωστες, καθημερινές καταστάσεις (P5) εμφανίζεται στην πρώτη ομάδα του συνεπαγωγικού διαγράμματος, η οποία περιλαμβάνει συνεπαγωγικές σχέσεις μεταξύ τεχνικών αξιολόγησης όπως η αυτο-αξιολόγηση και ο αναστοχασμός των μαθητών, η κοινοποίηση στόχων και η παροχή ανατροφοδότησης και καθοδήγησης σε σχέση με τους στόχους αυτούς. Συνεπώς, η χρήση των τεχνικών που αναφέρθηκαν πιο πάνω σχετίζονται με μια πεποίθηση, η οποία προσδίδει διαμορφωτικό χαρακτήρα στην αξιολόγηση. Από την άλλη, στη δεύτερη ομάδα εμφανίζονται συνεπαγωγές μεταξύ τεχνικών τελικής αξιολόγησης (T11f, T11e, T11h, T11g), ενώ άλλες αφορούν τεχνικής διαμορφωτικής αξιολόγησης (T11a, T11c, T18a).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στο άρθρο αυτό μελετώνται οι σχέσεις μεταξύ των πεποιθήσεων των Κυπρίων εκπαιδευτικών σχετικά με τον σκοπό της διαμορφωτικής αξιολόγησης στα μαθηματικά και των τεχνικών αξιολόγησης που χρησιμοποιούν. [2] Τα αποτελέσματα που προέκυψαν με βάση την ανάλυση ομοιότητας και τη συνεπαγωγική ανάλυση κατέδειξαν αρχικά ότι οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών είναι συνδεδεμένες με τις τεχνικές αξιολόγησης που εφαρμόζουν (Thompson, 1992). Όπως αναφέρθηκε και στη Μεθοδολογία, οι σχέσεις αυτές δεν είναι γραμμικές.

Συνεπώς, οι πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών για τη φύση, τα χαρακτηριστικά και τον σκοπό της αξιολόγησης φαίνεται να συνδέονται με τις τεχνικές αξιολόγησης που εφαρμόζουν στην τάξη των μαθηματικών. Είναι, λοιπόν, σημαντικό τα χαρακτηριστικά, ο σκοπός και η λειτουργία της διαμορφωτικής αξιολόγησης να καταστούν ξεκάθαρα στους εκπαιδευτικούς μέσα από σχετική θεωρία και πρακτικά παραδείγματα, ώστε οι πεποιθήσεις τους να γίνουν πιο συγκεκριμένες και να οδηγήσουν σε σκόπιμη χρήση τεχικών αξιολόγησης με διαμορφωτικό χαρακτήρα.

Η πιο πάνω ανάγκη ενισχύεται από το γεγονός ότι οι πεποιθήσεις των μαθητών επηρεάζονται από τις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών τους, όπως αυτές αντανακλώνται μέσα από τις διδακτικές τεχνικές τους (Franke, Fennema, & Carpenter, 1997). Καθίσταται, έτσι, αναγκαία η συστηματική μελέτη των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών, σε συνδυασμό με την εξέταση των αντίστοιχων πεποιθήσεων των μαθητών τους, ώστε να έχουμε μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα για τις πεποιθήσεις τους για τη διαμορφωτική αξιολόγηση και να χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα αυτά για τον σχεδιασμό κατάλληλων μοντέλων, για την ανάπτυξη ενδεικτικών τεχνικών για αποτελεσματική εφαρμογή της διαμορφωτικής αξιολόγησης στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών.

Αποκτώντας, λοιπόν, πρόσβαση στις συγκεκριμένες πεποιθήσεις εκπαιδευτικών και μαθητών διευρύνονται τα περιθώρια για τον σχεδιασμό κατάλληλου διδακτικού υλικού και την οργάνωση σχετικών διδακτικών τεχνικών, προσαρμοσμένων στις ανάγκες των μαθητών, με σκοπό την αποτελεσματική εφαρμογή της διαμορφωτικής αξιολόγησης στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών. Επιπλέον, μέσα από τη μελέτη των πεποιθήσεων εκπαιδευτικών και μαθητών καθίσταται πιο εφικτή η αλλαγή των πεποιθήσεων και των τεχνικών τους για τη διαμορφωτική αξιολόγηση, αφού η σχέση μεταξύ των διδακτικών τεχνικών και των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών είναι δυναμική και αμφίδρομη (Fernandez, 1997).

Η στεγανοποίηση μεταξύ των δύο κλάσεων ομοιότητας που παρουσιάστηκε στα αποτελέσματα, μας επιτρέπει να υποθέσουμε την ύπαρξη δύο τύπων εκπαιδευτικών, οι οποίοι διακρίνονται με βάση τις πεποιθήσεις και τις πρακτικές τους για τη διαμορφωτική αξιολόγηση στα μαθηματικά. Στην πρώτη ομάδα ανήκουν εκπαιδευτικοί που προσδίδουν διαμορφωτικό χαρακτήρα στην αξιολόγηση και συνεπώς υποστηρίζουν και υιοθετούν περισσότερο μαθητοκεντρικές μεθόδους αξιολόγησης (π.χ. παροχή ανατροφοδότησης, αυτο-αξιολόγηση και αναστοχασμός μαθητών κ.λπ.). Από την άλλη, στη δεύτερη ομάδα περιλαμβάνονται εκπαιδευτικοί που δεν προσδίδουν διαμορφωτικό χαρακτήρα στην αξιολόγηση, έτσι υποστηρίζουν και υιοθετούν τεχνικές αξιολόγησης στις οποίες ο ρόλος του μαθητή δεν είναι πάντοτε ενεργός (π.χ. παρατήρηση, προφορικές ερωτήσεις, τεστ κ.λπ.).

Θα πρέπει, όμως, να τονιστεί ότι η διδασκαλία και η μάθηση των μαθηματικών και κατά συνέπεια και η αξιολόγηση των μαθησιακών αποτελεσμάτων, επηρεάζονται από διάφορες κοινωνικές παραμέτρους. Αυτές οι κοινωνικές παράμετροι είναι ένας καθοριστικός παράγοντας της σχέσης μεταξύ πεποιθήσεων και τεχνικών. Στην παρούσα έρευνα δεν έχει ληφθεί υπόψη η θεωρία της μάθησης ως κοινωνικό προϊόν. Επομένως, τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας και πιο συγκεκριμένα, η διάκριση δύο τύπων εκπαιδευτικών θα ήταν χρήσιμο να εξεταστούν και υπό το πρίσμα άλλων θεωρητικών προσεγγίσεων στη μάθηση των μαθηματικών.

Σημειώσεις

1. Τα αποτελέσματα αυτά αποτελούν μέρος του ερευνητικού προγράμματος «Formative assessment in mathematics for teaching and learning» [38971-LLP-1-2013-1-IT-COMENIUS-CMP].

2. Περαιτέρω πληροφορίες για τις πεποιθήσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τον σκοπό της αξιολόγησης παρέχονται στη διδακτορική διατριβή της Θεοδώρας Χριστοδούλου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bodin, A., Coutourier, R., & Gras, R. (2000). *CHIC: Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive-Version sous Windows – CHIC 1.2.* Rennes : Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

Cauley, K. M., & McMillan, J. H. (2010). Formative assessment techniques to support student motivation and achievement. *The Clearing House: A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas*, *83*(1), 1-6.

Fernandez, E. (1997). The 'Standards'-like role of teachers' mathematical knowledge in responding to unanticipated observations. *Paper presented to the annual meeting of the American Educational Research Association,* Chicago, IL.

Franke, M.L., Fennema, E., & Carpenter, T.P. (1997). Teachers creating change. Examining evolving beliefs and classroom practice. In E. Fennema & B.S. Nelson (Eds.), *Mathematics teacher in transition. The studies in mathematical thinking and learning series* (pp. 225–282). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gras R., Régnier J.-C., Marinica, C., Guillet F. (Eds) (2013). *Analyse Statistique Implicative. Méthode exploratoire et confirmatoire à la recherche de causalités.* Toulouse: Cépaduès Editions.

Hattie, K. (2009). *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. New York: Routledge.

McGalliard, W. A. Jr. (1983). Selected factors in the conceptual systems of geometry teachers: Four case studies. (Doctoral dissertation, University of Georgia). *Dissertation Abstracts International*, *44,* 1364A.

Nicol, D., & Macfarlane-Dick, D. (2004). Rethinking formative assessment in HE: a theoretical model and seven principles of good feedback practice. In C. Juwah, D. Macfarlane-Dick, B. Matthew, D. Nicol, D. & B. Smith (Eds.), *Enhancing student learning though effective formative feedback.* York: The Higher Education Academy.

Pastore, S., &Pentassuglia, M. (2016). Teachers' and students' conceptions of assessment within the Italian higher education system. *Practitioner Research in Higher Education, 10*(1), 109-120.

Pehkonen, E. (1998). Teachers' conceptions on Mathematics Teaching. In M. Hannula (Ed.), *Current state of research on mathematical beliefs V: Proceedings of the MAVI-5 workshop*, August 22–25, 1997 (pp. 58–

65). Helsinki, Finland: Department of Teacher Education, University of Helsinki.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Popham, W. J. (2008). Transformative assessment.VA: ASCD.

Struyven, K., Dochy F., & Janssens, S. (2005). Students' perceptions about evaluation and assessment in higher education: A review. *Assessment and Evaluation in Higher Education, 30* (4), 325–341.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research, In: D. A. Grouws (Ed.) Handbook of research on mathematics leaching and learning (pp. 127-146). New York: Macmillan.

Van De Walle, A. J., Karp, S. K., & Bay-Williams, M. J. (2013). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally (8 ed.).* United States of America: Pearson.

Wiliam, A. (2007). Content then process: Teacher learning communities in the service of formative assessment. In D. B. Reeves (Ed.), *Ahead of the curve: The power of assessment to transform teaching and learning* (pp. 183-204). Bloomington, IN: Solution Tree.

Wood, T., Cobb, P., & Yackel, E. (1991). Change in teaching mathematics. American *Educational Research Journal, 28*(3), 587–616.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Μπαλωμένου Αθανασία, Κόμης Βασίλειος, Ζαχάρος Κωνσταντίνος

Πανεπιστήμιο Πατρών, ΤΕΕΑΠΗ

smpalom@upatras.gr, komis@upatras.gr, zacharos@upatras.gr

Η εργασία αυτή αφορά στη διερεύνηση της συμμεταβολής μεταβλητών μέσα από τη διερεύνηση της συμμεταβολής μηκών που αναπαριστούν αυτές τις μεταβλητές, με αξιοποίηση του εκπαιδευτικού λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας Cabri Geometry II, για τη γεωμετρική προσέγγιση του κανόνα αλγεβρικής σύγκρισης μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Η έρευνα βασίζεται στο θεωρητικό πλαίσιο της εργαλειακής γένεσης (Rabardel, 1995; Trouche, 2004), καθώς και στο μοντέλο DeFT (Ainsworth, 2006). Στην έρευνα συμμετείχαν 48 μαθητές Β΄ Γυμνασίου, (13-14 ετών). Από την ποιοτική ανάλυση των δεδομένων προκύπτει ότι οι μαθητές προσέγγισαν τον αλγεβρικό κανόνα σύγκρισης μέσα από διαδικασίες διερεύνησης, διατύπωσης εικασιών και γενικεύσεων, αξιοποιώντας δυναμικά πολλαπλές αναπαραστάσεις του Cabri σε συνδυασμό με τη λειτουργία "drag-mode".

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα έρευνα αφορά στην αξιοποίηση ψηφιακών εργαλείων στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών, και ειδικότερα στη μελέτη της συμμεταβολής μεγεθών, σε μια διαδικασία μετάβασης από την απλή εμπειρία στη γενίκευση και τη διατύπωση κανόνων. Η επίδραση και η συνεισφορά των ψηφιακών εργαλείων χαρακτηρίζεται πολύ σημαντική στην εκπαίδευση (Κόμης, 2004). Αυτό προκύπτει και από το μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον που εκδηλώνεται τα τελευταία χρόνια για τη διδακτική αξιοποίηση αυτών στην εκπαίδευση. Η έρευνα δείχνει ότι τα υπολογιστικά εργαλεία επηρεάζουν και διαμορφώνουν τον τρόπο σκέψης και τις ενέργειες των μαθητών, συνεπώς και την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης αυτών (Trouche, 2004; Jupri et al., 2015; Kieran & Drijvers, 2006). Η τεχνολογία μπορεί, για παράδειγμα, να συμβάλει στην οπτικοποίηση (visualization) μιας αφηρημένης μαθηματικής οντότητας και στο δυναμικό χειρισμό της (Drijvers & Barzel, 2012), ή στην παραγωγή ποικίλων διαδικασιών διερεύνησης, διατύπωσης εικασιών και γενίκευσης αναφορικά με αυτή (Kieran & Drijvers, 2006). Η παρούσα εργασία αφορά στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων μιας έρευνας για τη γεωμετρική προσέγγιση του κανόνα αλγεβρικής σύγκρισης δύο μη αρνητικών πραγματικών αριθμών, με αξιοποίηση κατάλληλα διαμορφωμένου σημειωτικού συστήματος αναπαράστασης (Kaput, 1987), μέσα από μικτή προσέγγιση εργασίας μαθητών στο ψηφιακό περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας Cabri Geometry II και ταυτόχρονα στο περιβάλλον «χαρτί-μολύβι» (Kieran & Drijvers, 2006).

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στην παρούσα έρευνα αξιοποιήθηκαν με συμπληρωματικό τρόπο η θεωρία της εργαλειακής γένεσης και το μοντέλο DeFT. Συγκεκριμένα, το μοντέλο DeFT κατεύθυνε το σχεδιασμό της έρευνας (σχετίζεται με την επιλογή εργαλείου, τις λειτουργίες των αναπαραστάσεων που υποστηρίζει το εργαλείο, καθώς και τη διαμόρφωση της δραστηριότητας με την οποία εμπλέκονται οι μαθητές), ενώ η εργαλειακή γένεση αξιοποιήθηκε για την ανάλυση των δεδομένων της μελέτης.

Εργαλειακή Γένεση (Instrumental Genesis)

Η εργαλειακή γένεση (instrumental genesis) είναι η διαδικασία μετατροπής ενός τεχνουργήματος (artifact) σε 'εργαλείο' (instrument) στα χέρια του μαθητή. Είναι μια διαδικασία κατά την οποία μαθητής και τεχνούργημα συν-διαμορφώνονται στην πράξη (Vérillon & Rabardel, 1995) μέσα από δύο συμπληρωματικές, ταυτόχρονες και αμφίδρομες διαδικασίες (Artigue, 2002). Από τη μια μεριά, υπάρχει η διαδικασία *οικοδόμησης εργαλείου (instrumentation)*, κατά την οποία το υποκείμενο διαμορφώνει τις δράσεις του με βάση τις δυνατότητες και τους περιορισμούς του τεχνουργήματος. Κατά τη διαδικασία *οικοδόμησης εργαλείου (instrumentation)*, η εργαλειακή γένεση κατευθύνεται από το εργαλείο προς το υποκείμενο, οδηγώντας το στην ανάπτυξη ή προσαρμογή σχημάτων εργαλειακής δράσης (schemes of instrumented action) τα οποία σταδιακά διαμορφώνονται ως τεχνικές που επιτρέπουν στο υποκείμενο να ανταποκριθεί αποτελεσματικά σε δοσμένες δραστηριότητες (Artigue, 2002). Από την άλλη, υπάρχει η διαδικασία *τροποποίησης εργαλείου (instrumentalisation)*, κατά την οποία το υποκείμενο διαμορφώνει και προσαρμόζει το τεχνούργημα για δικές του χρήσεις, εμπλουτίζοντάς το σταδιακά με δυνατότητες για τις οποίες το τεχνούργημα δεν ήταν αρχικά μελετημένο να υποστηρίζει (Artigue, 2002).

Το μοντέλο DeFT

Το μοντέλο DeFT (Design – Functions – Tasks), (Ainsworth, 2006) αναδεικνύει τη συμβολή των πολλαπλών αναπαραστάσεων στη μάθηση και στην κατανόηση εννοιών, προσδιορίζοντας τις παραμέτρους που εξασφαλίζουν αυτά τα θετικά αποτελέσματα. Σύμφωνα με το μοντέλο DeFT, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να μεγιστοποιούν την αποτελεσματικότητα της αξιοποίησης των πολλαπλών αναπαραστάσεων στη διαδικασία της μάθησης λαμβάνοντας υπόψη τρεις καθοριστικές πτυχές:

1. Τις σχεδιαστικές παραμέτρους του τεχνολογικού εργαλείου που χρησιμοποιούμε (Design). Αυτές αφορούν είτε στην επιλογή του κατάλληλου εργαλείου, είτε στο σχεδιασμό ενός ψηφιακού περιβάλλοντος που συνεισφέρει στις απαιτήσεις της μάθησης.
2. Τις διαφορετικές παιδαγωγικές λειτουργίες (functions) που μπορούν να επιτελέσουν οι πολλαπλές αναπαραστάσεις και οι οποίες υποστηρίζουν τη μάθηση. Σύμφωνα με την Ainsworth (1999), οι πολλαπλές αναπαραστάσεις μπορούν να δρουν συμπληρωματικά η μια στην άλλη ως προς την πληροφορία που περιέχουν ή να υποστηρίζουν συμπληρωματικές διαδικασίες. Επιπλέον, μπορούν να δρουν περιοριστικά η μια στην άλλη αναφορικά με τη μετάφραση κάθε μιας αναπαράστασης. Ακόμη, μπορούν να υποστηρίζουν διαδικασίες βαθύτερης κατανόησης κατά τη διαδικασία αφαιρετικού συλλογισμού του μαθητή.
3. Τις γνωστικές δραστηριότητες (tasks) με τις οποίες ο δάσκαλος εμπλέκει τους μαθητές κατά τη μαθησιακή διαδικασία με ταυτόχρονη αξιοποίηση πολλαπλών αναπαραστάσεων. Τα υπολογιστικά εργαλεία και οι πολλαπλές αναπαραστάσεις δεν επαρκούν αφ’ εαυτού για την υποστήριξη διαδικασιών διερεύνησης από τους μαθητές ή για την κατανόηση αφηρημένων μαθηματικών εννοιών. Η διδακτική τους αξιοποίηση προκύπτει μέσα από το σχεδιασμό και την εφαρμογή κατάλληλα διαμορφωμένων δραστηριοτήτων από τον εκπαιδευτικό, στο πλαίσιο διδακτικών παρεμβάσεων διερεύνησης, διατύπωσης εικασιών και γενικεύσεων, οι οποίες μπορούν να υποστηρίξουν την κατανόηση.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ

Στην ενότητα των αποτελεσμάτων που θα παρουσιαστούν στην εργασία αυτή, επιχειρούμε να απαντήσουμε στο ακόλουθο ερευνητικό ερώτημα:

Πώς η αξιοποίηση πολλαπλών αναπαραστάσεων στο πλαίσιο κατάλληλα διαμορφωμένης δραστηριότητας μπορεί να συμβάλει στην ανάπτυξη του αλγεβρικού συλλογισμού μαθητών σχετικά με τον κανόνα αλγεβρικής σύγκρισης μη αρνητικών πραγματικών *αριθμών, μέσω γεωμετρικής προσέγγισης και οπτικοποίησης, σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας;*

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα ποιοτική έρευνα αποτελεί μια μελέτη περίπτωσης η οποία σχεδιάστηκε και εκπονήθηκε αξιοποιώντας διάφορους τύπους εργαλείων και διαδικασιών συλλογής δεδομένων.

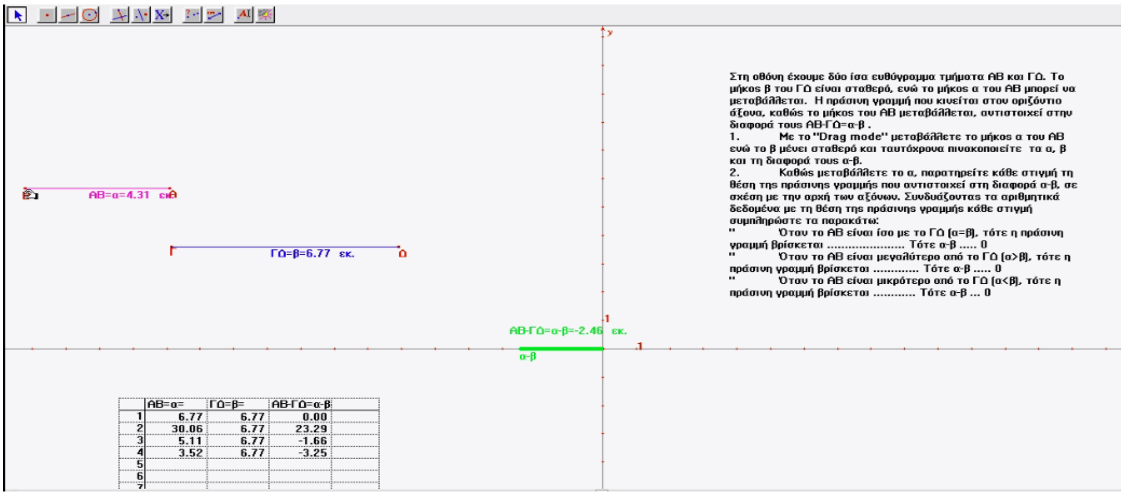
Η έρευνα έλαβε χώρα στο σχολικό εργαστήριο πληροφορικής του Πειραματικού Γυμνασίου Πανεπιστημίου Πατρών. Δύο πλήρη τμήματα μαθητών της Β' τάξης του σχολείου (συνολικά 48 μαθητές, 13-14 ετών) συμμετείχαν σε αυτό το πείραμα μάθησης. Αυτοί οι μαθητές εργάστηκαν σε 4 ομάδες των 12 μαθητών αντίστοιχα. Κάθε ομάδα εργάστηκε ξεχωριστά στο σχολικό εργαστήριο πληροφορικής. Οι μαθητές κάθε ομάδας εργάστηκαν ατομικά αξιοποιώντας το εκπαιδευτικό λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Cabri Geometry II, συμπληρώνοντας ταυτόχρονα το ειδικά σχεδιασμένο φύλλο εργασίας, προκειμένου να φέρουν εις πέρας τη δοσμένη δραστηριότητα. Κάθε μαθητής συμμετείχε για περίπου μία ώρα για να ολοκληρώσει τη δραστηριότητα. Προηγήθηκε μια φάση εξοικείωσης των μαθητών με τις λειτουργίες και τα εργαλεία του Cabri Geometry II. Αυτή η φάση κράτησε επίσης περίπου μία ώρα για κάθε μαθητή. Το πείραμα ήταν προσαρμοσμένο σε πραγματικές συνθήκες της τάξης. Τα δεδομένα της έρευνας αποτελούν τα αρχεία Cabri με τις ενέργειες των μαθητών, τα φύλλα εργασίας των μαθητών, καθώς και τα βίντεο καταγραφής των ενεργειών των μαθητ**ών** με το λογισμικό Camtasia.

ΠΡΟΤΕΡΗ ΓΝΩΣΗ ΜΑΘΗΤΩΝ

Οι μαθητές πριν την εμπλοκή τους με τη δραστηριότητα της έρευνας γνώριζαν πώς να συγκρίνουν αριθμούς σύμφωνα με τη σχετική τους θέση πάνω στην αριθμογραμμή, καθώς και σύμφωνα με την αξία των ψηφίων τους. Εντούτοις, δεν είχαν διαπραγματευτεί τον κανόνα αλγεβρικής σύγκρισης με μεταβλητές: *Αν $α>β$ τότε $α-β>0$, ενώ αν $α<β$, τότε $α-β<0$ και τέλος, αν $α=β$, τότε $α-β=0$.*

Η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Οι μαθητές κλήθηκαν να συγκρίνουν δυναμικά δύο μεταβλητές α και β, οι οποίες αναπαραστάθηκαν με δύο δυναμικά ευθύγραμμα τμήματα στην επιφάνεια του λογισμικού Cabri Geometry II, διερευνώντας τη συμμεταβολή δύο ευθυγράμμων τμημάτων που αντιστοιχούσαν στη μεταβλητή α και στην αλγεβρική διαφορά α-β αντίστοιχα (Εικόνα 1).



Εικόνα 7: στιγμιότυπο δράσης μαθητών στο πλαίσιο δραστηριότητας σύγκρισης μη αρνητικών αριθμών

Η δραστηριότητα στην οποία εμπλέξαμε τους μαθητές ήταν δομημένη σε 3 διαδοχικά μέρη: 1)Διερεύνηση, 2)Διατύπωση εικασιών και 3)Γενίκευση. Οι μαθητές κλήθηκαν να αξιοποιήσουν δυναμικά πολλαπλές διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις του Cabri Geometry II (γεωμετρικής, γραφικής, συμβολικής και αριθμητικής φύσης) και να προβούν στη διατύπωση εικασιών και γενικεύσεων σχετικά με τον κανόνα αλγεβρικής σύγκρισης, οι οποίες αποτυπώθηκαν λεκτικά και συμβολικά στα φύλλα εργασίας τους.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Διεξήχθη ποιοτική ανάλυση των ψηφιακών και γραπτών δεδομένων της έρευνας (Cohen *et al.*, 2007), δίνοντας έμφαση στις γραπτές καταχωρήσεις των μαθητών στα φύλλα εργασία τους, οι οποίες προέκυψαν από τις ενέργειες των μαθητών στο περιβάλλον του λογισμικού σε συνδυασμό με ταυτόχρονη εργασία τους στο περιβάλλον «χαρτί - μολύβι».

Μέρος 1^{ο}. Διερεύνηση: Οι μαθητές αξιοποίησαν τη λειτουργία *'drag mode'* ώστε να μεταβάλλουν το μήκος α του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ (α: ανεξάρτητη μεταβλητή) και διερεύνησαν τη μεταβολή του ευθυγράμμου τμήματος που αντιστοιχούσε στη διαφορά 'α-β' των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ και ΔΓ (α-β: εξαρτημένη μεταβλητή) πάνω στον οριζόντιο άξονα σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις: α=β, α>β, α<β. Οι μαθητές αξιοποίησαν παράλληλα και τις αριθμητικές μετρήσεις που παράγονταν με χρήση των εργαλείων μέτρησης (με συμπληρωματικό τρόπο), καθώς και το εργαλείο 'πινακοποίησης' του λογισμικού, κατά τη δυναμική διαχείριση των ευθυγράμμων τμημάτων.

Μέρος 2ο. Διατύπωση εικασιών: Κατά τη δυναμική διαχείριση των ευθυγράμμων τμημάτων που αντιστοιχούσαν στις μεταβλητές α και α-β, οι μαθητές ενθαρρύνθηκαν να διατυπώνουν ταυτόχρονα εικασίες για τη συμμεταβολή των α και α-β στα φύλλα εργασίας τους. Από τη μελέτη των γραπτών, οι μαθητές φάνηκε ότι προσέγγισαν τη συμμεταβολή των α και α-β με τρεις τρόπους (Πίνακας 5): 1) **C1: Οπτικο-χωρική προσέγγιση,** όπου οι μαθητές συσχέτισαν την αυξομείωση του α με την αυξομείωση του μήκους του αντίστοιχου ευθυγράμμου τμήματος και ταυτόχρονα παρατήρηση της αντίστοιχης μετακίνησης του α-β δεξιά ή αριστερά σε σχέση με την αρχή των αξόνων, 2) **C2: Αλγεβρική προσέγγιση,** όπου οι μαθητές προσέγγισαν τη σύγκριση των α και β μελετώντας το πρόσημο της διαφοράς α-β, αξιοποιώντας τα αριθμητικά δεδομένα που συγκέντρωναν στον πίνακα τιμών στην επιφάνεια του λογισμικού, και 3) **C3: Μικτή προσέγγιση (Οπτικο-χωρική και αλγεβρική),** όπου οι μαθητές συνδύασαν το πρόσημο της διαφοράς α-β με τη θέση του αντίστοιχο ευθυγράμμου τμήματος που την απεικονίζει πάνω στον οριζόντιο άξονα, αλλά και σε συσχέτιση με την αυξομείωση του ευθυγράμμου τμήματος που αντιστοιχεί στη μεταβλητή α, αξιοποιώντας ταυτόχρονα γεωμετρικές, αριθμητικές και συμβολικές αναπαραστάσεις των υπό σύγκριση μεγεθών.

Κατηγορίες παρατηρήσεων σχετικά με τη συμμεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής α και της εξαρτημένης μεταβλητής α-β	Συχνότητα (μέγεθος δείγματος: 48)
C1:Οπτικο-χωρική προσέγγιση	**37**
C2: Αλγεβρική προσέγγιση	**6**
C3: Μικτή προσέγγιση	5

Πίνακας 5: προσεγγίσεις μαθητών για τη συμμεταβολή των μεταβλητών α και α-β ως συμμεταβαλλόμενα ευθύγραμμα τμήματα στο Cabri

Όπως προκύπτει από τον Πίνακα 1, επικρατέστερη είναι η οπτικο-χωρική προσέγγιση (37 παρατηρήσεις). Αυτό δικαιολογείται από τη φύση του εργαλείου, το οποίο αποτελεί εργαλείο δυναμικής γεωμετρίας. Σύμφωνα με τη διαδικασία οικοδόμησης εργαλείου (instrumentation), το εργαλείο με τις δυνατότητες και τους περιορισμούς του επηρεάζει και διαμορφώνει τις ενέργειες και το συλλογισμό των μαθητών (Trouche, 2004; Artigue, 2002). Η δυναμική αξιοποίηση ταυτόχρονων διασυνδεδεμένων αναπαραστάσεων γεωμετρικής (σχηματική αναπαράσταση), συμβολικής και αριθμητικής φύσης (αριθμητική αναπαράσταση και αναπαράσταση με πίνακα τιμών) που υποστηρίζει το Cabri Geometry II, στο πλαίσιο κατάλληλα διαμορφωμένης δραστηριότητας, επηρέασε και διαμόρφωσε τις ενέργειες και το συλλογισμό των μαθητών, σύμφωνα με το μοντέλο DeFT (Ainsworth, 2006), με συμπληρωματικό και περιοριστικό τρόπο. Ακολουθεί η αλγεβρική προσέγγιση (6 παρατηρήσεις), και τέλος η μικτή προσέγγιση (οπτικο-χωρική και αλγεβρική), (5 παρατηρήσεις).

Μέρος 3ο. Γενίκευση: Οι μαθητές κλήθηκαν στη συνέχεια να συμπληρώσουν τα κενά σε κατάλληλα διαμορφωμένες προτάσεις που αντιπροσώπευαν τον κανόνα αλγεβρικής σύγκρισης με λεκτικό ή συμβολικό τρόπο. Όλοι οι μαθητές της έρευνας διατύπωσαν ορθά με λεκτικό τρόπο τον κανόνα αλγεβρικής σύγκρισης (λεκτική αναπαράσταση). Από την άλλη μεριά, μόνο οι 42 από τους 48 μαθητές της έρευνας αποτύπωσαν ορθά με συμβολικό τρόπο τον παραπάνω κανόνα. Η συμβολική αναπαράσταση φάνηκε να δυσκολεύει περισσότερο τους μαθητές της έρευνας σε σχέση με τη λεκτική αναπαράσταση.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα έρευνα προσεγγίσθηκε ένα αλγεβρικό πρόβλημα σύγκρισης με γεωμετρικό τρόπο. Συγκεκριμένα, οι μαθητές κλήθηκαν να χειριστούν δυναμικά τη διαφορά α-β δύο μεταβλητών α και β, οπτικοποιημένη ως μεταβαλλόμενο ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο είχε αρχή την αρχή των αξόνων και μπορούσε να κινείται πάνω στον οριζόντιο άξονα εξαρτώμενο από τη συμμεταβολή των α και β. Οι μαθητές καθοδηγούμενοι από κατάλληλο φύλλο εργασίας διερεύνησαν τη συμμεταβολή των α και α-β, συνδυάζοντας, με συμπληρωματικό και περιοριστικό τρόπο, αναπαραστάσεις γεωμετρικής, αριθμητικής, συμβολικής και λεκτικής φύσης και διατύπωσαν σχετικές εικασίες. Οι εικασίες αυτές αντιστοιχήθηκαν σε εργαλειακές τεχνικές που ανέπτυξαν οι μαθητές, ώστε να ανταποκριθούν αποτελεσματικά στη δοσμένη δραστηριότητα και οδήγησαν στην ανάπτυξη ή προσαρμογή σχημάτων εργαλειακής δράσης (schemes of instrumented action). Μέσα από αυτές τις τεχνικές έγινε ορατό και παρατηρίσιμο το σχήμα εργαλειακής δράσης που φαίνεται να οικοδόμησαν οι μαθητές σχετικά με τον κανόνα αλγεβρικής σύγκρισης αριθμών μέσω γεωμετρικής προσέγγισης και οπτικοποίησης. Το σχήμα αυτό διατυπώνεται ακολούθως:

- Οι μαθητές αναγνωρίζουν την αναπαράσταση ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών ως μεταβαλλόμενα ευθύγραμμα τμήματα
- Οι μαθητές διερευνούν (αξιοποιώντας το ‘drag mode’) τη συμμεταβολή των α και α-β, συσχετίζοντάς τα με τα αριθμητικά δεδομένα που παράγονται ταυτόχρονα για τα α, β και α-β και διατυπώνουν εικασίες

- Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να μεταφράσουν τα αποτελέσματα των διερευνήσεών τους με λεκτικό και συμβολικό τρόπο

Αυτή η διαδικασία δεν είναι εφικτό να υλοποιηθεί στο στατικό περιβάλλον «χαρτί - μολύβι».

Το Cabri Geometry II, λειτουργώντας ως διαμεσολαβητής, ενέπνευσε και επηρέασε τις ενέργειες και το συλλογισμό των μαθητών, όπως αυτός αποτυπώθηκε και στις απαντήσεις τους στα φύλλα εργασίας τους (Μπαλωμένου, 2017; Balomenou *et al.*, 2017). Στο πλαίσιο εμπλοκής τους με τη δραστηριότητα της έρευνας, οι μαθητές φαίνεται ότι ανέπτυξαν σχήματα χρήσης και εργαλειακής δράσης. Συγκεκριμένα, αξιοποιήθηκε το *«σχήμα της κίνησης»* (άμεσης και έμμεσης) και το *«σχήμα της γεωμετρικής προσέγγισης της αλγεβρικής σύγκρισης μέσω δυναμικής διαχείρισης μεταβλητών»*. Οι εργαλειακές τεχνικές που αναπτύχθηκαν για τη σύγκριση μεταβλητών μέσω της διερεύνησης της συμμεταβολής ευθυγράμμων τμημάτων που αντιστοιχούν σε αυτές τις μεταβλητές ήταν οπτικο-χωρικής, αλγεβρικής και μικτής φύσης:

Οπτικο-χωρικές τεχνικές: στηρίχθηκαν κυρίως στην οπτική αντίληψη των μαθητών για τη θέση των ευθυγράμμων τμημάτων που αντιστοιχούσαν στις μεταβλητές α και α-β, και οδήγησαν στη διατύπωση εικασιών και γενικεύσεων μέσω δυναμικής οπτικής διερεύνησης της συμμεταβολής τους.

Αλγεβρικές τεχνικές: προέκυψαν από τη μελέτη στην επιφάνεια διεπαφής του λογισμικού των αριθμητικών παραγόμενων κατά τη δυναμική συμμεταβολή των μεγεθών α και α-β και της ‘πινακοποίησης’ αυτών. Μελετώντας τις αριθμητικές συμμεταβολές οι μαθητές οδηγήθηκαν σε διατύπωση εικασιών αλγεβρικής φύσεως.

Μικτές τεχνικές: προέκυψαν συνδυάζοντας ταυτόχρονα οπτικο-χωρικές και αλγεβρικές προσεγγίσεις, όπως φάνηκε από τη διατύπωση εικασιών των μαθητών στο φύλλο εργασίας τους σχετικά με την αλγεβρική σύγκριση μεγεθών. Αποτελούν πιο σύνθετες και υψηλότερου νοητικού επιπέδου τεχνικές (Battista, 2006).

Όπως προκύπτει από την ανάλυση των δεδομένων, συγκεκριμένες χρήσεις του εργαλείου οδήγησαν στην οικοδόμηση συγκεκριμένων κατηγοριών εργαλειακών τεχνικών από τους μαθητές, οι οποίες με τη σειρά τους οδήγησαν κάθε μαθητή της έρευνας στην εννοιολογική κατανόηση του υπό εξέταση αλγεβρικού κανόνα. Παρόλα αυτά, η κατανόηση αυτή δεν μεταφράζεται με τον ίδιο μοναδικό τρόπο για κάθε μαθητή. Κάθε μαθητής οικοδομεί τις δικές του ατομικές νοητικές αναπαραστάσεις κατά τη διαδικασία οικοδόμησης εργαλείου (instrumentation), (Trouche, 2004) οι οποίες τελικά εκφράζονται μέσα από τις διαφορετικές λεκτικές διατυπώσεις των εικασιών και γενικεύσεων των μαθητών στα φύλλα εργασίας τους.

Επιπλέον, η ανάλυση των αποτελεσμάτων δείχνει ότι όλοι οι μαθητές ενεπλάκησαν ενεργά με τη δραστηριότητα και περνώντας από διαδικασίες διερεύνησης στη διατύπωση εικασιών και τελικά γενικεύσεων, οικοδόμησαν μια οπτικο-χωρική αντίληψη της αλγεβρικής σύγκρισης μη αρνητικών πραγματικών αριθμών, την οποία αποτύπωσαν λεκτικά και συμβολικά στα φύλλα εργασίας τους. Στο σημείο αυτό, επισημαίνεται ότι η συμβολική αναπαράσταση φάνηκε να δυσκολεύει ορισμένους μαθητές.

Οι μαθητές αξιοποίησαν ταυτόχρονα πολλαπλές διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις του Cabri Geometry II με συμπληρωματικό (complementary), περιοριστικό (constraining) και εποικοδομιστικό (constructing) τρόπο (Ainsworth, 1999, 2006). Οι αναπαραστάσεις που αξιοποίησαν οι μαθητές είναι: γεωμετρικές αναπαραστάσεις μεταβλητών ως μεταβαλλόμενα ευθύγραμμα τμήματα, αριθμητικές και συμβολικές αναπαραστάσεις, καθώς και αναπαραστάσεις με τη μορφή πίνακα. Συνδυάζοντας τις αναπαραστάσεις αυτές με συμπληρωματικό και περιοριστικό τρόπο, οι μαθητές οδηγήθηκαν στη διατύπωση εικασιών και γενικεύσεων τις οποίες αποτύπωσαν στο φύλλο εργασίας του με λεκτική και συμβολική μορφή. Παράλληλα, η δυναμική μεταβολή του μήκους α του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και η ταυτόχρονη διερεύνηση της συμμεταβολής των α και α-β ως ευθύγραμμα τμήματα στην οθόνη του Cabri, διευκόλυνε τους μαθητές στην κατανόηση της συμμεταβολής αυτών των μεγεθών, υποστηρίζοντας με αυτό τον τρόπο τη διατύπωση εικασιών και γενικεύσεων (λειτουργία βαθύτερης κατανόησης, του πλαισίου DeFT).

Συνεπώς, στη συγκεκριμένη έρευνα, αξιοποιήθηκαν πολλαπλές διασυνδεμένες αναπαραστάσεις του Cabri Geometry II αρχικά με συμπληρωματικό τρόπο, σύμφωνα με το DeFT πλαίσιο. Οι αναπαραστάσεις αυτές διέφεραν είτε ως προς τη πληροφορία που παρείχαν είτε ως προς τις λειτουργίες που υποστήριζαν, λειτουργώντας έτσι συμπληρωματικά η μια ως προς την άλλη κατά τη διαδικασία της μάθησης. Συνδυάζοντας πολλαπλές αναπαραστάσεις, οι μαθητές ωφελήθηκαν από το άθροισμα των πλεονεκτημάτων τους (Ainsworth, 1999). Όπως αναφέρει ο Kaput (1987, pp. 19-26): «*η γνωστική σύνδεση αναπαραστάσεων δημιουργεί ένα όλο που είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των μερών του*». Η αξιοποίηση πολλαπλών διασυνδεδεμένων αναπαραστάσεων στο πλαίσιο κατάλληλα διαμορφωμένης δραστηριότητας οδήγησε τους μαθητές σε βαθύτερη κατανόηση, υποστηρίζοντας το πέρασμα από τη διατύπωση εικασιών στη διατύπωση γενικεύσεων αναφορικά με τον κανόνα αλγεβρικής σύγκρισης μη αρνητικών αριθμών στο Cabri Geometry II.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ainsworth, S.E. (1999). The functions of multiple representations. *Computers and Education*, *33(2-3),* 131-152.

Ainsworth, S.E. (2006). DeFT: A conceptual framework for learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16(3),* 183-198.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7(3)*, 245-274.

Balomenou, A., Komis, V., & Zacharos, K. (2017). Handling Signs in Inequalities by Exploiting Multiple Dynamic Representations–the Case of ALNuSet. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 1-31.

Battista, M. T. (2006). Understanding the development of students' thinking about length. *Teaching Children Mathematics*, *13*(3), 140.

Cohen, L., Manion, L. and Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (6th ed), Routledge Publishers, Oxford, UK.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 61(1-2),* 103-131.

Kieran, C., & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International journal of computers for* mathematical learning, 11(2), 205-263.

Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. *Problems of representation in the* teaching and learning of mathematics, 19-26.

Κόμης, Β. (2004). *Εισαγωγή στις Εκπαιδευτικές Εφαρμογές των ΤΠΕ*, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα.

Μπαλωμένου, Α. (2017). *Οικοδόμηση Μαθηματικών Εννοιών με Αξιοποίηση Υπολογιστικών Εργαλείων Πολλαπλών Αναπαραστάσεων: Η περίπτωση της ανισότητας.* (Αδημοσίευτη) Διδακτορική διατριβή, Παν/μιο Πατρών, ΤΕΕΑΠΗ, Μάρτιος, 2017.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes & les technologies. Approche cognitive des instruments contemporaines* Ed.: A. Colin Paris.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for mathematical learning, 9(3),* 281-307.

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts. A contribution to the study of thought in relation to instrumental activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10, 77-101.

Η ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤ΄ ΤΑΞΗΣ ΣΤΗΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΝΑΣΧΟΛΗΣΗ ΤΟΥΣ ΜΕ ΕΡΓΑ ΜΕΓΕΘΥΝΣΗΣ ΚΑΙ ΣΜΙΚΡΥΝΣΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Μπαμπάτσικου Γ., Τριανταφυλλίδης Τ. Α., Ασημόπουλος Στ.

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης
mpampats@uth.gr, ttriant@uth.gr, asimstef@uth.gr

Η πολλαπλασιαστική σχέση όπως αυτή ενυπάρχει στους λόγους και τις αναλογίες είναι συχνά δυσδιάκριτη για τους μαθητές[1], ιδιαίτερα σε έργα που αφορούν τη μεγέθυνση και σμίκρυνση σχημάτων. Στην εισήγησή μας θα παρουσιάσουμε την εξέλιξη των εννοιολογήσεων οκτώ μαθητών ηλικίας δώδεκα ετών κατά τη συμμετοχή τους σε μια ακολουθία διεπιστημονικών έργων που αφορούσαν την ευθύγραμμη διάδοση των φωτεινών ακτίνων με θέμα την οπτική και την ομοιότητα σχημάτων, εστιάζοντας στη μετάβαση από την προσθετική στην πολλαπλασιαστική σκέψη. Συνολικά, παρατηρήθηκε βελτίωση ως προς τα επίπεδα στρατηγικών τους. Η μεθοδολογία που ακολουθήσαμε είναι το διδακτικό πείραμα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα έρευνα αποτέλεσε μια πρόταση προσέγγισης των Μαθηματικών και των Φυσικών Επιστημών. Ως εργαλείο σύνδεσης των δύο σχολικών αντικειμένων χρησιμοποιήσαμε μια πειραματική διάταξη βασισμένη στις αρχές της camera obscura. Η αρχή στην οποία στηρίζεται η camera obscura αφορά στην ευθύγραμμη διέλευση ακτίνων φωτός μέσα από μία οπή, και είναι κοινή με αυτήν της πειραματικής δραστηριότητας που προτείνεται για την Οπτική στο Τετράδιο Εργασιών που συνοδεύει το σχολικό εγχειρίδιο των μαθητών της Στ’ τάξης στο μάθημα των «Φυσικών» (σελ. 149-152). Χρησιμοποιώντας αυτή τη διάταξη εργαστήκαμε με τις έννοιες της ευθύγραμμης διάδοσης του φωτός, της φύσης του φωτός και της ύπαρξης των φωτεινών πηγών. Παράλληλα ασχοληθήκαμε με τους λόγους και τις αναλογίες μέσα από τη μεγέθυνση και τη σμίκρυνση γεωμετρικών σχημάτων, όπως αυτά διαμορφώνονταν κάθε φορά μέσα από τα έργα με την πειραματική διάταξη. Η διεπιστημονική προσέγγιση συγγενών κλάδων που εφαρμόσαμε προτείνεται για διδασκαλία με σκοπό τη συνεκτική παρουσίαση της γνώσης και της μεταφοράς της από το ένα σχολικό αντικείμενο στο άλλο. Στη συγκεκριμένη εισήγηση θα εστιάσουμε στο μέρος των αποτελεσμάτων που παρήγαγε η έρευνα αναφορικά με τους λόγους και τις αναλογίες.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Για τις έννοιες της Οπτικής που προαναφέραμε έχει διαπιστωθεί ‘αντίσταση’ στην αλλαγή των εννοιολογήσεων των μαθητών, μιας και παρά την πρόσκαιρη αποδοχή των επιστημονικών ιδεών από τους μαθητές κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, υπάρχει επιστροφή σε προηγούμενες εναλλακτικές ιδέες (Fetherstonhaugh, & Happs, 1988). Αντίστοιχα, και στο πεδίο των Μαθηματικών, όπου εστιάζει η συγκεκριμένη παρουσίαση, έχει παρατηρηθεί δυσκολία από τους μαθητές ως προς τη μεγέθυνση και σμίκρυνση δισδιάστατων σχημάτων. Συνολικά οι λόγοι και οι αναλογίες χωρίζονται σε τέσσερις τύπους προβλημάτων, τα προβλήματα *συνδιακύμανσης-συμμεταβολής ποσοτήτων* (π.χ. χρήματα προς τεμάχιο), τα προβλήματα *μέρους-μέρους-όλου* (π.χ. αγόρια, κορίτσια και το σύνολο), τα *προβλήματα αντιστοιχίας* (π.χ. λουλούδια και βάζα), και τέλος τα προβλήματα *μεγέθυνσης και σμίκρυνσης*. Οι μαθητές αντιμετωπίζουν τις περισσότερες δυσκολίες στη μεγέθυνση και σμίκρυνση, μη μπορώντας να αντιληφθούν την πολλαπλασιαστική σύγκριση που ενυπάρχει σε αυτά τα έργα (Lamon, 1993).

Ο αναλογικός συλλογισμός αποτελεί θεμέλιο λίθο στο αναλυτικό πρόγραμμα του δημοτικού (Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984). Απαιτεί κατανόηση των πολλαπλασιαστικών σχέσεων μεταξύ ρητών ποσοτήτων, αντίθετα προς τις περισσότερες αριθμητικές έννοιες που είναι από τη φύση τους προσθετικές (Boyer, Levine, & Huttenlocher, 2008), ενώ αναπτύσσεται σε ευρύ χρονικό διάστημα (Jitendra *et al.*, 2009). Ο λόγος είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών ή μετρήσεων που εκφράζει μια σύγκριση ανάμεσα στους συγκεκριμένους αριθμούς ή τις μετρήσεις, ενώ η αναλογία εκφράζει την ισότητα μεταξύ δύο λόγων. Στην μελέτη των αναλογιών οι λόγοι μπορεί να αφορούν σε εσωτερικούς ή εξωτερικούς λόγους, ανάλογα δηλαδή αν συγκρίνουμε ποσότητες από τον ίδιο ή διαφορετικούς χώρους μέτρησης (Noelting, 1980). Η γεωμετρία και οι μετρήσεις αποτελούν πλαίσιο που βοηθά στην ανάπτυξη της κατανόησης των λόγων και αναλογιών, εμπλουτίζοντας την ανάπτυξη των αριθμητικών εννοιών και διεργασιών. Με τις έννοιες του λόγου και τς αναλογίας σχετίζονται άμεσα ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση, οι ρητοί αριθμοί, όπως και οι δεκαδικοί αριθμοί (Lo & Watanabe, 1997; Behr *et al.*, 1984). Επιπλέον, αξιοποιείται η έννοια της κλίμακας, καθώς αφορά το λόγο μεταξύ της μονάδας μήκους του χάρτη και της μονάδας μήκους στην πραγματικότητα (Ben-Chaim, Keret, & Illany, 2012). Στους λόγους και τις αναλογίες τα έργα που ανατίθενται στους μαθητές, συνήθως, αφορούν την εύρεση μιας ποσότητας *χ*, γνωρίζοντας τις ποσότητες *α, β* και *γ,* στη σχέση *α/β=γ/χ* ή τον προσδιορισμό της ύπαρξης ή μη αναλογίας μεταξύ των δύο λόγων. Στην περίπτωση που οι απαντήσεις σε αυτά τα έργα δεν αιτιολογούνται, υπάρχει η πιθανότητα υπερεκτίμησης των ικανοτήτων και της κατανόησης των μαθητών, αφού συχνά συμβαίνει να δίνεται σωστή απάντηση η οποία όμως δεν απορρέει από αναλογική συλλογιστική αλλά ενδεχομένως βασίζεται στην αλγοριθμική σχέση των μεγεθών (Tourniaire & Pulos, 1985). Για την επίλυση προβλημάτων λόγων και αναλογιών οι μαθητές επιλέγουν διάφορες στρατηγικές. Οι στρατηγικές χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες σύμφωνα με τη Lamon (1993), τις μη εποικοδομητικές και τις εποικοδομητικές, και αντικατοπτρίζουν τον βαθμό κατανόησης των προβλημάτων λόγων και αναλογιών. Στις μη εποικοδομητικές εντάσσονται η *αποφυγή*, όπου δεν υπάρχει σοβαρή εμπλοκή με το πρόβλημα, η *οπτική* ή *προσθετική στρατηγική*, όπου οι μαθητές προσπαθούν να απαντήσουν είτε με δοκιμή και πλάνη είτε προσθέτοντας μήκη είτε επειδή οπτικά διαπιστώνουν ότι έχει υπάρξει μεταβολή, με παράδειγμα έκφρασης «μοιάζει να είναι...». Τελευταία μη εποικοδομητική στρατηγική είναι η *κατασκευή μοτίβου,* όπου υπάρχει η χρήση λεκτικού ή γραπτού μοτίβου, όπως για παράδειγμα η συμπλήρωση ενός πίνακα που βασίζεται σε μία αλγεβρική σχέση $x = y \times n$, όπου το y μπορεί να είναι το κόστος ενός αντικειμένου και n διάφορες ποσότητες του αντικειμένου αυτού. Στις εποικοδομητικές στρατηγικές εντάσσεται η *προ-αναλογική συλλογιστική,* όπου παρατηρούνται ενστικτώδεις δράσεις με νόημα (εικόνες, διαγράμματα, προσομοιώσεις, χειραπτικά υλικά) και μερική σχετική συλλογιστική. Ακολουθεί η *ποιοτική αναλογική συλλογιστική*, με χρήση σχετικής συλλογιστικής και κατανόηση κάποιων αριθμητικών σχέσων, και τέλος η *ποσοτική αναλογική συλλογιστική*, με χρήση αλγεβρικών συμβόλων για αναπαράσταση αναλογιών, με πλήρη κατανόηση συναρτησιακών σχέσεων και σχέσεων τελεστή κλίμακας. Σύμφωνα με τη Lamon (1993), η κυρίαρχη στρατηγική των μαθητών ηλικίας δώδεκα ετών για τη μεγέθυνση και σμίκρυνση σχημάτων είναι η οπτική ή προσθετική στρατηγική.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Σκοπός αυτής της έρευνας ήταν μέσω μιας διδακτικής ακολουθίας διεπιστημονικών δραστηριοτήτων, να αναδείξουμε τις ιδέες των μαθητών σχετικά με την οπτική και την ομοιότητα σχημάτων. Πιο συγκεκριμένα, θελήσαμε να απαντήσουμε σε δύο ερευνητικά ερωτήματα: α) ποιες είναι οι εννοιολογήσεις των μαθητών και των μαθητριών ως προς τη φύση του φωτός, την ευθύγραμμη διάδοση και τη φωτεινή πηγή, και ως προς τους λόγους και τις αναλογίες όπως εμφανίζονται στην διερεύνηση όμοιων σχημάτων και β) πώς τροποποιήθηκαν οι εννοιολογήσεις αυτές μέσω της συμμετοχής τους στα συγκεκριμένα έργα. Η μεθοδολογία που επιλέξαμε στην παρούσα έρευνα δανείζεται στοιχεία από το διδακτικό πείραμα, το οποίο εντάσσεται στην κατηγορία των ερευνών σχεδιασμού (Molina, Castro, & Castro, 2007). Η διάταξη που χρησιμοποιήσαμε ως εργαλείο

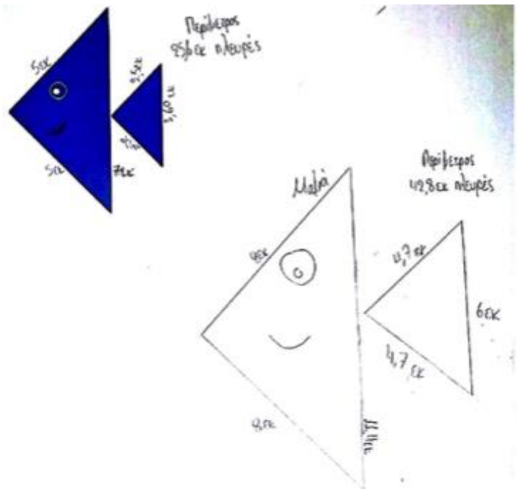
Εικόνα 1: Πειραματική διάταξη

σύνδεσης των δύο γνωστικών αντικειμένων και πραγματοποίησης των πειραμάτων που περιελάμβαναν τα έργα του διδακτικού πειράματος (βλ. Εικόνα 1), αποτελούταν από μια παράλληλη σειρά ενός ορθογώνιου πλέγματος φωτεινών πηγών led, ενός πετάσματος με κυκλική οπή και μίας επίπεδης επιφάνειας πίσω από την οπή, η οποία λειτουργούσε ως οθόνη. Τα τρία αυτά στοιχεία ήταν τοποθετημένα κατακόρυφα σε μία ράγα, με δυνατότητα σχετικής μετακίνησης. Το φως από τα κατ' επιλογήν αναμμένα led, διερχόμενο από την κυκλική οπή του πετάσματος, γινόταν ορατό ως ανεστραμμένο είδωλο στην οθόνη, έχοντας τη μορφή του δισδιάστατου σχήματος που σχημάτιζαν τα led, ως κορυφές του γεωμετρικού σχήματος.

Στην έρευνα συμμετείχαν οκτώ μαθητές χωρισμένοι σε τέσσερις δυάδες, καθώς οι μικρές ομάδες βοηθούν τις κοινωνικές διαδικασίες που συμβάλλουν θετικά στη μάθηση. Οι μαθητές ήταν ηλικίας δώδεκα ετών και φοιτούσαν σε ένα 12/θέσιο δημοτικό σχολείο στο αστικό κέντρο της πρωτεύουσας ενός νομού της Θεσσαλίας. Έχοντας εξασφαλίσει έγκαιρα τη συγκατάθεση των γονέων για τη συμμετοχή στην έρευνα, ξεκινήσαμε παρατηρώντας καθημερινά επί μια εβδομάδα το ωρολόγιο πρόγραμμα της τάξης με σκοπό την εξοικείωσή μας με τους συμμετέχοντες. Οι γνωστικές διαφορές μεταξύ των συγκεκριμένων μαθητών δεν ήταν σημαντικές, τόσο ως προς τις Φυσικές Επιστήμες όσο και ως προς τα

Μαθηματικά. Στη συνέχεια, πραγματοποιήσαμε 7 συναντήσεις με κάθε δύο ζεύγη μαθητών (14 συνολικά συναντήσεις), διάρκειας ενός διδακτικού διώρου η καθεμία.

Στην επιτόπια έρευνα συμμετείχαν η πρώτη συγγραφέας ως ερευνήτρια-δασκάλα, όπως απαιτεί το διδακτικό πείραμα, καθώς και μία ‘μη συμμετοχική’ παρατηρήτρια, αφού αυτή δεν παρενέβαινε στη διδακτική διαδικασία, σχολιάζοντας ή βοηθώντας με τα διδακτικά υλικά. Οι διδακτικές συναντήσεις μαγνητοφωνήθηκαν, τόσο κατά τις συζητήσεις στην ολομέλεια, όσο και κατά τη συνεργασία σε κάθε ζευγάρι ξεχωριστά.



Εικόνα 2

Εικόνα 2

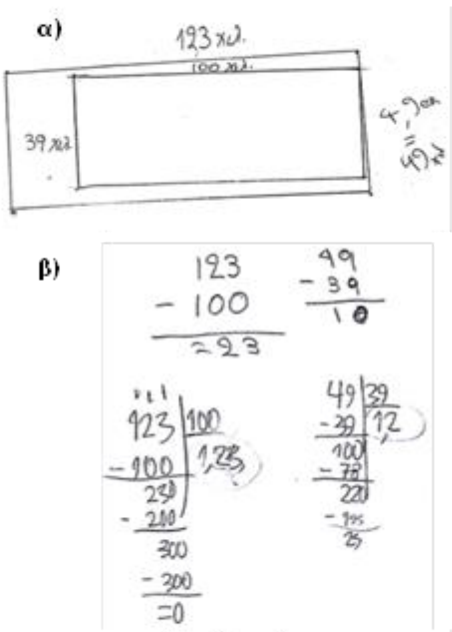
Η πρώτη και η έβδομη συνάντηση (διαγνωστική και τελική αξιολόγηση, αντίστοιχα) αφορούσαν ατομικά έργα που οι μαθητές εκτελούσαν σιωπηλά, συνεπώς σε αυτές τα δεδομένα από τις μαγνητοφωνήσεις είναι λίγα. Ενδιάμεσα πραγματοποιήθηκαν πέντε διδακτικές συναντήσεις για τη διδασκαλία των εννοιών. Μετά το τέλος κάθε διδακτικής συνάντησης ακολουθούσε αναστοχαστική συνεδρία με την παρατηρήτρια, όπου εστιάζαμε στις δυσκολίες και την πρόοδο των μαθητών, αλλά και στην ευστοχία του σχεδιασμού του διδακτικού υλικού που είχαμε χρησιμοποιήσει κατά τη συνάντηση. Αναστοχαστικές συνεδρίες πραγματοποιούσαμε επίσης και με τους άλλους δύο συγγραφείς, για την τροποποίηση της διδακτικής πορείας που είχαμε προσχεδιάσει. Τη διδακτική πορεία την είχαμε διαμορφώσει με γνώμονα τη βαθμιαία εξέλιξη των στρατηγικών προς τις εποικοδομητικές και την τροποποιούσαμε προς αυτήν την κατεύθυνση, λαμβάνοντας υπόψη τις ανάγκες των μαθητών έπειτα από κάθε διδακτική συνάντηση.

Η τριγωνοποίηση των δεδομένων πραγματοποιήθηκε με τις απομαγνητοφωνημένες ηχογραφήσεις των διδακτικών συναντήσεων, τις σημειώσεις πεδίου της παρατηρήτριας και τις σημειώσεις της ερευνήτριας-δασκάλας. Επιπλέον, στα δεδομένα συμπεριλήφθηκαν οι σημειώσεις της ερευνήτριας-δασκάλας από τις αναστοχαστικές συνεδρίες που ακολουθούσαν κάθε διδακτική συνάντηση. Η προσέγγιση ανάλυσης των ποιοτικών δεδομένων ήταν αυτή της ερμηνευτικής φαινομενολογικής ανάλυσης, επιχειρώντας να κατανοήσουμε το νόημα που προσδίδει ο κάθε μαθητής στις εν λόγω έννοιες και πειραματικές διατάξεις. Οι συγκεκριμένοι μαθητές είχαν ήδη διδαχθεί στο πλαίσιο των Αναλυτικών Προγραμμάτων των δύο γνωστικών αντικειμένων τις έννοιες τις οποίες πραγματευτήκαμε. Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων που ακολουθεί αφορά μέρος του μαθηματικού περιεχομένου των 7 συναντήσεων εστιάζοντας στη μετάβαση από την προσθετική στην πολλαπλασιαστική σκέψη. Στην παρουσίασή μας δεν θα αναφέρουμε δεδομένα που αφορούν τις έννοιες της οπτικής.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Στα έργα της διαγνωστικής αξιολόγησης ζητήσαμε από τους μαθητές να σχεδιάσουν τους γονείς του τριγωνοψαρούλη, λέγοντάς τους ότι θα πρέπει να είναι όμοιοι με αυτόν αλλά μεγαλύτεροι. Οι μαθητές μέτρησαν αυθόρμητα τα μήκη των πλευρών του τριγωνοψαρούλη, διαπιστώνοντας ότι τα τρίγωνα είναι ισοσκελή, δίχως να προβληματιστούν για το μέτρο των γωνιών. Κατά τον σχεδιασμό των γονιών, οι πέντε μαθητές εργάστηκαν χωρίς να τηρήσουν τις σχέσεις αναλογίας των μεγεθών, αλλά φρόντισαν μόνο ώστε να είναι ισοσκελή τα τρίγωνα, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2, όπου τα μέτρα των μηκών έγιναν από 5 σε 8 εκ. για το τρίγωνο του σώματος και από 2,5 σε 4,7 εκ. για το τρίγωνο της ουράς. Οι μαθητές διαπίστωσαν ότι δεν μπορούσαν να ακολουθήσουν το ίδιο μέτρο αύξησης των μηκών κατά τον σχεδιασμό της τρίτης πλευράς των τριγώνων, με αποτέλεσμα να αυξήσουν τα μήκη όσο απαιτούταν ώστε να σχηματιστούν τα τρίγωνα. Το γεγονός ότι δε διατήρησαν σταθερό το ποσό της αύξησης των σκελών στα δύο τρίγωνα που συναποτελούσαν τον γονιό, υποδηλώνει ότι οι μαθητές ακολούθησαν την οπτική ή προσθετική στρατηγική. Δύο μαθητές σχεδίασαν τον ένα γονιό διπλασιάζοντας τις πλευρές και των δυο τρίγωνων, χρησιμοποιώντας τον γνώμονα για να σχεδιάσουν τις ορθές γωνίες. Στον σχεδιασμό του άλλου γονιού όμως εργάστηκαν προσθετικά, ακολουθώντας κι αυτοί την οπτική ή προσθετική στρατηγική. Μόνο ένας μαθητής σχεδίασε πολλαπλασιαστικά και τους δύο γονείς, επιλέγοντας ως τελεστές τους αριθμούς 3 και 2 για τον μπαμπά και τη μαμά αντίστοιχα.

Στην πρώτη διδακτική συνάντηση κάναμε δοκιμές με την πειραματική διάταξη και συζητώντας για την οπτική οι μαθητές εξέφρασαν την ιδέα περί αναστροφής του ειδώλου στην επιφάνεια της οθόνης. Η φωτεινή πηγή σχημάτιζε τις κορυφές ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου (το σχήμα αυτό διατηρήθηκε σε όλες τις διδακτικές συναντήσεις), το οποίο αποτυπωνόταν ανεστραμμένο στην επιφάνεια της οθόνης, καθώς οι φωτεινές ακτίνες περνούσαν μέσα από την οπή. Ρωτώντας τους μαθητές «τι θα συμβεί αν απομακρύνουμε την οθόνη από την οπή» κάποιοι είπαν ότι το σχήμα «θα πάει προς τα μέσα, θα γίνει τετράγωνο», ενώ άλλοι ότι «θα παραμείνει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο». Αφού απομάκρυναν την οθόνη διαπίστωσαν ότι «μεγάλωσαν οι διαστάσεις του ορθογωνίου». Ρωτώντας τους αν «μπορούμε να βρούμε κάποια σχέση που να δείχνει πόσο άλλαξε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο», ζήτησαν να σημαδέψουν στο χαρτί της οθόνης τις κορυφές των δύο ορθογωνίων παραλληλογράμμων, και κατόπιν σχεδίασαν και μέτρησαν τα μήκη των πλευρών τους (Εικόνα 3α).



Εικόνα 3

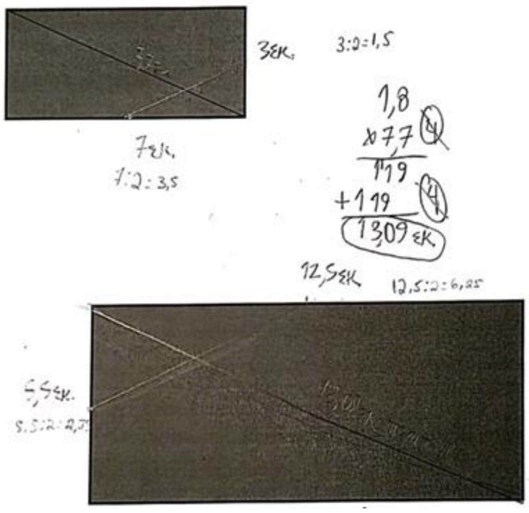
Εικόνα 3

Οι έξι από τους μαθητές πρότειναν «να βρούμε τη διαφορά των μηκών τους» για να φτάσουμε στη σχέση που συνδέει τα ορθογώνια. Ο ένας από τους μαθητές που είχε ακολουθήσει πολλαπλασιαστική στρατηγική για να σχεδιάσει τον ένα γονιό στη διαγνωστική συνάντηση διαφώνησε λέγοντας «θα κάνουμε διαίρεση για να βρούμε πόσο πολλαπλάσιο είναι». Ανάλογα διαφώνησε και ο μαθητής που είχε ακολουθήσει μόνο πολλαπλασιαστική στρατηγική στη διαγνωστική συνάντηση, λέγοντας «αφού λέμε διπλάσιο, τριπλάσιο έχει πολλαπλασιασμό».

Εκμεταλλευόμενοι αυτές τις διατυπώσεις, τούς ωθήσαμε να δοκιμάσουν και τις δύο πράξεις. Έχοντας κάνει τις αφαιρέσεις δεν διατύπωσαν λεκτικά κάποια σχέση. Έπειτα παρότι είχαν προτείνει τον πολλαπλασιασμό ως σχέση μεταξύ των ορθογωνίων, επέλεξαν τη διαίρεση με διαιρετέο τον μεγαλύτερο αριθμό (Εικόνα 3β). Εστιάζοντας εμείς την προσοχή τους στο δεκαδικό μέρος των πηλίκων, διαπίστωσαν ότι με στρογγυλοποίηση τα δύο πηλίκα είναι «σχεδόν το ίδιο, 1,2». Έτσι άρχισε να επικρατεί η πολλαπλασιαστική προσέγγιση στην αναζήτηση της σχέσης των σχημάτων.

Για τους μαθητές η αναγνώριση σχέσεων μεγέθυνσης και σμίκρυνσης μεταξύ των ορθογωνίων παραλληλογράμμων ήταν πιο εύκολο να εντοπιστεί όταν αφορούσε είτε στο διπλάσιο είτε στο μισό. Σε επόμενο έργο τους δώσαμε σε φύλλο Α4 διάφορα ορθογώνια παραλληλόγραμμα συμπεριλαμβανομένου και αυτού της φωτεινής πηγής, και τους ρωτήσαμε «ποια από αυτά θα μπορούσαν να αποτελούν οθόνες» της. Αν και όλοι οι μαθητές μέτρησαν και σημείωσαν τις διαστάσεις των ορθογωνίων στο φύλλο και κύκλωσαν τις οθόνες της φωτεινής πηγής με επιτυχία επιδεικνύοντας προ-αναλογική συλλογιστική, μόνο ένας μαθητής απέδωσε γραπτώς τις σχέσεις πηγής-οθονών κάνοντας μάλιστα αναφορά σε τελεστές μεγαλύτερους και μικρότερους της μονάδας. Ο μαθητής που επέδειξε ποιοτική αναλογική συλλογιστική, ήταν ένας από τους δύο μαθητές που αρχικά είχαν χρησιμοποιήσει πολλαπλασιαστική και προσθετική στρατηγική.

Σε επόμενη δραστηριότητα, γνωρίζοντας τις διαστάσεις του ορθογωνίου της φωτεινής πηγής (7 εκ. το μήκος και 3 εκ. το πλάτος), ζητήσαμε από τους μαθητές να σχεδιάσουν μια οθόνη γνωρίζοντας μόνο το μέτρο του μήκους της (11,2 εκ.). Οι μαθητές ανέδειξαν άτυπα τον εξωτερικό και εσωτερικό λόγο των διαστάσεων των ορθογωνίων, με παράδειγμα γραφής τους $11{,}2 \div 7 = 1{,}6$ άρα $1{,}6 \times 3 = 4{,}8$εκ., και $7 \div 3 = 2{,}33$ άρα $11{,}2 \div 2{,}33 = 4{,}8$εκ. δίχως όμως να συνειδητοποιήσουν ότι αυτοί οι λόγοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν εναλλάξ για να αποδώσουν τη σχέση μεταξύ των σχημάτων. Αμέσως μετά, θέλοντας να αποφύγουμε την ταύτιση της αναλογίας των δύο ορθογωνίων παραλληλογράμμων με τους εσωτερικούς και εξωτερικούς λόγους των μηκών και πλατών τους, τους ζητήσαμε να υπολογίσουν το μήκος της διαγωνίου της οθόνης, γνωρίζοντας το μήκος της διαγωνίου της πηγής. Το ίδιο τους ζητήσαμε και για το ευθύγραμμο τμήμα που ένωνε τα μέσα δύο γειτονικών πλευρών της πηγής και τα αντίστοιχα της οθόνης. Παρότι εκτέλεσαν με επιτυχία τις μετρήσεις και βρήκαν τον λόγο που συνέδεε τα μήκη και τα πλάτη, χρειάστηκαν ώθηση από τη ερευνήτρια-δασκάλα για να περιγράψουν με τον λόγο αυτό τη σχέση μεταξύ των διαγωνίων, κι ακόμη περισσότερη στήριξη για τα ευθύγραμμα τμήματα που συνέδεαν τα μέσα των γειτονικών πλευρών (Εικόνα 4).



Εικόνα 4

Εικόνα 4

Προσπαθώντας να ενισχύσουμε την ποιοτική αναλογική συλλογιστική, με χρήση μαθηματικής ορολογίας στην επικοινωνία των σχέσεων μεγέθυνσης και σμίκρυνσης, ρωτήσαμε «πώς αλλιώς μπορεί να εκφραστεί μια διαίρεση» και οι μαθητές είπαν «με κλάσμα». Έτσι, εκφράσεις που δήλωναν διαίρεση, όπως «επτά δια δύο» άρχισαν να διατυπώνονται ως «επτά δεύτερα». Παρατηρώντας την τάση των μαθητών να επιλέγουν στη θέση του αριθμητή τον μεγαλύτερο αριθμό ως πιο βολικό, μετακινήσαμε την οθόνη πιο κοντά στην οπή, ώστε να μικρύνει το σχήμα της οθόνης. Ζητώντας από τους μαθητές να γράψουν με κλάσμα πια αυτή τη σμίκρυνση, και έχοντας σημειώσει οι ίδιοι ότι το μέτρο των μηκών δύο αντίστοιχων πλευρών των οθονών ήταν 3,5 εκ. και 1,5 εκ., κάποιοι είπαν «θα διαιρέσουμε το 3,5 με το 1,5» ενώ άλλοι «θα διαιρέσουμε το 1,5 με το 3,5». Οι δεκαδικοί αριθμοί εδώ ενδεχομένως να μη βοήθησαν τους μαθητές να εκφράσουν τη σχέση μέσω κλάσματος. Ρωτώντας τους όμως «ποια από τις δύο εκφράσεις δείχνει σμίκρυνση», όλοι είπαν εσφαλμένα «η πρώτη, γιατί ξεκινάμε από αυτό που ήταν και πάμε σε αυτό που έγινε». Επιμείναμε συνεχίζοντας τη συζήτηση με αναφορά στους χάρτες και οι μαθητές θυμήθηκαν ότι «το υπόμνημα, έχει έναν λόγο, π.χ. 1 προς 50.000». Συζητώντας περαιτέρω, κατέληξαν ότι πάντα στη θέση του αριθμητή αναγράφεται η αναπαράσταση του χάρτη και στη θέση του παρονομαστή η φυσική αναπαράσταση. Στο τέλος των διδακτικών συναντήσεων η εστίαση των μαθητών δεν αφορούσε πια το αποτέλεσμα καθαυτό αλλά εστίαζαν στο αν το κλάσμα ήταν μεγαλύτερο ή μικρότερο από τη μονάδα, ώστε να εξακριβώσουν αν περιγράφει μεγέθυνση ή σμίκρυνση.

Τα έργα για την τελική αξιολόγηση, που ήταν ατομική και σιωπηλή, περιλάμβαναν κανονικά εξάγωνα, και ήταν παραλλαγές της αρχικής αξιολόγησης. Οι μαθητές σημείωσαν ότι «η μεγέθυνση και η σμίκρυνση συμβαίνει στις διαστάσεις», μη αναφέροντας ή σχεδιάζοντας διαγωνίους ή κάποιο άλλο ευθύγραμμο τμήμα. Επιδιώκοντας να δούμε αν οι μαθητές μπορούσαν να συνδέσουν και να μεταφέρουν τη ‘γνώση’ τους μετακινήσαμε σε συγκεκριμένη θέση την επιφάνεια της οθόνης στην πειραματική διάταξη και ζητήσαμε να γράψουν τί συνέβη ως προς τη σχέση όχι των σχημάτων αλλά των αποστάσεων μεταξύ φωτεινής πηγής-οπής και οπής-οθόνης. Οι τέσσερις μαθητές, αφού μέτρησαν τις αποστάσεις, έγραψαν τον λόγο, σημειώνοντας ότι «η απόσταση της οπής με την οθόνη μίκρυνε επί 2/3 σε σχέση με την απόσταση της φωτεινής πηγής με την οπή», ενώ οι υπόλοιποι δεν κατάφεραν να αποδώσουν τη σχέση.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στα έργα της διαγνωστικής αξιολόγησης πέντε από τους μαθητές χρησιμοποίησαν την οπτική ή προσθετική στρατηγική, δύο μαθητές την χρησιμοποίησαν εναλλάξ με την πολλαπλασιαστική στρατηγική, ενώ ένας μαθητής χρησιμοποίησε την πολλαπλασιαστική σε όλα τα έργα. Κατά τις διδακτικές συναντήσεις οι μαθητές με μεγαλύτερη ευκολία αναγνώριζαν την αναλογικότητα μεταξύ ορθογωνίων παραλληλογράμμων όταν ο τελεστής ήταν το 2 ή το μισό. Όλοι οι μαθητές επέλεγαν σταθερά τη μεγαλύτερη τιμή στη θέση του διαιρετέου, με αποτέλεσμα να αποδίδουν όλες τις σχέσεις των ορθογωνίων παραλληλογράμμων ως μεγεθύνσεις. Λόγω αυτής της επιλογής τους, όταν το πηλίκο ήταν δεκαδικός αριθμός οι μαθητές δυσκολεύονταν στη διατύπωση της σχέσης, καθώς μετά τη διαίρεση δεν αξιοποιούσαν το πηλίκο για να εκφράσουν τη σχέση αναλογίας μεταξύ των ορθογωνίων παραλληλογράμμων. Παρότι χρησιμοποίησαν τον εσωτερικό και εξωτερικό λόγο των μηκών και των πλατών των ορθογωνίων παραλληλογράμμων, δεν κατάφεραν να αναγνωρίσουν αυτές τους τις ενέργειες ως ιδιότητα των αναλογιών, όπως και να επεκτείνουν τη σχέση αναλογίας μεταξύ άλλων μηκών που αφορούσαν τα σχήματα (π.χ. διαγωνίους). Όπως φάνηκε και από τα έργα της τελικής αξιολόγησης η συλλογιστική των μισών μαθητών παρέμεινε μεταξύ της προσθετικής και πολλαπλασιαστικής στρατηγικής. Οι άλλοι μισοί μαθητές μετέβησαν στην ποιοτική αναλογική συλλογιστική, κάνοντας συνειδητή επιλογή των αριθμητών και των παρονομαστών στους λόγους, ενώ ένας από αυτούς κατάφερε να αποδώσει και ποσοτικά τη σχέση αναλογίας.

Η έρευνα περιορίστηκε σε λίγα επεισόδια με έλλειψη επαρκούς χρονικού διαστήματος μεταξύ τους. Η άρση αυτών των περιορισμών θα επέτρεπε πιο ενδελεχή ανάλυση των ενδιάμεσων δεδομένων, βελτιώνοντας τις διδακτικές επιλογές της επόμενης συνάντησης.

Σημείωση

1. Όπου «μαθητές» εννοούμε ισότιμα «μαθητές και μαθήτριες».

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for research in mathematics education*, 323-341.

Ben-Chaim, D., Keret, Y., & Illany, B. S. (2012). A Mathematical Perspective of Ratio and Proportion. In *Ratio and Proportion* (pp. 23-47). SensePublishers.

Boyer, T. W., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2008). Development of proportional reasoning: where young children go wrong. *Developmental psychology*, *44*(5), 1478.

Fetherstonhaugh, T., & Happs, J. (1988). Countering fundamental misconceptions about light. *Research in Science Education*, *18*(1), 211-219.

Jitendra, A. K., Star, J. R., Starosta, K., Leh, J. M., Sood, S., Caskie, G., & Mack, T. R. (2009). Improving seventh grade students’ learning of ratio and proportion: The role of schema-based instruction. *Contemporary Educational Psychology*, *34*(3), 250-264.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children’s thinking. *Journal for research in mathematics education*, 41-61.

Lo, J. J., & Watanabe, T. (1997). Developing ratio and proportion schemes: A story of a fifth grader. *Journal for Research in Mathematics Education*, 216-236.

Molina, M., Castro, E., & Castro, E. (2007). Teaching experiments within design research. *The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences*, *2*(4), 435-440.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept Part II—problem-structure at successive stages; problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(3), 331-363.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational studies in mathematics*, *16*(2), 181-204.

ΑΝΑΚΑΛΥΠΤΟΝΤΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ ΣΤΑ ΑΡΧΑΙΑ ΨΗΦΙΔΩΤΑ ΤΗΣ ΚΥΠΡΟΥ

Παπαγεωργίου* Ελένη, Ξενοφώντος Κωνσταντίνος, Χατζηθεοδούλου-Λοϊζίδου*** Παυλίνα, Χατζησίμου**** Κλειώ**

*Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου, **Πανεπιστήμιο Λευκωσίας, Κύπρος, *** Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου, **** Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου

papageorgiou.e@cyearn.pi.ac.cy, xenofontos.c@unic.ac.cy, hadjitheodoulou.p@cyearn.pi.ac.cy, , cleo.hadjisimou@gmail.com

Η εργασία παρουσιάζει ένα διερευνητικό πολιτισμικό πλαίσιο διδασκαλίας των γεωμετρικών μετασχηματισμών, αξιοποιώντας τα αρχαία ψηφιδωτά πατώματα της Κύπρου. Στο περιβάλλον αυτό, επιχειρήθηκε η αναγνώριση και διάκριση των διαφορετικών τύπων μετασχηματισμών που εμφανίζονται στα διάφορα μωσαϊκά και η εφαρμογή τους στην κατασκευή ανάλογων ψηφιδωτών έργων. Το πολιτισμικό περιβάλλον με τα αρχαία μωσαϊκά ως διδακτικά εργαλεία φαίνεται ότι αποτέλεσε κίνητρο για τους μαθητές, ώστε να αναζητήσουν γεωμετρικές έννοιες και ιδιότητες, ενώ η κατασκευή ανάλογων έργων από τους ίδιους τους μαθητές συνέβαλε στην κατανόηση των διάφορων τύπων γεωμετρικών μετασχηματισμών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα Μαθηματικά και η Τέχνη, αν και δύο διακριτά πεδία, αποτελούν θεμελιώδεις συνιστώσες μορφοποίησης αξιοσημείωτων έργων γλυπτικής, αρχιτεκτονικής, κεραμικής και ζωγραφικής στην ιστορία διάφορων πολιτισμών από την εποχή της αρχαιότητας. Η αισθητική, η αρμονία, η κανονικότητα, η μαθηματική ακρίβεια και ο γεωμετρικός συλλογισμός συνυπάρχουν, για να δημιουργήσουν έργα διακόσμησης ποικίλων τύπων, αντικείμενα τελετών ή θρησκευτικά σύμβολα, τα οποία αντανακλούν τη μοναδικότητα της ιστορίας των πολιτισμών που τα κατασκεύασαν.

Τα αρχαία ψηφιδωτά στη διδασκαλία των Μαθηματικών

Τα μωσαϊκά αποτελούν χαρακτηριστικά δείγματα έργων στα οποία η γεωμετρία χρησιμοποιήθηκε ως πλαίσιο έκφρασης της τέχνης, από την εποχή των αρχαίων ελληνικών και ρωμαϊκών χρόνων. Γεωμετρικά σχέδια, που απεικονίζουν μυθολογικά σύμβολα ή συνθέτουν λαβύρινθους και διακοσμητικές λωρίδες, αποκαλύπτουν την εφαρμογή σημαντικών μαθηματικών εννοιών, συμπεριλαμβανομένων γεωμετρικών ιδιοτήτων και ισομετρικών σχέσεων (Rousseau, 1999). Ως εκ τούτου, τα αρχαία μωσαϊκά, αν και «μη-μαθηματικά πλαίσια», που το στοιχείο πυρήνας είναι ένα πολιτισμικό ή κοινωνικό θέμα, μπορούν να αποτελέσουν αξιοσημείωτα εργαλεία για τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών (Knuchel, 2004). Καθώς τα γεωμετρικά σχήματα και η λειτουργία τους τοποθετείται στον χώρο, επιτυγχάνοντας την αρμονία μέσω της εφαρμογής των ιδιοτήτων τους και των γεωμετρικών αξιωμάτων και θεωρημάτων, τα αρχαία ψηφιδωτά μπορούν να συνθέσουν ένα εκπαιδευτικό περιβάλλον, το οποίο εστιάζει στην οικοδόμηση ενός γνωστικού σχήματος για βαθύτερη κατανόηση των διάφορων γεωμετρικών εννοιών (Swoboda & Vighi, 2016). Το περιβάλλον αυτό, προκαλώντας την ταυτόχρονη αναγνώριση των σχημάτων και της συλλειτουργικότητάς τους σε μια σύνθεση, ενισχύει την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης (Vigni, 2015).

Ως πλαίσιο διδασκαλίας, η αξιοποίηση των αρχαίων ψηφιδωτών αναδεικνύει τη διαθεματική σχέση των Μαθηματικών, της Τέχνης και της Ιστορίας, καθώς συνδέει τη διδασκαλία και τη μάθηση της γεωμετρίας με την ιστορία της γεωμετρίας και τις γεωμετρικές πτυχές της τέχνης και του σχεδίου (Karssenberg, 2014). Η διδασκαλία των Μαθηματικών μέσα από τέτοια πολιτισμικά πεδία επιτυγχάνει την ταυτόχρονη μάθηση μαθηματικών εννοιών και πολιτισμικών στοιχείων (Marchis, 2009). Ως ‘πολιτισμικές δυναμικές εικόνες’, τα αρχαία ψηφιδωτά συνδέουν το γεωγραφικό και θρησκευτικό τους υπόβαθρο με τις μαθηματικές δομές που περιλαμβάνουν (Karssenberg, 2014; Pumfrey & Beardon, 2002) και συμβάλλουν στη βελτίωση της πολυπολιτισμικής και διαπολιτισμικής ευαισθητοποίησης. Οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν τον ρόλο των Μαθηματικών στις διάφορες κοινωνίες και να αντιληφθούν ότι οι μαθηματικές πρακτικές έχουν προκύψει από τις πραγματικές ανάγκες και τα ενδιαφέροντα των ανθρώπων σε όλες τις περιοχές όλων των εποχών, αναδεικνύοντας τον ανθρώπινο χαρακτήρα των Μαθηματικών (Zaslavsky, 1999).

Η σημαντικότητα της αξιοποίησης των αρχαίων ψηφιδωτών στη διδασκαλία των Μαθηματικών έγκειται στη δυνατότητά τους να δημιουργούν ένα ‘γνωστικό παιχνίδι’ και ένα ενεργό δημιουργικό αλληλεπιδραστικό περιβάλλον μάθησης, καθώς επιτρέπουν την εξερεύνηση του κόσμου της γεωμετρίας και των γεωμετρικών δομών και, ταυτόχρονα, τη διαχείριση των οπτικών πληροφοριών για τη δημιουργία νέων συνθέσεων. Συγκεκριμένα, αποτελούν οπτικοποιημένα μοντέλα της γεωμετρίας των μετασχηματισμών, όπου η ανάλυση και η σύνθεσή τους για την ανακάλυψη των μοτίβων προσφέρει ευκαιρίες ανάπτυξης των δεξιοτήτων οπτικοποίησης και της ικανότητας γεωμετρικού συλλογισμού (Edwards, 1997). Οι μαθητές μπορούν να δρουν στον ‘κόσμο των κανονικοτήτων' αφενός ανακαλύπτοντάς τις (Swoboda & Vighi, 2016) και, αφετέρου, αναπαράγοντάς τις μετά από την αναγνώριση και κατανόηση των δομών τους (Marchini, 2004). Ως εκ τούτου, η δραστηριότητα κατασκευής μωσαϊκών συμβάλλει στην κατανόηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών και στην ανάπτυξη της ικανότητας πρόβλεψης του αποτελέσματος ενός μετασχηματισμού (Swoboda & Vighi, 2016), ενισχύοντας τη βαθύτερη κατανόηση σύνθετων εννοιών που απαιτούν αντίληψη της κοινής δομής της άλγεβρας και της γεωμετρίας (Bansilal & Naidoo, 2012). Καθιστά ικανούς τους μαθητές να χρησιμοποιούν αφηρημένη μαθηματική σκέψη ως εργαλείο για τις καλλιτεχνικές τους δημιουργίες (Grzegorczyk & Stylianou, 2006) και επιτρέπει, επίσης, τη μελέτη των οπτικών στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές στις συνθέσεις τους και πώς αυτές συμβάλλουν σε πιο αποτελεσματική επίλυση προβλήματος (Bansilal & Naidoo, 2012). Για τον λόγο αυτό, στα διδακτικά εγχειρίδια των Μαθηματικών περιλαμβάνονται δραστηριότητες και ασκήσεις σχεδιασμού μοτίβων και μωσαϊκών που απαιτούν την αλλαγή της θέσης ενός σχήματος, χρησιμοποιώντας τη μετατόπιση, την περιστροφή και την ανάκλαση (Jones & Mooney, 2003).

Σκοπός της παρούσας εργασίας αποτελεί ο σχεδιασμός και η εφαρμογή μιας διερευνητικής προσέγγισης για τη διδασκαλία των γεωμετρικών μετασχηματισμών σε εφαρμοσμένο πλαίσιο του πραγματικού κόσμου. Η προσέγγιση αυτή, συγχωνεύει την Ιστορία και την Τέχνη στο μάθημα των Μαθηματικών και αποτελεί μια εναλλακτική, αλλά και συμπληρωματική πρόταση ως προς το καθαρά μαθηματικό πλαίσιο στο οποίο παρουσιάζονται τα αντίστοιχα έργα στα νέα διδακτικά εγχειρίδια της Στ΄ Δημοτικού της Κύπρου (βλέπε Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού, Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων, 2017, Μέρος 6Β, σελίδες 94-106). Μέσω της προτεινόμενης προσέγγισης, η οποία αξιοποιεί αρχαία ψηφιδωτά δάπεδα της Κύπρου, επιχειρείται η ανάλυση των μοτίβων που απεικονίζονται σε αυτά και επιδιώκεται η μελέτη των οπτικών στρατηγικών και η διερεύνηση των τύπων και του βαθμού πολυπλοκότητας των γεωμετρικών μετασχηματισμών που αξιοποιούν οι μαθητές στην κατασκευή δικών τους ψηφιδωτών.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Διδακτικά εργαλεία

Για την επίτευξη του σκοπού της εργασίας επιλέχθηκαν, ως πλαίσιο διδασκαλίας και ως διδακτικά εργαλεία, τα αρχαία ψηφιδωτά δάπεδα που ανακαλύφθηκαν στην Πάφο της Κύπρου σε πολυτελείς οικίες Ρωμαίων ευγενών, οι οποίες χρονολογούνται από τον 2ο έως τον 5ο αιώνα μ.Χ..

Τα ψηφιδωτά αυτά, συνδυάζοντας την αισθητική της τέχνης με τη μαθηματική πολυπλοκότητα, αναπαριστούν μια από τις μεγαλύτερες καλλιτεχνικές εκφράσεις του πνεύματος της Ελληνιστικής και της Ρωμαϊκής τέχνης στην Κύπρο και θεωρούνται από το 1980 ως ανεκτίμητοι θησαυροί στον κατάλογο της Παγκόσμιας Πολιτιστικής Κληρονομιάς της UNESCO (Χρήστου, 2008). Τα περίτεχνα δάπεδα στις Οικίες του Διόνυσου και του Θησέα και στις Επαύλεις του Ορφέα και του Αιώνα (Εικόνα 1) απεικονίζουν σκηνές από την ελληνική μυθολογία και συνδυάζουν τους μετασχηματισμούς της ανάκλασης, της περιστροφής και της μετατόπισης σε καμπυλόγραμμα και ευθύγραμμα σχήματα στο επίπεδο, για να δημιουργήσουν ομάδες εικόνων που φαίνεται να συνθέτουν μια χαρακτηριστική ενότητα (Χρήστου, 2008; Natsoulas, 2000).

Εικόνα 1: Ψηφιδωτά από τις οικίες του Διόνυσου και του Θησέα και τις επαύλεις του Ορφέα και του Αιώνα

Διδακτική προσέγγιση

Η προτεινόμενη προσέγγιση συνίσταται από δύο φάσεις. Η πρώτη φάση ή φάση της διερεύνησης περιλαμβάνει: (α) ιστορική περιγραφή των αρχαίων ψηφιδωτών πατωμάτων-διδακτικών εργαλείων και ανάλυση των μοτίβων που παρουσιάζονται σε αυτά, ώστε να αναγνωριστεί το σχήμα-μονάδα που επαναλαμβάνεται για να σχηματιστεί το μοτίβο, και (β) αναγνώριση των διάφορων τύπων μετασχηματισμών που υπόκειται το σχήμα-μονάδα για να δημιουργηθεί η τελική σύνθεση. Επίσης, στη φάση αυτή διακρίνονται και ονομάζονται οι τύποι των γεωμετρικών μετασχηματισμών της περιστροφής ως προς σημείο, της μετατόπισης και της ανάκλασης, και παράλληλα, υπενθυμίζονται οι όροι ‘άξονας συμμετρίας' και 'συμμετρικό σχήμα', που αποτελούν προηγούμενη διδαχθείσα γνώση.

Η δεύτερη φάση ή φάση της δημιουργίας, περιλαμβάνει την κατασκευή ψηφιδωτών με την εφαρμογή διάφορων τύπων μετασχηματισμών σε γεωμετρικά σχήματα ή συνθέσεις γεωμετρικών σχημάτων. Στη φάση αυτή, οι μαθητές αναλαμβάνουν τον ρόλο του κατασκευαστή μωσαϊκών και εφαρμόζουν διάφορου τύπου γεωμετρικές δεξιότητες, όπως τεχνικές για κατασκευή ισόπλευρων τριγώνων, εξαγώνων ή πενταγώνων (Hogendijk, 2012) και διάφορους τύπους μετασχηματισμού, για να δημιουργήσουν δικές τους συνθέσεις. Βασικά στοιχεία της δεύτερης φάσης αποτελούν: (α) η διαδικασία της περιγραφής των μωσαϊκών από τους ίδιους τους μαθητές, χρησιμοποιώντας τους όρους 'μετατόπιση …. μονάδες δεξιά/αριστερά, πάνω ή κάτω' (από νοητούς κάθετους άξονες που τέμνονται στο κάτω αριστερά άκρο κάθε σχήματος), 'περιστροφή (ως προς νοητό σημείο) από αριστερά προς δεξιά/από δεξιά προς αριστερά …. μοίρες', 'ανάκλαση' (ως προς κατακόρυφο/οριζόντιο/πλάγιο άξονα), και (β) ταξινόμηση των έργων των μαθητών με βάση τα είδη των γεωμετρικών μετασχηματισμών που περιλαμβάνουν. Η ακρίβεια στην περιγραφή των μωσαϊκών αποσκοπεί στη βαθύτερη κατανόηση των εννοιών, ενώ η ταξινόμηση των έργων με κριτήριο τα είδη των μετασχηματισμών οδηγεί σε έναν άτυπο ορισμό της έννοιας 'συμμετρική ομάδα' και προσφέρει μια διαισθητική αντίληψη της μαθηματικής ενότητας που περιλαμβάνει μια μαθηματική ομάδα (Natsoulas, 2000). Επίσης, η ταξινόμηση επιτρέπει τη διερεύνηση του εύρους του βαθμού πολυπλοκότητας των συνδυασμών των γεωμετρικών μετασχηματισμών που αξιοποιούν οι μαθητές στην κατασκευή δικών τους ψηφιδωτών.

Δείγμα-Διαδικασία

Η προτεινόμενη προσέγγιση εφαρμόστηκε σε ένα τμήμα 22 μαθητών (10 αγόρια και 12 κορίτσια) της Στ΄ τάξης ενός αστικού σχολείου της Λάρνακας. Αξιοποιήθηκαν δύο διδακτικές περίοδοι των 80 λεπτών, οι οποίες κατανεμήθηκαν σε δύο συνεχόμενες εργάσιμες μέρες. Κατά το πρώτο ογδοντάλεπτο εφαρμόστηκε η πρώτη φάση της προτεινόμενης προσέγγισης, η φάση της διερευνητικής διδασκαλίας, ενώ το δεύτερο ογδοντάλεπτο αξιοποιήθηκε για δημιουργικές κατασκευές ψηφιδωτών. Η διδασκαλία έγινε από τη δασκάλα της τάξης και οι ερευνητές είχαν κυρίως τον ρόλο του συμμετέχοντα παρατηρητή. Έκαναν διευκρινιστικές ερωτήσεις στους μαθητές κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας και, όπου χρειαζόταν, τους ενθάρρυναν να παρατηρούν, να αναλύουν περαιτέρω και να ελέγχουν τα στοιχεία που είχαν κάθε φορά στη διάθεσή τους, ώστε να επισημαίνουν τη μικρότερη μονάδα επανάληψης του κάθε μοτίβου. Επίσης, οι ερευνητές σημείωναν στοιχεία που αφορούσαν δυσκολίες των μαθητών και γνωστικές συμπεριφορές ή επεξηγήσεις που έδιναν οι μαθητές σε κάθε φάση της διερεύνησης των γεωμετρικών μετασχηματισμών. Κατά τη φάση της δημιουργίας, οι ερευνητές καλούσαν τους μαθητές να αναγνωρίζουν τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς που εφάρμοζαν και να τους περιγράφουν με μαθηματικούς όρους.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η δύο-φάσεων διερευνητική προσέγγιση που εφαρμόστηκε για τη διδασκαλία των γεωμετρικών μετασχηματισμών, προκάλεσε το ενδιαφέρον των μαθητών και παρακίνησε την περιέργειά τους να αναζητήσουν μαθηματικές έννοιες στα αρχαία ψηφιδωτά δάπεδα της Κύπρου. Αποκάλεσαν το συγκεκριμένο μάθημα των Μαθηματικών 'διασκεδαστικό', 'διαφορετικό' και 'ευχάριστο', αλλά και ως ένα 'παιχνίδι ανακάλυψης και κατασκευής', αφού έμαθαν γεωμετρικές έννοιες συμμετέχοντας ενεργά και με ενθουσιασμό σε ένα θεματικό, μη-μαθηματικό πλαίσιο. Το συγκεκριμένο μάθημα τους φάνηκε 'χρήσιμο' για όλα τα επαγγέλματα σε διάφορες εποχές, καθώς ένιωσαν την ανάγκη εφαρμογής της γεωμετρίας, κυρίως στη φάση ανάληψης του ρόλου του 'κατασκευαστή' ή 'σχεδιαστή' ψηφιδωτών πατωμάτων στα χρόνια της αρχαιότητας.

Στα μωσαϊκά που κατασκεύασαν οι μαθητές διακρίνονται από ένας έως τρεις τύποι γεωμετρικών μετασχηματισμών (Εικόνα 2), αναδεικνύοντας διαφορετικό βαθμό πολυπλοκότητας της εφαρμογής τους. Στα σχέδια 'α' και 'β' οι μαθητές χρησιμοποίησαν μόνο τη μετατόπιση ενός σχήματος-μονάδα, οριζόντια και κατακόρυφα ως προς νοητούς άξονες κάθετους μεταξύ τους. Στο σχέδιο 'α' καθένα από τα δύο διακριτά σχήματα μετατοπίστηκε οριζόντια δεξιά και στη συνέχεια κατακόρυφα προς τα πάνω (καρδιά) ή προς τα κάτω (τετράγωνο), δημιουργώντας μια απλή σύνθεση. Στο σχέδιο 'β' παρατηρείται αρχικά η κατασκευή ενός σχήματος-μονάδα και η οριζόντια μετατόπισή του και στη συνέχεια η ένωση των δύο, που λειτουργεί ως ένα νέο σύνθετο σχήμα-μονάδα, το οποίο μετατοπίζεται οριζόντια, για να δημιουργήσει μια λωρίδα. Ακολούθως, η λωρίδα μετατοπίζεται κατακόρυφα προς τα κάτω ως προς έναν άξονα που κατασκευάστηκε με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση χρωματιστών τετραγώνων.

Στα σχέδια 'γ-ε' οι συνθέσεις προέκυψαν από εφαρμογή της ανάκλασης ενός σχήματος-μονάδας σε οριζόντιο ή κατακόρυφο άξονα. Επίσης, το καθένα από τα σχήματα-μονάδες στα σχέδια 'δ' και 'ε' κατασκευάστηκε με οριζόντια ή κατακόρυφη ανάκλαση επιμέρους τμήματος, ενώ για την κατασκευή των ‘πλαισίων’, στο σχέδιο ‘γ’ εφαρμόστηκε και ανάκλαση ως προς πλάγιο άξονα, ενώ στο σχέδιο ‘δ’ οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση μικρών τετραγώνων.

Εικόνα 2: Μωσαϊκά μαθητών

Στα τρία αυτά σχέδια ‘γ-ε’ η σύνθεση ολοκληρώνεται ουσιαστικά χρησιμοποιώντας ένα καρτεσιανό σύστημα με σημείο τομής το κέντρο του χαρτιού. Αντίθετα, στα υπόλοιπα σχέδια ‘στ-μ’ ο συνδυασμός κατακόρυφου και οριζόντιου άξονα μετακινείται παράλληλα συνεχώς στο φύλλο χαρτιού προς τα δεξιά ή προς τα κάτω, ώστε να σχεδιαστεί ξανά το σχήμα-μονάδα. Επίσης, καθένα από τα σχήματα-μονάδα που χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή των ψηφιδωτών των σχεδίων ‘στ-μ’ προέκυψε από την ανάκλαση επιμέρους τμημάτων ως προς ‘τοπικό’ οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα συμμετρίας. Τοπικοί άξονες συμμετρίας εφαρμόστηκαν σε περιορισμένο βαθμό και στα σχέδια ‘γ-ε’.

Όπως φαίνεται σε όλα τα σχέδια, κυρίαρχος εφαρμοσμένος τύπος μετασχηματισμού είναι η ανάκλαση ως προς άξονα και η μετατόπιση. Η περιστροφή ως προς σημείο εφαρμόστηκε εντονότερα μόνο σε δύο σχέδια, στα 'θ' και 'λ', και πολύ περιορισμένα στο τρίγωνο του σχεδίου 'θ'.

Από την οπτική της έννοιας του χώρου, στις συνθέσεις των σχεδίων 'α-ε' φαίνεται η αντίληψη ότι ο χώρος είναι περιορισμένος, οριοθετημένος, στη συγκεκριμένη περίπτωση, σε ένα φύλλο χαρτιού. Αυτό μπορεί να ερμηνευτεί είτε από τα 'πλαίσια' που έχουν τοποθετήσει στα σχέδιά τους οι μαθητές (σχέδια 'γ' και 'δ') (Swoboda & Vighi, 2016) ή από το γεγονός ότι το σχέδιό τους ολοκληρώνεται σε ένα νοητό πλαίσιο (σχέδια 'α', 'β' και 'ε'). Άλλοι μαθητές, όπως δείχνουν τα σχέδια 'στ-μ', φαίνεται να εκλαμβάνουν τον χώρο ως απεριόριστο, καθώς οι επαναληπτικές ανακλάσεις μέσω συνεχών μετατοπίσεων ενός οριζόντιου και ενός κατακόρυφου άξονα συμμετρίας στο φύλλο χαρτιού αποκαλύπτουν την αντίληψη της έννοιας του απείρου (Marchini, 2004). Παρόλο που στα σχέδια 'στ-θ' το μοτίβο περιορίζεται στο φύλλο χαρτιού, αυτό μάλλον συμβαίνει για σκοπούς διατήρησης της κανονικότητας.

Επίσης, η εφαρμογή της αξονικής συμμετρίας στα σχέδια 'γ' έως 'κ' δείχνει ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν τον χώρο ως 'ανισοτροπικό', αφού οι άξονες συμμετρίας ήταν μόνο κατακόρυφοι ή οριζόντιοι ως προς το φύλλο χαρτιού. Αντίθετα, η σύνθεση στο σχέδιο 'μ', που προκύπτει από ταυτόχρονη ανάκλαση και μετατόπιση πολλών παράλληλων και κάθετων μεταξύ τους αξόνων συμμετρίας, υποδηλώνει την αντίληψη του χώρου ως 'ισοτροπικού', αφού δεν δίνεται προτεραιότητα στην κατακόρυφη ή οριζόντια κατεύθυνση (Swoboda & Vighi, 2016).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην εργασία έγινε προσπάθεια να σχεδιαστεί και να εφαρμοστεί μια διερευνητική προσέγγιση για τη διδασκαλία των γεωμετρικών μετασχηματισμών, αξιοποιώντας ως διδακτικά εργαλεία τα αρχαία ψηφιδωτά της Κύπρου. Συνδυάζοντας την Τέχνη, την Ιστορία και τα Μαθηματικά, ο προτεινόμενος διδακτικός σχεδιασμός παρακινεί τους μαθητές να δουν ταυτόχρονα τα γεωμετρικά σχήματα και τη μεταξύ τους λειτουργική διευθέτηση στον χώρο, στον πραγματικό κόσμο και να εκτιμήσουν την αξία των Μαθηματικών στην ιστορία των διάφορων πολιτισμών. Οπότε, προτρέπει τους μαθητές να μελετούν τα αφηρημένα σχέδια των μωσαϊκών μέσα από την οπτική των Μαθηματικών (Karssenberg, 2014: Vighi, 2015), να κατανοούν κανονικότητες και ρυθμούς που απεικονίζονται με σχέδιο και χρώμα και να τους περιγράφουν με όρους κατευθύνσεων και γεωμετρικών μετασχηματισμών (Swoboda & Vighi, 2016). Η κατασκευή ψηφιδωτών από τους ίδιους τους μαθητές ανέδειξε περιορισμένη εφαρμογή της περιστροφής ως προς σημείο και συχνότερη εφαρμογή της μετατόπισης και της ανάκλασης, κυρίως ως προς οριζόντιους και κατακόρυφους άξονες, υποδηλώνοντας ότι η συμμετρία δεν αποτελεί ‘ενσώματη’ γνωστική λειτουργία, αλλά μια γνώση που πρέπει να οικοδομηθεί μέσω κατάλληλης διδασκαλίας (Bulf, 2010).

Ένα συγκεκριμένο θεματικό πλαίσιο, όπως τα αρχαία ψηφιδωτά πατώματα, προσδίδει δυναμικότητα στο περιβάλλον μάθησης, ενδιαφέρον και πρόκληση για διερεύνηση και παράλληλα, ενισχύει τις δεξιότητες της παρατήρησης, της ταξινόμησης, της διάταξης, της ανάλυσης και της σύνθεσης δομών και γενικά την αντίληψη του χώρου, των κατευθύνσεων και των ισομετριών. Η διερευνητική διδασκαλία σε συνδυασμό με την κατασκευή και την περιγραφή ψηφιδωτών με όρους γεωμετρικών μετασχηματισμών συμβάλλουν στην αποτελεσματική οικοδόμηση των εννοιών της ισομετρίας ως μαθηματικά αντικείμενα (Marchini & Vighi, 2011) και ως οπτικές τεχνικές στρατηγικές που μπορούν να αξιοποιούν ως εργαλεία στις καλλιτεχνικές τους δημιουργίες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bansilal, S., & Naidoo, J. (2012). Learners engaging with transformation geometry. *South African Journal of Education 32*(1), 26-39.

Bulf, C. (2010). The effects of the concept of symmetry on learning geometry at French Secondary School. In *Proceedings CERME 6* (pp. 726–735).

Edwards, L. D (1997). Exploring the terrority before proof: Students' generalization in a computer microworld for transformation geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1,* 187-215.

Grzegorczyk, I., & Stylianou, D. A. (2006). Development of abstract mathematical thinking through artistic patterns. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol.3,* pp.217-224. Prague,Czech Republic.

Hogendijk, J.P. (2012). Mathematics and geometric ornamentation in the medieval Islamic world. *The European Mathematical Society Newsletter, 86,* 37-43.

Jones, K., & Mooney, C. (2003). Making space for geometry in primary mathematics. In I. Thomson (Ed.), *Engaging primary mathematics teaching* (pp.3-15). London: open University Press.

Karssenberg, G. (2014). Learning geometry by designing Persian mosaics. *For the Learning of Mathematics, 34*(1), 43-49.

Knuchel, C. (2004). Teaching symmetry in the elementary curriculum. *The Montana Mathematics Enthusiast, 1*(1), 3-8.

Marchini, C. (2004). Different cultures of the youngest students about space (and infinity). In M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings CERME 3* (pp.1274-1284). Bellaria, Italy.

Marchini, C., & Vighi, P. (2011). Innovative early teaching of isometries. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings CERME 7* (pp. 547–557). Poland: University of Rzeszów.

Marchis, I. (2009). Symmetry and interculturality. *Acta Didactica Napocensia, 2*(1), 57-62.

Natsoulas, A. (2000). Group symmetries connect art and history with mathematics. *Mathematics Teacher, 93*, 364-370.

Pumfrey, E., & Beardon, T. (2002). Art and Mathematics-mutual enrichment. *Micromath, 18*(2), 21-26.

Rousseau, I. (1999). Math at the service of meaning: Links between geometry, mythology, and philosophy in mosaic art. In R. Sarhangi (Ed.), *Bridges: Mathematical Connections in Art, Music, and Science* (pp. 111-122). Kansas: Bridges Conference.

Swoboda, E., & Vighi, P. (2016). Early geometrical thinking in the environment of patterns, mosaics and isometries. In G. Kaiser (Ed.), *ICME-13, Tropical Surveys*. Hamburg: Springer Open.

Vigni, P. (2015). Abstract paintings, objects and actions: How to promote geometrical understanding. *Proceedings Mathematical Transgressions II.* Cracow, Poland.

Χρήστου, Δ. (2008). *Πάφος, Αρχαιολογικός οδηγός και ιστορική αναδρομή*. Λευκωσία.

Zaslavsky, C. (1999). *Africa counts, number and pattern in African cultures* (3rd edition). Chicago, IL: Chicago Review Press.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΟΥ ΑΤΥΠΟΥ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΚΟΥ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΥ ΜΑΘΗΤΩΝ Γ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΕΝΑΣΧΟΛΗΣΗΣ ΤΟΥΣ ΜΕ ΤΗ ΣΤΑΘΕΡΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΕΙΔΙΚΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΕΝΩΝ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

Σαπλαμίδου Σταυρούλα

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών

stavsap@math.uoa.gr

Η παρούσα εργασία εντάσσεται στο πεδίο του άτυπου συμπερασματολογικού συλλογισμού, εξετάζοντας τον τρόπο με τον οποίο αυτός αναπτύσσεται στο πλαίσιο ειδικά σχεδιασμένων δραστηριοτήτων, καθώς και τους παράγοντες σχεδιασμού που υπεισέρχονται στη διαδικασία αυτή. Μέσω περιπτωσιακής μελέτης, διερευνήθηκε και αναλύθηκε με μεθόδους Θεμελιωμένης Θεωρίας η συλλογιστική πορεία μιας μαθήτριας Γ' Δημοτικού. Τα αποτελέσματα σκιαγραφούν τη μετάβαση του συλλογισμού από μη-Στατιστικούς σε αναδυόμενους-Στατιστικούς τύπους αντίληψης, ενώ ο ρόλος των παραγόντων σχεδιασμού κατέστη σημαντικός τόσο στη πραγματοποίηση της παραπάνω μετάβασης, όσο και στην προαγωγή του συλλογισμού σε περισσότερο προηγμένα στάδια.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ο αναστοχασμός του ρόλου της στατιστικής στη βαθμίδα της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης οδήγησε τους ερευνητές στο συμπέρασμα πως η στατιστική στο δημοτικό σχολείο εννοιοποιείται μέσω ενός πολύ περιορισμένου τρόπου, εστιάζοντας στη περιγραφή και συνοπτική παρουσίαση δεδομένων (Ben-Zvi & Amir, 2005) . Υπό αυτό το πλαίσιο, κρίθηκε επιτακτική η διεύρυνση του ρόλου της στατιστικής στα σχολικά μαθηματικά (Ben-Zvi, Aridor, Makar & Bakker, 2012). Το γεγονός αυτό έφερε στο προσκήνιο την εμπλοκή των μαθητών σε διαδικασίες συμπερασματολογίας, καθώς αυτή βελτιώνει την πρόσβαση στη στατιστική μέσω εμπειριών καθημερινής ζωής και εννοποιεί σημαντικές στατιστικές ιδέες (Paparistodemou & Meletiou-Mavrotheris, 2008).

Η τυπική συμπερασματολογία εννοιοποιείται τόσο ως αποτέλεσμα όσο και ως συλλογιστική διαδικασία δημιουργίας ή ελέγχου πιθανοτικών γενικεύσεων από τα δεδομένα, η οποία, μετακινούμενη από τα διαθέσιμα δεδομένα, καταλήγει σε συμπεράσματα που αφορούν ένα ευρύτερο πλαίσιο (Makar & Rubin, 2009). Υπό αυτό το σκοπό, ενέχει διαδικασίες εκτίμησης παραμέτρων και ελέγχου υποθέσεων, οι οποίες διενεργούνται μέσω πειραμάτων και test σημαντικότητας (Ben-Zvi, Gil & Apel, 2007). Ερευνητικά δεδομένα αισθητοποιούν πως τέτοιου είδους διαδικασίες είναι αρκετά σύνθετες για μαθητές σχολικής ηλικίας (Garfield & Ben-Zvi, 2008). Αναδύεται, έτσι, ένας νέος στόχος της εκπαίδευσης στη στατιστική που αναφέρεται στην αποσύνδεση της συμπερασματολογίας από τον τυπικό έλεγχο υποθέσεων, ώστε να επιτραπεί ο σχηματισμός συμπερασματολογιών και από μικρούς μαθητές. Προκειμένου να κατονομασθούν οι σχηματιζόμενες από μαθητές συμπερασματολογικές δηλώσεις, χρησιμοποιήθηκε ο όρος άτυπη στατιστική συμπερασματολογία (Makar & Rubin, 2009). Τυπική και άτυπη συμπερασματολογία διέπονται από τις ίδιες θεμελιώδεις αρχές, διαφέρουν όμως ως προς το τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούν τις στατιστικές μεθόδους και διαδικασίες (Makar & Rubin, 2009).

Ως άτυπος συμπερασματολογικός συλλογισμός χαρακτηρίζεται ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές χρησιμοποιούν την άτυπη στατιστική τους γνώση προκειμένου να σχηματίσουν επιχειρήματα για την υποστήριξη συμπερασμάτων που χαρακτηρίζουν άγνωστους πληθυσμούς βάσει παρατηρήσιμων δειγμάτων (Zieffler, Garfield, Delmas & Reading, 2008). Περιλαμβάνει (Ben-Zvi κ.ά., 2007) :α) σχηματισμό κρίσεων, προβλέψεων και ισχυρισμών που αφορούν πληθυσμούς βάσει δεδομένων που χρησιμοποιούνται ως ενδείξεις, β) εντοπισμό, χρησιμοποίηση και ενσωμάτωση άτυπης στατιστικής γνώσης στο βαθμό όπου αυτή είναι διαθέσιμη (Συλλογισμό για τη Μεταβλητότητα, Επιμεριστικό συλλογισμό, Συλλογισμό για το σήμα και το θόρυβο, Συλλογισμό για τη Δειγματοληψία, Συλλογισμό που λαμβάνει υπόψη το πλαίσιο του προβλήματος, Κατανόηση γραφήματος, Συλλογισμό για τη Σύγκριση συνόλων δεδομένων, Πιθανοτικό συλλογισμό, συμπερασματολογικός συλλογισμό), γ) αναφορές στην έννοια της αβεβαιότητας, μέσω χρησιμοποίησης πιθανοτικής γλώσσας ή αναφορών στα προτερήματα και τους περιορισμούς των συναγόμενων συμπερασμάτων.

Υπό αυτό το πλαίσιο, η παρούσα εργασία διερευνά:

ΕΕ.1: Πώς αναπτύσσεται ο άτυπος συμπερασματολογικός συλλογισμός μιας μαθήτριας Γ’ Δημοτικού μέσω της ενασχόλησής της με τη σταθεροποιημένη κατανομή συχνοτήτων στο πλαίσιο ειδικά σχεδιασμένων δραστηριοτήτων;

ΕΕ.2: Ποιοι παράγοντες του σχεδιασμού των δραστηριοτήτων υπεισέρχονται στην ανάπτυξη του συλλογισμού αυτού;

Μεθοδολογία

Για τη διερεύνηση των ερωτημάτων αξιοποιήθηκε η μελέτη περίπτωσης, καθώς αρμόζει στην απάντηση ερωτημάτων που αναζητούν το πώς των φαινομένων μελετώντας τα εις βάθος μέσω συγκεκριμένων περιπτώσεων (Yin, 2013). Το ερευνητικό εργαλείο ήταν η ημιδομημένη παρατήρηση, ενώ ως μέσο καταγραφής χρησιμοποιήθηκαν οι σημειώσεις πεδίου. Η έρευνα διεξήχθη στη Γ' Δημοτικού ενός σχολείου της Αττικής. Σε αυτή έλαβαν μέρος τέσσερις μαθήτριες, οι οποίες επιλέχθηκαν διότι συμμετείχαν με ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη δραστηριότητα κατά τη παρουσίασή της στη τάξη, ενώ επέδειξαν ταυτόχρονα μεγάλη ικανότητα επικοινωνίας των ιδεών τους. Η συγκεκριμένη εργασία εστιάζει στη συλλογιστική πορεία μιας μαθήτριας, της Αγγελικής (ψευδώνυμο), η οποία έχει καλή επίδοση σε όλα τα σχολικά μαθήματα, ενώ εκδηλώνει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την επίλυση προβλημάτων.

Σχεδιασμός δραστηριοτήτων

Το πλαίσιο του κεντρικού προβλήματος αντλήθηκε από το παιδικό βιβλίο «Η Μάρθα μιλάει!» της Susan Meddaugh. Η Μάρθα είναι ένας σκύλος που διαθέτει ανθρώπινη ομιλία από τότε που έφαγε μια σούπα με τα γράμματα της αλφαβήτου. Αντιμετωπίζει, όμως, πρόβλημα, όταν η εταιρία που φτιάχνει το φαγητό της αναγκάζεται να μειώσει τα γράμματα που περιέχονται στη σούπα για οικονομικούς λόγους. Με αφορμή αυτή τη πλοκή, ζητείται από τους μαθητές να αποφασίσουν, ως διευθυντές της εταιρίας, ποια γράμματα πρέπει να βγάλουν από τη σούπα ώστε να κάνουν οικονομία χωρίς όμως αυτό να επηρεάσει δραματικά την ομιλία της Μάρθας.

Ο σχεδιασμός του προβλήματος αυτού διέπεται από τις αρχές της διερευνητικής μάθησης στα μαθηματικά. Η διερεύνηση συνιστά μια προσέγγιση κατά την οποία οι μαθητές διαπραγματεύονται ασθενώς δομημένα προβλήματα τα οποία στηρίζονται σε μαθηματικές ή στατιστικές ενδείξεις (Wells & Makar, 2015). Κατά τον Reitman, ένα πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως ασθενώς δομημένο όταν η διατύπωσή του ή/και η διαδικασία επίλυσής του περιλαμβάνουν ασάφειες που χρήζουν διαπραγμάτευσης (αναφορά στο Wells & Makar, 2015). Στη προκειμένη περίπτωση, η απάντηση στην ερώτηση «Ποιά γράμματα θα αφαιρούσατε από τη σούπα ώστε να κάνετε οικονομία, αλλά και να μπορεί η Μάρθα να μιλάει όσο το δυνατόν καλύτερα;», προϋποθέτει πως οι μαθητές θα διαπραγματευθούν τόσο το νόημα ασαφειών (όσο το δυνατόν καλύτερα) , όσο και το σχέδιο μέσω του οποίου θα απαντήσουν στην ερώτηση αυτή, περιλαμβανομένων και των κριτηρίων βάσει των οποίων θα αξιολογήσουν την απάντηση που έδωσαν (πχ πόσα γράμματα πρέπει να βγουν από τη σούπα;). Επιδιώκοντας την εμπλοκή των μαθητών με ισχυρές στατιστικές ιδέες, η ανάπτυξη του συμπερασματολογικού συλλογισμού μελετήθηκε με εργαλείο την έννοια της κατανομής, η οποία αποτελεί δομικό λίθο ενός συνόλου διασυνδεόμενων στατιστικών ιδεών (Garfield & Ben-Zvi, 2008). Δεδομένου πως ο συλλογισμός αυτός οδηγεί σε συναγωγή γενικεύσεων (Makar & Rubin, 2009), θεωρήθηκε σκόπιμο να αξιοποιηθεί ένα συγκεκριμένο είδος κατανομής, η σταθεροποιημένη κατανομή συχνοτήτων. Το είδος αυτό αντιπροσωπεύει τη σύνδεση της πιθανότητας και τη συχνότητας, μέσω ενός βασικού θεωρήματος των πιθανοτήτων, του Νόμου των Μεγάλων Αριθμών (Konold & Kazak, 2008). Το συγκεκριμένο είδος κατανομής θεωρήθηκε κατάλληλο για την παρούσα έρευνα, καθώς τα πορίσματα της Serrado (2014) έδειξαν πως η διερεύνηση της σταθεροποιημένης κατανομής συχνοτήτων, μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες βοήθησε τους μαθητές να αναπτύξουν μια ολική αντίληψη για την έννοια της κατανομής, ζωτικής σημασίας για την εκφορά συμπερασματολογιών και γενικεύσεων (Makar & Rubin, 2009).

Στο πλαίσιο του κεντρικού προβλήματος ενσωματώνονται επιμέρους δραστηριότητες με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Ένα από αυτά είναι η χρησιμοποίηση της ευρετικής των αυξανόμενων δειγμάτων. Σύμφωνα με αυτή, οι μαθητές καλούνται να κατανοήσουν τις πληροφορίες που εξάγονται από κάθε δείγμα και να σχηματίσουν μια άτυπη στατιστική συμπερασματολογία. Έπειτα προβλέπουν τι θα έμενε ίδιο και τι θα άλλαζε σε ένα μεγαλύτερο μέγεθος δείγματος (Ben-Zvi κ.ά., 2012). Παράλληλα, μεγάλο μέρος των δραστηριοτήτων στηρίζεται στη σύγκριση κατανομών που προκύπτουν από τη καταμέτρηση συγκεκριμένου αριθμού γραμμάτων (10,50,120,500) από τρία διαφορετικά κείμενα. Επίσης, αξιοποιήθηκε το λογισμικό Tinkerplots για τη διερεύνηση της σταθεροποιημένης κατανομής συχνοτήτων εμφάνισης των γραμμάτων του ελληνικού αλφαβήτου. Στο λογισμικό εισήχθη η συχνότητα εμφάνισης κάθε γράμματος του ελληνικού αλφαβήτου, όπως αυτή προσδιορίστηκε από ποσοτικές γλωσσολογικές μελέτες (Μικρός, Χατζηγεωργίου & Καραγιάννης, 2003). Σχηματίσθηκε, έτσι η θεωρητική κατανομή συχνοτήτων εμφάνισης των γραμμάτων. Βάσει αυτής, το λογισμικό επέλεγε τυχαία ένα γράμμα για ορισμένο αριθμό φορών και παρουσίαζε τα αποτελέσματα σε μια νέα κατανομή.

Ανάλυση δεδομένων

Προκειμένου να προσδιορισθούν τα στάδια ανάπτυξης του άτυπου συμπερασματολογικού συλλογισμού χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της Θεμελιωμένης Θεωρίας . Αρχικά, οι σημειώσεις πεδίου και οι απαντήσεις της μαθήτριας στα φύλλα εργασίας συνδυάστηκαν για τη παραγωγή κειμένων που περιγράφουν τα λεγόμενα και τις δράσεις της κατά τη διατύπωση συμπερασματολογίας βάσει των δεδομένων από τη καταμέτρηση α) 10, β) 50, γ) 120, δ) 500 γραμμάτων και ε) κατά τη διατύπωση συμπερασματολογίας βάσει των δεδομένων από την παραγωγή τυχαίων δειγμάτων μέσω του λογισμικού. Για καθένα από αυτά τα κείμενα πραγματοποιήθηκε ανοιχτή κωδικοποίηση των δεδομένων γραμμή - γραμμή. Μονάδες ανάλυσης αποτέλεσαν οι 3 διαδικασίες που διαφοροποιούν τον άτυπο συμπερασματικό συλλογισμό από τα άλλα είδη συλλογισμού (τρόπος χειρισμού των δεδομένων, γλώσσα κατά την εκφορά συμπερασμάτων/τον σχηματισμό προβλέψεων, άτυπη στατιστική γνώση). Στη φάση αυτή αναζητούνταν στα δεδομένα δράσεις και δηλώσεις σχετικά με αυτούς τους άξονες με σκοπό την ανάπτυξη αρχικών περιγραφών για κώδικες που σχετίζονται με τους άξονες αυτούς. Στη συνέχεια, οι πίνακες που καταρτίστηκαν βάσει των κείμενων α)-ε) συγκρίθηκαν μεταξύ τους, προκειμένου να εξετασθεί εάν ο συλλογισμός διαφοροποιήθηκε στις διαφορετικές φάσεις της δραστηριότητας. Έπειτα πραγματοποιήθηκε η εξέταση κάθε πίνακα ξεχωριστά, προκειμένου να δοθεί ονομασία στο εκάστοτε συλλογιστικό στάδιο. Η διαδικασία της ονοματοδοσίας επηρεάστηκε από υπάρχοντα πλαίσια που χαρακτηρίζουν τους τύπους στατιστικής αντίληψης (Shaughnessy, 1992) ή περιγράφουν το στατιστικό συλλογισμό των μαθητών δημοτικού σχολείου (Jones κ.ά, 2000) με ιδιαίτερη προσοχή στους ορισμούς αυτών των πλαισίων, προκειμένου να διαπιστωθεί αν οι κώδικες που παράχθηκαν από τα δεδομένα της παρούσας έρευνας ταιριάζουν με αυτούς. Σε περίπτωση συμφωνίας, αξιοποιούνταν για την ονοματοδοσία των σταδίων τα αντίστοιχα θεωρητικά πλαίσια. Σε περίπτωση ασυμφωνίας, επινοούταν ένα νέο όνομα για το χαρακτηρισμό του συλλογισμού, βάσει των χαρακτηριστικών που τον συνθέτουν. Προκειμένου να εντοπισθεί ο τρόπος με τον οποίο οι παράγοντες του σχεδιασμού υπεισήλθαν στο συλλογισμό της μαθήτριας ακολουθήθηκε η μέθοδος της Σύγκρισης των πινάκων που περιγράφουν το εκάστοτε συλλογιστικό στάδιο. Οι πίνακες αυτοί συγκρίθηκαν ανά δύο προκειμένου να εντοπισθούν σημεία διαφοροποίησης. Τα σημεία αυτά εντοπίστηκαν εντός των διαθέσιμων δεδομένων με σκοπό να εξετασθούν οι δράσεις και οι δηλώσεις της μαθήτριας πριν και μετά την αλλαγή αυτή. Στα δεδομένα αναζητήθηκε είτε ρητή αναφορά σε κάποιο παράγοντα σχεδιασμού, είτε κάποια δράση που συνδέεται με τους παράγοντες σχεδιασμού. Σε περιπτώσεις ενδείξεων ταυτόχρονης δράσης κάποιων παραγόντων σχεδιασμού, θεωρήθηκε πως υπεισήλθε εκείνος για τον οποίο υπήρχαν ισχυρότερες ενδείξεις στα δεδομένα.

Αποτελέσματα

Η Αγγελική ξεκίνησε τη διαπραγμάτευση των δραστηριοτήτων σχολιάζοντας τη βαθμονόμηση των κάθετων αξόνων των διαγραμμάτων, κινούμενη στο στάδιο *της συγκεχυμένης εστίασης*. Έπειτα από την παρέμβαση της ερευνήτριας ανακαλεί τη σκοπιμότητα ενασχόλησης με τα φύλλα εργασίας. Ξεκινά εκ νέου, μεταβαίνοντας στο στάδιο του *ιδιοσυγκρασιακού συλλογισμού*, σχολιάζοντας τη μηδενική συχνότητα των γραμμάτων που είχε απορρίψει κατά την διατύπωση εικασιών χωρίς δεδομένα. Παράλληλα, αμφισβητεί τα δεδομένα από τα υπόλοιπα γράμματα που έχουν μηδενική συχνότητα εμφάνισης, όπως το β, καθώς κατά την άποψή της αυτό χρησιμοποιείται συχνά στην ελληνική γλώσσα και έτσι δεν θα πρέπει να αποκλεισθεί. Κατά την συναγωγή του τελικού της συμπεράσματος εμφανίζεται απόλυτα βέβαιη πως τα γράμματα που κατά τις προσωπικές τις πεποιθήσεις δεν χρησιμοποιούνται συχνά και έχουν μηδενική συχνότητα στα δεδομένα πρέπει να αποκλεισθούν. Ερχόμενη σε επαφή με τα δεδομένα από τη καταμέτρηση των 50 γραμμάτων συνειδητοποιεί τη διάψευση των εικασιών που διατύπωσε, μεταβαίνοντας στο στάδιο του *προσθετικού συλλογισμού*. Πλέον στηρίζεται σε όλα τα διαθέσιμα δεδομένα, αλλά για τη λήψη της τελικής απόφασης υιοθετεί ένα μη στατιστικό κριτήριο. Σύμφωνα με αυτό εστιάζει σε κάθε γράμμα της αλφαβήτου χωριστά και υπολογίζει το άθροισμα των συχνοτήτων εμφάνισής του σε κάθε μια κατανομή. Αν το άθροισμα αυτό είναι μεγαλύτερο του αριθμού 5, το γράμμα αυτό δεν θα πρέπει να αποκλεισθεί διότι εμφανίζεται συχνά. Έπειτα από την εφαρμογή του κριτηρίου αυτού για τη λήψη της τελικής απόφασης, η Αγγελική αν και διατηρεί υψηλά ποσοστά βεβαιότητας, ελαττώνει το ποσοστό βεβαιότητάς της από το 100% (στο σχηματισμό του συμπεράσματος από τα 10 γράμματα) στο 90%. Η ελάττωση αυτού του ποσοστού δεν οφείλεται στη συνειδητοποίηση της αβεβαιότητας κατά τη συναγωγή συμπερασμάτων, αλλά στη διάψευση της εικασίας που σχημάτισε στη προηγούμενη φάση.

Η Αγγελική, έπειτα από τη διάψευση της εικασίας που πραγματοποίησε στο προηγούμενα, επιλέγει να εξετάσει τα δεδομένα που παρέχονται από κάθε κατανομή ξεχωριστά μεταβαίνοντας στο στάδιο του *μεταβατικού συμπερασματολογικού συλλογισμού*. Έτσι, παρατηρεί πως κάποια γράμματα εμφανίζονται πολλές φορές και άλλα λιγότερες, εστιάζει δηλαδή στη μεταβλητότητα ως χαρακτηριστικό της κάθε κατανομής. Αποφασίζει λοιπόν να εξετάσει τα γράμματα που εμφανίζονται λίγες φορές και στα τρία κείμενα. Και σε αυτή τη περίπτωση φαίνεται να κρίνει διαισθητικά τη λέξη «λίγες φορές», λέγοντας πως οι 1 ή δύο φορές ή 3 φορές είναι λίγες. Για την απόφαση να αποκλείσει τα γράμματα που εμφανίζονται λίγες φορές και στις 3 κατανομές, εκδηλώνει για πρώτη φορά κάποιο βαθμό αβεβαιότητας . Μάλιστα, σημειώνει πως καλό θα ήταν να ληφθούν υπόψη και τα δεδομένα που εξετάστηκαν σε προηγούμενα στάδια, προκειμένου να ανιχνευθεί κάποιο μοτίβο γραμμάτων με χαμηλή συχνότητα εμφάνισης. Όταν έρχεται σε επαφή με τα δεδομένα από τα 500 γράμματα και η εικασία της απορρίπτεται μερικώς, η μαθήτρια κινείται στο στάδιο του *αναλυτικού συμπερασματολογικού συλλογισμού*. Αρχικά καταγράφει τα γράμματα που εμφανίζονται μια ή δύο φορές και έπειτα ανατρέχει στα δεδομένα που εξετάσθηκαν στις προηγούμενες φάσεις. Αυτή της η απόφαση την οδηγεί να λάβει υπόψη της το μέγεθος του δείγματος για το χαρακτηρισμό των συχνοτήτων ως μικρών ή μεγάλων. Καταλήγει, έτσι, πως υπάρχουν γράμματα που εμφανίζονται λίγες φορές τόσο στο μικρό όσο και στον μεγαλύτερο αριθμό γραμμάτων και επιλέγει να συμπεριλάβει αυτά στη τελική της απόφαση. Για το συμπέρασμά της αυτό διατηρεί επιφυλάξεις , ενώ ύστερα από ερώτηση της ερευνήτριας για το πώς θα μπορούσε να αυξήσει τη βεβαιότητά της απαντά προτείνοντας τη καταμέτρηση μεγαλύτερου αριθμού γραμμάτων, τονίζοντας όμως πως και σε αυτή τη περίπτωση θα υπάρχει αβεβαιότητα για τα συναχθέντα συμπεράσματα. Κατά την αλληλεπίδραση με το λογισμικό, η Αγγελική μεταβαίνει στον *προηγμένο συμπερασματολογικό συλλογισμό* και αναφέρεται στο αποτέλεσμα που επιφέρει η αύξηση του μεγέθους του δείγματος στη δειγματική μεταβλητότητα, ενώ αναγνωρίζει πως εξ αρχής θα έπρεπε να στηρίξει το συμπέρασμά της σε δείγματα μεγάλου μεγέθους. Διαπιστώνει πως θα έπρεπε να έχει παρατηρήσει τη δειγματική μεταβλητότητα στα δεδομένα που προέρχονται από δείγματα μικρού μεγέθους και πως τα μεγαλύτερου μεγέθους δείγματα ενδείκνυνται για την ανίχνευση μοτίβων, καθώς στα μικρότερα δείγματα η μεταβλητότητα είναι μεγάλη. Αναφέρεται εκ νέου στο ότι ο χαρακτηρισμός της συχνότητας εμφάνισης ενός γράμματος πρέπει να γίνεται πάντοτε σε σχέση με το μέγεθος του δείγματος, και όχι να κρίνεται ως απόλυτος αριθμός.

Συμπεράσματα-Συζήτηση

Πραγματοποιώντας μια σφαιρική εξέταση των αποτελεσμάτων προκύπτει πως ο συλλογισμός της μαθήτριας στα πρώτα στάδια της ανάπτυξής του δεν μπορεί να χαρακτηρισθεί ως στατιστικός, ούτε ως άτυπος συμπερασματολογικός. Ο συλλογισμός , εξελισσόμενος μέσα από ειδικά σχεδιασμένες δραστηριότητες, βελτιώνεται ποιοτικά καθώς αποκτά στοχαστικά χαρακτηριστικά (αναφορά στα δεδομένα και την έννοια της αβεβαιότητας). Η μαθήτρια αρχικά εστιάζει σε άσχετα με τη δραστηριότητα των κατανομών. Αυτή η αδυναμία συγκέντρωσης της προσοχής έχει επίσης παρατηρηθεί από έρευνες στις οποίες χρησιμοποιήθηκαν δραστηριότητες σύγκρισης κατανομών και αφορούσαν μαθητές σχολικής ηλικίας (Ben-Zvi, 2004). Στη πρώτη της επαφή με τα δεδομένα επιδεικνύει ιδιοσυγκρασιακές απόψεις κατά την ερμηνεία τους, αμφισβητώντας εκείνα που αντιτίθενται στις προσωπικές της πεποιθήσεις. Η τακτική επαλήθευσης των προσωπικών πεποιθήσεων μαθητών πρώτων τάξεων του δημοτικού μέσα από τα διαθέσιμα δεδομένα έχει επίσης παρατηρηθεί από την έρευνα των Paparistodemou & Meletiou – Mavrotheris (2008). Στη συνέχεια, εστιάζει σε όλα τα διαθέσιμα δεδομένα, υιοθετεί όμως μια μη-στατιστική τακτική. Η στρατηγική υπολογισμού αθροισμάτων σχετικών συχνοτήτων έχει παρατηρηθεί και από άλλες έρευνες που χρησιμοποίησαν σύγκριση κατανομών (Watson & Moritz, 1999). Στις έρευνες αυτές, όμως, οι μαθητές συσχέτιζαν το άθροισμα των συχνοτήτων εμφάνισης με το άθροισμα του συνολικού δείγματος, σε αντίθεση με τη μαθήτρια της εν λόγω έρευνας η οποία χαρακτήριζε το άθροισμα ως απόλυτο αριθμό. Η υιοθέτηση αυτής της μη στατιστικής στρατηγικής ενδεχομένως να συνδέεται με τα πορίσματα της έρευνας στο πεδίο των πεποιθήσεων των μαθητών δημοτικού σχολείου, σύμφωνα με τα οποία η λύση ενός προβλήματος επέρχεται πάντοτε έπειτα από την εκτέλεση πράξεων σε αριθμητικά δεδομένα (Greer, Verschaffel & De Corte, 2002). Καθόλη τη διάρκεια των τριών προηγούμενων σταδίων η γλώσσα της μαθήτριας είναι καθαρά ντετερμινιστική. Όταν, όμως, το μη-στατιστικό κριτήριο αποτυγχάνει να παράγει έγκυρες εικασίες που επιβεβαιώνονται από τα μεγαλύτερα μεγέθη δειγμάτων, η Αγγελική εστιάζει αρχικά στη μεταβλητότητα ως χαρακτηριστικό των κατανομών. Μάλιστα, αυτή η ενέργεια αυτή χαρακτηρίζεται από τους Garfield & Ben-Zvi (2008) ως ανάπτυξη διαισθητικών ιδεών για τη μεταβλητότητα, καθώς συνδέεται με τη συνειδητοποίηση του ότι η μεταβλητότητα αποτελεί χαρακτηριστικό ενός συνόλου δεδομένων. Η εστίαση στη μεταβλητότητα οδήγησε την Αγγελική στην ελάττωση της βεβαιότητάς της για τις αποφάσεις και τις προβλέψεις της, καθώς και στην αναζήτηση κάποιου μοτίβου βάσει του οποίου θα ήταν εφικτό να πραγματοποιηθεί μια πρόβλεψη. Έτσι, ο συλλογισμός της αρχίζει να πληροί της προϋποθέσεις του άτυπου συμπερασματολογικού. Μάλιστα, στη προσπάθειά της να αναζητήσει κάποιο μοτίβο στα δεδομένα, ανατρέχει και σε εκείνα που διαπραγματεύθηκε στις φάσεις της μη στατιστικής αντίληψης, με αποτέλεσμα να συνδέσει τη συχνότητα εμφάνισης του κάθε γράμματος με το μέγεθος του δείγματος στο οποίο αυτή παρατηρείται. Κατά το στάδιο του Προηγμένου συμπερασματολογικού συλλογισμού, διατηρούνται τα στοιχεία που χαρακτηρίζουν το συλλογισμό στα δύο προηγούμενα στάδια, παρατηρείται όμως ένας εμπλουτισμός των άτυπων γνωστικών πτυχών που χρησιμοποιούνται για την εκφορά των συμπερασματολογιών.

Αναφορικά με τους παράγοντες σχεδιασμού, τα αυξανόμενα δείγματα, οι Ερωτήσεις «τι θα γινόταν αν....» και η Σύγκριση συνόλων δεδομένων συνδέθηκαν με την ανίχνευση σημάτων στα διαθέσιμα δεδομένα, και με τη συνειδητοποίηση της μεταβλητότητας, τόσο ως χαρακτηριστικού των κατανομών όσο και μεταξύ δειγμάτων, επιβεβαιώνοντους Braham & Ben-Zvi (2015). Σχετικά με το Λογισμικό Tinkerplots τα πορίσματα της παρούσας έρευνας εξειδικεύουν τη θέση των Garfield & Ben-Zvi (2008) πως η τεχνολογία διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη του συλλογισμού, καθώς στη συγκεκριμένη έρευνα το λογισμικό συνδέθηκε με την ποιοτική βελτίωση των άτυπων γνωστικών πτυχών που επιστρατεύουν οι μαθητές για την υποστήριξη του συλλογισμού τους. Επιπλέον, με τη χρησιμοποίηση του sampler που παρέχει το λογισμικό δόθηκε στη μαθήτρια η δυνατότητα να διερευνήσει τη σχέση ανάμεσα στα δεδομένα και την τυχαιότητα (Konold & Kazak, 2008), λόγου χάριν πως δεν πρέπει να συνάγονται βέβαια συμπεράσματα από μικρού μεγέθους δείγματα καθώς τα δείγματα μεγάλου μεγέθους ευνοούν την εμφάνιση και των γραμμάτων με μικρότερη πιθανότητα εμφάνισης.

Αξίζει να σημειώσουμε πως η περιπτωσιακή μελέτη ως μεθοδολογία επιφέρει περιορισμούς στη γενικευσιμότητα των αποτελεσμάτων. Όμως, η συγκεκριμένη έρευνα δεν αποσκοπεί στη γενίκευση των συλλογιστικών σταδίων που παρατηρήθηκαν σε όλο το μαθητικό πληθυσμό, αλλά στη σε βάθος μελέτη του τρόπου ανάπτυξης των χαρακτηριστικών που συνθέτουν τον άτυπο συμπερασματολογικό συλλογισμό.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ben-Zvi, D. (2004). *Reasoning about variability in comparing distributions. Statistics Education Research Journal, 3*(2), 42-63.

Ben-Zvi, D., & Amir, Y. (2005). How do Primary School Students Begin to Reason about Distributions? In K. Makar (Ed.), Reasoning about distribution: A collection of current research studies. *Proceedings of the Fourth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking, and Literacy* (SRTL-4), University of Auckland, New Zealand, 2-7 July, 2005. Brisbane: University of Queensland.

Ben-Zvi, D., Aridor, K., Makar, K., & Bakker, A. (2012). Students' emergent articulations of uncertainty while making informal statistical inferences. *ZDM, 44*(7), 913-925.

Ben-Zvi, D., Gil, E., & Apel, N. (2007). What is hidden beyond the data? Young students reason and argue about some wider universe. In

Proceedings of the Fifth International Forum for Research on Statistical Reasoning, Thinking and Literacy. Warwick, UK: University of Warwick.

Braham, H. M., & Ben-Zvi, D. (2015). Students' articulations of uncertainty in informally exploring sampling distributions. *Reasoning about uncertainty: Learning and teaching informal inferential reasoning*, 57-94.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. Springer Science & Business Media.

Greer, B., Verschaffel, L., & De Corte, E. (2002). "The Answer is Really 4.5": Beliefs About Word Problems. In *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* pp. 271-292. Springer Netherlands.

Jones, G. A., Thornton, C. A., Langrall, C. W., Mooney, E. S., Perry, B., & Putt, I. J. (2000). A framework for characterizing students' statistical thinking. *Mathematics Thinking and Learning*, *2*,269–307.

Konold, C., & Kazak, S. (2008). Reconnecting data and chance. Technology Innovations in Statistics Education, 2(1).

Μικρός, Γ., Χατζηγεωργίου, Ν., Καραγιάννης, Γ. (2003). «Βασικά ποσοτικά μεγέθη στην γραπτή Νέα Ελληνική γλώσσα: η αξιοποίηση του ΕΘΕΓ στην ελληνική ποσοτική γλωσσολογία». Proceedings of the Workshop "Text Processing for Modern Greek: From Symbolic to Statistical Aproaches", Ρέθυμνο, σσ. 23-37.

Makar, K., & Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, *8*(1), 82-105.

Paparistodemou, E., & Meletiou-Mavrotheris, M. (2008). Developing young students' informal inference skills in data analysis. *Statistics Education Research Journal*, *7*(2), 83-106.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: reflections and directions. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465–495). New York: Macmillan Co.

Serradó, A. (2014). Constructing, refining and validating a task for developing reasoning on stabilized relative frequency distributions in the context of informal inferences. In K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Ed.), *Sustainability in statistics education Proceedings of the*

Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Yin, R. K. (2013). *Case study research: Design and methods*. Sage publications.

Watson, J. M., & Moritz, J. B. (1999). The beginning of statistical inference:Comparing two data sets. *Educational Studies in Mathematics*, *37*, 145-168.

Wells, J., & Makar, K. (2015). Inferring to a model: Using inquiry-based argumentation to challenge young children's expectations of equally likely outcomes. *Reasoning about uncertainty: Learning and teaching informal inferential reasoning*, 1-28.

Zieffler, A., Garfield, J., Delmas, R., & Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, *7*(2), 40-58.

ΕΠΑΝΑΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΩΝ ΠΟΣΟΣΤΩΝ ΣΤΑ ΕΚΑΤΟ ΣΕ ΜΙΑ ΤΑΞΗ ΤΗΣ ΕΚΤΗΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ: Η ΧΡΗΣΗ ΜΙΑΣ ΔΙΠΛΗΣ ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗΣ

Σπηλιοπούλου Άννα, Ντούμα Κωστούλα, Μπούφη Άντα

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

annspiliop@mail.com, kostoul_a@hotmail.com, aboufi@primedu.uoa.gr

Στα πλαίσια ενός μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών οργανώθηκε μαζί με τους εκπαιδευόμενους δασκάλους ένα πείραμα σχεδιασμού με σκοπό να μελετηθεί ο τρόπος που θα μπορούσαν οι μαθητές μιας τάξης της ΣΤ΄ δημοτικού να στηριχθούν ώστε να κατανοούν τις αναλογικές σχέσεις των ποσοτήτων που εμπλέκονται σε προβλήματα με ποσοστά στα εκατό. Σε αυτήν την εργασία αναλύονται μερικά επεισόδια από τις διδασκαλίες που πραγματοποιήθηκαν για να φανεί ο τρόπος με τον οποίο η αξιοποίηση μιας διπλής αριθμογραμμής άρχισε να εδραιώνεται στην τάξη ως ένα συλλογικό εργαλείο μαθηματικής επικοινωνίας και διατύπωσης συλλογισμών που αφορούσαν στις σχέσεις ποσοτήτων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ανεξάρτητα από τις επιστημολογικές θεωρήσεις των ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών, ο ισχυρισμός ότι οι μαθηματικοί συμβολισμοί παίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών είναι κοινά αποδεκτός (Kaput, 1994; Thompson, 1992; Van Oers, 1996). Παρ’ όλα αυτά, οι αντιλήψεις σχετικά με τον τρόπο που μπορεί να λειτουργεί η αξιοποίηση των συμβολισμών στο μάθημα των Μαθηματικών διαφέρουν. Μερικές προσεγγίσεις διδακτικού σχεδιασμού θεωρούν ότι η μαθηματική εξέλιξη των μαθητών είναι συνυφασμένη με την εσωτερίκευση των διαφόρων εξωτερικών συμβολικών αναπαραστάσεων. Στην εργασία αυτή, υιοθετήθηκε η άποψη που θεωρεί την αξιοποίηση των μαθηματικών συμβολισμών αναπόσπαστη πτυχή των μαθηματικών πρακτικών τις οποίες θεσμοθετεί μία τάξη μέσα από τις κοινωνικές αλληλεπιδράσεις της. Σκοπός, μέσα από την ανάλυση κάποιων επεισοδίων, είναι να αναδειχθεί με ποιον τρόπο η χρήση μιας διπλής αριθμογραμμής άρχισε να εδραιώνεται σε μια τάξη της ΣΤ΄ δημοτικού ως εργαλείο σκέψης στην περιοχή των ποσοστών.

Το ενδιαφέρον για τη συγκεκριμένη περιοχή κινητοποιήθηκε αρχικά από τα απογοητευτικά αποτελέσματα εμπειρικών ερευνών σχετικά με τις επιδόσεις των μαθητών σε προβλήματα ποσοστών. Σ’ αυτές τεκμηριώνεται ότι οι μαθητές συχνά αξιοποιούν τυποποιημένες διαδικασίες, χωρίς, όμως, να κατανοούν τους λόγους και τις αναλογικές σχέσεις που εμπλέκονται στη χρήση των ποσοστών (Kouba et al., 1988; Parker & Leinhardt, 1995; Ramful, Bedgood, & Lowrie, 2016; Van Den Heuvel-Panhuizen, 1994). Διάφορες παρανοήσεις των μαθητών φανερώνουν την απουσία κατανόησης της έννοιας του ποσοστού. Για παράδειγμα, συχνά το σύμβολο του ποσοστού παραβλέπεται (π.χ. ταυτίζεται το 110% με το 110) ή τα ποσοστά αντικαθίστανται από λάθος δεκαδικούς (π.χ. το 7% με το 0.7). Κατά συνέπεια, και με δεδομένη τη χρησιμότητα των ποσοστών στην καθημερινή ζωή αλλά και στις επιστήμες, η ανάπτυξη μιας διδακτικής ακολουθίας που να εξασφαλίζει την κατανόησή τους κρίθηκε άξια διερεύνησης.

Αφού δοθούν μερικές πληροφορίες για το διδακτικό πείραμα και τα στοιχεία που συγκεντρώθηκαν, γίνεται περιγραφή του θεωρητικού και μεθοδολογικού υπόβαθρου της εργασίας καθώς και της μεθόδου ανάλυσης των στοιχείων. Στη συνέχεια, αναλύονται μερικά επιλεγμένα επεισόδια από τα μαθήματα για να φανεί ο τρόπος με τον οποίο το εργαλείο της αριθμογραμμής με διπλή κλίμακα έγινε πηγή επικοινωνίας και προβληματισμού σε μια τάξη.

ΤΟ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΚΑΙ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Το διδακτικό πείραμα έγινε σε μια τάξη της ΣΤ΄ δημοτικού ενός πειραματικού σχολείου της Αθήνας. Η τάξη είχε 25 μαθητές. Προς το τέλος της σχολικής χρονιάς και κατόπιν συνεννόησης με τον δάσκαλο και τον διευθυντή του σχολείου, πραγματοποιήθηκαν 7 διδασκαλίες διάρκειας 20-45 λεπτών. Τον ρόλο της δασκάλας ανέλαβε μια μεταπτυχιακή φοιτήτρια, η οποία συμμετείχε σε όλες τις συναντήσεις αποτίμησης και σχεδιασμού των μαθημάτων. Κατά τη διάρκεια των διδασκαλιών, τα μέλη της ομάδας συνεργασίας μπορούσαν να παρεμβαίνουν και να θέτουν ερωτήσεις στους μαθητές.

Καθώς οι μαθητές είχαν ήδη διδαχθεί τα ποσοστά, προτού ξεκινήσει το διδακτικό πείραμα, τους δόθηκε να συμπληρώσουν ένα τεστ με σκοπό να αξιολογηθούν οι γνώσεις τους και να σχεδιαστούν οι διδασκαλίες. Εξετάζοντας τα διδακτικά βιβλία Μαθηματικών της Στ΄ δημοτικού, διαπιστώθηκε ότι στην ενότητα των ποσοστών δίνεται ιδιαίτερη έμφαση σε τυποποιημένες διαδικασίες, όπως αυτές των ‘σταυρωτών γινομένων’ ή της ‘απλής μεθόδου των τριών’. Αυτή η διαπίστωση οδήγησε στην υπόθεση ότι ακόμα κι αν τα ποσοστά τα είχαν ήδη διδαχθεί, οι μαθητές θα μπορούσαν να ωφεληθούν από μια διδασκαλία που θα τους έδινε την ευκαιρία: (1) να συνειδητοποιήσουν τα ποσοστά στα εκατό ως λόγους ανάμεσα στο μέρος μιας ποσότητας που έχει 100 ίσα μέρη και στην ποσότητα την ίδια, και (2) να σκέφτονται ποσοτικά, δηλαδή να εμβαθύνουν στις αναλογικές σχέσεις που συνεπάγεται η χρήση των ποσοστών ως μέτρων ποσοτήτων (Thompson, 1994; Thompson & Saldanha, 2003). Η υπόθεση αυτή ενισχύθηκε και από τα αποτελέσματα του τεστ. Η πλειοψηφία των μαθητών εφάρμοσε αλγοριθμικούς τρόπους για να λύσει τα προβλήματα. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα: «Κάποιο κατάστημα έχει έκπτωση 25% στα ηλεκτρονικά παιχνίδια. Η αρχική τιμή ενός παιχνιδιού είναι 80€. Πόσα χρήματα θα πρέπει να δώσει ένα παιδί για να το αγοράσει;», μόνο 2 από τους 24 μαθητές που ήταν παρόντες σκέφτηκαν αναλογικά (π.χ. έγραψαν 100% →80€, 50%→40€, 25% →20€ κτλ.). Οι 14 μαθητές, αφού έφτιαξαν τον πίνακα τιμών των ποσοτήτων, χρησιμοποίησαν τα σταυρωτά γινόμενα (8), την απλή μέθοδο των τριών (3) ή τον πολλαπλασιασμό της αρχικής τιμής με το 0,25 (3). Οι υπόλοιποι 8 μαθητές έλυσαν το πρόβλημα λάθος ή δεν απάντησαν.

Η υποθετική πορεία μάθησης (Simon, 1995), που το διδακτικό πείραμα είχε σκοπό να ελέγξει και να αναθεωρήσει, αποσκοπούσε στην στήριξη των μαθητών προκειμένου να κατανοήσουν τις αναλογικές σχέσεις στο πλαίσιο των προβλημάτων με ποσοστά. Ως κεντρική πτυχή αυτής της πορείας ήταν η αξιοποίηση μιας διπλής αριθμογραμμής (Streefland, 1984; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Τονίζεται ότι ο σχεδιασμός και η χρήση αυτής της αριθμογραμμής έγινε όχι για να μεταφερθούν νοήματα στους μαθητές, αλλά για να λειτουργήσει ως μέσο στήριξης της μάθησής τους. Βασικές επιδιώξεις για το εργαλείο αυτό ήταν: (1) να επιτρέπει στους μαθητές να το αντιλαμβάνονται ως μέσο που απεικονίζει τη σκέψη τους με πιστότητα, και (2) να δίνει στον δάσκαλο τη δυνατότητα να το χρησιμοποιεί για να αποτυπώνει σε αυτό την εξελισσόμενη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών.

Τα στοιχεία για την ανάλυση προέρχονται από τις βιντεοσκοπημένες διδασκαλίες, τα φύλλα εργασίας των μαθητών, καθώς και το αρχικό και τα τελικά τεστ που συμπλήρωσαν οι μαθητές [1].

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΚΟΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ

Το διδακτικό πείραμα στηρίχθηκε στη μεθοδολογία της έρευνας σχεδιασμού (Gravemeijer & Cobb, 2006; Stephan, Bowers, Cobb, & Gravemeijer, 2003) Κεντρική θεωρητική υπόθεση αυτής της μεθοδολογίας είναι ότι η μάθηση των μαθητών δεν εμφανίζεται αυθόρμητα. Τα μέσα στήριξής της (διδακτικές δραστηριότητες, συμβολικά εργαλεία αναπαράστασης των μαθηματικών ιδεών, η φύση των συζητήσεων στην τάξη, η οργάνωση των δραστηριοτήτων της τάξης), τα οποία διαμορφώνουν το κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο μιας τάξης, επηρεάζουν βαθιά τόσο τη διαδικασία όσο και τα προϊόντα της μάθησης των μαθητών. Κατά συνέπεια, επιλέχθηκε αυτή η μεθοδολογία, γιατί θα επέτρεπε την εξήγηση της μάθησης των μαθητών στο πλαίσιο που ορίζεται από τα μέσα στήριξής της.

Η Ρεαλιστική Θεωρία Μαθηματικής Εκπαίδευσης (Gravemeijer, 1994; Cobb et al., 2008) καθοδήγησε τον διδακτικό σχεδιασμό. Η θεωρία αυτή προσδιορίζει ευρετικές για τη στήριξη της προοδευτικής αναδιοργάνωσης της μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών. Για παράδειγμα, σύμφωνα με τη ρεαλιστική θεωρία, οι αναπαραστάσεις της άτυπης μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών (models of) μπορούν με την καθοδήγηση του δασκάλου, να εξελίσσσονται μέσα από την αξιοποίησή τους σε στηρίγματα (models for) για πιο γενική μαθηματική σκέψη. Εάν μια τέτοια εξέλιξη δεν συμβαίνει, τότε ο διδακτικός σχεδιασμός αναθεωρείται, καθώς τα μοντέλα κρίνονται ακατάλληλα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στο παρόν διδακτικό πείραμα, οι μηχανισμοί που οι μαθητές είχαν ήδη αναπτύξει, για να λύνουν προβλήματα ποσοστών, αλλά και ο περιορισμένος διαθέσιμος χρόνος, δεν επέτρεψαν την ανάδυση της διπλής αριθμογραμμής ως μοντέλου της άτυπης μαθηματικής δραστηριότητάς τους στον βαθμό που χρειαζόταν. Ως εκ τούτου, λοιπόν, η αριθμογραμμή λειτούργησε εν μέρει ως στήριγμα για την ανάπτυξη και μορφοποίηση των μαθηματικών ιδεών τους.

Μέθοδος ανάλυσης των στοιχείων

Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση των στοιχείων αποτελεί προσαρμογή της μεθόδου της διαρκούς σύγκρισης (Glaser & Strauss, 1967; Cobb & Whitenack, 1996). Μέσα από την ανάλυση των στοιχείων αναδύθηκαν τρεις γενικές κατηγορίες σκέψης των μαθητών: (1) η χρήση μαθηματικών κανόνων, (2) η εφαρμογή κανόνων χωρίς λογική, και (3) η αξιοποίηση ποσοτικής σκέψης. Τα αποτελέσματα εστιάζουν στους δύο τελευταίους τύπους σκέψης καθώς εξετάζεται η αναζήτηση των ευκαιριών μάθησης που δημιούργησε ο τρόπος χρήσης της διπλής αριθμογραμμής στην τάξη.

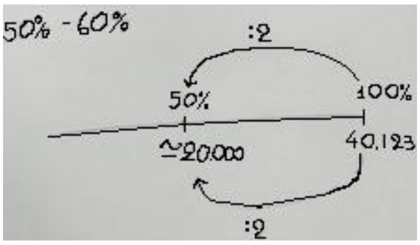
Αποτελεσματα

Τα αποτελέσματα χωρίζονται σε δύο ενότητες. Η πρώτη αφορά σε επεισόδια τα οποία δείχνουν την εξέλιξη του τρόπου με τον οποίο αξιοποιήθηκε η διπλή αριθμογραμμή από τη δασκάλα προκειμένου να γίνει στήριγμα στην κατανόηση των προβλημάτων που συζητήθηκαν στην τάξη. Στη δεύτερη αναλύονται μερικά επιπλέον επεισόδια για να φανούν: (1) ο τρόπος που χρησιμοποιήθηκε η διπλή αριθμογραμμή από τους μαθητές στη λύση προβλημάτων με βάση τις αναλογικές σχέσεις μεταξύ των μετρήσεων, και (2) η προσπάθεια της δασκάλας να συνθέτει τις συνεισφορές των μαθητών προκειμένου να κατανοήσουν τη λογική των κανόνων υπολογισμού με ποσοστά.

Στήριξη στην κατανόηση των προβλημάτων

Στο πρώτο μάθημα, η δασκάλα έγραψε στον πίνακα ένα πρόβλημα που ζητούσε από τους μαθητές να βρουν πόσο περίπου είναι το ποσοστό των παιδιών που δεν τους αρέσει η κατασκήνωση, αν από τα 40.123 παιδιά που ρωτήθηκαν, τα 23.997 απάντησαν ότι δεν τους αρέσει η κατασκήνωση. Σκοπός της ήταν να αρχίσουν οι μαθητές να αιτιολογούν τη σκέψη τους με βάση τις αναλογικές μεταβολές των μέτρων μιας ποσότητας σε διαφορετικές μονάδες μέτρησης.

Ο πρώτος μαθητής που πήρε τον λόγο ανέφερε ότι το ζητούμενο ποσοστό θα είναι περίπου 50 έως 60% γιατί είναι στη «μέση και λίγο παραπάνω». Αφού η δασκάλα του ζήτησε να δικαιολογήσει την απάντησή του είπε: «Επειδή το 40.000 έχει μισό το 20.000». Μετά, η δασκάλα έφτιαξε στον πίνακα τη διπλή αριθμογραμμή που φαίνεται στο σχήμα 1. για να απεικονίσει τη σκέψη του μαθητή. Καθώς την έφτιαχνε, τόνισε ότι το 100% πάνω από το 40.123 είναι «όλα τα παιδιά που ρωτήθηκαν».



Σχήμα 1: Η διπλή αριθμογραμμή

Αν και οι κάθετες γραμμές αναπαριστούν τη συσσώρευση του πλήθους των παιδιών (στην πάνω πλευρά της αριθμογραμμής ως ποσοστό και στην κάτω πλευρά της ως αποτέλεσμα αρίθμησης των παιδιών), η δασκάλα δεν είχε σημειώσει την αρχή της αριθμογραμμής. Με αυτήν την παράλειψή της, όμως, δεν έδινε στους μαθητές την ευκαιρία να συνδέσουν το μέγεθος της ποσότητας με τα μήκη των τμημάτων της αριθμογραμμής. Παρ' όλα αυτά, στη συνέχεια της συζήτησης, οι λύσεις που έδωσαν οι μαθητές στο πρόβλημα αποτυπώθηκαν πάνω στην αριθμογραμμή. Και μάλιστα, αρκετοί από τους μαθητές που συμμετείχαν στη συζήτηση διαμόρφωσαν ή αιτιολόγησαν τις σκέψεις τους στηριζόμενοι σ' αυτήν.

Σ' ένα από τα επόμενα μαθήματα, οι μαθητές είχαν να υπολογίσουν την έκπτωση 20% ενός ηλεκτρονικού παιχνιδιού που κόστιζε 400€. Στην αρχή της συζήτησης, η δασκάλα ζήτησε από τους μαθητές να κάνουν μία αρχική εκτίμηση της ποσότητας των χρημάτων που αντιστοιχούν στη μείωση της τιμής του παιχνιδιού κατά 20%. Τους ρώτησε: «Είναι πολλά χρήματα; Πόσα λέτε ότι γλιτώνουμε;». Ένας μαθητής επεσήμανε ότι θα είναι πιο κάτω από το 50% και ακολούθησε ο διάλογος:

Δασκάλα: Θα είναι μικρότερη η έκπτωση από το εάν ήταν 50%. Και 50% θα ήταν πόσο;

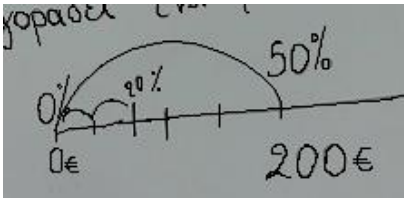
Μαθητής1: Το μισό.

Δασκάλα: Το μισό ποσό, δηλαδή, θα το γλιτώναμε. Άρα, θα γλιτώναμε τα μισά. Και εάν τα γλιτώναμε όλα; Τι ποσοστό θα ήταν;

Μαθητής 2: 100%

Δασκάλα: (Αρχίζει να φτιάχνει την αριθμογραμμή και πάνω από τα 400€ τοποθετεί το 100%). Θα τα γλιτώναμε όλα, δηλαδή! Δεν θα πληρώναμε τίποτα.

Στη συζήτηση που ακολούθησε, και αφού ήδη είχε τοποθετηθεί το ζευγάρι (50%, 200€) πάνω στην αριθμογραμμή, η δασκάλα ζήτησε από τους μαθητές να τοποθετήσουν το 20% πάνω στην αριθμογραμμή. Κάποιοι μαθητές προσδιόρισαν τη θέση του χωρίζοντας την απόσταση από το 0% μέχρι το 50% σε 5 ίσα μέρη (βλ. σχήμα 2), ενώ κάποιοι άλλοι χωρίζοντας την απόσταση από το 0% μέχρι το 25% σε 5 ίσα μέρη.

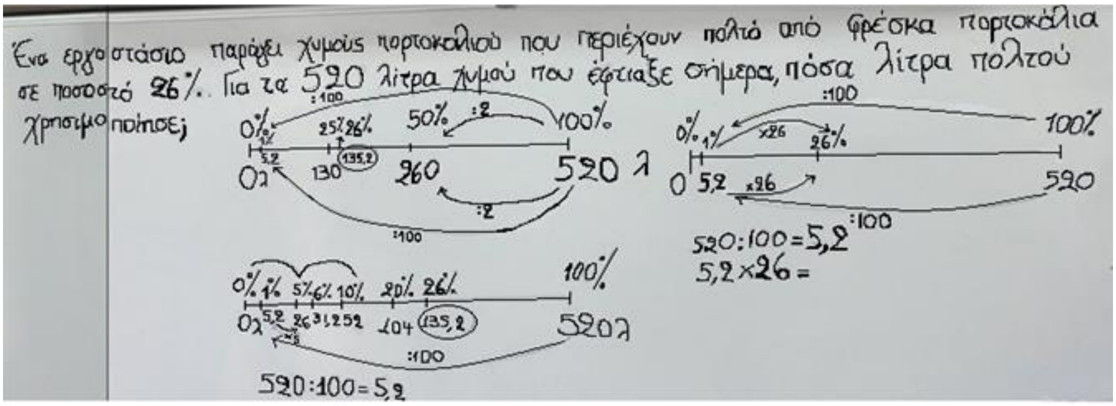


Σχήμα 2: Η τοποθέτηση του 20% στη διπλή αριθμογραμμή

Η αναλογική μεταβολή των μετρήσεων πάνω στη διπλής κλίμακας αριθμογραμμή άρχισε να γίνεται περισσότερο συνειδητή σε μια σημαντική μερίδα των μαθητών της τάξης. Η ερώτηση της δασκάλας: «Πού είναι το 20%; Μπορείς να το βάλεις κάπου στην αριθμογραμμή μας;» έπαιξε καταλυτικό ρόλο. Μέχρι τώρα οι περισσότεροι μαθητές δεν είχαν άλλη επιλογή παρά την εφαρμογή αλγορίθμων πάνω στους αριθμούς. Η συσχέτιση των ενεργειών τους στην μία πλευρά της αριθμογραμμής με τις ενέργειές τους στην άλλη πλευρά της, συνέβαλλε ώστε η δραστηριότητά τους να αρχίσει να αποκτά νόημα. Για παράδειγμα, μια μαθήτρια, εξήγησε ότι το 20% έκπτωση θα αντιστοιχεί σε 80€ ως εξής: «Χωρίσαμε σε 5 κομμάτια το 25% και πήραμε τα 4. Θα χωρίσουμε και τα 100€ σε 5 κομμάτια ... αλλά όχι των 5 (%) ... αλλά των 20€ ...».

Λύσεις προβλημάτων με τη διπλή αριθμογραμμή – Κανόνες υπολογισμού με λογική

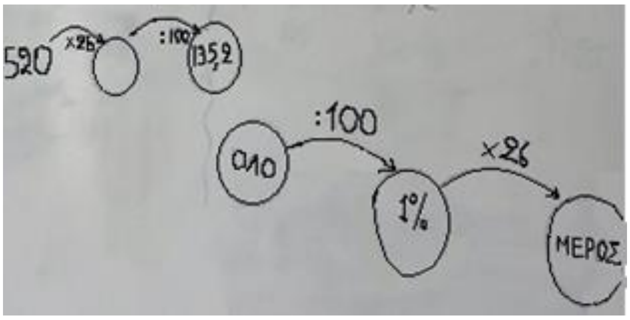
Η συσχέτιση των μέτρων στις δύο πλευρές της αριθμογραμμής θα μπορούσε να θεωρηθεί πρόδρομος για να κατανοήσουν οι μαθητές ότι καθώς το μέτρο μιας ποσότητας αλλάζει, ο λόγος των μετρήσεών της σε διαφορετικές μονάδες μέτρησης παραμένει σταθερός. Προς το παρόν, οι μαθητές είχαν ήδη κάνει ένα σημαντικό βήμα σ' αυτήν την κατεύθυνση. Θεωρήθηκε ότι η εξοικείωσή τους στη διατύπωση συλλογισμών σε προβλήματα ποσοστών θα μπορούσε να εξασφαλίσει μελλοντικά τη συνειδητοποίηση της σταθερότητας της σχέσης μεταξύ των μετρήσεων μιας ποσότητας σε ποσοστά και σε άλλες μονάδες μέτρησης. Ως ένα βαθμό, αυτή η εξοικείωση επιτεύχθηκε. Για παράδειγμα, στο προτελευταίο μάθημα, οι μαθητές είχαν να λύσουν το πρόβλημα: «Ένα εργοστάσιο παράγει χυμούς πορτοκαλιού, που περιέχουν πολτό από φρέσκα πορτοκάλια σε ποσοστό 26%. Για τα 520 λίτρα χυμού που έφτιαξε σήμερα, πόσα λίτρα πολτού χρησιμοποίησε;». Στο σχήμα 3 υπάρχουν οι λύσεις τριών μαθητών.



Σχήμα 3: Τρεις λύσεις στη διπλή αριθμογραμμή

Οι λύσεις αυτές δεν ήταν οι μόνες που οι μαθητές έφτιαξαν. Καθώς εργάζονταν στα θρανία τους, προτού αρχίσει η παρουσίαση των λύσεών τους στην τάξη, παρατηρήθηκαν και άλλοι τρόποι με διαφορετικά βήματα στον υπολογισμό του 26% πάνω στην αριθμογραμμή. Η λύση (πάνω δεξιά, σχήμα 3) προέκυψε κατά τη διάρκεια παρουσίασης των λύσεων στον πίνακα. Μια μαθήτρια, αφού εξηγήθηκε η 2η λύση (κάτω αριστερά, σχήμα 3), δήλωσε: «Θα μπορούσε κιόλας να κάνει 1% επί 26 ... αντί να βρει το 5%, το 6%, το 10% και το 20%». Η δασκάλα έδειξε τον ενθουσιασμό της για τη συγκεκριμένη λύση και εστίασε την προσοχή των μαθητών στη λογική της και στα λιγότερα βήματα που τη συγκροτούσαν.

Εκτός από τις λύσεις με την αριθμογραμμή, μερικοί μαθητές είχαν φτιάξει πίνακες ποσών-τιμών και με τη μέθοδο των 'σταυρωτών γινομένων' είχαν υπολογίσει το αποτέλεσμα. Στο τελευταίο μάθημα, η δασκάλα, αφού υπενθύμισε τις λύσεις που οι μαθητές είχαν βρει στο πρόβλημα με τον πολτό, τους ενθάρρυνε να αντιπαραθέσουν τη λύση της μαθήτριας που είχε στηριχθεί στο 1%Χ26 (520:100=5,2 -- 5,2Χ26=135,2) με τη λύση ενός μαθητή που από τον πίνακα ποσών-τιμών είχε οδηγηθεί στις πράξεις 520Χ26=13,520 και 13,520:100=5,2. Η δασκάλα έφτιαξε στον πίνακα τα διαγράμματα του σχήματος 4. Οι μαθητές επεσήμαναν ότι η απάντηση είναι ίδια. Μια μαθήτρια εξήγησε: «Και τα 2 σχήματα είναι ίδια ... απλώς αντιστρέψαμε τις πράξεις ... [το αποτέλεσμα δεν αλλάζει] γιατί είναι ακριβώς οι ίδιες πράξεις, απλώς με διαφορετική σειρά».



Σχήμα 4: Τα βήματα των κανόνων

Στην προσπάθειά τους να εξηγήσουν τη λύση του συμμαθητή τους αναφέρθηκαν στα χιαστί γινόμενα αλλά δεν μπόρεσαν να βρουν ένα νόημα για το γινόμενο 520Χ26. Αυτό οδήγησε την πλειοψηφία της τάξης να δεχθεί ότι η λύση με το 1%Χ26 είχε πιο πολύ νόημα. Μόνο μία μαθήτρια κατάφερε να μας εκπλήξει θετικά με την απάντησή της. Δήλωσε ότι εκείνη καταλαβαίνει και τους 2 τρόπους. Όπως χαρακτηριστικά είπε: « [με το γινόμενο 520Χ26] ... βρίσκουμε το μεγαλύτερο μέρος, δηλαδή το 2600% ... και μετά όταν το κάνουμε διά 100, το κάνουμε γιατί θέλουμε να βρούμε το 26%».

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Το εργαλείο της αριθμογραμμής με τη διπλή κλίμακα, από μόνο του δεν έχει τη δύναμη να δείξει στους μαθητές πως να λύνουν προβλήματα με ποσοστά. Μπορεί, όμως, να στηρίξει τη μαθηματική τους εξέλιξη, αν ο δάσκαλος το χρησιμοποιεί, για να απεικονίζει τις σκέψεις των μαθητών του και αν είναι σε θέση να το προσαρμόζει στις δικές τους ερμηνείες. Μόνο τότε οι μαθητές θα μπορούσαν να το οικειοποιηθούν και να το χρησιμοποιούν για να λύνουν προβλήματα, χωρίς να προσπαθούν να θυμηθούν έτοιμους χωρίς νόημα κανόνες.

Παρ' όλα αυτά, μέσα από την ανάλυση των στοιχείων έγινε αντιληπτό ότι η ευελιξία του εργαλείου της διπλής αριθμογραμμής μπορεί εύκολα να οδηγήσει σε μία μηχανιστική χρήση της. Τέτοιο ενδεχόμενο έγινε προσπάθεια να αποφευχθεί. Αυτή εργασία αποτελεί ένα πρώτο βήμα στην αναζήτηση τρόπων που θα μπορούσαν να κάνουν το συγκεκριμένο εργαλείο περισσότερο αποτελεσματικό για τη μάθηση των μαθητών και ως εκ τούτου αξιοποιήσιμο στη διδασκαλία των ποσοστών.

Ευχαριστούμε θερμά το Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών για τη χρηματική υποστήριξη που προσέφερε στην εκπαίδευση των φοιτητών - δασκάλων του Ε.Κ.Π.Α. και τους φοιτητές: Μπίκινη Μαριάννα, Μπογιατζόγλου Αικατερίνη, Ρούτουλα Δημήτριο για την πρόθυμη συμμετοχή τους στο πρόγραμμα.

Σημείωση

1. Στην παρουσίαση, θα αναφερθούν οι διαφοροποιήσεις στις απαντήσεις των μαθητών, οι οποίες συνηγορούν υπέρ της αποτελεσματικότητας της παρέμβασής μας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Cobb, P., & Whitenack, J. W. (1996). A method for conducting longitudinal analyses of classroom videorecordings and transcripts. *Educational studies in mathematics*, *30*(3), 213-228.

Cobb, P., Zhao, Q., & Visnovska, J. (2008). Learning from and adapting the theory of realistic mathematics education. *Éducation et didactique*, *2*(1), 105-124.

Glaser, B. G., & Strauss, A. L. (1967). *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. New York: Aldine.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for research in Mathematics Education*, 443-471.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. *Educational design research*, 17-51.

Kaput, J. J. (1994). The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience. *Didactics of mathematics as a scientific discipline*, 379-397.

Kouba, V. L., Brown, C. A., Carpenter, T. P., Lindquist, M. M., Silver, E. A., & Swafford, J. O. (1988). Results of the fourth NAEP assessment of mathematics: Number, operations, and word problems. *The Arithmetic Teacher*, *35*(8), 14-19.

Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research*, *65*(4), 421-481.

Ramful, A., Bedgood, D., & Lowrie, T. (2016). A Collaborative Endeavour between Mathematics and Science Educators: Focus on the Use of Percent in Chemistry. *European Journal of Science and Mathematics Education*, *4*(2), 196-213.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for research in mathematics education*, 114-145.

Stephan, M., Bowers, J., Cobb, P., & Gravemeijer, K. (Eds.). (2003). *Supporting students' development of measuring conceptions: Analyzing students' learning in social context*. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph No. 12.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Streefland, L. (1984). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (Towards... a theory). *Educational Studies in Mathematics*, *15*(4), 327-348.

Thompson, P. W. (1992). Notations, conventions, and constraints: Contributions to effective uses of concrete materials in elementary mathematics. *Journal for research in mathematics education*, 123-147.

Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, 179-234.

Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. *Research companion to the principles and standards for school mathematics*, 95-113.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (1994). Improvement of (didactical) assessment by improvement of problems: An attempt with respect to percentage. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(4), 341-372.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational studies in Mathematics*, *54*(1), 9-35.

Van Oers, B. (1996). Learning mathematics as a meaningful activity. *Theories of mathematical learning*, 91-113.

Η ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗΣ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΠΟ ΜΗ ΒΛΕΠΟΝΤΕΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

Τουλτσινάκη Μαρία & Σταυρόπουλος Παναγιώτης

Π.Μ.Σ «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»
Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

maria_toul@yahoo.gr, stavropoulos.panagiotis@gmail.com

Αυτό το άρθρο μελετά πως πέντε μαθήτριες με προβλήματα όρασης χρησιμοποιούν την αριθμογραμμή σε συνδυασμό με τις διαισθητικές πεποιθήσεις που έχουν για τους θετικούς και αρνητικούς αριθμούς, ώστε να κατανοήσουν τη διάταξη αλλά και τις πράξεις μεταξύ ακεραίων. Για αυτή τη μελέτη σχεδιάστηκαν πέντε δραστηριότητες ενώ οι μαθήτριες χρησιμοποιούσαν μια ανάγλυφη αριθμογραμμή σχεδιασμένη σε ειδικό χαρτί. Παρουσιάζουμε και εξετάζουμε τον τρόπο με τον οποίο πετυχαίνουν τη μεταφορά από τους φυσικούς αριθμούς στους ακέραιους και τη γενίκευση στις ιδιότητες της πρόσθεσης αυτών. Το παράδειγμα των μαθητών με προβλήματα όρασης μπορεί να είναι το εφαλτήριο για τη κατανόηση της συλλογιστικής σχετικά με την αριθμητική των ακεραίων για κάθε παιδί, τυφλό ή μη.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα εργασία σκοπός μας είναι να ασχοληθούμε με μαθητές που αντιμετωπίζουν προβλήματα όρασης σε σχέση με τον τρόπο σκέψης που αναπτύσσουν όταν μελετούν τους ακέραιους αριθμούς για πρώτη φορά. Η βιβλιογραφία και η έρευνα γύρω από την εκπαίδευση και τη διδακτική των μαθηματικών σε μη βλέποντες μαθητές είναι αρκετά περιορισμένη, οπότε η συγκεκριμένη εργασία αποκτά μια επιπρόσθετη αξία μελέτης. Τα συμπεράσματα μπορούν να γενικευθούν ή και να χρησιμοποιηθούν συγκριτικά σε βλέποντες μαθητές ενώ παράλληλα μπορούν να συνεισφέρουν στο πεδίο παρόμοιων ερευνών.

Τα κυριότερα σημεία στα οποία στηριζόμαστε είναι ο ρόλος της γλώσσας και της απτικής αντίληψης, σαν συστατικά μέρη της λεκτικής και μη λεκτικής επικοινωνίας με τους μη βλέποντες καθώς και οι διαισθητικές ιδέες που αναπτύσσουν σε σχέση με τους ακέραιους αριθμούς και τις πράξεις τους.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Οι ακέραιοι αριθμοί και το σύμβολο πλην

Ένα από τα πιο συχνά φαινόμενα μέσα στη σχολική τάξη είναι οι περισσότεροι μαθητές να παρουσιάζουν παρανοήσεις κατά την εισαγωγή τους στους ακέραιους και τις πράξεις τους. Το φαινόμενο αυτό οφείλεται κατά κύριο λόγο στις πολλαπλές ερμηνείες του συμβόλου «-». Οι Gallardo και Rojano (1994) απέδωσαν στο αρνητικό σύμβολο πλην, τρία διαφορετικά εννοιολογικά επίπεδα λειτουργίας. Οι τρεις αυτές λειτουργίες του συμβόλου είναι η διττή (binary), η συμμετρική (symmetry) και η μονοδιάστατη (unary). Η διττή φύση του πλην ταυτίζεται με το σύμβολο της πράξης της αφαίρεσης, η συμμετρική φύση σχετίζεται με τη χρήση του πλην μπροστά από αριθμούς ή μεταβλητές εκφράζοντας τον αντίθετο του αριθμού ή της μεταβλητής και τέλος η μονοδιάστατη προσέγγιση ταυτίζει το πλην ως το σύμβολο των αριθμών που είναι μικρότεροι του μηδενός.

Για να μελετήσουμε την αριθμητική σκέψη των μαθητών θα βασιστούμε σε άλλη μια τριάδα, στα τρία διαφορετικά είδη κατανόησης των αριθμών από τους μαθητές όπως εισάγονται από τους Bishop et al. (2014). Αυτά είναι η θέαση των αριθμών είτε ως ένδειξη διάταξης (ordinal), είτε ως πλήθος (cardinal), είτε κατά την τυπική τους μορφή (formal). Η έννοια της διάταξης εισάγεται από πολύ νωρίς στους μαθητές μέσα από απλές εκφράσεις όπως «ο επόμενος/προηγούμενος αριθμός» ή «αυτός ο αριθμός είναι μεγαλύτερος/μικρότερος από τον άλλο». Έτσι η ερμηνεία που αποδίδεται στην πρώτη κατανόηση των αριθμών είναι οτι αυτοί ακολουθούν μια συνέχεια ενώ είναι διατεταγμένοι με μία συγκεκριμένη λογική. Στη δεύτερη περίπτωση οι αριθμοί νοούνται από τους μαθητές ως πληθυσμιακό μέγεθος, δηλαδή ένας τρόπος για να μετράμε ποσότητες, για παράδειγμα «5 βιβλία είναι στο ράφι». Τέλος στην τυπική κατανόηση, οι μαθητές αναπτύσσουν πιο αφαιρετικές ιδέες για τους αριθμούς, καθώς είναι για αυτούς μέρη πράξεων, παραστάσεων και υπολογισμών.

Μια από τις βασικότερες αποδόσεις της διατακτικής ιδιότητας των αριθμών, είναι η τοποθέτηση τους σε μία αριθμογραμμή. Μάλιστα, για την εκτέλεση πράξεων με τη χρήση αυτής, θα χρησιμοποιήσουμε στην παρούσα έρευνα το μοντέλο κίνησης που προτείνουν οι Carpenter et al. (1999). Περιγραφικά το μοντέλο αυτό προτείνει την πρόσθεση ως μια μετακίνηση από το σημείο εκκίνησης (πρώτος προσθετέος) είτε προς τα δεξιά, αν ο δεύτερος προσθετέος είναι θετικός, είτε προς τα αριστερά, αν ο δεύτερος προσθετέος είναι αρνητικός. Το άθροισμα αυτών θα είναι το σημείο κατάληξης από την μετακίνηση.

Τέλος, θα πρέπει να αναφερθούμε στις διαισθητικές ιδέες που φέρουν οι μαθητές σε σχέση με την πρόσθεση και την αφαίρεση, οτι δηλαδή η πρώτη συνεπάγεται αύξηση ενώ η δεύτερη μείωση, γεγονός που προκαλεί γνωστικές συγκρούσεις κατά την μετάβαση στις πράξεις των ακεραίων (Θωμαΐδης, 2009).

Γλώσσα, χειρονομίες και απτική αντίληψη

Θεμέλιο του μαθηματικού συλλογισμού αποτελεί η μαθηματική γλώσσα-σύμβολα, όροι, σημειογραφία, ορισμοί, αναπαραστάσεις και οι κανόνες της λογικής και της σύνταξης που η ουσιαστική τους χρήση διαμορφώνει ισχυρισμούς και δίκτυα σχέσεων που χρησιμοποιούνται για να τους δικαιολογήσουν. Μερικές διαφωνίες προέρχονται από τις αποκλίνουσες χρήσεις της ορολογίας, ενώ άλλες έχουν τις ρίζες τους σε ουσιαστικούς και αντικρουόμενους μαθηματικούς ισχυρισμούς (Crumbaugh, 1998; Lampert, 1998). Χρησιμοποιώντας τον όρο γλώσσα ουσιαστικά αναφερόμαστε σε ολόκληρη τη γλωσσική υποδομή που υποστηρίζει τη μαθηματική επικοινωνία και τις απαιτήσεις της για την ακρίβεια, τη σαφήνεια και την οικονομία της έκφρασης. Η λεκτική επικοινωνία στα πλαίσια μίας τάξης θα πρέπει να βασίζεται σε όρους και έννοιες τα νοήματα των οποίων θα είναι κατανοητά στους μαθητές. Σε μαθητές με προβλήματα όρασης ή και ολική απώλεια όρασης, σαφώς η λεκτική επικοινωνία αποκτά ένα περισσότερο σύνθετο και σημαντικό ρόλο. Οι μη βλέποντες μαθητές μπορεί να δημιουργήσουν ένα μη τυπικό λεξιλόγιο για τα μαθηματικά αντίστοιχο με το τυπικό (Αργυρόπουλος, 2008), το οποίο θα πρέπει να είναι γνώριμο στον καθηγητή για την επίτευξη του καλύτερου δυνατού εκπαιδευτικού αποτελέσματος.

Εκτός από τη λεκτική επικοινωνία, το μη λεκτικό κομμάτι καλύπτει ένα μεγάλο μέρος από αυτό που κάποιος θέλει να εκφράσει και πολλές φορές αυτά τα δύο έρχονται σε σύγκρουση. Ιδιαίτερα στα μαθηματικά, οι χειρονομίες είναι ένας τρόπος ο ομιλητής να έχει πρόσβαση σε μη προσβάσιμα λεκτικά αντικείμενα, με αποτέλεσμα να διευκολύνεται η διαδικασία της ομιλίας. Σύμφωνα με τις Iverson και Goldin-Meadow (1998), οι χειρονομίες είναι κομμάτι της ομιλίας μας, με την έννοια ότι μπορούν τονίσουν κάτι που θέλουμε να πούμε ή να υποκαταστήσουν κάτι που δε λέμε με το λόγο μας. Σε μαθητές με προβλήματα όρασης οι χειρονομίες και γενικότερα η στάση του σώματος αποκτά κύρια πηγή έκφρασης. Πολλές φορές οι χειρονομίες λειτουργούν και σαν την αιτία να γεννηθούν ιδέες και όπως έχει παρατηρήσει ο Radford (2009) τελικά μπορούν για ένα τυφλό μαθητή να αποτελέσουν πηγή για την συγκρότηση της σκέψης του.

Η απτική αντίληψη τέλος, είναι μια σύνθετη διαδικασία που αποτελεί το βασικότερο μέσο πρόσληψης πληροφοριών για τους μη βλέποντες μαθητές . Σύμφωνα με τον Millar (1994, 1997), η απτική αντίληψη είναι κάτι παραπάνω από την αίσθηση της αφής ενώ επισημαίνει οτι οι πηγές πάνω στις οποίες δομείται αυτή είναι δύο: α) οι κύριες πηγές πληροφορίας, στις οποίες περιλαμβάνεται η αφή, κίνηση, στάση και β) οι δευτερεύουσες πηγές πληροφορίας όπως η γλώσσα, η προϋπάρχουσα γνώση, το είδος του αντικειμένου ή και οι συνθήκες υπό τις οποίες εκτελείται μια δραστηριότητα. Οι δύο αυτές πηγές πληροφοριών δομούν μια αίσθηση πολυδιάστατη η οποία για τα άτομα με προβλήματα όρασης έχει σαφώς μεγάλη βαρύτητα.

Οπτικοποίηση

Η έννοια της οπτικοποίησης στα μαθηματικά έχει άμεση σχέση με αυτή της νοητικής εικόνας, δηλαδή της νοητικής αναπαράστασης μιας μαθηματικής έννοιας ή ενος μαθηματικού αντικειμένου. Κατά την Presmeg (2006) η νοητική εικόνα (mental image) είναι ένα νοητικό σχήμα το οποίο απεικονίζει μια οπτική ή χωρική πληροφορία. Στην ουσία η έννοια της οπτικοποίησης στα μαθηματικά είναι μία διαδικασία που πρέπει να περιλαμβάνει διαδικασίες κατασκευής και μετασχηματισμού, τόσο οπτικών νοητικών εικόνων όσο και όλων των αναπαραστάσεων χωρικής φύσης που μπορεί να εμπλέκονται στα μαθηματικά (Presmeg 2006). Ο πολύπλοκος ρόλος της οπτικοποίησης έχει άμεση σχέση με τον διαισθητικό τρόπο κατανόησης μίας μαθηματικής έννοιας και τον σχηματισμό εννοιολογικών εικόνων (Tall &Vinner 1981), χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν μπορεί ο διαισθητικός αυτός τρόπος να οδηγήσει σε παρανοήσεις. Επιπλέον ο Bishop (1989) επισημαίνει ότι η ικανότητα οπτικοποίησης περιλαμβάνει τη μετάφραση και αφηρημένων σχέσεων δηλαδή δεν υποστηρίζει μόνο μια διαδικασία επαγωγικού συλλογισμού.

Στο κομμάτι της οπτικοποίησης για μαθητές με προβλήματα όρασης βασιζόμαστε περισσότερο στην απτική αντίληψη όπως επίσης σημαντικότερο ρόλο έχει και η διαίσθηση μέσω εικόνων που δημιουργούνται με τα μάτια του μυαλού (Miller, 1987). Συνεπώς η οπτικοποίηση δεν έχει να κάνει μόνο με την όραση αλλά με την διαδικασία εκείνη που σκοπό έχει ο μαθητής (βλέπων ή μη βλέπων) να εισχωρήσει στο βαθύτερο νόημα μίας μαθηματικής έννοιας.

Συνοψίζοντας, στην παρούσα έρευνα προσπαθούμε να εξετάσουμε αν οι μαθητές με προβλήματα όρασης φέρουν διαισθητικές ιδέες σε σχέση με τους ακέραιους αριθμούς καθώς και πως μπορούν να επιχειρηματολογήσουν σε σχέση με τη διάταξη και τη πρόσθεση αυτών δια μέσω μίας αριθμογραμμής. Το βασικό μας ερευνητικό ερώτημα λοιπόν είναι κατά πόσο η χρήση αυτής της αριθμογραμμής βοηθά τους μη βλέποντες μαθητές στην κατανόηση των ακεραίων.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στην έρευνα συμμετείχαν 5 μαθήτριες της Α΄ γυμνασίου με προβλήματα όρασης (ολική τύφλωση). Οι μαθήτριες δεν είχαν διδαχθεί τους θετικούς και αρνητικούς αριθμούς, οπότε δεν έφεραν κάποια πρότερη γνώση σε σχέση με τους ακέραιους αριθμούς. Η παρέμβαση πραγματοποιήθηκε σε μία αίθουσα ενός ειδικού σχολείου για τυφλούς μαθητές, σε κάθε μαθήτρια μεμονωμένα. Αυτό έγινε για λόγους οικειότητας των μαθητριών με τον χώρο αλλά και της προσβασιμότητας σε απαραίτητα εργαλεία και υλικά. Στις συμμετέχουσες δόθηκε μια ανάγλυφη αριθμογραμμή σε ειδικό φύλλο ενώ οι δραστηριότητες περιγράφονταν λεκτικά σε αυτές. Κάποιες απαντήσεις χρειάστηκε να δοθούν με γραφή στη μηχανή Braille, όπου τα φύλλα απαντήσεων συγκεντρώθηκαν και μελετήθηκαν από εμάς. Όλα τα δεδομένα συλλέχθησαν με προσωπικές συνεντεύξεις, διάρκειας περίπου μίας ώρας, και παρατήρηση. Όλες οι παρεμβάσεις βιντεοσκοπήθηκαν, ενώ παρόντες ήταν και οι δυο ερευνητές.

Δραστηριότητες

Οι δραστηριότητες που δόθηκαν στους μαθητές ήταν πέντε. Το μαθηματικό αντικείμενο που διαπραγματευόμαστε είναι η εισαγωγή στους ακέραιους αριθμούς. Οι δραστηριότητες εξετάζουν την ικανότητα διάταξης, σύγκρισης και υπολογισμού της πρόσθεσης/αφαίρεσης ακέραιων αριθμών με τη χρήση αριθμογραμμής.

Στην πρώτη δραστηριότητα, ζητήσαμε από τις μαθήτριες να μετρήσουν αντίστροφα από το πέντε. Με αυτόν τον τρόπο και αφού έφταναν στο μηδέν θέλαμε να δούμε αν θα συνέχιζαν την αρίθμηση, διαπιστώνοντας τη διαισθητική αντίληψη που έχουν περί των ακεραίων. Στη δεύτερη δραστηριότητα, οι μαθήτριες καλούνται να δείξουν στην αριθμογραμμή που βρίσκονται κάποιοι δεδομένοι αριθμοί (θετικοί- αρνητικοί) και στη συνέχεια με τη βοήθεια της θέσης τους να συγκρίνουν ζευγάρια αριθμών. Στην τρίτη δραστηριότητα, ζητάμε να υπολογίσουν με την κίνηση δεξιά-αριστερά τα αθροίσματα μικρών ακέραιων προσθετέων ενώ στη τέταρτη να συμπληρώσουν τον ακέραιο προσθετέο που λείπει από ένα άθροισμα με ένα κενό. Τέλος, στην πέμπτη δραστηριότητα, δίνουμε τη δυνατότητα στις μαθήτριες να γενικεύσουν τη συλλογιστική τους, ζητώντας τους να υπολογίσουν αθροίσματα πολύ μεγάλων αριθμών.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η μαθήτρια Μ1 τις περισσότερες φορές που δυσκολευόταν έκανε αναφορά στη θερμοκρασία και περιέστρεφε την αριθμογραμμή κατακόρυφα ενώ σε γενικές γραμμές δεν παρουσίασε δυσκολίες και λάθη στους υπολογισμούς. Πιο συγκεκριμένα στην δραστηριότητα 1 μέτρησε επιτυχώς τους αριθμούς και τους υπό του μηδενός, ενώ στην ερώτηση από πού γνωρίζει αυτούς τους αριθμούς είπε από την θερμοκρασία όταν έχει κρύο. Στην 2η δραστηριότητα τοποθέτησε με επιτυχία τους αριθμούς στην αριθμογραμμή και κατά τη σύγκριση του -2 και του -3 ισχυρίστηκε ότι το -3 είναι πιο μικρό γιατί «σε καιρό είναι πιο κρύο». Στην δραστηριότητα 3 αποχωρίζεται το «μοντέλο του θερμόμετρου» και υιοθετεί την κίνηση (δεξιά-αριστερά) για τους υπολογισμούς ενώ στην δραστηριότητα 4 στα πιο δύσκολα παραδείγματα, χρησιμοποιεί την κίνηση αλλά περιστρέφει και πάλι την αριθμογραμμή κατακόρυφα. Τέλος στην 5η δραστηριότητα ενώ οι αριθμοί είναι πολύ μεγάλοι (υπολόγισε το άθροισμα -200+50) καταφεύγει σε ένα τέχνασμα για να χρησιμοποιήσει την αριθμογραμμή για τον υπολογισμό. Προτείνει λοιπόν να υπολογίσουμε τη κάθε γραμμή ως εκατοντάδα, όταν όμως δεν μπορεί να τοποθετήσει σε αυτή το 50, αναθεωρεί και το χωρίζει προς μεγάλη μας έκπληξη ανά 50 οπότε και βρίσκει το τελικό αποτέλεσμα με το μοντέλο της κίνησης.

Σχετικά με την μαθήτρια Μ2 αρχικά είχε μια διαισθητική ιδέα των αριθμών υπό του μηδενός, και γενικότερα δεν παρουσίασε προβλήματα σε θέματα διάταξης των ακεραίων. Παρόλα αυτά δεν κατάφερε να κατανοήσει ή να χρησιμοποιήσει σωστά το μοντέλο της αριθμογραμμής. Στις δραστηριότητες 1 και 2 έκανε σωστά την καταμέτρηση υπό του μηδενός, διάταξη και σύγκριση αλλά δεν μπορούσε να δικαιολογήσει αυτά που διαισθητικά γνώριζε. Στην 3η και 4η δραστηριότητα η μαθήτρια απαντά στα ερωτήματα αλλά με πολλή βοήθεια. Μπερδεύει την κίνηση δεξιά με αριστερά, δίνει βιαστικές απαντήσεις και γενικότερα απαιτείται πολλή προσπάθεια και συνεχείς επεξηγήσεις. Στην δραστηριότητα 5 τέλος, δείχνει ότι έχει κατανοήσει το διατακτικό νόημα των ακεραίων και επιχειρηματολογεί ως εξής ενώ βρίσκει το τελικό αποτέλεσμα με μικρή βοήθεια:

Ε2: Αν θέλουμε για παράδειγμα να κάνουμε την πράξη -250…

Μ2: Τι λέτε καλέ;;;!!

Ε2: -250 + 100

Μ2: 250 είπατε;;

Ε2: -250

Μ2: Εεε 150!

Ε1: Συν ή πλην;

Ε2: Είσαι πριν το 0 ή μετά;

Μ2: Είμαι μετά

Ε2: Δηλαδή το -250 +100 είναι μετά το 0

Μ2: Όχι αυτό θα ήταν αν έκανα -250+251

Στην περίπτωση της μαθήτριας Μ3 δεν υπήρχε διαισθητική αντίληψη των ακεραίων ενώ σε σχέση με την δραστηριότητα σχετικά γρήγορα κατανόησε και έκανε συχνή χρήση της αριθμογραμμής στους υπολογισμούς. Στην δραστηριότητα 1 η μαθήτρια σταματά στο 0 και με αναφορά στον ανελκυστήρα του σχολείου αναγνωρίζει την ύπαρξη αρνητικών και συνεχίζει την καταμέτρηση Στην 2η δραστηριότητα κάνει άμεση τοποθέτηση των αριθμών στο σχήμα και συγκρίνει τη θέση τους σε σχέση με το 0. Στην 3η δραστηριότητα παρά την εισαγωγή, η μαθήτρια αρνείται αρχικά την εκτέλεση της πράξης 2-3= ... ως αδύνατη ενώ με αναφορά στην αριθμογραμμή και καθοδήγηση, απάντησε επιτυχώς σε όλα τα παραδείγματα. Στην 4η δραστηριότητα ανέπτυξε δικές της στρατηγικές για την απάντηση κάθε ενός παραδείγματος, είτε με χρήση αριθμογραμμής είτε όχι. Τέλος στην 5η δραστηριότητα δυσκολεύτηκε αρκετά στην γενίκευση χωρίς να μπορεί να κάνει χρήση της αριθμογραμμής.

Η μαθήτρια Μ4 παρουσίασε μια διαισθητική ιδέα των ακεραίων και έκανε συχνά υποθέσεις, που επαληθεύονταν από την αριθμογραμμή. Στην δραστηριότητα 1 μετά από μια παύση στον αριθμό 0, συνεχίζει δειλά στους αρνητικούς λέγοντας ότι κάπου έχει ακουστά για αυτούς. Στην 2η δραστηριότητα απαντά σωστά στις συγκρίσεις αλλά με αμφιβολία δείχνοντας ότι δεν έχει πειστεί για το μοντέλο της αριθμογραμμής. Στην δραστηριότητα 3 τις περισσότερες φορές δίνει απάντηση χωρίς την χρήση της αριθμογραμμής. Όταν δοκιμάζει να απαντήσει μέσω του σχήματος έχει απορίες του τύπου: «πρέπει να μετρώ και το 0 όταν το περνώ;». Τελικά καταλήγει η αριθμογραμμή να είναι μέσω επαλήθευσης για αυτήν. Στην 4η δραστηριότητα αρχικά η μαθήτρια είδε τις ασκήσεις με τα κενά σαν εξισώσεις. Προσπαθούσε έτσι να βρει τον αριθμό που έλειπε. Όταν είδε ότι αυτό δεν γινόταν πάντα, χρησιμοποιούσε τον κανόνα της αριθμογραμμής, απλά μετρώντας τις θέσεις από μέσα της (χωρίς αφή). Επίσης για να δώσει απάντηση σε ένα παράδειγμα χρησιμοποίησε τη συμμετρική λειτουργία του συμβόλου «–».

Ε1: Πάμε και στο τελευταίο

Μ4: -8+ = -3, … 5 δεν βγαίνει…;

Ε2: Πως το βρήκες μέσω της αριθμογραμμής από μέσα σου;

Μ4: Βασικά σκεφτόμουν και λίγο κανονικούς αριθμούς!

E1: Τι εννοείς κανονικούς;

M4: Θέλω να πω…

E1 : Τους θετικούς εννοείς κανονικούς; Πως το σκέφτηκες;

M4: Δεν ξέρω αν κολλάει απόλυτα, αλλά ξέρω ότι 8 – 3 κάνει 5 …

E1: Και μετά είπες ότι -8 +3 θα κάνει- 5;

M4: Ναι

Στην 5η δραστηριότητα τέλος απαντά αμέσως και σωστά χωρίς τη χρήση της αριθμογραμμής.

Η μαθήτρια Μ5 ήταν και η πιο αδύναμη μαθήτρια της δραστηριότητας. Δεν είχε καμία διαισθητική εικόνα περί των ακεραίων ενώ δεν την βοήθησαν ούτε τα παραδείγματα από την καθημερινότητα. Μεγάλη ήταν επίσης και η δυσκολία στην κατανόηση της λογικής και της χρήσης της αριθμογραμμής. Όταν στο τέλος ρωτήθηκε για το κατά πόσο τη βοήθησε ή όχι η αριθμογραμμή, στις δραστηριότητες που της ζητήθηκε να εμπλακεί η απάντηση της ήταν η εξής:

E2: Σε βοήθησε αυτό που κάναμε; Σε βοήθησε το σχήμα της αριθμογραμμής να δώσεις τις απαντήσεις σου; Ή πιστεύσεις θα μπορούσες να τα έχεις κάνει και χωρίς αυτό.

M5: Δεν με βοήθησε

E2: Σε δυσκόλεψε;

M5 : Δεν φαινόταν πολύ καλά το σχήμα.

E2: Θα ήταν καλύτερα να σου έχουμε δώσει κάποιος κανόνες και να βρίσκεις έτσι τα αποτελέσματα;

M5: Ναι, ο κανόνας είναι καλύτερος!

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Ο στόχος της παρούσας έρευνας ήταν μια διαισθητική προσέγγιση στο θέμα των ακεραίων. Παρατηρούμε, από το σύνολο των απαντήσεων, οτι μετά τις δραστηριότητες και με τη χρήση εναλλακτικών στρατηγικών (αναφορά σε καθημερινά μοντέλα), οι μαθητές κατάφεραν να αναπτύξουν νοητικές εικόνες και σχήματα υπολογισμών (Presmeg, 2006). Πιο συγκεκριμένα, διαφαίνεται οτι η δεύτερη δραστηριότητα βοήθησε τους μαθητές να κατανοήσουν τη διαφορά αρνητικών – θετικών δια μέσου της αριθμογραμμής, σε σχέση με τη διάταξη (ordinal) τους και την απόσταση τους από το 0. Αξιοσημείωτο είναι οτι η γλώσσα, η απτική αντίληψη και οι χειρονομίες έδωσαν τις πληροφορίες για να εξαχθούν τα κατάλληλα συμπεράσματα από τις μη βλέπουσες μαθήτριες. Η χρήση της αριθμογραμμής λειτουργώντας σαν εργαλείο, βοήθησε στην απόδοση σημασίας στις πράξεις με ακεραίους, μέσω των χειρονομιών (Radford, 2009) ενώ τελικά οι τρεις λειτουργίες εννοιολογικής κατανόησης του συμβόλου «-» (Διττή, συμμετρική και μονοδιάστατη) (Gallardo & Rojano, 1994) επιβεβαιώθηκαν συμβάλλοντας στις απαντήσεις των περισσότερων μαθητών προκαλώντας επέκταση των προηγούμενων νοητικών σχημάτων.

Η παραπάνω έρευνα σε συνδυασμό με τα συμπεράσματα που εξάγονται από αυτήν, μας οδηγεί στη περαιτέρω κατανόηση του ρόλου της διαισθητικής εικόνας και της οπτικοποίησης των θετικών και αρνητικών αριθμών σε μαθητές με προβλήματα όρασης. Επιπλέον εξέτασε κατά πόσο το εργαλείο της αριθμογραμμής συνέβαλε στην προέκταση της συλλογιστικής στην διάταξη και την γενικότερη μετάβαση από τους φυσικούς στους ακεραίους. Θεωρούμε οτι με εφαλτήριο τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής μπορούμε να έχουμε ενδείξεις για την επέκταση και άλλων γνωστικών σχημάτων τόσο για μη βλέποντες όσο και για βλέποντες μαθητές. Σε κάθε περίπτωση κρίνεται απαραίτητη η περαιτέρω έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών στο πεδίο των παιδιών με ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αργυρόπουλος, Β., (2008). Σημειώσεις για την εκπαίδευση του παιδιού με σοβαρά προβλήματα όρασης – Διδακτικές προσεγγίσεις. *Παιδαγωγικό Τμήμα Ειδικής Αγωγής, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας*, Βόλος.

Θωμαΐδης Γ., (2009): Η ιστορία των Μαθηματικών ως πηγή ιδεών και υλικού για διδακτικές επιλογές και δραστηριότητες: Η περίπτωση των αρνητικών αριθμών, στο *Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών «Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών»*, σ.σ. 193 – 219, Θεσσαλονίκη, Εκδόσεις Ζήτη

Bishop, J. P., Lamb, L. L., Philipp, R. A., Whitacre, I., & Schappelle, B. P. (2014). Using order to reason about negative numbers: the case of Violet. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(1), 39-59.

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualisation in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), pp.7-16.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (1999). Children’s mathematics: Cognitively Guided Instruction. Portsmouth, NH: Heinemann

Crumbaugh, C. (1998). 'Yeah, but I thought it would still make a square': A study of fourth-graders' disagreement during whole-group mathematics discussion. *Unpublished doctoral dissertation*, Michigan State University, East Lansing.

Gallardo. A. & Rojano, T. (1994). School algebra. Syntactic difficulties in the operativity with negative numbers. *Proceedings of the XVI International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*. Louisiana State Univesity, USA, Vol. I, pp. 159-165.

Iverson, J. M., & Goldin-Meadow, S. (1998). Why people gesture when they speak. vol. 396 (p. 228). London: Macmillan Publishers Ltd. Nature.

Lampert, M. (1998). Talking mathematics in school. Cambridge, MA: Cambridge University Press

Millar, S. (1994). Understanding and Representing Space. Theory and Evidence from Studies with Blind and Sighted Children. Oxford: *Clarendon Press*

Millar, S. (1997). Reading by touch. London *Roughtledge*

Miller, A.I. (1987). Imagery in scientific thought. *MIT Press*

Presmeg, N.C. (2006). Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, pp. 205-235.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 111–126.

ΑΞΙΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΟ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΣΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΤΗΣ ΓΝΩΣΗΣ

Τσίτσος Βασίλης, Χρονάκη Άννα, Σταθοπούλου Χαρούλα

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

vtsitsos@uth.gr, Chronaki@uth.gr, hastath@uth.gr

Μια σημαντική πρό(σ)κληση για τα παιδιά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης είναι να μπορούν να μετακινούνται με άνεση μεταξύ εργαλειακών πλαισίων μεταφέροντας και αναπλαισιώνοντας πρότερη γνώση. Η μετακίνηση αυτή συνδέεται άμεσα με την ανάπτυξη της αφαιρετικής σκέψης και συνεπώς με την ουσιαστική κατανόηση. Βασικά μας ερωτήματα αφορούν το πώς αυτή η σύνθετη διαδικασία μάθησης επιτελείται σε ομάδες εργασίας εφήβων. Σε αυτό το άρθρο παρουσιάζεται ένα "διδακτικό πείραμα" το οποίο εντάσσεται σε μια ευρύτερη ερευνητική προσπάθεια μελέτης της μεταφοράς γνώσης. Το "διδακτικό πείραμα" πραγματοποιήθηκε στη Β΄ Γυμνασίου με στόχο να διερευνηθεί η δυναμική μεταφορά γεωμετρικό-αναλυτικών αναπαραστάσεων.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Οι βασικοί πυλώνες ανάπτυξης αυτής της έρευνας είναι αφενός η *θεωρία της δραστηριότητας* (activity theory) και αφετέρου η δυναμική διάσταση της μεταφοράς της γνώσης (dynamic transfer). Η *θεωρία της δραστηριότητας*, βασισμένη, μεταξύ άλλων στο έργο των Cole (1996) και Engeström (1999) εδράζει στη ρώσικη παράδοση της κοινωνικό/πολιτισμικό/ιστορικής προσέγγισης του Vygotsky. Κεντρική θέση για τη μάθηση ως πλαισιοθετημένη δραστηριότητα είναι ότι αυτή αποτελεί συλλογική δράση, η οποία διαμεσολαβείται από πολιτισμικά σύμβολα, λέξεις και εργαλεία τα οποία εξελίσσονται ιστορικά και κοινωνικά (Cole, 1996). Η δραστηριότητα εκλαμβάνεται ως ένα σύστημα δραστηριότητας (activity system) το οποίο ενσωματώνει τόσο διαμεσολαβητικά μέσα, μεταξύ του υποκειμένου και του αντικειμένου, όσο και την κοινότητα (community) στην οποία το υποκείμενο ανήκει, τους κανόνες (rules) που την διέπουν, καθώς και τον καταμερισμό εργασίας (division of labour). Η *δυναμική μεταφορά* (Schwartz, Varma, & Martin, 2008) προσπαθεί να εξηγήσει τον τρόπο με τον οποίο η προηγούμενη ή η τρέχουσα διαμορφωμένη ή η ήδη υπάρχουσα γνώση μπορεί να δημιουργήσει νέες έννοιες σε αντίθεση με τη μεταφορά ομοιότητας η οποία εξηγεί πώς οι άνθρωποι χαρτογραφούν καλοσχηματισμένες έννοιες για να δομήσουν νέες καταστάσεις. Στη *δυναμική μεταφορά* οι εμπλεκόμενοι συντονίζουν καταστάσεις για να πραγματευτούν νέες έννοιες, ενώ αξιοποιείται η συνέντευξη για άντλησης πληροφοριών. Η καινοτομία στη δική μας έρευνα είναι ότι αντί να τίθενται ερωτήσεις, οι οποίες να υπαγορεύονται από την προηγούμενη φάση διαμορφώνεται και προτείνεται νέο εργαλειακό πλαίσιο. Η διαδικασία συντονισμού πραγματοποιείται με τη συμβολή διαφορετικών πλαισίων εργασίας τα οποία συγκροτούνται με ψηφιακά εργαλεία δυναμικής γεωμετρίας (Geometer's Sketchpad) σε συνδυασμό με κατάλληλο απτικό υλικό. Το ζητούμενο είναι μέσω της *εργαλειακής προσέγγισης* (Instrumental approach) (Verillon & Rabardel, 1995) να παρατηρήσουμε διαδικασίες μετατροπής *τεχνουργημάτων* (artifacts) σε *εργαλεία* (instruments) μέσα από συγκεκριμένα μαθηματικά έργα. Η όλη ερευνητική προσπάθεια θα μπορούσε να περιγραφεί και ως μια PLF διαδικασία (Preparation for Future Learning)-*δηλαδή ως μια προετοιμασία για μελλοντική μάθηση*, (Bransford & Schwartz, 1999) όπου η έμφαση μετατοπίζεται στην εκτίμηση της δυναμικής των μαθητών σε περιβάλλοντα πλούσια σε γνώση. Η κεντρική μαθηματική έννοια που μελετάται είναι αυτή της *συμμεταβολής* ποσοτήτων. Η έρευνά μας συμπορεύεται με θεωρήσεις του James Kaput (1996), ο οποίος εξηγεί ότι η δυσκολία κατανόησης της έννοιας συνδέεται με τη δυσκολία σύνδεσης κατάλληλων αναπαραστάσεών της με εμπειρίες των παιδιών στο φυσικό ή στο εικονικό περιβάλλον, καθώς και ότι η γραφική αναπαράστασή της μπορεί να προηγηθεί των αλγεβρικών-συμβολικών αναπαραστάσεων.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ –ΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

α΄. Ζητήματα μεθοδολογίας

Η παρούσα έρευνα βασίζεται στο "διδακτικό πείραμα" (ΔΠ) μια μέθοδο μελέτης της αλληλένδετης σχέσης μεταξύ διδασκαλίας και μάθησης όπου δίδεται έμφαση στην αναγνώριση του ρόλου των υποκειμένων ως ενεργών κατασκευαστών νοήματος. Η δράση του υποκειμένου επιτελείται πάντα στο πλαίσιο κοινωνικών, ιστορικών και πολιτισμικών συμφραζομένων τα οποία συγκροτούνται σημειωτικά στο πλαίσιο δραστηριοτήτων. Το ενδιαφέρον μας εδώ, εστιάζει στην αλληλεπίδραση μεταξύ μαθητών-εκπαιδευτικού/ερευνητή και εργαλειακών πλαισίων ως σύστημα (Χρονάκη, 2010). Η μέθοδος του ΔΠ λαμβάνει υπόψη τη διδακτική παρέμβαση ως σύνθετο συστημικό περιβάλλον. Ο εκπαιδευτικός ως σχεδιαστής εργαλειακών πλαισίων και δράσεων επηρεάζει την κοινότητα ή την ομάδα των μαθητών και επίσης επηρεάζεται σχεδιαστικά από αυτήν. Οι απόψεις και οι ιδέες των συμμετεχόντων γίνονται αντικείμενο διαπραγμάτευσης και ελέγχου της διαδικασίας μάθησης αυτής καθ/αυτής παρά αξιολόγησης και τυπικής επικύρωσης της γνώσης. Στο πλαίσιο του ΔΠ ο χαρακτήρας των μέσων δράσης των υποκειμένων εκλαμβάνεται ταυτόχρονα ως ψυχολογικός και κοινωνικός ενώ η βασική μονάδα ανάλυσης είναι η δράση των παιδιών. Εδώ παρουσιάζεται μέρος της ερευνητικής διαδικασίας, δηλωτικό αυτών των δράσεων. Το κεντρικό ερευνητικό ερώτημα αφορά το πώς η προηγούμενη γνώση αποτυπώνεται στο σύστημα δραστηριότητας ώστε να έχει ως αποτέλεσμα τη γένεση νέας μαθηματικής γνώσης. Ποιες είναι οι πτυχές του «μηχανισμού» της μεταφοράς και πώς αυτές λειτουργούν στη διαδικασία κατασκευής μαθηματικών νοημάτων;

β΄. Το πλαίσιο της έρευνας: χώρος, χρόνος, συμμετέχοντες

Το τμήμα αυτό της έρευνας πραγματοποιήθηκε σε ένα δημόσιο σχολείο σε μια τυπική τάξη Β΄ Γυμνασίου με 10 μαθητές και 14 μαθήτριες. Το σχολείο βρίσκεται σε αστική περιοχή μεσαίας κοινωνικό/οικονομικής διαστρωμάτωσης. Το ΔΠ αναπτύχθηκε σε 8 διδακτικές ώρες του ΣΠ όπου οι μαθητές εργάζονταν χωρισμένοι σε ομάδες των 4 ατόμων.

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

Ο βασικός πυλώνας του ΔΠ στοχεύει στην ανάπτυξη μιας διδακτικής κατάστασης όπου τα παιδιά θα μπορούν να συμμετέχουν ενεργά στην κατανόηση πτυχών της μαθηματικής έννοιας της *συμμεταβολής*. Παράλληλα, ερευνητικός στόχος είναι η διερεύνηση της δυναμικής μεταφοράς της γνώσης καθώς τα παιδιά καλούνται να μεταβούν μεταξύ διαφορετικών θεματικών πλαισίων τα οποία ενσωματώνουν κοινές αναπαραστατικές δομές. Το πρώτο εργαλειακό πλαίσιο: «*Ο Ροναλντίνιο στο γήπεδο*» αναπτύχθηκε σε 4 μικροκύκλους εργασίας ενώ το δεύτερο πλαίσιο «*Πρόβλημα του αυτοκινητόδρομου*» αναπτύχθηκε σε 10.

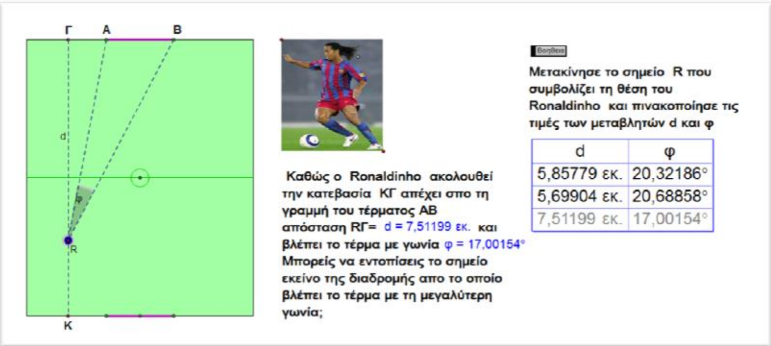
Εργαλειακό Πλαίσιο πρώτο: « *Ο Ροναλντίνιο στο γήπεδο*»

Αυτό το πλαίσιο σχηματοποιείται από αλληλοεξαρτώμενες μεταβάσεις οι οποίες αναπτύσσονται σε 4 κατευθύνσεις. Οι 3 πρώτες κατευθύνσεις αναφέρονται στη βιβλιογραφία ως *εργαλειακή ενορχήστρωση* (Trouche, 2004). Η 1η κατεύθυνση αφορά στη σχεδιαστική μετάβαση του εκπαιδευτικού σε νέους ή τροποποιημένους «μικρόκοσμους» με τη χρήση εργαλείων κατά τη διάρκεια της *διδακτικής διαμόρφωσης* (didactical configurations). Η 2η αφορά στον *τρόπο αξιοποίησης* (exploitation mode) των μικρόκοσμων σύμφωνα με τις αποφάσεις που λαμβάνονται από τον εκπαιδευτικό για το πώς θα χρησιμοποιηθούν για την επίτευξη συγκεκριμένων μαθησιακών στόχων. Η 3η αφορά στη *διδακτική πραγματοποίηση* (didactical performance) (Drijvers et al., 2010) η οποία σχετίζεται με τις ad hoc αποφάσεις που λαμβάνει ο εκπαιδευτικός κατά την εκτέλεση του έργου του έτσι όπως έχει οριοθετήσει τη διδασκαλία του μέσω της *διδακτικής διαμόρφωσης* και αξιοποίησης των επιλεγμένων τεχνουργημάτων. Η 4η αφορά στις *αναδυόμενες προθέσεις-προσδοκίες*[1] (Τσίτσος, 2017). Οι προθέσεις αυτές έχουν ιδιαίτερο νόημα και ελήφθησαν υπόψη κατά τη διαδικασία της *εργαλειακής ενορχήστρωσης*. Ο σχεδιαστής–εκπαιδευτικός ακολούθησε τις προθέσεις-προσδοκίες τους κατασκευάζοντας «μικρόκοσμους» βασιζόμενος σε δομές και συμβολισμούς που θεωρούσε ότι προκύπτουν από τα σημειωτικά συστήματα των μαθητών και δεν απομακρύνονται από τα μαθηματικά σημεία του αρχικού στόχου.

Ακολουθεί μια συνοπτική παρουσίαση των τεσσάρων μικροκύκλων που σχηματοποιούν τις διαμεσολαβημένες μεταβάσεις στο πρώτο πλαίσιο.

Μικροκύκλος 1ος

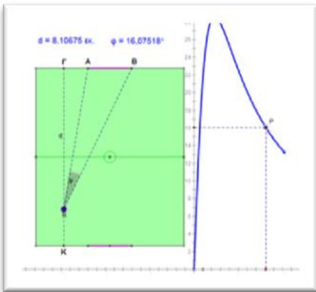
Στην οθόνη τους εμφανίζεται ως αρχική οθόνη η *εικόνα 1η*, η οποία εισάγει τους μαθητές σε ένα προβληματισμό σχετικά με την εύρεση μιας συγκεκριμένης θέσης του ποδοσφαιριστή με εργαλείο τη δυναμική ταξινόμηση των μεγεθών, απόσταση και γωνία σε μορφή πίνακα.



Εικόνα 8: Η θέση του Ροναλντίνιο

Μικροκύκλος 2ος

Σε αυτόν το μικροκύκλο σε 1η φάση οι μαθητές ενημερώνονται για την αποτύπωση του σημείου Ρ σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με τετμημένη την απόσταση και τεταγμένη τη γωνία καθώς και για τη δημιουργία του γεωμετρικού τόπου του σημείου Ρ όταν ο Ροναλντίνιο R

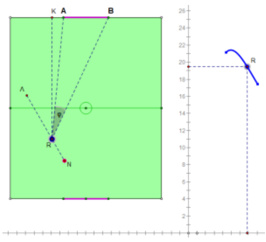


Εικόνα 7

κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΓ (*εικόνα 2η*). Ο λόγος για τον οποίο σχεδιάστηκε αυτή η παρέμβαση είναι να συνδέσουν οι μαθητές με δυναμικό τρόπο την εικονική-γεωμετρική αναπαράσταση της διαδρομής του ποδοσφαιριστή με την γραφική-αναλυτική αναπαράσταση της θέσης του. Σε 2η φάση οι μαθητές εντοπίζουν τη ζητούμενη θέση του ποδοσφαιριστή στο γήπεδο οδηγώντας το σημείο Ρ στη θέση μεγίστου της ΓΠ. Σε 3η φάση οι μαθητές μετακινώντας το σημείο Κ παρατηρούν την παράλληλη μεταφορά του ευθύγραμμου τμήματος ΚΓ καθώς και την αλλαγή της αντίστοιχης γραφικής παράσταση όσο και της θέσης του μεγίστου. Κατά τη διάρκεια αυτής της φάσης ο μαθητής Μ18 ρωτά:

Μ18: Μόνο έτσι κινείται ο Ροναλντίνιο, δεν μπορεί να τρέξει πλάγια;

Αυτό προκαλεί την άμεση τροποποίηση του αρχείου ώστε να ικανοποιήσει την απαίτηση του μαθητή Μ18 –όπως φαίνεται στην *εικόνα 3η* – ο Ροναλντίνιο να κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΛΝ και από την άλλη αποτέλεσε μια αφετηρία για νέα διερευνητικά ερωτήματα, όπως: *Τροποποιήστε κατάλληλα το ευθύγραμμο τμήμα ΝΛ ώστε ο γεωμετρικός τόπος (Γ.Τ.) του σημείου Ρ να είναι ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στον άξονα χ΄χ και ερμηνεύστε το γεγονός.*

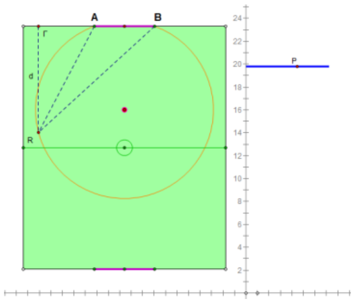


Εικόνα 8

Κατά τη διερεύνηση μια ομάδα αντιλαμβανόμενη λανθασμένα τον προσανατολισμό του Γ.Τ προσπαθεί να οδηγήσει το σημείο Ρ να κινείται κάθετα στον y΄y, αναφέροντας ότι αυτό είναι ανέφικτο.

Μικροκύκλος 3ος

Η δυσκολία αυτή των μαθητών οδηγεί σε νέα τροποποίηση του αρχικού αρχείου (*εικόνα 4η*), σχετική με την κίνηση του Ροναλντίνιο σε τόξο



Εικόνα 9

κύκλου με κέντρο σημείο της μεσοκάθετης του ΑΒ και να διέρχεται από τα σημεία Α,Β. Η κοινοποίηση αυτού του νέου αρχείου έχει ως αφετηρία τη διαπραγμάτευση της έννοιας της εγγεγραμμένης και της γραφικής ερμηνείας της θέσης του ποδοσφαιριστή στο γράφημα d-φ. Κατά τις διερευνήσεις στην ομάδα Ο4 παρατηρείται το κάτωθι στιγμιότυπο.

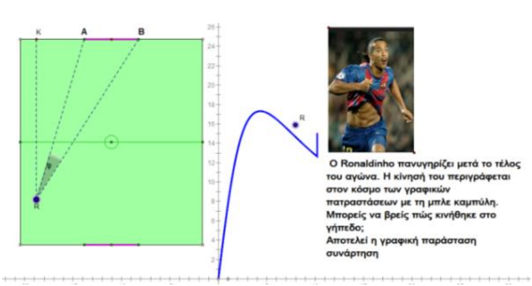
Μ8: Δηλαδή για να σουτάρει ο Ροναλντίνιο πρέπει να ξέρει μαθηματικά;

Μ11: Σιγά μη κινείται ποτέ σε κύκλο. Οι αντίπαλοι θα του αλλάζουν την πορεία κάθε στιγμή.

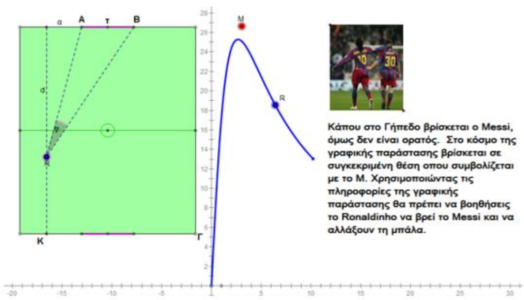
Μ9: Εγώ έχω δει προπονητές να κάνουν σχέδια επίθεσης και άμυνας με γραμμές και κύκλους που οι ποδοσφαιριστές τα καταλαβαίνουν.

Μικροκύκλος 4ος

Ο παραπάνω ο διάλογος στάθηκε η αφορμή για νέες τροποποιήσεις του αρχείου από τη μεριά του εκπαιδευτικού. Στις παρακάτω εικόνες 5η -6η παρουσιάζεται η διατύπωση των διερευνητικών ερωτημάτων.



Εικόνα 10



Εικόνα 6

Οι τροποποιήσεις αυτές είχαν ως στόχο να δοθεί στους μαθητές η ευκαιρία να μετακινηθούν από τις ΓΠ στην ρεαλιστική αναπαράσταση του εικονικού γηπέδου.

Το πρώτο πλαίσιο «Η κίνηση του Ροναλντίνιο στο γήπεδο» είχε ως αρχικό σχεδιασμό την εμπλοκή των μαθητών σε μια ρεαλιστική κατάσταση για την εύρεση της θέσης μεγίστου με τη χρήση διασυνδεδεμένων γεωμετρικο-αναλυτικών παραστάσεων. Η διδακτική πραγματοποίηση του εν λόγω σχεδιασμού υλοποιήθηκε δια μέσω επανασχεδιασμών με άξονα τις αναδυόμενες προθέσεις και τις προσδοκίες των μαθητών. Ωστόσο το ερευνητικό έργο είχε ως στόχο τη μελέτη μεταφοράς σε νέο πλαίσιο των διασυνδεδεμένων γεωμετρικο-αναλυτικών αναπαραστάσεων. Έτσι το νέο εργαλειακό πλαίσιο καθορίστηκε από το «*Πρόβλημα του αυτοκινητόδρομου*».

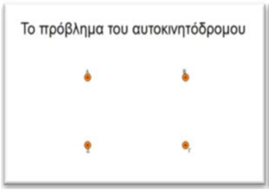
Εργαλειακό Πλαίσιο δεύτερο: « Το *πρόβλημα του αυτοκινητόδρομου*»

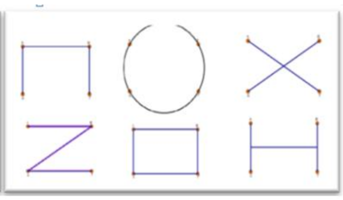
Ακολουθώντας αντίστοιχο τρόπο εργασίας με το $1^{ο}$ πλαίσιο αναπτύχθηκε το νέο: «Το πρόβλημα του αυτοκινητόδρομου» σε 10 μικροκύκλους (Tsitsos & Stathopoulou, 2017). Εδώ θα περιγράψουμε μόνο τους τρεις μικροκύκλους.

Μικροκύκλος $1^{ος}$

Ακολουθεί το ερώτημα που δόθηκε στους μαθητές:

«*Προσπαθήστε να σχεδιάσετε τη διαδρομή με το ελάχιστο μήκος που να ενώνει και τις τέσσερεις πόλεις όπως φαίνονται διαταγμένες στην οθόνη σας.» εικόνα $7^{η}$*



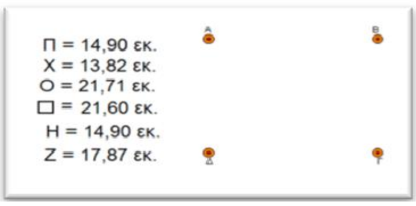


Εικόνα 7 **Εικόνα 8**

Μετά από συζήτηση οι μαθητές κοινοποίησαν τις προτάσεις τους (*εικόνα $8^{η}$)* και στη συνέχεια τους ζητήθηκε να τις ταξινομήσουν κατ' αύξουσα τάξη. Ως εργαλείο ταξινόμησης χρησιμοποιήθηκαν, είτε οι μετρήσεις, είτε εκφράσεις, όπως: «φαίνεται ότι», είτε αδόμητος γεωμετρικός λόγος: «αυτό είναι πιο μακρύ», «αυτό κάνει γωνία ενώ αυτό πάει ευθεία».

Μικροκύκλος $2^{ος}$: Σύγκριση διαδρομών

Δόθηκε στους μαθητές τροποποιημένη η αρχική οθόνη όπου είχε συμπεριληφθεί η συμβολική έκφραση των διαδρομών με τα αντίστοιχα μήκη τους και τους ζητήθηκε να διερευνήσουν για διαφορετικές θέσεις των πόλεων Α,Β,Γ και Δ, αν η διάταξη του μήκους των διαδρομών παραμένει σταθερή, *εικόνα $9^{η}$* .



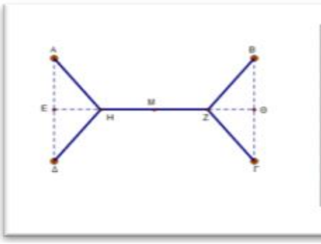
Εικόνα 9 **Εικόνα 10**

Στη συνέχεια με κατάλληλα πλήκτρα προσαρμόστηκε η διάταξη των πόλεων ώστε ΑΒ=6,7 μ.μ. και ΑΔ=4,1 μ.μ.. Σε αυτή την περίπτωση η βέλτιστη λύση από τις προτεινόμενες, διαπιστώθηκε ότι ήταν ο δρόμος με σχήμα Π ή Η. Ζητήθηκε από τους μαθητές να επινοήσουν μια καλύτερη λύση. Στην άρση της δυσκολίας της επινόησης συνεισέφερε η μετάβαση των μαθητών σε μια αντίστοιχη κατάσταση προβληματισμού (φυσικό φαινόμενο). Αυτός ο νέος μικροκύκλος εργασίας που ακολουθεί αποτέλεσε και το κομβικό διερευνητικό σημείο.

Μικροκύκλος 3ος: Το φυσικό φαινόμενο

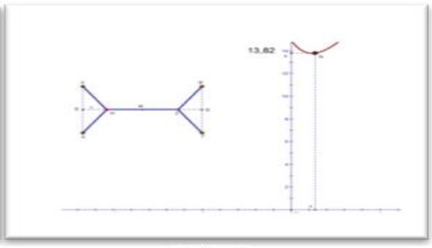
Στην *εικόνα 10η* παρουσιάζεται μια κατασκευή ενός μοντέλου η οποία αποτελείται από δύο επιφάνειες σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, παράλληλες μεταξύ τους οι οποίες συγκρατούνται με τέσσερεις κάθετες καρφίτσες. Η κάθε κεφαλή των καρφιτσών αντιστοιχεί στις τέσσερεις πόλεις Α,Β,Γ και Δ με αποστάσεις ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχες με αυτές που προσαρμόστηκαν στο μικροκύκλο 2 στο εικονικό μοντέλο. Η διάταξη βυθίστηκε μέσα σε διάλυμα σαπουνιού με γλυκερίνη. Όταν η διάταξη ανασύρθηκε σχηματίστηκαν μεμβράνες όπως φαίνεται στην *εικόνα 10η*, όπου οι τομές τους με τις επιφάνειες καθόριζαν την ελάχιστη διαδρομή. Το γεγονός αυτό συνέβαλε στο να εστιάσουν από τη μια οι μαθητές στην προτεινόμενη φυσική λύση του προβλήματος, ενώ από την άλλη να διερωτηθούν περί της φυσικής επίλυσης.

Μικροκύκλος 4ος: Αριθμητική προσέγγιση - Πινακοποίηση



(ΗΕ)	Συνολική Διαδρομή
0,00 εκ.	13,15 εκ.
0,21 εκ.	12,77 εκ.
0,50 εκ.	12,39 εκ.
0,82 εκ.	12,15 εκ.
1,03 εκ.	12,08 εκ.
1,16 εκ.	12,07 εκ.
1,43 εκ.	12,11 εκ.
1,80 εκ.	12,30 εκ.
2,12 εκ.	12,55 εκ.
1,01 εκ.	12,09 εκ.

Εικόνα 5



Εικόνα 6

Εικόνα 11 **Εικόνα 12**

Με στόχο να προσεγγίσουν οι μαθητές τη φυσική λύση τους ζητήθηκε να τροποποιήσουν κατάλληλα το εικονικό μοντέλο. Η τροποποίηση οδήγησε στη δημιουργία ενός σημείου Η πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΕΜ καθώς και το σημείο Ζ έτσι ώστε ΕΗ=ΖΘ, με δυνατότητα αλλαγής της θέσης του σημείου Η. Στη συνέχεια συνέταξαν πίνακα με δυο πεδία. Το 1ο πεδίο αναφέρεται στο μήκος ΗΕ ενώ το 2ο στη συνολική διαδρομή. Από τη διαδοχική πινακοποίηση των τιμών διαπιστώθηκε η θέση του σημείου Η όπου η διαδρομή γίνεται ελάχιστη. Στην εικόνα 11η παρουσιάζεται ένα στιγμιότυπο. Η ομάδα Ο3 εντόπισε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΕΗ θα πρέπει να είναι ίσο με 1,16 και στη συνέχεια επιβεβαίωσε την εικασία στο πραγματικό μοντέλο. Αναμέναμε οι μαθητές να προχωρήσουν στην αναλυτική παρουσίαση των δεδομένων, παρόλα αυτά δεν παρατηρήθηκε κάτι τέτοιο και οδηγηθήκαμε στο να κοινοποιήσουμε το αρχείο των διασυνδεδεμένων αναπαραστάσεων *εικόνα 12η*. Ακολουθεί ένα ενδεικτικό στιγμιότυπο από τους διαλόγους της ομάδας εστίασης.

M8:……όταν κουνάς το Η, το Ν κουνιέται, όπως στο άλλο που κάναμε…

Μ5: Λίγο πιο κάτω.

Μ6: Αυτό που κάναμε για το Ροναλντίνιο.

Μ8: Ο Ροναλντίνιο έπρεπε να πάει πάνω.

Μ6: Ροναλντίνιο είναι στο Η τώρα, κούνησε το.

Μ7: Εκεί, είναι στον πάτο. (χειρονομεί)

Μ8:…….εδώ λέει 13,53. Αυτό είναι 13 και 53

Μ5: Είναι πολύ μεγάλο, δε γίνεται.

Μ6: Εδώ κοιτάγαμε και για να βρούμε τη λύση για το Ροναλντίνιο.

Μ7: Υπάρχει λάθος, κάτι άλλο είναι, δεν παίζει εδώ ο Ροναλντίνιο.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Τα παιδιά φαίνεται ότι δεν μεταφέρουν αυτό που εμείς προσδοκούμε ή πιστεύουμε ότι είναι εφικτό αλλά πτυχές του προηγούμενου σχήματος χρήσης. Η ανάσυρση αυτών στο νέο περιβάλλον δεν αποτελεί μια απλή ενθύμηση αλλά ένα κομμάτι μιας ιστορίας συμμετοχής τους σε κάποια δραστηριότητα και περιλαμβάνει τόσο υλικά στοιχεία και διαδικασίες όσο και ένα μέρος διανοητικής κατασκευής που φέρει ψυχολογικά και κοινωνικά χαρακτηριστικά. Έτσι από το διάλογο παρατηρούμε οι μαθητές να κινούνται από το εργαλειακό πλαίσιο Α΄ στο εργαλειακό πλαίσιο εργασίας Β΄ και αντίστροφα. Αυτή τη διαδικασία μετακίνησης τη χαρακτηρίσαμε ως *εργαλειακό άλμα (instrumental jump) (*Tsitsos & Stathopoulou, 2011): ως μια σκόπιμη ή αυθόρμητη πρόθεση του μαθητή να φέρει σε πέρας ένα έργο ή μια δραστηριότητα. Βασικό συστατικό αυτής της πρόθεσης αποτελεί το νοητικό σήμα ‘*αυτό μοιάζει με’* (this is like that) όπως αποτυπώνεται στις γραμμές διαλόγου 3η έως 5η. Η πρόθεση αυτή είναι προσανατολισμένη τόσο προς τα μπρός, γραμμές 4η-5η όπου αποσπά κάποια συμπεριφορά ή σκέψη από το πρώτο πλαίσιο εργασίας και προσπαθεί να το εφαρμόσει σε ένα άλλο, όσο και προς τα πίσω πρόθεση που αφορά μετακίνηση σε προηγούμενο πλαίσιο ώστε να αναζητήσει δομές που θα του ήτανε χρήσιμες (γραμμές 1η-9η-10η). Στη γραμμή 9η παρατηρείται μια προσπάθεια συντονισμού ενός σχήματος χρήσης με σημεία του νέου περιβάλλοντος. Βασικό συστατικό αυτής της διαδικασίας αποτελεί το νοητικό σχήμα ‘*αυτό πάει με’* (this goes with that). Παρόλο που ο εν λόγω συντονισμός δεν έχει επιτυχή έκβαση (*αρνητική μεταφορά*) αποκτά κοινωνικά χαρακτηριστικά μέσω της επικοινωνίας και της αλληλεπίδρασης.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην εργασία αυτή διερευνήσαμε πτυχές μεταφοράς της γνώσης από μαθητές της Β/θμιας εκπαίδευσης κατά τις μεταβάσεις ανάμεσα σε διαφορετικά μικροπλαίσια. Η διερεύνηση πτυχών μεταφορά της γνώσης είναι σημαντική για τη μαθηματική εκπαίδευση καθώς συνδέεται με την ουσιαστική κατανόηση και τη μαθηματική αφαίρεση (Noss & Hoyle, 1996). Μέσα από το πείραμα που παρουσιάστηκε εδώ φάνηκε η σύνδεση της γνώσης με το πλαίσιο, το οποίο ενθαρρύνει τη μαθηματική γνώση, αλλά ταυτόχρονα εγκλωβίζει τους μαθητές, οι οποίοι μεταφέρουν όψεις της μαθηματικής γνώσης μαζί με στρεβλώσεις στο άλλο πλαίσιο.

Οι δυνατότητες του εργαλείου της *δυναμικής γεωμετρίας* επέτρεψαν την ανάπτυξη δραστηριοτήτων με πρόσθετη διδακτική αξία σε σχέση με την παραδοσιακή. Οι πολλαπλές αλληλεπιδραστικές αναπαραστάσεις, η δυνατότητα δυναμικού χειρισμού (manipulation) γεωμετρικών και αναλυτικών οντοτήτων, η δυναμική έκφραση αριθμητικών και μεταβλητών δεδομένων αποτέλεσαν τον κεντρικό πυρήνα πρόσβασης των μαθητών ώστε να πειραματιστούν και να διευρύνουν τα αντίστοιχα εννοιολογικά πεδία των εμπλεκόμενων εννοιών. Η εστίαση στις προθέσεις και τις προσδοκίες των παιδιών από τη μια οδήγησε προς αχαρτογράφητες περιοχές, σε μια προσπάθεια να επινοηθούν σχήματα χρήσης αντίστοιχων τεκμηρίων, ενώ από την άλλη χάραξε μια πορεία μεταβάσεων των μαθητών ανάμεσα σε μικροπλαίσια μαθηματικών πρακτικών. Αυτή η διπλή χάραξη ανέδειξε δομές σημειωτικών δραστηριοτήτων των μαθητών που μέσω της αλληλεπίδρασης έδιναν μια υλική και χειροπιαστή μορφή μαθηματικών αντικειμένων.

Σημείωση

1. Ο όρος αυτός εισήχθη με σκοπό να περιγραφεί η βαρύνουσα σημασία των προσδοκιών των μαθητών που εμφανίζονται όταν δραστηριοποιούνται και δεν οριοθετούνται αποκλειστικά από τις προθέσεις και τις προσδοκίες του εκπαιδευτικού

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bransford, J. D. & Schwartz, D. L. (1999). Rethinking transfer: A simple proposal with multiple implications. In A. Iran-Nejad & P. D. Pearson (Eds.), *Review of Research in Education*, 24, 61-100. Washington, D.C.: American Educational Research Association.

Cole, M. (1996). *Cultural Psychology. A Once and Future Discipline*. Cambridge: Harvard University Press.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in mathematics*, 75(2), 213-234.

Engestrom, Y. (1999). Innovative learning in work teams: analyzing cycles of knowledge creation in practice. In Y. Engestrom, R. Miettinen and R.L. Punamaki (eds) *Perspectives on Activity Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

Kaput, J. (1996). The role of physical and cybernetic phenomena in building intimacy with mathematical representations (Keynote address). In P. Clarkson (Ed.), *Technology in Mathematics Education: Proc., 19th Annual Conference of MERGA* (pp. 20–29) Melbourne, Australia: Deakin University Press.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers* (Vol. 17). Springer Science & Business Media.

Leont'ev, A. N. (1978). *Activity, Consciousness, and Personality*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Schwartz, D. L., Varma, S., & Martin, L. (2008). Dynamic transfer and innovation. In S. Vosniadou (Ed.), *International Handbook of Research on Conceptual Change* (pp. 479-506). New York: Taylor & Francis.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for mathematical learning*, *9*(3), 281-307.

Tsitsos, V., and Stathopoulou, C. (2011). Transitions between Micro-Contexts of Mathematical Practices. In M. Pytlak, T. Rowland, E. Swoboda (Eds) *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 7)*, 2208-2217.

Tsitsos, V., and Stathopoulou, C. (2017). Teaching shifts using as tool mathematical modelling. Paper presented at *CIEAEM 69 conference*, Berlin.

Verillon, P., and Rabardel, P., (1995) "Cognition and artifacts: A contribution to the study of though in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education* 10.1, 77-101.

Τσίτσος, Β., (2017). *Μελέτη μεταβάσεων ανάμεσα σε πλαίσια μαθηματικών πρακτικών όπως αυτά καθορίζονται από ψηφιακά εργαλεία και απτικό υλικό*. Πανεπιστήμιο Βόλου. Αδημοσίευτη Διδακτορική Διατριβή.

Χρονάκη, Α. (2010). Το Διδακτικό Πείραμα: Η ποιοτική μελέτη της μαθησιακής διαδικασίας στο πλαίσιο της διδακτικής πράξης. Στο Μ. Πουρκός και Μ. Δαφέρμος (επιμ.) *Ποιοτική Έρευνα στην Ψυχολογία και στην Εκπαίδευση: Επιστημολογικά, μεθοδολογικά και ηθικά ζητήματα*. Αθήνα. Τόπος, σελ. 605-628.

ΧΡΗΣΗ ΟΘΟΝΩΝ ΑΦΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ: ΜΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Τσούκκας Λούκας και Μελετίου-Μαυροθέρη Μαρία

Ευρωπαϊκό Πανεπιστήμιο Κύπρου

louevge@cytanet.com.cy, M.Mavrotheris@euc.ac.cy

Στην παρούσα ερευνητική εργασία υποστηρίζεται ότι η μελετημένη αξιοποίηση κατάλληλων εφαρμογών στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών μπορεί να βελτιώσει την ποιότητα της μαθηματικής παιδαγωγικής. Οι ερευνητές συνοψίζουν τις εμπειρίες μιας διδακτικής παρέμβασης σε ένα τμήμα Δ΄ τάξης δημοτικού σχολείου της κυπριακής επαρχίας με τη χρήση φορητών συσκευών με επίκεντρο την εφαρμογή προγραμματισμού Hopscotch. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων καταδεικνύει ότι η μελετημένη αξιοποίηση εφαρμογών εποικοδομητικού χαρακτήρα μπορεί να οδηγήσει στη βελτίωση της διδασκαλίας των μαθηματικών και των μαθησιακών αποτελεσμάτων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Παρά το γεγονός ότι τεράστια ποσά έχουν δαπανηθεί, σε τοπικό και παγκόσμιο επίπεδο, για την ενσωμάτωση των ΤΠΕ στην Εκπαίδευση, μεγάλος αριθμός ερευνών (π.χ. Vrasidas, 2010) καταδεικνύουν πως τα αποτελέσματα δεν είναι τα αναμενόμενα. Για τον λόγο αυτό, πλήθος ακαδημαϊκών φορέων και επαγγελματικών οργανώσεων, όπως είναι το Εθνικό Συμβούλιο Δασκάλων των Μαθηματικών (NCTM) των ΗΠΑ και η Επιτροπή των Ευρωπαϊκών Κοινοτήτων, υποδεικνύουν, εδώ και χρόνια, την ανάγκη για υιοθέτηση ενός πιο ενεργητικού μοντέλου διδασκαλίας με επίκεντρο τον μαθητή (Κυριακίδης & Μελετίου-Μαυροθέρη, 2014).

Παρόλα όμως τα επιστημονικά καλέσματα για αλλαγή, όπως επισημαίνεται σε μεγάλο αριθμό ερευνών (π.χ. Βονσιάδου, 2006· Κυριακίδης & Μελετίου-Μαυροθέρη, 2014), πολλοί εκπαιδευτικοί αφομοιώνουν τα νέα τεχνολογικά μέσα στις υπάρχουσες εκπαιδευτικές πρακτικές, και δυσκολεύονται να ξεφύγουν από τον παραδοσιακό, δασκαλοκεντρικό τρόπο διδασκαλίας, ο οποίος εξακολουθεί να κυριαρχεί στο καθημερινό σχολικό γίγνεσθαι.

Τα τελευταία χρόνια σε αριθμό πρωτοβουλιών από εκπαιδευτικά ιδρύματα, σε τοπικό ή και σε εθνικό επίπεδο, γίνεται προσπάθεια για την υιοθέτηση ενός πιο ενεργητικού, μαθητοκεντρικού, υποστηριζόμενου από τις νέες τεχνολογίες μοντέλου διδασκαλίας. Μια υποσχόμενη καινοτομία, προς τον σκοπό αυτό, είναι η τεχνολογία φορητών συσκευών iPad και Android tablet. Μια σειρά από μελέτες υποστήριξαν ότι οι οθόνες αφής αποτελούν τη νέα τεχνολογική δυνατότητα στον τομέα της μαθηματικής παιδείας, έχουν τη δυνατότητα να αλλάξουν το είδος των μαθηματικών του αναλυτικού προγράμματος και το επίπεδο κατανόησης των μαθηματικών εννοιών και, εν τέλει, να μεταμορφώσουν και να εμπλουτίσουν τη μαθηματική παιδεία στην πράξη (Boogart, Carlson-Bancrof & Milman, 2014· Clark & Luckin, 2013· Henderson & Yeow, 2012· Howard & Zimmerman, 2013).

Σήμερα είναι διαθέσιμη πληθώρα κατάλληλων εκπαιδευτικών εφαρμογών για τη διδασκαλία των μαθηματικών, όπως για παράδειγμα οι εφαρμογές προγραμματισμού Scratch Junior, Hopscotch, Daisy the Dinosaur και A.L.E.X., οι οποίες είναι ανοικτού τύπου και επιτρέπουν στα παιδιά να δημιουργήσουν το δικό τους περιεχόμενο. Οι εφαρμογές αυτές προγραμματισμού υποστηρίξουν την υιοθέτηση ενός εποικοδομητικού μοντέλου διδασκαλίας/μάθησης, αφού επιτρέπουν διερευνήσεις, υποστηρίζουν τη μάθηση μέσω πράξης, αποτελούν νοητικό συνεργάτη και υποστηρίζουν την οικοδόμηση της γνώσης μέσω πειραματισμού, ανάπτυξης και διερεύνησης εννοιών, ελέγχου ιδεών και λύσεων σε προβλήματα και αποδοχής ή απόρριψής τους, με ταχύτητα και ακρίβεια (Hirsh-Pasek, Zosh, Golinkoff, Gray, Robb & Kaufman, 2015· Kinash, Brand & Mathew, 2012). Ευνοούν την οικοδόμηση λειτουργικής γνώσης από τους ίδιους τους μαθητές και τη διδασκαλία θεμάτων μέσα στο κοινωνικό πλαίσιο στο οποίο αναπτύσσεται η γνώση, ενισχύοντας την επικοινωνία και τη συνεργασία μεταξύ των μαθητών.

Στο παρόν άρθρο περιγράφεται η υλοποίηση και τα αποτελέσματα μιας διδακτικής παρέμβασης που πραγματοποιήθηκε σε μια Δ΄ τάξη Δημοτικού, στην οποία αξιοποιήθηκε η εφαρμογή προγραμματισμού Hopscotch για τη διδασκαλία εννοιών γεωμετρίας.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Δείγμα – Ερώτημα προς διερεύνηση

Η παρούσα έρευνα πραγματοποιήθηκε σε δημόσιο δημοτικό σχολείο της κυπριακής επαρχίας τη σχολική χρονιά 2016-17, σε μια Δ΄ τάξη με δεκαπέντε μαθητές (8 αγόρια και 7 κορίτσια), ηλικίας 9-10 χρονών. Η πλειοψηφία των μαθητών του σχολείου ανήκαν σε μη προνομιούχες κοινωνικά, μορφωτικά και οικονομικά οικογένειες, που αντιμετωπίζουν έντονα κοινωνικά προβλήματα και είχαν χαμηλές ακαδημαϊκές επιδόσεις. Επίσης, δεν είχαν προηγούμενη εμπειρία με τη χρήση φορητών συσκευών για εκπαιδευτικούς σκοπούς.

Στην έρευνα διερευνάται ο βαθμός στον οποίο η αξιοποίηση των οθονών αφής και της εφαρμογής Hopscotch μπορούν να συμβάλουν ουσιαστικά στην οικοδόμηση των μαθηματικών εννοιών και δεξιοτήτων από τα παιδιά, αλλά και να αυξήσουν το ενδιαφέρον και την εμπλοκή τους, και εν τέλει, την αυτοπεποίθησή τους ότι είναι ικανά να «κάνουν» μαθηματικά.

Συλλογή και ανάλυση δεδομένων

Οι ερευνητές σε συνεργασία με την εκπαιδευτικό της τάξης συμπρογραμμάτισαν δύο διδασκαλίες, τις οποίες ανέλαβε η τελευταία. Σε κάθε δύο παιδιά της τάξης δόθηκε ένα iPad με την εφαρμογή Hopscotch εγκατεστημένη. Οι διδακτικές παρεμβάσεις σχεδιάστηκαν και υλοποιήθηκαν με βάση το εποικοδομητικό μοντέλο μάθησης. Λόγω περιορισμού στον χώρο, στη συνέχεια, παρουσιάζεται μόνο η δεύτερη διδακτική παρέμβαση, η οποία είχε διάρκεια 80 λεπτά και είχε ως στόχο τη διερεύνηση των ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων με την κατασκευή, από τα παιδιά, ενός ρομπότ με παραλληλόγραμμα (Βλ. Πίνακα 1). Ταυτόχρονα, δόθηκε η ευκαιρία για επανάληψη σε αναφυόμενες μαθηματικές έννοιες όπως είναι οι γωνίες, οι παράλληλες και κάθετες ευθείες κτλ.

Εφαρμογή Hopscotch

Επίκεντρο της διδακτικής παρέμβασης ήταν η εφαρμογή Hopscotch, η οποία είναι κατάλληλη για εγκατάσταση σε φορητές συσκευές iPad. Με αυτή είναι δυνατόν τα παιδιά να μυηθούν με έναν πιο εύκολο και ευχάριστο τρόπο στον προγραμματισμό. Ο χρήστης μπορεί να δημιουργήσει γεωμετρικά σχέδια, διακοσμητικά μοτίβα και παιχνίδια, καταγράφοντας κάθε φορά τον απαραίτητο κώδικα στο Περιβάλλον Επεξεργασίας (Βλ. Πίνακα 2), για να προγραμματίσει την κίνηση και άλλες ενέργειες αντικειμένων στην οθόνη. Ο κώδικας εκτελείται στο Περιβάλλον Εκτέλεσης του κώδικα (Βλ. Πίνακα 1). Το Hopscotch είναι κατάλληλο κυρίως για τις μεγάλες τάξεις (Γ΄- Στ΄) του δημοτικού σχολείου για τη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών.

Διδακτική παρέμβαση και ο ρόλος του εκπαιδευτικού

Βασικό διδακτικό μέσο αποτέλεσε η εφαρμογή Hopscotch, συνοδευόμενη από ένα φύλλο εργασίας (Βλ. Πίνακα 1). Κύριος στόχος της διδασκαλίας ήταν η κατασκευή των παραλληλογράμμων και η αναγνώριση των ιδιοτήτων τους, στόχος που περιλαμβάνεται στη διδακτέα ύλη της Δ΄ τάξης Δημοτικού. Το συγκεκριμένο θέμα επιλέγηκε στη βάση της παραδοχής ότι η χρήση των οθονών αφής και της εφαρμογής Hopscotch μπορούσαν να λειτουργήσουν υποστηρικτικά στην προσέγγισή του. Ταυτόχρονα, ο σχεδιασμός της όλης διδακτικής παρέμβασης και αξιοποίησης της τεχνολογίας θα επέτρεπαν την επαναφορά αναφυόμενων μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, όπως είναι οι γωνίες, οι παράλληλες και κάθετες ευθείες, η μοντελοποίηση και η λογική σκέψη.

Στη αρχή του μαθήματος η δασκάλα ανέφερε στα παιδιά ότι στόχος του μαθήματος ήταν η κατασκευή ενός ρομπότ, τα μέρη του οποίου είναι παραλληλόγραμμα (Βλ. Πίνακα 1). Στη συνέχεια ακολουθήθηκε η πορεία που παρουσιάζεται στο Φύλλο εργασίας (Βλ. Πίνακα 1).

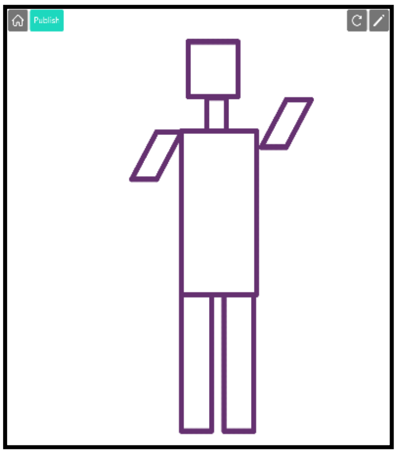
<u>Φύλλο εργασίας : Κατασκευάζουμε το δικό μας ρομπότ</u>

1. Συζητήστε με το διπλανό σας τα πιο κάτω:

- Από ποια σχήματα αποτελείται το πιο κάτω ρομπότ;
- Ποιες είναι οι ιδιότητες του κάθε παραλληλογράμμου;

2. Εργαστείτε στο Hopscotch: Γράψετε τις οδηγίες για να κατασκευαστεί το κεφάλι του ρομπότ σας.

- Αντιγράψετε και τροποποιήστε τον κώδικα του λαιμού του ρομπότ (ορθογώνιο).



Περιβάλλον εκτέλεσης του κώδικα

- Αντιγράψετε και τροποποιήστε τον κώδικα του κεφαλιού (τετραγώνου), ώστε να κατασκευάσετε τον λαιμό του ρομπότ (ορθογώνιο).
- Τροποποιήστε τον κώδικα για να κατασκευάσετε τον κορμό και τα πόδια του ρομπότ (ορθογώνια με διαφορετικές διαστάσεις).
- Τροποποιήστε τον κώδικά σας, ώστε να κατασκευάσετε τα χέρια του ρομπότ.
- Τροποποιήστε τον κώδικά σας, ώστε να κατασκευάσετε διαφορετικά χέρια στο ρομπότ σας (ρόμβο).

3. Αξιολόγηση – επέκταση: Κατασκευάστε ένα μοτίβο με ισόπλευρα τρίγωνα.

Πίνακας 1: Φύλλο εργασίας - Περιβάλλον εκτέλεσης του κώδικα

Όπως φαίνεται από την πορεία διδασκαλίας (Βλ. Πίνακα 1), εφαρμόστηκε το εποικοδομητικό μοντέλο διδασκαλίας. Οι μαθητές συμμετείχαν ενεργά και εργάστηκαν ομαδικά, με βάση τις οδηγίες στο φύλλο εργασίας, για να οικοδομήσουν νοήματα, να κατασκευάσουν τα διάφορα παραλληλόγραμμα με τη βοήθεια του λογισμικού, αναγνωρίζοντας έτσι τις μεταξύ τους ομοιότητες και διαφορές και τα βασικά τους στοιχεία και ιδιότητες. Το λογισμικό επέτρεψε την υλοποίηση δραστηριοτήτων διερεύνησης και υποστήριξε τη μάθηση μέσω πράξης, δίνοντας τη δυνατότητα στη δασκάλα να διατηρήσει ρόλο συμβουλευτικό, συνεργατικό και συν-δημιουργού της νέας γνώσης. Ο ρόλος της περιορίστηκε στον συντονισμό της εύρυθμης λειτουργίας των ομάδων και στην επίλυση προβλημάτων που προέκυπταν κατά την εργασία των παιδιών. Όπου έκρινε απαραίτητο, καλούσε τις ομάδες να παρουσιάσουν την εργασία τους στην ολομέλεια της τάξης. Με τη βοήθεια του λογισμικού οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να τροποποιούν, κατ' επανάληψη, τον κώδικα ενός παραλληλογράμμου για να κατασκευάσουν ένα άλλο. Η δραστηριότητα αυτή υποβοήθησε στην επανάληψη και εμβάθυνση στις ιδιότητες των παραλληλογράμμων, καθώς οι μαθητές έπρεπε να προχωρούν σε συγκρίσεις των ιδιοτήτων τους. Στην προσπάθειά τους να οικοδομήσουν τη νέα γνώση, υποστηρίζονταν τόσο από το λογισμικό όσο και από τη δασκάλα και τους συμμαθητές τους.

Συλλογή και ανάλυση δεδομένων

Ο πρώτος εκ των ερευνητών προέβηκε σε παρατήρηση της διδασκαλίας και τηρούσε σημειώσεις πεδίου. Καθώς οι μαθητές εργάζονταν, ο δεύτερος ερευνητής και η δασκάλα περιφέρονταν στις ομάδες και σκόπιμα υπέβαλλαν ερωτήσεις για συλλογή περαιτέρω ερευνητικών δεδομένων. Για ενίσχυση της αξιοπιστίας των δεδομένων οι διδακτικές παρεμβάσεις βιντεογραφήθηκαν. Ποιοτικά δεδομένα αντλήθηκαν και από τα φύλλα εργασίας και την εργασία των μαθητών στην εφαρμογή Hopscotch, από τις αξιολογήσεις στο τέλος του μαθήματος, καθώς επίσης και από τελικές συνεντεύξεις από αριθμό μαθητών.

Οι ερευνητές, μέσα από τη θεματική ανάλυση περιεχομένου με τη μέθοδο της κατηγοριοποίησης όλων των πηγών δεδομένων, προέβησαν στην υπογράμμιση θεμάτων, τα οποία επαναλαμβάνονταν. Οι θεματικές αυτές κατηγορίες παρουσιάζονται και αναλύονται στη συνέχεια.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η ανάλυση των δεδομένων οδήγησε στη δημιουργία αρκετών ευρύτερων θεματικών κατηγοριών. Λόγω όμως περιορισμού στον χώρο, θα γίνει αναφορά μόνο σε τρεις. Η πρώτη αναφέρεται στις διδαχθείσες μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, οι οποίες αποτέλεσαν τον βασικό στόχο των διδακτικών παρεμβάσεων και η δεύτερη σε επιπρόσθετες αναφυόμενες μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες με τις οποίες οι μαθητές ήρθαν σε επαφή κατά την εμπλοκή τους με την εφαρμογή Hopscotch και τις οθόνες αφής. Η τρίτη αναφέρεται στην προστιθέμενη αξία της χρήσης των οθονών αφής στη διδασκαλία των μαθηματικών και τεκμηριώνεται κατά κύριο λόγο μέσα από τις εκφρασθείσες εντυπώσεις των μαθητών. Κατά την παρουσίαση για κάθε θεματική κατηγορία παρατίθενται σχετικά αποσπάσματα διαλόγων από τη διδακτική παρέμβαση.

Διδαχθείσες μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες

Βασικοί στόχοι των δύο διδακτικών παρεμβάσεων ήταν οι μαθητές: 1) Να αναγνωρίζουν τα διαφορετικά είδη παραλληλογράμμων και επεξηγούν τις μεταξύ τους ομοιότητες και διαφορές και 2) Να αναγνωρίζουν, ονομάζουν και περιγράφουν τα βασικά στοιχεία και τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων. Όπως γίνεται αντιληπτό από τα πιο κάτω αποσπάσματα οι μαθητές μέσα από την ενασχόλησή τους με τις δραστηριότητες, όπως για παράδειγμα τη σύγκριση του ρόμβου με το τετράγωνο, οδηγούνταν στον εντοπισμό και κατανόηση των διαφορών και ομοιοτήτων μεταξύ των παραλληλογράμμων, εστιάζοντας στα βασικά στοιχεία και τις ιδιότητές τους.

Ελένη: Για να φτιάξουμε ρόμβο από τον κώδικα του παραλληλογράμμου αφήσαμε τις γωνίες όπως ήταν και βάλαμε και τις τέσσερις πλευρές του ίσες με 100 (μονάδες).

Ερευνητής: Το τετράγωνο είναι ρόμβος;

Μαρία: Ναι, είναι κύριε. Για να φτιάξουμε όμως ένα διαφορετικό ρόμβο από τον κώδικα του τετραγώνου, αλλάξαμε μόνο τις γωνίες και βάλαμε 110, 70, 110, 70 (μοίρες), γιατί στον ρόμβο οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.

Αλέξανδρος: Πήραμε τον κώδικα του ορθογωνίου και αλλάξαμε τις γωνίες και τις κάναμε 60 και 120 (μοίρες) και φτιάξαμε ένα παραλληλόγραμμο που δεν έχει ορθές γωνίες. Έχει μόνο τις τέσσερις πλευρές του ίσες με 100.

Αναφυόμενες μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες

Κατά τη διδακτική παρέμβαση δινόταν η ευκαιρία για επανάληψη επέκταση και εμβάθυνσή και σε άλλες μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, εκτός από τις διδαχθείσες, αναφυόμενες, όπως είναι οι γωνίες, οι παράλληλες και κάθετες ευθείες, η λογική σκέψη και η μοντελοποίηση. Αποσπάσματα διαλόγων, μέσα από τα οποία μπορεί να διαπιστωθεί αυτό, παρουσιάζονται στη συνέχεια.

<u>Γωνίες</u>

Κώστας: Στο τετράγωνο φτιάξαμε τέσσερις ορθές γωνίες, γιατί βάζαμε 90 (μοίρες), ενώ στον ρόμβο τις αλλάξαμε και φτιάξαμε δύο οξείες 60 (μοίρες) και δύο αμβλείες 120 (μοίρες).

Αντρέας: Και το παραλληλόγραμμο έχει δύο οξείες και δύο αμβλείες. Για να το φτιάξουμε βάλαμε στον κώδικά μας 130, 50, 130, 50 (μοίρες).

<u>Παράλληλες και κάθετες ευθείες</u>

Ευθύμιος: Επειδή στρίβει μια ορθή γωνία, οι δύο πλευρές είναι κάθετες μεταξύ τους στο ορθογώνιο.

Σάββας: Στο ορθογώνιο οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες, γιατί είναι κάθετες πάνω σε άλλη πλευρά. Τις κάναμε με στροφή ορθή γωνία.

<u>Μοντελοποίηση</u>

Κατά την καταγραφή/κατασκευή του κώδικα για ένα αντικείμενο τα παιδιά φαντάζονταν τις κινήσεις που θα έκανε το αντικείμενο αυτό κατά την εκτέλεση του κώδικα. Επιπρόσθετα, σε αρκετές δραστηριότητες τα παιδιά κινήθηκαν στην τάξη με βάση τις οδηγίες στον κώδικα.

Δασκάλα: Μπορείτε να φανταστείτε ποιες κινήσεις θα κάνετε εσείς για να ακολουθήσετε τις οδηγίες στον κώδικα για το παραλληλόγραμμο;

Ηλίας: Θα προχωρήσω μπροστά 100, στροφή αριστερά 60 (μοίρες), μπροστά 70, στροφή αριστερά 120 (μοίρες). Θα επαναλάβω ξανά το ίδιο.

Πίνακας 3: Τροποποίηση του κώδικα τετραγώνου και κατασκευή τυχαίου παραλληλογράμμου.

Λογική σκέψη

Κώστας: Για να προγραμματίσουμε σωστά έπρεπε να σκεφτούμε λογικά. Πού και πώς θα βάζαμε κάθε οδηγία. Πρέπει να σκεφτείς αν θα βάλεις στροφή, αν θα βάλεις μπροστά και πόσο, πόσες φορές να επαναληφθεί ο ίδιος κώδικας. Έτσι σκεφτήκαμε και φτιάξαμε το ρομπότ.

Άντρη: Για να κάνουμε τον κώδικα του τετραγώνου πιο σύντομο μπορούμε να βάλουμε μόνο μία φορά το «Move Forward (100)» και μετά το «Turn (90)» και αυτό να του πούμε να το επαναλάβει τέσσερις φορές.

Προστιθέμενη αξία των οθονών αφής και της εφαρμογής Hopscotch

Πιο κάτω παρατίθενται οι απόψεις, οι οποίες ήταν έντονα και κατ' επανάληψη χαραγμένες στα λόγια των παιδιών, ώστε μέσα από την αυθεντική φωνή τους, να διαφανεί η προστιθέμενη αξία των οθονών αφής και της εφαρμογής Hopscotch.

Διαμόρφωση θετικής στάσης απέναντι στα μαθηματικά

Οι μαθητές συμμετείχαν με ενθουσιασμό στο μάθημα, όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί από τα πιο κάτω αποσπάσματα διαλόγων.

Άντρη: Μου άρεσε που προγραμματίσαμε και φτιάξαμε εμείς το ρομπότ. Κυρία, μπορούμε να μείνουμε το διάλειμμα να φτιάξουμε και καπέλο (ισόπλευρο τρίγωνο) στο ρομπότ μας;

Μάριος: Κυρία, μπορούμε να κατεβάσουμε το πρόγραμμα και στο tablet μας στο σπίτι; Πώς μπορούμε να το κάνουμε;

Βάσος: Σήμερα τα μαθηματικά ήταν πιο εύκολα για μένα. Μου άρεσαν! Τα κατάφερα να φτιάξω το ρομπότ όπως και οι άλλοι συμμαθητές μου.

Οικοδόμηση μαθηματικής γνώσης από τους ίδιους τους μαθητές - Δυνατότητα να «κάνουν» μαθηματικά όλοι οι μαθητές

Όπως έχει ήδη αναφερθεί το λογισμικό Hopscotch συνέβαλε στην υιοθέτηση ενός πιο ενεργού, παιδοκεντρικού μοντέλου διδασκαλίας. Όπως γίνεται αντιληπτό από τα πιο κάτω αποσπάσματα, οι μαθητές ήταν στο επίκεντρο της διαδικασίας διδασκαλίας/μάθησης και κοινωνοί μιας αυθεντικής διερεύνησης των μαθηματικών εννοιών, κατά την οποία οικοδόμησαν τη νέα γνώση, ενώ η εκπαιδευτικός, από μεταδότρια γνώσεων, μετατράπηκε σε καθοδηγητή, εμψυχώτρια και διευκολυντή.

Μαρία: Τον περισσότερο χρόνο εργαστήκαμε μόνοι μας. Δε μας έκανε μάθημα η δασκάλα συνέχεια και κανένα παιδί δε δυσκολεύτηκε.

Βασίλης: Ήταν διαφορετικά. Όλοι φτιάξαμε ένα ρομπότ από μόνοι μας. Σκεφτήκαμε εμείς ποιες οδηγίες χρειάζεται να βάλουμε στον κώδικα. Η δασκάλα μάς βοηθούσε μόνο όταν τη φωνάζαμε. Δεν μας εξηγούσε όμως, αλλά μας έκανε αυτή ερωτήσεις.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Μέσα από την έρευνα έχει καταδειχτεί ότι εφαρμογές, όπως στην προκειμένη περίπτωση το Hopscotch, μπορούν να αξιοποιηθούν αποτελεσματικά στη διδασκαλία θεμάτων ενσωματωμένων στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών, με έναν τρόπο εποικοδομητικό, κατά τον οποίο οι μαθητές, με τρόπο αυτενεργό, συν-οικοδομούν τις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες. Οι εφαρμογές αυτές είναι δυνατόν να παρέχουν το μαθησιακό περιβάλλον στο οποίο διασφαλίζεται το ενδιαφέρον και η εμπλοκή των μαθητών, γιατί αυτοί νιώθουν ικανοί να «κάνουν» μαθηματικά με έναν δημιουργικό, ευχάριστο και παιγνιώδη τρόπο. Έτσι, αντιλαμβάνονται τα μαθηματικά ως δημιουργική απασχόληση και ενισχύεται η αυτοπεποίθησή τους ότι μπορεί να πετύχουν σε αυτά. Τα ευρήματα της έρευνας συμφωνούν με τα αποτελέσματα παρόμοιων ερευνών, όπως για παράδειγμα αυτής των Κυριακίδη και Μελετίου-Μαυροθέρη (2014), οι οποίοι κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι «η αξιοποίηση στη διδακτική πράξη κατάλληλα επιλεγμένων εφαρμογών μπορεί να οδηγήσει σε αναβαθμισμένη εκμάθηση θεμάτων του αναλυτικού προγράμματος» (σ. 9).

Στην παρούσα έρευνα η διδακτική παρέμβαση διεξήχθη σε μια τάξη με μαθητές με χαμηλές ακαδημαϊκές επιδόσεις, που προέρχονται από οικογένειες με χαμηλό κοινωνικο-οικονομικό και μορφωτικό επίπεδο. Καταδεικνύει έτσι, ότι παρόμοιες προσεγγίσεις μπορούν να εφαρμόζονται στη διδασκαλία των μαθηματικών σε κάθε τύπο σχολείου από κάθε εκπαιδευτικό, άσχετα από το επίπεδο γνώσεων και δεξιοτήτων του στην αξιοποίηση της νέας τεχνολογίας στη διδασκαλία και μάθηση.

Τα αποτελέσματα της έρευνας συγκρίνονται με τα συμπεράσματα αντίστοιχων ερευνών (Boogart, Carlson-Bancrof & Milman, 2014· Henderson & Yeow, 2012· Κυριακίδη & Μελετίου-Μαυροθέρη, 2014·) και ενθαρρύνουν όλους τους εκπαιδευτικούς να αναπτύσσουν πρωτοβουλίες, να επιλέγουν και να αξιοποιούν υψηλής ποιότητας εκπαιδευτικές εφαρμογές, αξιοποιώντας φορητές συσκευές, υιοθετώντας ένα πιο ενεργητικό μοντέλο διδασκαλίας, το οποίο θα καθιστά τους μαθητές κοινωνούς μιας αυθεντικής διερεύνησης των μαθηματικών εννοιών και θα τους παρέχει τη δυνατότητα να συν-οικοδομούν τη μαθηματική γνώση.

Ταυτόχρονα, έρχεται να στείλει το μήνυμα στους εκπαιδευτικούς, ερευνητές, συγγραφείς αναλυτικών προγραμμάτων των μαθηματικών ότι είναι δυνατό, με την αξιοποίηση κατάλληλων κάθε φορά εκπαιδευτικών εφαρμογών, να διδάξουν μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, που είναι ενσωματωμένες στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών, αλλά και ταυτόχρονα τους δίνεται η δυνατότητα να εφαρμόσουν, από μόνοι τους, ένα πιο ανοιχτό, λιγότερο παραδοσιακό αναλυτικό πρόγραμμα και εποικοδομητικές προσεγγίσεις στη διδασκαλία.

Η έρευνα είχε μικρή έκταση και περιορισμένο γεωγραφικό χαρακτήρα και το τμήμα στο οποίο διεξήχθη δεν μπορεί να θεωρηθεί αντιπροσωπευτικό όλων των τμημάτων Δ΄ τάξης δημοτικού σχολείου. Επίσης ακολουθήθηκε ποιοτική προσέγγιση στη συλλογή και ανάλυση των δεδομένων. Για τους λόγους αυτούς τα αποτελέσματά της δεν μπορεί να γενικευτούν και δεν πρέπει να γίνονται παραλληλισμοί με περιπτώσεις ανόμοιες με αυτή που περιγράφονται στο άρθρο.

Χρειάζεται, λοιπόν, να διεξαχθεί περισσότερη έρευνα αναφορικά με τον τρόπο ενσωμάτωσης των ψηφιακών εφαρμογών προγραμματισμού, όπως το Hopscotch, στο αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών, ώστε να διερευνηθούν περαιτέρω οι ορίζοντες της επιστημονικής μαθηματικής κοινότητας και να ανοίξουν νέοι δρόμοι στη μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών, που να οδηγούν στη μεγιστοποίηση των μαθησιακών αποτελεσμάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Boogart, A., Carlson-Bancroft, A., & Milman, N. (2014). Examining differentiation and utilization of iPads across content areas in an independent, preK–4th grade elementary school. *Computers in the Schools*, *31*(3), 119-133. doi: 10.1080/07380569.2014.931776

Clark, W. and Luckin, R. (2013). *What the research says - iPads in the classroom*. London Knowledge Lab, Institute of Education: University of London.

Henderson, S., & Yeow, J. (2012). IPad in education - A case study of iPad adoption and use in a primary school. *HICSS. Proceedings of the 2012 45th Hawaii International Conference on System Sciences* (pp. 78-87), Grand Wailea, Maui, HI, USA.

Hirsh-Pasek, K., Zosh, J. M., Golinkoff, R. M., Gray, J. H., Robb, M. B., & Kaufman, J. (2015). Putting education in “educational” apps lessons from the science of learning. *Psychological Science in the Public Interest*, *16*(1), 3-34.

Howard, B., & Zimmerman, S. (2013, March). *Implementing iPads into K-12 classrooms: A case study*. Paper presented at Society for Information Technology & Teacher Education International Conference 2013, Chesapeake, VA. Retrieved from http://www.editlib.org/p/48480/

Kinash, S., Brand, J., & Mathew, T. (2012). Challenging mobile learning discourse through research: Student perceptions of Blackboard Mobile Learn and iPads. *Australasian journal of educational technology*, *28*(4), 639-655.

Vrasidas, C. (2010). Why don’t teachers adopt technology? *eLearn Magazine*. Ανακτήθηκε 10 Δεκεμβρίου, 2015, από http://elearnmag.acm.org/archive.cfm?aid=1785590

Βοσνιάδου, Σ. (2006). *Παιδιά, Σχολεία και Υπολογιστές*. Αθήνα: Gutenberg.

Κυριακίδης, Α., & Μελετίου-Μαυροθέρη, Μ. (2014). Οθόνες αφής στο κυπριακό δημοτικό σχολείο: μια υποσχόμενη καινοτομία στη μάθηση και διδασκαλία μαθηματικών. Στο Κυριακίδης, Λ. Τσαγγαρίδου, Ν., Συμεωνίδου, Σ., Μαύρου, Κ., Συμεού, Λ. Φτιάκα, Ε., και Ηλία, Ι. (Eds), 'Μπροστά στις Εκπαιδευτικές Προ(σ)κλήσεις: Από τη θέση και την αντίθεση στη σύνθεση', *Πρακτικά 13ου Συνεδρίου Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου* (σελ. 637-648), Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΑΞΟΝΑΣ-3: ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ-ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΕΣ, ΠΟΛΙΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΘΕΣΜΙΚΕΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΣΕ ΣΧΟΛΙΚΟΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΕΝΙΣΧΥΤΙΚΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΕΚΤΟΣ ΣΧΟΛΕΙΟΥ: ΜΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΜΕ ΡΟΜΑ ΜΑΘΗΤΕΣ

Ανδρονικίδου Παρασκευή, Δατσογιάννη Αναστασία, Μελίδου Αναστασία

vivi4ptol@gmail.com, Anastasia.Datsogianni@psy.lmu.de, tasameli@gmail.com

Η παρούσα εργασία παρουσιάζει τμήμα της συνολικής εξέτασης των συνθηκών μάθησης και διδασκαλίας των μειονοτικών μαθητών, εστιάζοντας στις στρατηγικές που εμφανίζουν οι μαθητές κατά την επίλυση προβλημάτων (και αλγοριθμικών ασκήσεων). Τα δεδομένα προέρχονται από την παρατήρηση πέντε μειονοτικών μαθητών (μουσουλμάνων Ρομά) της Θράκης σε τάξεις μαθηματικών στο δημόσιο σχολείο αλλά και στο πλαίσιο ενισχυτικών μαθημάτων εκτός σχολείου. Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν την κυριαρχία της υπολογιστικής αριθμητικής και στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων όπως απλή αναπαραγωγή, αναγωγική, αυτοσχέδια, δοκιμή και λάθους.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει να χρησιμοποιεί παιδαγωγικές που επιτρέπουν στους μαθητές να χρησιμοποιούν τις ατομικές πολιτισμικές και φυλετικές προτιμήσεις (Ladson-Billings, 1994). Ωστόσο, πολλές φορές η πριμοδότηση της απομνημόνευσης οδηγεί την πλειοψηφία των μαθητών να αντιλαμβάνονται τα Μαθηματικά ως έναν «κόσμο» άσχετο με το δικό τους (Boaler 2000). Συνεπώς σε ένα κυρίαρχα μονογλωσσικό και παραδοσιακό σχολείο, αξίζει να μελετηθεί η ύπαρξη και η ποιότητα του χώρου για μαθηματική εκπαίδευση παιδιών που προέρχονται από μειονοτικούς πληθυσμούς. Η παρούσα μελέτη, λοιπόν, εστιάζει στη μαθηματική σκέψη των μειονοτικών μαθητών και συγκεκριμένα στις στρατηγικές μαθηματικής σκέψης που χρησιμοποιούν στα δύο περιβάλλοντα (σχολείο και ΚΕΣΠΕΜ).

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΠΛΑΙΣΙΩΣΗ

Σύμφωνα με τους Harel & Sowder (2005), το συγκεκριμένο νόημα που δίνει ένας μαθητής σε έναν όρο, η λύση που παρέχει σε ένα πρόβλημα και η αιτιολόγηση που χρησιμοποιεί, είναι οι συνιστώσες που συμβάλλουν στην κατανόηση των μαθηματικών. Όσον αφορά την λύση που παρέχει σε ένα μαθηματικό πρόβλημα, ο μαθητής θα πρέπει να έχει αναπτυγμένη την ικανότητα της κατηγοριοποίησης και της αναγνώρισης της βαθιάς δομής του (Lucangeli et.al, 1998). Ακόμα, θα πρέπει να κατέχει ικανότητα επινόησης σχεδίου λύσης (Mayer,1995), δηλαδή την επίγνωση των απαραίτητων στρατηγικών για την επίλυση ενός προβλήματος (Montague & Bos, 1990) και την σωστή εκτέλεση των βημάτων (Lucangeli et.al, 1998).

Εμβαθύνοντας στην κατοχή γνωστικών στρατηγικών, οι μαθητές συχνά αναπτύσσουν αυτό που αποκαλούν οι Carpenter et.al (1998) «αυτοσχέδια στρατηγική» καθώς έρχονται στο σχολείο διαθέτοντας ποικιλία από αυτοσχέδιες στρατηγικές λύσεων μαθηματικών προβλημάτων (Carpenter & Moser,1982). Εξάλλου, η διαισθητική σκέψη επιτρέπει στους μαθητές να κινούνται προς μια πιο αποδεκτή έννοια, που θα στηρίζεται σε προηγούμενες γνώσεις (Andrà & Santi, 2013). Οι De Corte & Verschaffel (2005), παρατήρησαν επιπλέον ότι, οι διαδικασίες που επινοούν οι μαθητές στην αριθμητική αποδεικνύουν την ικανότητα τους να παράγουν διαισθητικά βασικές αρχές μαθηματικών όπως είναι η αντιμεταθετικότητα, η συμπληρωματικότητα της πρόσθεσης και της αφαίρεσης και η προσεταιριστικότητα, πολύ πριν τις συναντήσουν στο σχολείο. Ενώ η αριθμητική αποτελεί μια κεντρική ερευνητική εστίαση αναφορικά με την ανάπτυξη στρατηγικών τις τελευταίες δεκαετίες (Geary, 1994), δεν εντοπίζονται ερευνητικές εργασίες με εστίαση στους μαθητές της μειονότητας και τις στρατηγικές που εκείνοι χρησιμοποιούν.

Η παντελής απουσία ενός γνωστικού σχήματος σχετικά με την εκάστοτε μαθηματική έννοια, μπορεί και να οδηγήσει σε τυχαίες απαντήσεις εκτός από λανθασμένες. Αναφορικά με τις τυχαίες απαντήσεις των παιδιών ίσως προέρχονται από προγενέστερες αποτυχίες στο μάθημα των μαθηματικών (Αγαλιώτης, 2013). Για το σημείο «εκκίνησης» της εννοιολογικής κατανόησης ωστόσο σύμφωνα με τον Von Glasserfeld (1995), «είναι πιο πιθανόν να επιτευχθεί, όταν οι μαθητές αρχίζουν απλά με δοκιμή και λάθος» ακολουθώντας εξελικτικά μια τέτοια στρατηγική. Με άξονα την εννοιολογική κατανόηση, η χρήση ποικιλίας αναπαραστάσεων φαίνεται να κατέχει κεντρική θέση στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών (Gagatsis & Elia, 2005). Κάποιες έρευνες μάλιστα έχουν τονίσει ότι η διδασκαλία με έμφαση στην κριτική σκέψη, στην συζήτηση και στην επίλυση προβλήματος μπορεί να εφαρμοστεί σε τάξεις μαθητών με χαμηλό κοινωνικό οικονομικό προφίλ (Silver, Smith & Nelson, 1995) ενώ ταυτόχρονα, η νοηματοδούμενη διδασκαλία μπορεί να μεγιστοποιήσει την ικανότητα επίλυσης προβλήματος (Knapp, Shields & Turnbull, 1995). Στόχος πολλών εκπαιδευτικών είναι οι μειονοτικοί μαθητές να μάθουν τα «βασικά» ακόμα και μέσω αποστήθισης πριν προχωρήσουν στην πραγματική διαδικασία επίλυσης προβλήματος. Ωστόσο οι Villaseńor και Kepner (1993) υποστηρίζουν ότι οι εκπαιδευτικοί πρέπει να τροποποιήσουν τις διδακτικές τακτικές τους ώστε να διδάσκουν προσανατολισμένοι στην αξία της διαδικασίας κατά την επίλυση προβλήματος. Όπως επίσης αναφέρει ο Τουμάσης (1999) η διδασκαλία των μαθηματικών, θα πρέπει να διευκολύνει τα παιδιά να κατανοούν σε βάθος τις διάφορες μαθηματικές έννοιες και δομές.

Όσον αφορά τις στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων που αξιοποιούν οι μειονοτικοί μαθητές στα μαθηματικά, εντοπίζεται ένα ερευνητικό κενό. Ωστόσο, δεν υπάρχει κανένα στοιχείο που να υποστηρίζει ότι μειονοτικοί μαθητές δε διαθέτουν την «ικανότητα» να μάθουν μαθηματικά.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα εργασία επιχειρεί να αποτυπώσει επιχειρεί να αποτυπώσει τον τρόπο σκέψης του μειονοτικού μαθητή στην τάξη των μαθηματικών σε δυο διαφορετικά περιβάλλοντα μάθησης, του δημόσιου σχολείου και ενός που λειτουργεί ενισχυτικά στα όρια της κοινότητας Ρομά. Τα μαθήματα στο εξωσχολικό περιβάλλον πραγματοποιούνταν σε Κέντρο Στήριξης του Προγράμματος Εκπαίδευσης των Μουσουλμανοπαίδων (ΚΕΣΠΕΜ), το οποίο δραστηριοποιόταν στη Θράκη και στόχευε μέσα από δράσεις εντός και εκτός σχολείου, στη βελτίωση της ελληνομάθειας και της σχολικής επίδοσης των μαθητών.

Ειδικότερα, το ερευνητικό πρόβλημα εξειδικεύτηκε στο ακόλουθο ερευνητικό ερώτημα: Οι στρατηγικές που αξιοποιούνται από τους μαθητές κατά την επίλυση προβλημάτων και αλγοριθμικών ασκήσεων σε δύο περιβάλλοντα: σχολείο και ΚΕΣΠΕΜ.

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν πέντε μειονοτικοί (μουσουλμάνοι Ρομά) μαθητές της Δ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου, κάτοικοι της περιοχής του Άβαντα στο νομό Έβρου. Οι μαθητές επιλέχθηκαν με μοναδικό κριτήριο τη σταθερότητα παρακολούθησης στο ΚΕΣΠΕΜ. Καταγράφηκαν μαθηματικά συμβάντα που προέκυψαν έπειτα από 115 ώρες παρακολούθησης (Ιανουάριος - Απρίλιος 2013). Οι τελευταίες αναλώθηκαν σε εργασία πεδίου στο ΚΕΣΠΕΜ (55 ώρες) και στα τρία δημόσια σχολεία που φοιτούσαν οι συγκεκριμένοι πέντε μαθητές (60 ώρες).

Για την πραγματοποίηση της έρευνας παρατηρήσαμε τους μαθητές στα δύο περιβάλλοντα. Συγκεκριμένα, κατά τη διάρκεια των παρατηρήσεων ο ρόλος των ερευνητριών στο πλαίσιο του ΚΕΣΠΕΜ ήταν κυρίαρχα συμμετοχικός, καθώς ανέλαβαν το ρόλο βοηθών της εκπαιδευτικού, ενώ στο σχολείο απουσίαζε η εμπλοκή τους κατά την παρατήρηση.

Καθένα από τα 114 συμβάντα που καταγράφηκαν από τις ερευνήτριες, αναλύθηκε βάσει της στρατηγικής σκέψης που αναδείκνυε, ενώ δεν ορίστηκε εξαρχής κάποια κατηγοριοποίηση προς αναζήτηση. Για αυτό το σκοπό αξιοποιήθηκε η τεχνικήτης Θεμελιωμένης Θεωρίας (grounded theory), η οποία προσφέρει μια πρακτική και ευέλικτη προσέγγιση διερεύνησης σύνθετων κοινωνικών φαινομένων (Charmaz, 2003). Σε αυτό το πλαίσιο, λοιπόν πραγματοποιήθηκαν πολλαπλές αναγνώσεις των καταγραφών κάθε ερευνήτριας ξεχωριστά, με σκοπό τη θεματική κατηγοριοποίηση. Οι κατηγορίες διαμορφώθηκαν στην πορεία ανάγνωσης των συμβάντων και ανασκευάζονταν μετά από κάθε κύκλο ανάλυσης δεδομένων. Έπειτα από τρία επίπεδα ανάλυσης των επεισοδίων αναγνωρίστηκαν οι ακόλουθες στρατηγικές i) αυτοσχέδιες, ii) δοκιμής - λάθους, iii) αναγωγικές και iv) απλής αναπαραγωγής. Ωστόσο εντοπίστηκαν επίσης συμβάντα στα οποία δεν ήταν δυνατή η αναγνώριση της αντίστοιχης στρατηγικής. Παρακάτω, η εμπλοκή των τριών ερευνητριών υποδεικνύεται με τα σύμβολα ΕΕα, ΕΕβ και ΕΕγ, ενώ η διδακτική παρέμβαση συμβολίζεται με «Δ».

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Συνολικά, 114 συμβάντα εντοπίστηκαν στα δεδομένα, τα οποία αφορούσαν προβλήματα αριθμητικού κυρίως λογισμού και αλγοριθμικές ασκήσεις πανομοιότυπου περιεχομένου. Τα 65 από τα 114 συμβάντα κατατάχθηκαν στην κατηγορία των αναγνωρίσιμων στρατηγικών. Συγκεκριμένα:

(i) Αυτοσχέδιες: Τα παιδιά φαίνεται συχνά να χρησιμοποιούν με μεγάλη επιτυχία τις άτυπες στρατηγικές λύσης επιπρόσθετα ή ακόμη σε αντικατάσταση των τυπικά διδασκομένων μεθόδων. Ενδεικτικό είναι το ακόλουθο παράδειγμα:

ΕΕ(α): Κάνοντας η μαθήτρια τις αφαιρέσεις αναδείχτηκε ένας δικός της τρόπος σκέψης που τη διευκόλυνε για να εκτελέσει τις πράξεις. Ζωγράφιζε κάθε φορά σε «κύκλους» τον αφαιρέτη και έσβηνε τον αριθμό που αντιπροσώπευε τον αφαιρετέο. Στη συνέχεια μετρούσε πόσα της απέμειναν.

Επίσης κάποια άλλη στιγμή σε αφαιρέσεις ακεραίων η μαθήτρια φάνηκε να σκέφτεται κάπως ανάλογα. Δηλαδή στην αφαίρεση:

```
 19.805
-18.113
```

η μαθήτρια έκανε το εξής: ζωγράφισε 5 «κύκλους» μέτρησε 3 και όσους έμειναν τους έσβησε. Και όσους έσβησε θεώρησε ότι είναι αυτά τα οποία απομένουν αν από τα 5 βγάλουμε 3 (βλ.φωτογραφία).

[Επεισόδιο 20Βα,16/01/2013, ΚΕΣΠΕΜ]

(ii) Δοκιμή-λάθος: Στα συμβάντα της κατηγορίας αυτής τα παιδιά, χωρίς να είναι σίγουρα για τη λύση, δοκιμάζουν, ελέγχουν τη δοκιμή τους και ανάλογα τροποποιούν ή όχι την επιλογή τους. Αντιπροσωπευτικά παρατίθεται το παρακάτω επεισόδιο (ΕΕβ):

ΑΣΚΗΣΗ: να υπολογίσεις με το νου

	-1000	-100	-10
67.742			

Βαχιντ: Κυρία για δείτε. Αλλά πολύ δύσκολο.

ΕΕβ: Τι σε δυσκόλεψε;

Βαχιντ: Ε..δείτε το είναι σωστό; (έχει γράψει στη στήλη που αφαιρούμε πρώτα τον αριθμό 1000 το αποτέλεσμα 66.631).

ΕΕβ: Αν δυσκολεύεσαι να το κάνεις με το νου μπορείς να κάνεις την πράξη κανονικά στο τετράδιο για να βρεις το αποτέλεσμα.

Βαχιντ: θα την κάνω και στο τετράδιο. Γράφει:

$$\begin{array}{r} 67.742 \\ -1.000 \\ \hline 66.742 \end{array}$$

Α..κυρία λάθος το έκανα πριν.

ΕΕβ: Σωστά. Από ότι φαίνεται λοιπόν, ο μαθητής δυσκολεύτηκε να κάνει νοερά την πράξη.

[Επεισόδιο 3Βα, 9/04/2013, Σχολείο]

(iii) Αναγωγική: Στα συμβάντα της κατηγορίας αυτής παρατηρήθηκαν αναγωγές σε γνωστικά σχήματα, κατακτημένα και σταθερά, για τα οποία οι μαθητές ήταν σίγουροι. Παρακάτω παρατίθεται ένα αντιπροσωπευτικό συμβάν:

Μετά την ανάγνωση μας βιβλίου λογοτεχνικού εμφανίζονται στο κείμενο ο αριθμός 8 και 8,3. Η δασκάλα γράφει στον πίνακα τον αριθμό 8.

Δ:Έχει κάποιο παιδί καμία ιδέα για το πώς μπορούμε να σχηματίσουμε το 8;

Μοιράζει 8 τουβλάκια σε κάθε ομάδα και προτρέπει τα παιδιά να φτιάξουν το 8 με όποιους συνδυασμούς θέλουν. Στη συνέχεια η δασκάλα σηκώνει στον πίνακα τα παιδιά για να ζωγραφίσουν τον αριθμό 8,3.

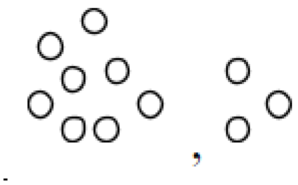
Μεχμέτ; Σηκώνεται κάνει 8 κυκλάκια… και μετά να κάνω και ένα;

Δ: Αν κάνει ένα ακόμη θα έχω 9. Εμείς θέλουμε 8,3

Μεχμέτ : Ε τότε να αφήσω έτσι…

Δ: Ε τότε θα έχω 8. Έχει κανείς άλλο καμία ιδέα;

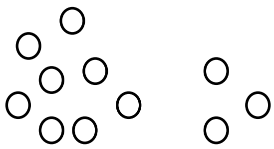
Βαχίντ: Ζωγραφίζει:



Να κυρία !8 κόμμα 3

Δ: Εγώ εδώ Βαχίντ μας βλέπω 11 πορτοκάλια. Για ζωγράφισε 11:

Βαχίντ:

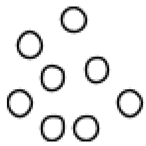


Δ: Βλέπεις που και στην μια και στην άλλη έχουμε11; Είναι τα ίδια τα 8,3 και τα 11

Βαχίντ: (κουνάει το κεφάλι αρνητικά)

Δ: Μήπως να κάνουμε τα 8,5 ή 8μιση πορτοκάλια.. Μπορεί να έρθει κάποιος να μας τα ζωγραφίσει;

Τουμέρ: Κάνω 8



και αυτό έτσι κάνω (και ζωγραφίζει): 

Και έτσι καταλήξαμε ότι δεν θα είναι ένα ολόκληρο επειδή έχουμε «μισό».

[Επεισόδιο 65Βα, 7/02/2013, ΚΕΣΠΕΜ]

(iv) Απλή αναπαραγωγή: Σε αυτήν την κατηγορία στρατηγικών κατατάχθηκαν κυρίως επεισόδια, στα οποία τα παιδιά προσπαθούν ανεπιτυχώς να πραγματοποιήσουν τους αλγορίθμους των βασικών πράξεων στα μαθηματικά όπως τους ζητείται. Χαρακτηριστικό είναι το παρακάτω συμβάν:

«ΕΕβ: Ο Μεχμέτ πραγματοποιεί τη διαίρεση 98.167:26. Ξεκινάει λέγοντας «δύο ψηφία έχουμε στο διαιρέτη δύο χωρίζουμε και από τα αριστερά του διαιρετέου…». Λέει ότι: «το 26 στο 98 χωράει 3 φορές», πολλαπλασιάζει το 3 με το 26 και πραγματοποιεί την αφαίρεση 98-78 και βρίσκει 20. Συνεχίζει λέγοντας: «πόσες φορές χωράει το 26 στο 20». Το λάθος του παιδιού ήταν πως δεν κατέβαζε και το επόμενο ψηφίο του διαιρετέου, για να δημιουργήσει τον αριθμό στον οποίο θα πρέπει να δούμε πόσες φορές χωράει ο διαιρέτης. Μετά από παρέμβαση – υπόδειξη της ΕΕβ ο μαθητής συνεχίζει τη διαίρεση σωστά».

[Επεισόδιο 19iΒα, 29/03/2013, ΚΕΣΠΕΜ]

Από τις μη αναγνωρίσιμες στρατηγικές προκύπτει μια πλειοψηφία συμβάντων, στα οποία ο μαθητής είτε δίνει τυχαίες απαντήσεις, είτε σωστές είτε λανθασμένες με άγνωστο ωστόσο τρόπο σκέψης. Παρακάτω παρατίθεται ένα παράδειγμα για την τελευταία υποκατηγορία (λανθασμένες απαντήσεις χωρίς γνωστό τρόπο σκέψης):

Στη συνέχεια έπρεπε να κάνει την πρόσθεση 35.504+897

Και γράφει τους αριθμούς όχι τον έναν κάτω από τον άλλο. Αλλά κάπως έτσι:

```
   897
+35.504
_______
```

Έκανε την πρόσθεση ενώ δεν έβαλε μονάδες κάτω από μονάδες κ.λ.π. και υποστήριξε ότι 0+5+9 =15. Πολλές φορές επειδή το κρατούμενο ήταν 16 έγραφε το 6 και κρατούσε σαν κρατούμενο 10.Επίσης, πολλές φορές σε περιπτώσεις που προέκυπτε κρατούμενο όπως π.χ το 12 έγραφε το 1 και κρατούσε 2 κρατούμενα.

[Επεισόδιο 71Βα, 2/03/2013, ΚΕΣΠΕΜ]

Γενικότερα παρατηρείται μια προσπάθεια των μαθητών να αναπαράγουν σχήματα που επιτυχώς ή όχι ανασύρουν από την μνήμη τους, να αυτοσχεδιάζουν όταν τους δίνεται ο αντίστοιχος χώρος, να δοκιμάζουν και να ξαναπροσπαθούν προκειμένου να δώσουν την «σωστή» απάντηση που ο εκπαιδευτικός περιμένει ή να δίνουν τυχαίες απαντήσεις. Η εμμονή στο αποτέλεσμα και όχι στην κατανόηση αφήνει ελάχιστα περιθώρια στην εμφάνιση στρατηγικών για την κατανόηση των αντίστοιχων μαθηματικών εννοιών.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στις αναγνωρίσιμες στρατηγικές, κυριαρχούν η αναγωγική και η απλή αναπαραγωγή, με τις αυτοσχέδιες και τις στρατηγικές δοκιμής και λάθους να εμφανίζονται με χαμηλότερη συχνότητα. Αυτό, ίσως, οφείλεται στο γεγονός ότι δεν εμφανίζονται πολλές στιγμές που οι μαθητέςμπορούν να αυτενεργήσουν αναπτύσσοντας αυτό που αποκαλούν οι Carpenter et.al (1998) «αυτοσχέδια στρατηγική». Τα παιδιά εξάλλου έρχονται στο σχολείο διαθέτοντας ποικιλία από αυτοσχέδιες στρατηγικές λύσεων μαθηματικών προβλημάτων (Carpenter & Moser,1982).Επίσης, σε χαμηλή συχνότητα εμφανίστηκε η στρατηγική δοκιμής και λάθους. Η κατανόηση σύμφωνα με τον Von Glasserfeld (1995), «είναι πιο πιθανόν να επιτευχθεί, όταν οι μαθητές αρχίζουν απλά με δοκιμή και λάθος, καθώς έπειτα θα ενδιαφερθούν για την αιτία που δουλεύουν ή όχι ορισμένα πράγματα και τότε οι εκπαιδευτικοί ενθαρρύνουν το ενδιαφέρον που οδηγεί στην κατανόηση».

Κυριαρχεί η προσπάθεια των παιδιών να αναπαράγουν κανόνες μέσω απομνημόνευσης σε ένα πλαίσιο στο οποίο η μαθηματική γνώση αποστηθίζεται και δεν κατασκευάζεται. Το εύρημα αυτό συμφωνεί με τη βιβλιογραφία, καθώς η εστίαση στην τάξη των μαθηματικών στην απομνημόνευση και αναπαραγωγή διαδικασιών οδηγεί την πλειοψηφία των μαθητών να αντιλαμβάνονται τα Μαθηματικά ως έναν «κόσμο» άσχετο με το δικό τους (Boaler 2000). Η διδασκαλία, ωστόσο, θα πρέπει να διευκολύνει τα παιδιά να κατανοούν σε βάθος τις διάφορες μαθηματικές έννοιες και δομές και όχι να καλλιεργεί τη μηχανική μάθηση (Τουμάσης,1999).

Στις στιγμές, ακόμα, κατά τις οποίες οι μαθητές «όφειλαν» να ανταπεξέλθουν σε ένα τέτοιο μηχανιστικό μοτίβο μάθησης παρατηρήθηκε να αναγάγουν κάθε φορά τη νέα γνώση σε προηγούμενα σχήματα.Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να ερμηνευτεί με τον τρόπο που ο Von Glasserfeld (1995) αναφέρει, πως όταν οι μαθητές δεν κατασκευάζουν την λύση των μαθηματικών προβλημάτων, αλλά οδηγούνται σε αυτήν αποστηθίζοντας μια αλληλουχία βημάτων, σε μια μη πανομοιότυπη προβληματική κατάσταση, θα αποτύχουν, επειδή ποτέ δεν κατανόησαν τους μηχανισμούς που υποκρύπτονται στη λύση του.

Από τις μη αναγνωρίσιμες στρατηγικές προκύπτει μια πλειοψηφία συμβάντων, στα οποία ο μαθητής είτε δίνει τυχαίες απαντήσεις, είτε σωστές είτε λανθασμένες με άγνωστο όμως τρόπο σκέψης. Ωστόσο, σε σημαντικό αριθμό συμβάντων που κατατάχθηκαν στις μη αναγνωρίσιμες στρατηγικές, παρατηρήθηκε διδακτική παρέμβαση, η οποία δεν άφησε χώρο να εκφραστεί ο τρόπος σκέψης του παιδιού.

Καταλήγοντας, σε αυτό το μηχανιστικό μοτίβο μάθησης παρατηρείται η κυρίαρχη χρήση της αναγωγικής στρατηγικής αλλά και της απλής αναπαραγωγής. Είναι φανερό ότι η μετάβαση από τη σημερινή, πρακτική των σχολικών Μαθηματικών (με την έμφαση στην αναπαραγωγή κανόνων) σε μια άλλη που επενδύει σε μια ποικιλία από πρακτικές, αποτελεί ένα αναγκαίο εγχείρημα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αγαλιώτης, Ι. (2013) *Διδασκαλία Μαθηματικών στην Ειδική Αγωγή και εκπαίδευση. Φύση και εκπαιδευτική διαχείριση των μαθηματικών δυσκολιών.* Αθήνα: Γρηγόρη

Andrà, C., & Santi, G. (2013). Intuitive thinking in a context of learning. In *Proceedings of the 37th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 25-32).

Boaler, J. (2000). Mathematics from another world: Traditional communities and the alienation of learners. *The Journal of Mathematical Behavior*, *18*(4), 379-397.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, 9-24.

Carpenter,T. P., Franke, M. L., Jakobs, V.R., Fennema, E., &Empson, S.B., (1998). A longitudinal study of invention and understanding in children’s multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in mathematics education*, 3-20.

Charmaz, K. (2003). Grounded theory-objectivist and constructivist methods. In N. K. Denzin& Y. S. Lincoln (Eds.), *Strategies of qualitative inquiry* (pp. 249-291). London: Sage.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (2005). Δεξιότητες των παιδιών και διαδικασίες που χρησιμοποιούν κατά την επίλυση στοιχειωδών λεκτικών προβλημάτων. Στο Σ. Βοσνιάδου (Επιμ.), *Η Ψυχολογία Των Μαθηματικών* (σσ.70-86). Αθήνα: Gutenberg.

Gagatsis, A., &Elia, I. (2005). *A review of some recent studies on the role of representations in mathematics education in Cyprus and Greece.* In *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education: Working Group* (Vol. 1, pp. 102-111).

Geary, D. C. (1994). *Children's early numerical abilities*. American Psychological Association.

Harel, G. &Sowder, L. (2005). Advanced Mathematical Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. *Mathematical Thinking and Learning,7*(1), (pp. 27-50).

Kennedy, L., Tipps, S., & Johnson, A. (2007). *Guiding children's learning of mathematics*. Cengage Learning.

Knapp, M. S., Shields, P. M., & Turnbull, B. J. (1995). Academic challenge in high-poverty classrooms. *Phi Delta Kappan*, *76*(10), 770.

Ladson-Billings, G. (1994). *What We Can Learn from Multicultural Education Research. Educational leadership, 51*(8), 22-26.

Lucangeli, D., Tressoldi, E., P. &Cendron, M. (1998). Cognitive and metacognitive abilities involved in the solution of mathematical word problems: Validation of a comprehensive model. *Contemporary Educational Psychology 23,* 257–275

Mayer, R. E. (Ed.). (2005). *The Cambridge handbook of multimedia learning*. Cambridge university press.

Montague, M., &Bos, C. (1990). Cognitive and metacognitive characteristics of eighth-grade students' mathematical problem solving. *Learning and Individual Differences, 2,* 109–127.

Silver, E. A., Smith, M. S., & Nelson, B. S. (1995). The QUASAR project: Equity concerns meet mathematics education reform in the middle school. *New directions for equity in mathematics education*, 9-56.

Τουμάσης, Μ., (1999). *Πώς να ενεργοποιήσουμε τα παιδιά στο μάθημα των μαθηματικών*. Εκδόσεις: Κωστόγιαννος.

VillaseñorJr, A., &KepnerJr, H. S. (1993). Arithmetic from a problem-solving perspective: An urban implementation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 62-69.

Von Glasersfeld, E., (1995). A constructivist approach to teaching In L. Steffe& J. Gale (Eds.), *Constructivism in Education* (pp. 3-16). New Jersey: Lawrence Erlbaum.

ΕΜΦΥΛΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΗΣ Β ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Βουκελάτου Σταματίνα

Μαθηματικός, Λευκάδα

matinavoukelatou@gmail.com

Στην παρούσα μελέτη εξετάζονται οι έμφυλες αναπαραστάσεις που κατασκευάζονται στο σχολικό εγχειρίδιο των μαθηματικών της Β' Γυμνασίου. Με τη βοήθεια της ανάλυσης λόγου παρατηρήθηκε ότι μέσω του εγχειριδίου αναπαράγονται άρρητα ηγεμονικοί λόγοι για τον ανδρισμό και τη θηλυκότητα. Η κυριαρχία του αρσενικού επιβεβαιώνεται και το θηλυκό στοιχείο περιθωριοποιείται και παλεύει με τον μύθο του υποδεέστερου όρου στο δίπολο άνδρας/ γυναίκα καθώς και των παραγώγων του. Η μελέτη αυτή μπορεί να υποστηρίξει την αναθεώρηση των έμφυλων αναπαραστάσεων στο πλαίσιο του κειμενικού υλικού των σχολικών εγχειριδίων.

ΦΕΜΙΝΙΣΜΟΣ, ΦΥΛΟ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τους τελευταίους δύο αιώνες έγιναν τεράστια βήματα στην εκπαίδευση - και στον δημόσιο βίο γενικότερα- όσον αφορά στην ισότιμη συμμετοχή των γυναικών, με τη δράση του φεμινιστικού κινήματος να διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο. Η φράση της Σιμόν ντε Μποβουάρ «*Δε γεννιέσαι γυναίκα, αλλά γίνεσαι*», συμπυκνώνει την άποψή της ότι η έμφυλη ταυτότητα είναι κοινωνικά κατασκευασμένη. Επίσης, αναφέρεται στο πώς ο άνδρας ορίζεται ως Εαυτός/ υποκείμενο, ενώ η γυναίκα ως ο Άλλος/ αντικείμενο (Αθανασίου, 2006). Το βιβλίο της, *Το Δεύτερο φύλο,* συμβάλει στην εισαγωγή της διάκρισης μεταξύ βιολογικού και κοινωνικού φύλου (sex/ gender), που αργότερα –κατά τη συνάντηση μεταδομιστικής και φεμινιστικής σκέψης- η διάκριση αυτή θα αποδομηθεί από την Butler (1990), η οποία υποστήριξε ότι το βιολογικό φύλο αποτελεί λογοθετική απόρροια του κοινωνικού. Το φύλο δεν θεωρείται ουσία αλλά ενέργημα, που, μέσω της επανάληψης, παράγει μια έμφυλη ταυτότητα και την ψευδαίσθηση ενός μόνιμα έμφυλου εαυτού (Butler, 1990). Σε αυτή την περίοδο ξεκινά και η έρευνα που αφορά στον ανδρισμό, ο οποίος αποτελεί, σύμφωνα με τον Bob Connell, μια ιδιαίτερα εύθραυστη κοινωνική κατασκευή (Χρονάκη, 2013α) και δεν αφορά μονάχα ένα ανδρικό χαρακτηριστικό μιας και το φύλο νοείται ως ρήμα και όχι ως ιδιότητα· ως κάτι που επιτελούμε και όχι ως κάτι που είμαστε ή έχουμε (Mendick, 2006). Ο Πεχτελίδης (2012) τονίζει την ύπαρξη πολλαπλών ανδρισμών και θηλυκοτήτων, με κάποιους τύπους ανδρισμού και θηλυκότητας να είναι ηγεμονικοί σε συγκεκριμένα κοινωνικά και πολιτισμικά πλαίσια.

Οι φεμινίστριες δίνουν έμφαση στην ανάγκη για αποδόμηση διπολικών αντιθέσεων, όπως άνδρας/ γυναίκα, λογικό/ παράλογο κ.λπ., που τοποθετούν τη γυναίκα σε υποδεέστερη θέση. Κατά τον Derrida, ο πρώτος όρος σε κάθε δίπολο «αντλεί το προνόμιό του από την εξαφάνιση ή την απώθηση του αντιθέτου του», που θεωρείται «νοθευμένη παραλλαγή του πρωταρχικού όρου» (Grosz, 1986, όπ. αναφ. στο Αθανασίου, 2006, σελ. 60). Οι φεμινίστριες υποστηρίζουν ότι οι γυναίκες τείνουν να αντιπροσωπεύουν πάντα αυτόν τον δεύτερο και υποδεέστερο όρο.

Κατά τις δεκαετίες 70 και 80, όσον αφορά στην έρευνα σχετικά με τη σχέση "φύλο και μαθηματικά", μελετάται το κορίτσι ως πρόβλημα και η έρευνα κινητοποιείται από το ενδιαφέρον για τους λόγους που αποτυγχάνουν τα κορίτσια· ένα πρόβλημα που αποδίδεται, ως επί το πλείστον, σε βιολογικούς παράγοντες. Τη δεκαετία του 80, όμως, αρχίζει να γίνεται από τις φεμινίστριες κριτική στις ίδιες τις επιστήμες ως ανδροκεντρικά σχεδιασμένες, οι οποίες υιοθετούν κυρίαρχους λόγους που επιβάλλουν «καθεστώτα αλήθειας» (Χρονάκη, 2013β).

Μέσω μιας φουκωικής προσέγγισης, η Walkerdine (2013) ανιχνεύει ηγεμονικούς λόγους σε εκπαιδευτικούς, γονείς, μαθητές/ριες και εκπαιδευτικά υλικά που δρουν ως αλήθειες και κατασκευάζουν υποκείμενα αλλά και τα ίδια τα μαθηματικά. Για παράδειγμα, ο λόγος περί φυσικής μαθηματικής ικανότητας, που συνδέεται με τον ορθολογισμό και κατ' επέκταση με τον ανδρισμό, οδηγεί στη θεώρηση της σκληρής εργασίας –που έχει συνδεθεί με τη θηλυκότητα- ως δείγμα μη ικανότητας.

Η Mendick (2006) ερευνά πώς τα παιδιά τοποθετούν τους εαυτούς τους σε μια σειρά δίπολων αντιθέσεων, όπως αργός/ γρήγορος, ενεργός/ παθητικός, ικανός/ σκληρά εργαζόμενος κ.ά., όπου σε κάθε δίπολο ο μεγαλύτερης αξίας όρος συνδέεται με τον ανδρισμό, ενώ ο χαμηλότερης αξίας με τη θηλυκότητα. Η ίδια καταλήγει ότι το "κάνω μαθηματικά" είναι ταυτόσημο με το "επιτελώ ανδρικότητα" ή αλλιώς, κατά τους Chronaki & Pechtelidis (2012), η επιτυχία στα μαθηματικά συμβάλλει στην κατασκευή ενός έμφυλου ανδρικού υποκειμένου.

ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΚΑΙ ΦΥΛΟ

Τις τελευταίες δεκαετίες το ενδιαφέρον των ερευνητών έχει στραφεί στην ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων, τόσο λόγω της διαπίστωσης ότι αποτελούν παγκόσμια το κύριο εργαλείο των εκπαιδευτικών

(Φρειδερίκου, 1995), όσο και επειδή δεν πρόκειται απλά για την παρουσίαση και μετάδοση μιας ουδέτερης γνώσης. Αντιθέτως, υποστηρίζουν το κυρίαρχο σύστημα αξιών και μύθων μιας συγκεκριμένης κοινωνίας (Chassapis, 1997· Gellert, 2013) και κατασκευάζουν μια ιδιαίτερη κοινωνική πραγματικότητα με αποτέλεσμα να αποτελούν ή να μπορούν να αποτελέσουν ισχυρό μοχλό κοινωνικής αλλαγής. Όσον αφορά στα στερεότυπα του φύλου, αυτά φαίνεται να ενισχύονται από το περιεχόμενο των σχολικών βιβλίων και έτσι να θεωρούνται στερεοτυπικά εργαλεία (Walkerdine, 2013· Φρειδερίκου, 1995), καθώς λειτουργούν ως φορείς αντιλήψεων σχετικά με τις αποδεκτές εκφάνσεις της θηλυκότητας και του ανδρισμού.

Πιο συγκεκριμένα, στα σχολικά βιβλία των μαθηματικών, όπως αναφέρει ο Gellert (2013), οι αναφορές σε πραγματικές καταστάσεις και δραστηριότητες της καθημερινότητας συχνά μεταδίδουν πρόσθετα μη μαθηματικά μηνύματα, τα οποία έχουν έναν περισσότερο ή λιγότερο σαφή ιδεολογικό προσανατολισμό (Chassapis, 1997). Για παράδειγμα, η απουσία γυναικών από τα σχολικά βιβλία ή η αναφορά αποκλειστικά σε άνδρες μαθηματικούς/ επιστήμονες, ακόμη και σήμερα, καθιστά τα μαθηματικά ανδροκρατούμενο πεδίο, αλλά ταυτόχρονα και ένα θέμα που πρέπει να αναδειχθεί (βλ. Χρονάκη, 2009). Μέσω μιας ανάλυσής τους μπορούμε να δούμε τον τρόπο με τον οποίο τοποθετούν τους/τις αναγνώστες/ριές τους και ταυτόχρονα συμβάλλουν στις διαδικασίες υποκειμενοποίησης. Για παράδειγμα, όσον αφορά στις έμφυλες αναπαραστάσεις στο περιοδικό *Ευκλείδης Α'*, οι Στάμου, Χρονάκη & Ζιώγα (2007), μελετώντας την κατανομή ανδρικών-γυναικείων προσώπων και τους επαγγελματικούς ρόλους που τους αποδίδονται, έδειξαν ότι στο περιοδικό διαιωνίζονται πατριαρχικά στερεότυπα.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ, ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

Στην παρούσα εργασία εξετάζονται έμφυλες αναπαραστάσεις και στερεότυπα στο σχολικό εγχειρίδιο των μαθηματικών της Β' Γυμνασίου, με κεντρικά ερωτήματα:

Τι έμφυλους λόγους συγκροτεί το σχολικό εγχειρίδιο;

Με ποιους τρόπους, μέσω των λόγων του εγχειριδίου, τα υποκείμενα τοποθετούνται σε μια σειρά έμφυλων διπολικών αντιθέσεων;

Για την ανάλυση του εγχειριδίου χρησιμοποιήθηκε η ανάλυση περιεχομένου σε συνδυασμό με την κριτική ανάλυση λόγου και πιο συγκεκριμένα το τρισδιάστατο πρότυπο ανάλυσης του Fairclough (Phillips & Jorgensen, 2009). Η μεθοδολογία αυτή συναντάται και στην έρευνα των Στάμου κ.ά. (2007), η οποία αποτέλεσε έναυσμα για τη μεθοδολογική προσέγγιση της παρούσας μελέτης.

Στο εν λόγω πρότυπο κάθε επικοινωνιακό συμβάν έχει τρεις όψεις. Αποτελεί ταυτόχρονα κείμενο, λογοθετική πρακτική και κοινωνική πρακτική που αφορά στο πλαίσιο εκείνο το οποίο παράγει και αντίστοιχα παράγεται από τη λογοθετική πρακτική (Phillips & Jorgensen, 2009). Οι Phillips & Jorgensen (2009) εξηγούν την ανάλυση των τριών διαστάσεων στο εν λόγω πρότυπο. Με τον όρο *κείμενο,* δεν αναφέρεται μόνο στα γραπτά κείμενα, αλλά και στην ομιλία, σε εικόνες και σε οποιονδήποτε συνδυασμό τους. Η κειμενική ανάλυση αφορά στην ανάλυση του λεξιλογίου, της γραμματικής κ.λπ. Η ανάλυση των λογοθετικών πρακτικών αναφέρεται σε τρόπους επιρροής των συγγραφέων από προϋπάρχοντες λόγους, καθώς και στον τρόπο κατανάλωσης και ερμηνείας του κειμένου από τους δέκτες του. Μέσω των λογοθετικών πρακτικών δημιουργείται μια διαλεκτική σχέση κειμένων και κοινωνικών πρακτικών, όπου αναπαράγονται ή αναδιαμορφώνονται λόγοι. Με αυτό το πλαίσιο μπορεί να εξηγηθεί η σχέση ανάμεσα στο κείμενο και στο περικείμενο (περιβάλλον).

Οι αρχικές κατηγορίες ανάλυσης, που σχεδιάστηκαν στην παρούσα μελέτη, τροποποιήθηκαν κατά την πιλοτική ανάλυση -που έγινε λαμβάνοντας υπόψη το κειμενικό υλικό, τυχαία, σε ένα κεφάλαιο του βιβλίου- και στη συνέχεια παρουσιάζονται οι τελικές αναδυόμενες κατηγορίες και οι μονάδες ανάλυσής τους.

- Κατανομή γυναικείων και ανδρικών προσώπων στην εικονογράφηση του βιβλίου με μονάδα ανάλυσης την κάθε εικόνα που απεικονίζει κάποιο πρόσωπο. Στις εικόνες δεν προσμετρήθηκαν οι σταθερές εικόνες που εμφανίζονται σε κάθε παράγραφο-ενότητα του βιβλίου.
- Κατανομή γυναικείων και ανδρικών προσώπων σε λεκτικές αναφορές με μονάδα ανάλυσης το κάθε αναφερόμενο γυναικείο ή ανδρικό πρόσωπο ή πλήθος αυτών.
- Επαγγέλματα και ιδιότητες των γυναικείων και ανδρικών προσώπων με μονάδα ανάλυσης το κάθε αναφερόμενο ή εικονιζόμενο πρόσωπο (ή πλήθος αυτών), στο οποίο προσδίδεται κάποια ιδιότητα ή κάποιο επάγγελμα.

Στην ανάλυση που έγινε δεν προσμετρήθηκαν αναφορές στη συντακτική επιτροπή ή αναφορές-εικόνες που υπάρχουν στις πρώτες σελίδες του βιβλίου πριν το κύριο μέρος (εισαγωγή, περιεχόμενα, κ.λπ.), καθώς και αναφορές σε πρόσωπα που υπάρχουν στα ιστορικά σημειώματα·

αναφορές οι οποίες -αξίζει να σημειωθεί ότι- αφορούσαν αποκλειστικά ανδρικά πρόσωπα. Επίσης, για την ανάλυση κάποιων επικοινωνιακών συμβάντων, δηλαδή κάθε χρήσης της γλώσσας, χρησιμοποιήθηκε το τρισδιάστατο πρότυπο του Fairclough.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η ανάλυση του σχολικού εγχειριδίου έδειξε ότι επί του συνόλου των εικόνων που απεικονίζουν κάποιο πρόσωπο, 74,6% παρουσιάζουν μόνο ανδρικά πρόσωπα, 12% απεικονίζουν μόνο γυναικεία πρόσωπα, ενώ 13,4% αναπαραστάσεις και των δύο φύλων. Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι διαφορές αυτές αυξάνονται κατά πολύ στη Γεωμετρία, όπου οι εικόνες με ανδρικά πρόσωπα αποτελούν το 90% και το υπόλοιπο 10% εμπεριέχει εικόνες που απεικονίζουν και τα δύο φύλα. Τα κορίτσια, επομένως, φαίνεται να περιθωριοποιούνται στον χώρο της Γεωμετρίας· χώρος στερεοτυπικά «επικίνδυνος» για τις γυναίκες εξαιτίας και της άποψης που ταυτίζει τη χωρική ικανότητα με την ανδρική ικανότητα (Maccoby & Jacklin, 1974). Επιπλέον, το σχολικό εγχειρίδιο περιλαμβάνει τέσσερις ουδέτερες εικόνες, όπου μαθητές και μαθήτριες θα μπορούσαν να εκλάβουν πιο εύκολα τα υποκείμενα αυτά ως υποκείμενα ταύτισης.

Όσον αφορά στις εικόνες που παρουσιάζονται πάνω από δύο πρόσωπα, ο αριθμός των ανδρικών προσώπων είναι πάντα μεγαλύτερος, ενώ όταν αποτελούνται από μια ανδρική και μια γυναικεία μορφή τότε ο ρόλος τους δεν είναι ισότιμος. Για παράδειγμα, στη διπλανή εικόνα κεντρικό πρόσωπο είναι η κυρία Μαρίκα, η οποία παρουσιάζεται με μια καρικατούρα ως η «λαϊκή» τρελαμένη γυναίκα-νοικοκυρά και ο άνδρας ως ο ήρεμος έμπορος. Στο δίπολο λογικό/ παράλογο η κυρία Μαρίκα καταλαμβάνει την υποδεέστερη θέση. Οι ρόλοι εδώ δύσκολα θα μπορούσαν να είναι αντεστραμμένοι, μιας και τα ψώνια, ο καταναλωτισμός, μια «λαϊκή» εμφάνιση αλλά και μια υστερική φυσιογνωμία ταυτίζονται στερεοτυπικά με μια γυναικεία φυσιογνωμία. Στο παράδειγμα αυτό, όπως παρατηρεί και η Walkerdine (2013), ακόμη και αν τα δύο φύλα φαίνονται να αντιπροσωπεύονται ισόρροπα, τελικά οι γυναίκες τοποθετούνται σε συγκεκριμένο υποδεέστερο ρόλο από αυτόν των ανδρών.

Όσον αφορά στην κατανομή γυναικείων και ανδρικών προσώπων σε λεκτικές αναφορές, οι αναφορές σε ανδρικά πρόσωπα είναι -και σε αυτή την περίπτωση- πολύ περισσότερες (71,7%) από τις αναφορές σε γυναικεία πρόσωπα (28,3%). Στο μέρος της Γεωμετρίας οι παραπάνω διαφορές αυξάνονται και πάλι, με τις ανδρικές αναφορές να φτάνουν στο 89,5% ενώ γυναικεία πρόσωπα να αναφέρονται μόνο στο $1^{ο}$ κεφάλαιο.

Τα ποσοστά των ανδρικών αναφορών θα ήταν συντριπτικά μεγαλύτερα αν συνυπολογίζονταν και αναφορές σε πρόσωπα που χρησιμοποιούν το αρσενικό γένος. Πρόκειται για τον λεγόμενο γλωσσικό σεξισμό που υπάρχει διάχυτος στην κοινωνία μας και αποσιωπά τη γυναίκα βοηθώντας έτσι, όπως αναφέρει η Φραγκουδάκη (1989, όπ. αναφ. στο Φρειδερίκου, 1995), να μείνει άθικτη η τάξη του κόσμου.

Οι ρόλοι που συναντώνται στο βιβλίο είναι συνήθως οικείοι προς τους/τις μαθητές/ριες, αφού το 30,2% των ανδρικών ιδιοτήτων αφορά μαθητές, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό για τις μαθήτριες φθάνει το 45,5%, δηλαδή περίπου οι μισές ιδιότητες των γυναικείων προσώπων περιορίζονται στη σχολική τάξη. Η γυναίκα αντλεί μετά την ταυτότητά της από την οικογένεια (22,7%) και αν συνυπολογίσουμε και τις αναπαραστάσεις εκείνες που δίνουν την ιδιότητα της νοικοκυράς στα γυναικεία πρόσωπα τότε το ποσοστό αυτό αγγίζει το 31,8% των γυναικείων ιδιοτήτων, δηλαδή αναπαρίσταται με τον παραδοσιακό στερεοτυπικό της ρόλο.

Αντίθετα, ο άνδρας παρουσιάζεται πολλές φορές (25,6%) ως αθλητής ή να κάνει κάποιο σπορ και πολύ λιγότερες να αντλεί την ταυτότητά του από την οικογένεια (9,3%). Έτσι ο ανδρισμός συνδέεται άμεσα με φυσικές και νοητικές προκλήσεις αφού στο αγόρι ανατίθεται ενεργός κοινωνική και προσωπική δράση, ενώ η γυναίκα περιορίζεται στο σπίτι, στο σχολείο ή στα ψώνια (Mendick, 2006). Σύμφωνα με τη Walshaw (2007) εστιάζοντας σε αυτές τις διαφορές ή/ και ομοιότητες της παρουσίασης των δύο φύλων μπορούμε να σκεφτούμε και να κατανοήσουμε το τι σημαίνει "να επιτελείς το φύλο σου".

Οι εργαζόμενοι –οποιασδήποτε δουλειάς- καταλαμβάνουν το 30,2% ενώ οι εργαζόμενες μόλις το 18,2%, με αναφορές σε στερεοτυπικά γυναικεία επαγγέλματα (π.χ. νοσοκόμα, τηλεπαρουσιάστρια), ενώ μόνο μία φορά γυναικείο πρόσωπο ασκεί κάποιο επάγγελμα κύρους· στιγμιότυπο το οποίο αναλύεται στη συνέχεια. Τα παραπάνω «αναπαράγουν την αίσθηση της ιστορικότητας της γυναικείας επαγγελματικής ταυτότητας και διαιωνίζουν την εικόνα της γυναικείας υποτέλειας, παραπέμποντας […] στον μικροαστικό χώρο των 'κατεξοχήν γυναικείων' επαγγελμάτων παροχής υπηρεσιών» (Φρειδερίκου, 1995, σελ.124)

Ας δούμε όμως πώς παρουσιάζεται μια γυναίκα στο μοναδικό επάγγελμα κύρους που της ανατίθεται. Κεντρικό πρόσωπο στο εν λόγω επικοινωνιακό συμβάν είναι η Πηνελόπη. Στη συνέχεια, παραθέτουμε τη δραστηριότητα του σχολικού εγχειριδίου:

Η Πηνελόπη έγινε αρχιτέκτων! Πήρε επιτέλους το δίπλωμά της και γεμάτη όρεξη ρίχνεται στην πρώτη της δουλειά! Πρέπει να χτίσει ένα σπίτι με τετραγωνική βάση σε ένα γωνιακό οικόπεδο. Αφού ρώτησε την Πολεοδομία, πληροφορήθηκε ότι στο συγκεκριμένο οικόπεδο μπορεί κανείς να χτίσει σπίτι εμβαδού 289 m^2. Ποιο θα πρέπει να είναι το μήκος x κάθε πλευράς της τετραγωνικής βάσης του σπιτιού;

Αρχικά, η εικόνα παραπέμπει σε μια ανδρική μορφή. Θα λέγαμε ότι η Πηνελόπη φόρεσε την ανδρική ταυτότητα σαν μάσκα ή με την ορολογία της Doane (2006) τη μασκαράτα του ανδρισμού και «επιτελεί ανδρικότητα» (doing masculinity) με την ορολογία της Mendick (2006). Στην Πηνελόπη δεν δίνεται η στερεοτυπική εικόνα της γυναίκας και αυτό γιατί δεν είναι μια συνηθισμένη γυναίκα νοικοκυρά· είναι αρχιτέκτων! Στην έρευνά της η Walkerdine (2013) δηλώνει ότι «ελάχιστα κορίτσια κατορθώνουν να συνδυάσουν ταυτόχρονα τη διανοητική ικανότητα και τη θηλυκότητα» (σελ. 301).

«Η Πηνελόπη», λοιπόν, «έγινε αρχιτέκτων!». Αρχικά, η χρήση παθητικής φωνής («*έγινε*») και όχι ενεργητικής (π.χ. «*είναι*»), μπορούμε να πούμε ότι δηλώνει την απουσία ενός ενεργητικού υποκειμένου. Επιπλέον, γίνεται χρήση του αρσενικού γένους για το επάγγελμα. Το θηλυκό *αρχιτεκτόνισσα* απουσιάζει πλήρως από τον επίσημο επαγγελματικό τίτλο (αρχιτεκτόνισσα μηχανικός) (Ιορδανίδου & Μάντζαρη, 2005). Ο Μπασλής (1995, όπ. αναφ. στο Κατσούδα & Τράπαλης, 2012) έδειξε ότι τα επαγγέλματα κύρους είναι εκείνα που, κατά κύριο λόγο, παρουσιάζουν πρόβλημα στον σχηματισμό του θηλυκού με αποτέλεσμα να υπάρχουν καταλήξεις με υψηλότερο κύρος.

Άξιο σχολιασμού, όμως, αποτελεί και το θαυμαστικό στο τέλος της πρότασης, το οποίο εκφράζει θαυμασμό ή έκπληξη. Σε συνδυασμό με την επόμενη πρόταση («*Πήρε επιτέλους το δίπλωμά της και γεμάτη όρεξη ρίχνεται στην πρώτη της δουλειά!*») και το δεύτερο θαυμαστικό, το συναίσθημα μοιάζει περισσότερο με έκπληξη. Η Πηνελόπη μάλλον ταλαιπωρήθηκε ή άργησε να πάρει το δίπλωμά της. Όλα αυτά συγκροτούν λογοθετικές πρακτικές που κατασκευάζουν ως προβληματική τη σχέση γυναίκας και επιστήμης, ενώ ως φυσιολογική την ενασχόλησή της με άλλες στερεοτυπικές δραστηριότητες που της αποδίδονται στις σελίδες του εγχειριδίου. Όπως τονίζει η Φρειδερίκου (1995), αν και η παρουσίαση γυναικών σε επαγγέλματα κύρους προωθεί την ισότητα των φύλων, «η περιχαράκωση των ρόλων, ώστε να μην έλκουν και ενθαρρύνουν –μέσω του κοριτσιού των ιστοριών- τις μαθήτριες σε μελλοντική επαγγελματική ταύτιση, ακυρώνει το εν δυνάμει θετικό μήνυμά τους» (σελ. 123). Τα δίπολα ικανός/ μη ικανή ή φυσικά ικανός/ σκληρά εργαζόμενη και γρήγορος/ αργή που εμφανίζονται στη δραστηριότητα συνδέονται με το δίπολο άνδρας/ γυναίκα αλλά και με το δίπολο μαθηματικά ικανός/ μαθηματικά μη ικανή.

Τέλος, η Πηνελόπη, στη συνέχεια της δραστηριότητας, δεν φαίνεται να δρα ενεργά. Η δραστηριότητα αναφέρει ότι η ίδια «ρώτησε» και «πληροφορήθηκε», ενώ θα μπορούσε να «σχεδιάζει», να «γνωρίζει» ή να «ξέρει» και ασχολείται με χαμηλού επιπέδου δραστηριότητες σε σχέση με την αναφορά στον άνδρα μηχανικό σε άλλο σημείο του εγχειριδίου που κατασκευάζει, υπολογίζει κ.ά. Επομένως, τα δίπολα ενεργός/ παθητικός, δυναμικός/ στατικός και σύνθετο/ απλό εμφανίζονται και δημιουργούν πιθανές θέσεις υποκειμένων (Walkerdine, 2013).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η ανάλυση που πραγματοποιήθηκε επισήμανε εκείνα τα σημεία του εγχειριδίου που αναδείκνυαν έμφυλους λόγους. Πιο συγκεκριμένα, στο σχολικό εγχειρίδιο οι ανδρικές αναφορές/εικόνες είναι συντριπτικά περισσότερες από τις γυναικείες, με τις γυναίκες σχεδόν να απουσιάζουν από το κομμάτι της γεωμετρίας.

Οι θέσεις υποκειμένων που δημιουργούν οι ρόλοι που αποδίδονται στα πρόσωπα παρουσιάζουν, πολλές φορές, το θηλυκό και το αρσενικό στοιχείο να επιτελεί την έμφυλη ταυτότητά του, δηλαδή τον στερεοτυπικό του ρόλο. Η γυναίκα αντλεί την ταυτότητά της κυρίως από το σπίτι και την οικογένεια και δεν ασχολείται με δύσκολα ή σοβαρά ζητήματα, ενώ ο άνδρας συνήθως δείχνει την κυριαρχία του στον κόσμο, αφού σπουδάζει, δουλεύει, αθλείται και συμμετέχει σε πλήθος δραστηριοτήτων με αποτέλεσμα να σκιαγραφείται η εικόνα ενός ηγεμονικού ανδρισμού. Τα παραπάνω αποτελέσματα συνάδουν με τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη μελέτη των Στάμου κ.ά. (2007), αλλά και με τα ευρήματα διαφόρων ερευνών σε σχολικά εγχειρίδια πολλών μαθημάτων (βλ. Χαρδαλιά & Ιωαννίδου, 2008)

Σε μερικές περιπτώσεις, η ταυτόχρονη παρουσίαση ανδρικών και γυναικείων προσώπων γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε η γυναικεία παρουσία να μοιάζει υποδεέστερη από την ανδρική. Στις ελάχιστες περιπτώσεις που γυναικεία πρόσωπα εμφανίζονται σε «ανδρικές δραστηριότητες», αυτά παρουσιάζονται να «επιτελούν ανδρικότητα», φορώντας τη μασκαράτα του ανδρισμού· κάτι το οποίο δεν φαίνεται να συμβαίνει αντίστοιχα με τα ανδρικά πρόσωπα.

Στην εν λόγω μελέτη συναντήσαμε, επίσης, μια σειρά αλληλένδετων διπολικών αντιθέσεων· μαθηματικά ικανός-ή/ μαθηματικά μη ικανός-ή, φυσικά ικανός-ή/ σκληρά εργαζόμενος-ή, γρήγορος-η/ αργός-ή, ενεργός-ή/ παθητικός-ή, δυναμικός-ή/ στατικός-ή, λογικό/ παράλογο, σύνθετο/ απλό. Τα δίπολα αυτά έχουν άμεση σχέση με το δίπολο άνδρας/ γυναίκα, με τον πρώτο όρο να συνδέεται με τον ανδρισμό και να βρίσκεται σε πλεονεκτική θέση σε σχέση με τον δεύτερο όρο, που συνδέεται με τη θηλυκότητα (Mendick, 2006).

Σε μια κοινωνία, στην οποία όποιος δεν επιτελεί «σωστά» το φύλο του τιμωρείται και περιθωριοποιείται, το σχολικό βιβλίο φαίνεται να κρατά καλά το κοινωνικό συμβόλαιο διευρύνοντας υπάρχουσες θέσεις υποκειμένων με την ισότητα αλλά και τη διαφορετικότητα να μην αποκτά θέση. Αυτό δεν σημαίνει πως θεωρούμε ότι όλο αυτό είναι εμπρόθετο ούτε ότι πρόκειται για μια κοινωνική συνομωσία. Υποστηρίζουμε ότι η κοινωνική πραγματικότητα είναι βαθιά εμποτισμένη με μύθους και λόγους από τους οποίους είναι πολύ δύσκολο να απαλλαχθούμε και επομένως οι μύθοι αυτοί ενυπάρχουν σε όλες τις εκφάνσεις της καθημερινότητάς μας. Τα αναλυτικά προγράμματα και συνεπώς τα σχολικά εγχειρίδια, που αποτελούν έναν μοχλό κοινωνικής αλλαγής, θα έπρεπε, επομένως, να αναδεικνύουν και να προβληματοποιούν τους παραπάνω λόγους και διπολικούς διαχωρισμούς και όχι να τους φυσικοποιούν αναπαράγοντάς τους.

Ευχαριστίες

Η παρούσα μελέτη αποτελεί τμήμα της διπλωματικής μου εργασίας στο πλαίσιο του Π.Μ.Σ. Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών του Ε.Κ.Π.Α. Ευχαριστώ ιδιαίτερα για τη συμβολή της την κυρία Άννα Χρονάκη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αθανασίου, Α. (2006). Εισαγωγή. Φύλο, εξουσία και υποκειμενικότητα μετά το «δεύτερο κύμα». Στο Α. Αθανασίου (Επιμ.), *Φεμινιστική θεωρία και πολιτισμική κριτική* (σελ. 13-138). Αθήνα: νήσος.

Butler, J. (1990). *Gender Trouble: Feminism and the Subversion of Identity*. New York/London: Routledge.

Chassapis, D. (1997). The social ideologies of school mathematics applications: a case study of elementary school textbooks. *For the Learning of Mathematics, 17* (3), 24-27.

Chronaki, A. & Pechtelidis Y. (2012). 'Being Good' at Maths. Fabricating Gender Subjectivity. *Journal of Research in Mathematics Education, 1* (3), 246–277.

Doan, M. A. (2006). Το φιλμ και η μασκαράτα: Θεωρητικοποιώντας τη γυναίκα-θεατή. Στο Α. Αθανασίου (Επιμ.), *Φεμινιστική θεωρία και πολιτισμική κριτική* (σελ. 281-310). Αθήνα: νήσος.

Gellert, U. (2013). Η κοινωνική τάξη στην τάξη των μαθηματικών. Μια κοινωνιολογική οπτική στα σχολικά βιβλία, στους διαλόγους και στις εξετάσεις. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.), *Γλώσσα, Φυλή, Φύλο και Κοινωνική τάξη στη μάθηση και στη διδασκαλία των Μαθηματικών* (σελ. 37-56). Αθήνα: ΕΚΠΑ, Τμήμα Εκπαίδευσης και Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία.

Ιορδανίδου, Ά. & Μάντζαρη, Ε. (2005). Τα θηλυκά επαγγελματικά ουσιαστικά: γλωσσική χρήση και τυποποίηση. Ελληνική Εταιρεία Ορολογίας, *5ο Συνέδριο ΕΛΕΤΟ «Ελληνική Γλώσσα και Ορολογία», 13-15 Οκτωβρίου 2005* (σσ. 73-87). Αθήνα: Τεχνικό Επιμελητήριο Ελλάδας.

Κατσούδα, Γ. & Τράπαλης, Γ. (2012). Μορφολογικά προβλήματα της Ελληνικής στη διδασκαλία της: Η περίπτωση των επαγγελματικών θηλυκών ονομάτων. *Γλωσσολογία/Glossologia*, *20*, 55-64.

Maccoby, E. & Jacklin, C. (1974). *The psychology of sex differences.* Stanford: Stanford University Press.

Mendick, H. (2006). *Masculinities in Mathematics*. London: Open University Press.

Πεχτελίδης, Γ. (2012). Κοινωνιολογία του ανδρισμού στο σχολείο. Στο *Να κοιτάς με άλλα μάτια να βλέπεις διαφορετικά – έμφυλες προσεγγίσεις στην εκπαίδευση*. Αθήνα: Εταιρεία Σπουδών – Σχολή Μωραΐτη.

Phillips, L. & Jorgensen, M. (2009). *Ανάλυση Λόγου: Θεωρία και Μέθοδος*. Αθήνα: Παπαζήση.

Στάμου, Α. Γ., Χρονάκη, Α. & Ζιώγα, Α. (2007). Επιστημονικοί λόγοι και έμφυλες αναπαραστάσεις στο σχολικό μαθηματικό περιοδικό Ευκλείδης Α'. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, 1,* 63-89.

Walkerdine, V. (2013). *Αποκλείοντας τα κορίτσια: Κορίτσια και μαθηματικά*. Αθήνα: Gutenberg.

Walshaw, M. (2007). *Working with Foucault in Education.* Rotterdam: Sense.

Φρειδερίκου, Α. (1995). *«Η Τζένη πίσω από το τζάμι». Αναπαραστάσεις των φύλων στα εγχειρίδια γλωσσικής διδασκαλίας του Δημοτικού σχολείου*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Χαρδαλιά, Ν. & Ιωαννίδου, Α. (2008). *Έμφυλες κοινωνικές αναπαραστάσεις στα σχολικά εγχειρίδια: Μελέτη βιβλιογραφικής επισκόπησης*. Αθήνα: Κέντρο Ερευνών για Θέματα Ισότητας. Ανακτήθηκε από http://www.kethi.gr/

Χρονάκη, Α. (2009). *Φύλο και Μαθηματικά*. Λήμμα για το ηλεκτρονικό λεξικό ΦυλοΠαιδεία (fylopaidia). http://www.thefylis.uoa.gr/fylopedia/index.php/Φύλο_και_μαθηματικά (11 σελ.).

Χρονάκη, Α. (2013α). Επεξηγηματικές Σημειώσεις της Επιμελήτριας. Στο Α. Χρονάκη (Επιμ.), *Αποκλείοντας τα κορίτσια: κορίτσια και μαθηματικά* (σελ. 315-328). Αθήνα: Gutenberg.

Χρονάκη, Α. (2013β). *Φύλο και Τεχνολογία στην Εκπαίδευση: Σύνθεση Βιβλιογραφικής Ανασκόπησης και Ανάπτυξη Μεθοδολογικού Πλαισίου*. Κέντρο Ελληνικής Γλώσσας.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟ ΤΟΥΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΑ

Γκενέ Κωνσταντίνα, Ζαχάρος Κωνσταντίνος, Λαβίδας Κωνσταντίνος, Κουστουράκης Γεράσιμος

Πανεπιστήμιο Πατρών, Τ.Ε.Ε.Α.Π.Η.

konstantina-gk@hotmail.com, zacharos@upatras.gr, lavidas@upatras.gr, koustourakis@upatras.gr

Η παρούσα έρευνα έχει ως στόχο την ανάλυση περιεχομένου των σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών της Στ΄ Δημοτικού και της Α΄ Γυμνασίου, με κριτήριο τον διαθεματικό χαρακτήρα τους. Αρχικά, διερευνήθηκε αν τα εγχειρίδια, πληρούν το κριτήριο της διαθεματικότητας και σε ποιο βαθμό. Επιπρόσθετα, έγινε σύγκριση των εγχειριδίων προκειμένου να διερευνηθεί η ύπαρξη διαφοροποιήσεων στο περιεχόμενό τους.Για την προσέγγιση του ερευνητικού υλικού χρησιμοποιήθηκε η ανάλυση περιεχομένου. Τα ευρήματα έδειξαν ότι η συγγραφή των εγχειρίδιων ανταποκρίνεται σε μικρό βαθμό στον παιδαγωγικό στόχο της διαθεματικότητας.

Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

Τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών έχουν μεγάλη επίδραση στη διδασκαλία και θεωρούνται ο ενδιάμεσος κρίκος ανάμεσα στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ) και την παιδαγωγική πρακτική στη σχολική τάξη (Valverde et al., 2002).

Το ερευνητικό ενδιαφέρον για τον ρόλο των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών οδήγησε τις τελευταίες δεκαετίες σε πλήθος ερευνών όπου η διερεύνηση του περιεχομένου των σχολικών εγχειριδίων μελετήθηκε ως ανεξάρτητη μεταβλητή (Valverde et al., 2002). Σύμφωνα με τους Fan et al. (2013) στην ανάλυση σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών περιέχεται ένα ευρύ φάσμα ερευνητικών ενδιαφερόντων, όπως για παράδειγμα:

Έρευνες που επιχειρούν να ανιχνεύσουν τις παιδαγωγικές προθέσεις των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών, έρευνες για τη δομή και τα αντικείμενα απ' όπου αντλούν τα περιεχόμενά τους τα σχολικά Μαθηματικά (π.χ. Pepin & Haggarty, 2001. Pepin et al., 2013), έρευνες που ασχολούνται με τα κοινωνιολογικά πλαίσια και τις πολιτισμικές όψεις, που περιέχονται στα εγχειρίδια Μαθηματικών, άλλες έρευνες εστιάζουν στη διερεύνηση των πεποιθήσεων που αποτυπώνονται στο περιεχόμενό τους, ενώ άλλες έρευνες ασχολούνται με τη φύση των

Μαθηματικών και τον τρόπο συγκρότησης της μαθηματικής γνώσης (π.χ. Koustourakis & Zacharos, 2011). Επίσης, συναντάμε έρευνες που ασχολούνται με τη χρήση των εγχειριδίων στη σχολική τάξη (Zhu & Fan, 2002. Remillard, 2005), καθώς και άλλες που εστιάζουν στη συγκριτική ανάλυση σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών από την ίδια χώρα ή από διαφορετικές, με στόχο τον προσδιορισμό διαφορών και ομοιοτήτων (Fan et al., 2013.Fan & Zhu, 2007. Johansson, 2003. Pepin & Haggarty, 2001.Valverde et al., 2002). Ειδικότερα στη συγκριτική μελέτη των Valverde et al. (2002) σε εγχειρίδια πολλών χωρών επισημαίνονται προβλήματα ενσωμάτωσης των προτεινόμενων μεταρρυθμίσεων στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών. Τέλος, σε πολυεθνική έρευνα των Fan & Zhu (2007), που εστιάζει στην επίλυση προβλήματος, εντοπίζονται αναντιστοιχίες μεταξύ των παιδαγωγικών στόχων του Α.Π.Σ. και των σχολικών εγχειριδίων.

ΟΙ ΑΛΛΑΓΕΣ ΣΤΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ Η ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ

Στις προσπάθειες εκσυγχρονισμού και βελτίωσης του εκπαιδευτικού έργου συγκαταλέγεται και η αναμόρφωση του Α.Π.Σ. Η τελευταία αναμόρφωση του Α.Π.Σ. στη χώρα μας έγινε με το Δ.Ε.Π.Π.Σ. του 2003, σύμφωνα με το οποίο έγινε η συγγραφή των σχολικών εγχειριδίων που χρησιμοποιούνται έως σήμερα. Οι συγκεκριμένες αλλαγές εμφανίζονται ως υλοποίηση αποφάσεων της Ευρωπαϊκής Ένωσης και θεωρείται ότι συμβάλλουν στον εκσυγχρονισμό και εξευρωπαϊσμό του περιεχομένου της ελληνικής εκπαίδευσης (Alahiotis & Karatzia, 2006. Koustourakis & Zacharos, 2011).

Βασική καινοτομία του Δ.Ε.Π.Π.Σ αποτέλεσε η προώθηση της διαθεματικότητας όπου προωθείται η διασύνδεση επιστημονικών αντικειμένων που διδάσκονται σε μία τάξη (ΥΠΕΠΘ, 2003).

Στην παρούσα μελέτη σκοπός είναι η ανάλυση του περιεχομένου των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών της Στ΄ Δημοτικού και της Α΄ Γυμνασίου. Κριτήριο ανάλυσης αποτέλεσε ο βαθμός συμβατότητας των εν λόγω εγχειριδίων με τη βασική παιδαγωγική αρχή που διατυπώνεται στο Δ.Ε.Π.Π.Σ., το οποίο επιδιώκει τα επιμέρους σχολικά μαθήματα να μην διδάσκονται μονωμένα, αλλά η ύλη τους να συνδέεται με όψεις γνώσεων από άλλα σχολικά μαθήματα (ΥΠΕΠΘ, 2003).

Ειδικότερα, το ερευνητικό ερώτημα που επιχειρείται να διερευνηθεί είναι το εξής: Οι παιδαγωγικές αρχές της διαθεματικότητας αποτυπώνονται στο περιεχόμενο των διδακτικών εγχειριδίων των Μαθηματικών της Στ΄ τάξης του Δημοτικού και της Α΄ τάξης του Γυμνασίου;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Υλικό για τη συλλογή των εμπειρικών δεδομένων

Υλικό για τη συλλογή δεδομένων αποτέλεσε το επίσημο έντυπο εκπαιδευτικό υλικό των Μαθηματικών, που χρησιμοποιείται στις δύο τάξεις. Πιο συγκεκριμένα, στη Στ΄ Δημοτικού μελετήθηκε και αναλύθηκε το εγχειρίδιο του μαθητή και τα τέσσερα τετράδια εργασιών, ενώ στην Α΄ Γυμνασίου το εγχειρίδιο του μαθητή. Για την ανάλυση χρησιμοποιήθηκαν οι πιο πρόσφατες εκδόσεις των εγχειριδίων που εισήχθησαν για διδασκαλία το 2006 και 2007 αντίστοιχα (Κασσώτη κ.ά. 2014α, 2014β. Βανδουλάκης κ.ά., 2012). Κριτήριο για την επιλογή δύο τάξεων, που ενώ είναι συνεχόμενες ανήκουν σε διαφορετικές σχολικές βαθμίδες, ήταν να μελετηθεί πιθανή ασυνέχεια σε σχέση με τη διαθεματικότητα στη μετάβαση από τη μια βαθμίδα στην άλλη. Να σημειωθεί ότι πολλές μαθηματικές έννοιες που πραγματεύονται τα εγχειρίδια των δύο τάξεων είναι κοινές.

Μονάδα ανάλυσης

Η ανάλυση του περιεχομένου των εγχειριδίων των Μαθηματικών, έγινε με κριτήριο το διαθεματικό τους περιεχόμενο. Τα εγχειρίδια αναλύθηκαν με τη μέθοδο ανάλυσης περιεχομένου, λαμβάνοντας ως μονάδα ανάλυσης την «πρόταση» (Koustourakis & Zacharos, 2011. Morais et al., 1999). Η «πρόταση» ορίζεται ως ένα απόσπασμα κειμένου που περιγράφει μια πλήρη διδακτική δραστηριότητα, η οποία έχει συγκεκριμένο διδακτικό στόχο και θέμα διδασκαλίας. Συνεπώς, η πρόταση μπορεί να είναι ένα κείμενο θεωρίας, μια δραστηριότητα για τους μαθητές, μια μαθηματική εφαρμογή, μια μαθηματική άσκηση ή ένα γράφημα. Στη συνέχεια οι μονάδες ανάλυσης ταξινομήθηκαν στη βάση των επόμενων κριτηρίων:

Πρώτο κριτήριο ταξινόμησης αποτέλεσε ο διαθεματικός χαρακτήρας της πρότασης. Στην περίπτωση ύπαρξης διαθεματικότητας έγινε καταγραφή του επιστημονικού αντικειμένου με το οποίο συνδέεται.

Δεύτερο κριτήριο ταξινόμησης ήταν η εκπαιδευτική βαθμίδα που περιέχει τη συγκεκριμένη πρόταση.

Τρίτο κριτήριο ήταν η διδακτική θέση την οποία καταλαμβάνει στο εγχειρίδιο η πρόταση. Σύμφωνα με τη δομή των εγχειριδίων, οι προτάσεις μπορεί να εντάσσονται στην κατηγορία των εισαγωγικών δραστηριοτήτων, στη θεωρία και τα ένθετα κείμενα, στα παραδείγματα και τις εφαρμογές, ή τέλος, στις ασκήσεις και δραστηριότητες εμπέδωσης.

Με βάση τα προηγούμενα κριτήρια, έγινε επεξεργασία των δεδομένων με τη χρήση του στατιστικού λογισμικού SPSS (version 22).

Για τη διασφάλιση της αξιοπιστίας στην ταξινόμηση των προτάσεων, οι προτάσεις ταξινομήθηκαν από καθέναν από τους συγγραφείς της παρούσας έρευνας, που εργάστηκε αυτόνομα. Η σύγκριση των τελικών ταξινομήσεων των κριτών έδειξε σύγκλιση τουλάχιστον στο 75% των περιπτώσεων (Koustourakis & Zacharos, 2011)

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων της μελέτης περιλαμβάνει ποιοτική και ποσοτική διερεύνηση. Στην ποιοτική διερεύνηση αξιοποιήθηκε το πλαίσιο αναγνώρισης και ταξινόμησης των προτάσεων που περιγράφεται στη μεθοδολογία, ενώ στην ποσοτική ανάλυση και παρουσίαση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν πίνακες συχνοτήτων. Ο έλεγχος των διαφορών των ανεξαρτήτων δειγμάτων (εγχειρίδια Μαθηματικών Στ΄ Δημοτικού και εγχειρίδιο Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου), αναφορικά με το κριτήριο της διαθεματικότητας, πραγματοποιήθηκε με τον έλεγχο chi-square.

Σχετικά με το κριτήριο της διαθεματικότητας

Από τις 1860 μαθηματικές προτάσεις που καταγράφηκαν συνολικά, οι 230 προτάσεις (12,37%) είναι διαθεματικές, ενώ οι υπόλοιπες 1630 (87,63%) δεν έχουν διαθεματικό χαρακτήρα.

Πιο αναλυτικά (Πίνακας 1), στα εγχειρίδια της Στ΄ Δημοτικού καταγράφηκαν συνολικά 946 προτάσεις. Από αυτές οι 168 (17,76%) έχουν διαθεματικό περιεχόμενο, ενώ οι υπόλοιπες 778 (82,24%) είναι αμιγώς μαθηματικές. Στο εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου από το σύνολο των 914 προτάσεων οι 62 (6,78%) έχουν διαθεματικό χαρακτήρα, ενώ οι υπόλοιπες 852 (93,22%) είναι αμιγώς μαθηματικές.

	Μη Διαθεματικές		Διαθεματικές		Σύνολο	
Τάξη	Αρ. Προτάσεων	%	Αρ. Προτάσεων	%	Αρ. Προτάσεων	%
Στ΄ Δημοτικού	778	82,24	168	17,76	946	100,00
Α΄ Γυμνασίου	852	93,22	62	6,78	914	100,00
Σύνολο	1630	87,63	230	12,37	1860	100,00

Πίνακας 1. Συχνότητες προτάσεων ως προς το διαθεματικό τους περιεχόμενο

Αναλύοντας περαιτέρω τα σχολικά εγχειρίδια της Στ΄ Δημοτικού διαπιστώθηκε ότι στα τετράδια εργασιών αποτυπώνεται σε μεγαλύτερο βαθμό ο διαθεματικός χαρακτήρας απ' ότι στο εγχειρίδιο μαθητή (Πίνακας 2). Μάλιστα η διαφοροποίηση είναι στατιστικά σημαντική (x^2=30,10, df=4, p<0,001).

	Μη Διαθεματικές		Διαθεματικές		Σύνολο
Σχολικό Εγχειρίδιο	Αρ. Προτάσεων	%	Αρ. Προτάσεων	%	Αρ. Προτάσεων
Εγχειρίδιο Μαθητή	437	86,71	67	13,29	504
Τετράδιο Εργ. α΄	101	80,16	25	19,84	126
Τετράδιο Εργ. β΄	96	79,34	25	20,66	121
Τετράδιο Εργ. γ΄	87	82,86	18	17,14	105
Τετράδιο Εργ. δ΄	57	63,33	33	36,67	90
Σύνολο	778	82,24	168	17,76	946

Πίνακας 2. Συχνότητες προτάσεων ως προς το διαθεματικό τους περιεχόμενο στο έντυπο υλικό της Στ΄ Δημοτικού

Επιστημονικά αντικείμενα που εμπλέκονται στις διαθεματικές μαθηματικές προτάσεις

Αναφορικά με τα γνωστικά αντικείμενα που συνδέονται οι διαθεματικές μαθηματικές προτάσεις, διαπιστώθηκαν τα εξής (Πίνακας 3):

Στα εγχειρίδια της Στ′ Δημοτικού, από τις 168 διαθεματικές μαθηματικές προτάσεις, 28 (16,67%) συνδέονται με τη Γεωγραφία, 11 (6,55%) με τη Γλώσσα, 46 (27,38%) με τα Εικαστικά, 25 (14,88%) με την Ιστορία, 11 (6,55%) με την Κοινωνική και Πολιτική Αγωγή (Κ.Π.Α.), 10 (5,95%) με τη Φυσική Αγωγή και 37 (22,02%) με τη Φυσική. Ιεραρχώντας τη συμμετοχή των επιμέρους γνωστικών αντικειμένων στις διαθεματικές μαθηματικές προτάσεις, διαπιστώνεται ότι την πρώτη θέση κατέχει το γνωστικό αντικείμενο των Εικαστικών και ακολουθεί της Φυσικής.

Στο σχολικό εγχειρίδιο της Α′ Γυμνασίου, από τις 62 διαθεματικές μαθηματικές προτάσεις, 6 (9,68%) σχετίζονται με την Γεωγραφία, 6 (9,68%) με τη Γλώσσα, 17 (27,42%) με τα Εικαστικά, 25 (40,32%) με την Ιστορία, 1 (1,61%) με τη Μουσική, 6 (9,68%) με τη Φυσική και 1 (ποσοστό 1,61%) με τη Βιολογία.

Μάθημα	Στ΄ Δημοτικού		Α΄ Γυμνασίου		Σύνολο	
	Μη Διαθεματικές	%	Διαθεματικές	%	Σύνολο	%
Γεωγραφία	28	16,67	6	9,68	34	14,78
Γλώσσα	11	6,55	6	9,68	17	7,39
Εικαστικά	46	27,38	17	27,42	63	27,39
Ιστορία	25	14,88	25	40,32	50	21,74
Κ.Π.Α	11	6,55	*	*	11	4,78
Μουσική	*	*	1	1,61	1	0,43
Φ.Α	10	5,95	0	0,00	10	4,35
Φυσική	37	22,02	6	9,68	43	18,70
Βιολογία	*	*	1	1,61	1	0,43
Σύνολο	168	100,00	62	100,00	230	99,99

Τα πεδία με αστερίσκο (*) δηλώνουν ότι δεν διδάσκεται το αντίστοιχο μάθημα.

Πίνακας 3. Επιστημονικά αντικείμενα στις διαθεματικές μαθηματικές προτάσεις των εγχειριδίων της Στ' Δημοτικού και της Α' Γυμνασίου

Να σημειωθεί ότι υπάρχουν επτά μαθηματικές προτάσεις (3 από το εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου και 4 από το υλικό της Στ΄ Δημοτικού) που συνδέονται με περισσότερα του ενός γνωστικά αντικείμενα. Συγκεκριμένα, μία μαθηματική πρόταση εμπλέκει γνωστικά αντικείμεναΦυσικής και Ιστορίας, μία Γλώσσας και Φυσικής, μία Γεωγραφίας και Κ.Π.Α., μία Φυσικής και Εικαστικών, μία Ιστορίας και Μουσικής, μία Φυσικής και Βιολογίας και τέλος μία άλλη Ιστορίας και Εικαστικών.

Τέλος, διαπιστώθηκε ότι στις περιπτώσεις των διαθεματικών προτάσεων το περιεχόμενο των επιστημονικών αντικειμένων (εκτός των μαθηματικών) αντλείται από την ύλη της αντίστοιχης τάξης.

Διαθεματικές μαθηματικές προτάσεις ανά διδακτική θέση

Στα διδακτικά εγχειρίδια της Στ΄ Δημοτικού παρατηρήθηκε ότι η διδακτική θέση που κατέχει το μεγαλύτερο ποσοστό διαθεματικότητας είναι οι εισαγωγικές δραστηριότητες (Πίνακας 6). Η διαφοροποίηση είναι στατιστικά σημαντική (x^2=41,82, df=3 και p<0,001).

	Όχι		Ναι		Σύνολο	
Διδακτική Θέση	Αρ. Μ.Π.	%	Αρ. Δ.Μ.Π.	%	Αρ. Μ.Π.	%
Εισαγωγική δραστηριότητα	90	65,22	48	34,78	138	100,00
Θεωρία & ένθετα κείμενα	77	90,59	8	9,41	85	100,00
Λυμένα παραδείγματα &εφαρμογές	113	93,39	8	6,61	121	100,00
Ασκήσεις & δραστηριότητες εξάσκησης	498	82,72	104	17,28	602	100,00
Σύνολο	778	82,24	168	17,76	946	100,00

Πίνακας 6. Τοποθέτηση των προτάσεων στα εγχειρίδια της Στ' Δημοτικού

Στο σχολικό εγχειρίδιο της Α΄ Γυμνασίου παρατηρείται πως η διδακτική θέση που κατέχει το μεγαλύτερο ποσοστό διαθεματικότητας είναι η θεωρία και τα ένθετα κείμενα (Πίνακας 7). Η διαφοροποίηση είναι στατιστικά σημαντική (x^2=33,80, df=3 και p< 0,001).

	Όχι		Ναι		Σύνολο	
Διδακτική Θέση	Αρ. Μ.Π.	Ποσοστό	Αρ. Δ.Μ.Π.	Ποσοστό	Αρ. Μ.Π.	Ποσοστό
Εισαγωγική δραστηριότητα	89	93,68	6	6,32	95	100,00
Θεωρία & ένθετα κείμενα	122	82,43	26	17,57	148	100,00
Λυμένα παραδείγματα & εφαρμογές	155	93,94	10	6,06	165	100,00
Ασκήσεις & δραστηριότητες εξάσκησης	486	96,05	20	3,95	506	100,00
Σύνολο	852	93,22	62	6,78	914	100,00

Πίνακας 7. Τοποθέτηση των προτάσεων στο σχολικό εγχειρίδιο της Α' Γυμνασίου

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην παρούσα έρευνα επιχειρήθηκε η ανάλυση περιεχομένου των εγχειριδίων Μαθηματικών της Στ΄ Δημοτικού και της Α΄ Γυμνασίου ως προς τον βαθμό συμβατότητας του περιεχομένου τους με τους στόχους του Α.Π.Σ για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, που ορίζει ως κεντρική κατεύθυνση τη διαθεματική προσέγγιση.

Τα ευρήματα έδειξαν πως η πλειονότητα των προτάσεων που καταγράφηκαν (87,63%) δεν έχουν διαθεματικό χαρακτήρα. Με άλλα λόγια, τα εν λόγω εγχειρίδια παρουσιάζουν κυρίως ένα αμιγώς μαθηματικό περιεχόμενο όπου, σύμφωνα με τον Bernstein (2000), επικρατεί ισχυρή ταξινόμηση, δηλαδή αυστηρή διάκριση των επιστημονικών πεδίων. Μόνο εν μέρει εμπλέκουν θέματα από άλλα μαθήματα, παρά τη διακηρυγμένη προτροπή του Α.Π.Σ. για σύζευξη των μαθηματικών με άλλα επιστημονικά πεδία. Να σημειωθεί η στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση μεταξύ του υλικού των δύο εκπαιδευτικών βαθμίδωνως προς τη διαθεματικότητα, καθώς είναι εντονότερη στη Στ΄ Δημοτικού (17,76%) απ’ ότι στην Α΄ Γυμνασίου (6,78%). Το γεγονός αυτό δηλώνει την «ασυνέχεια» των αναλυτικών προγραμμάτων κατά τη μετάβαση από την Πρωτοβάθμια στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Στην Α’ Γυμνασίου το αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας των μαθηματικών και το συνοδευτικό εκπαιδευτικό υλικό χαρακτηρίζεται από ιδιαίτερα ισχυρή ταξινόμηση των περιεχομένων (Bernstein, 2000).

Στις διαθεματικές προτάσεις τα Μαθηματικά συνδέονται κυρίως με ένα συγκεκριμένο μάθημα του Α.Π.Σ., ενώ ελάχιστες είναι οι προτάσεις στις οποίες συνδυάζονται με περισσότερα. Στις εισαγωγικές δραστηριότητες που περιλαμβάνει κάθε ενότητα των εγχειριδίων της Στ΄ Δημοτικού, βρίσκεται το μεγαλύτερο ποσοστό διαθεματικών προτάσεων. Το γεγονός αυτό είναι μάλλον δηλωτικό της πρόθεσης των συγγραφέων να εισάγουν τις καινούργιες μαθηματικές έννοιες συνδέοντάς τες με γνώσεις, που κατέχουν οι μαθητές από την εμπειρία τους ή από τη διδασκαλία άλλων μαθημάτων. Οι εισαγωγικές αυτές δραστηριότητες απαιτούν από τους μαθητές διερευνητική αυτενέργεια και συνεργασία. Στο σχολικό εγχειρίδιο των μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου οι περισσότερες διαθεματικές προτάσεις εντοπίζονται σε ένθετα κείμενα με ιστορικές πληροφορίες για τις μαθηματικές έννοιες που πρόκειται να διδαχθούν.

Τα ευρήματα της παρούσας έρευνας υποδεικνύουν ότι η διαδικασία μετάβασης από το πεδίο του πολιτικού σχεδιασμού και της υιοθέτησης παιδαγωγικών προσεγγίσεων, στη δημιουργία κατάλληλου εκπαιδευτικού υλικού, όπου θα υλοποιούνται οι εν λόγω παιδαγωγικές αρχές, δεν είναι μια διαδικασία γραμμική και αυτονόητη. Επιπρόσθετα, τα «χάσμα» είναι περισσότερο έκδηλο στις περιπτώσεις υλοποίησης των αρχών του Α. Π. στη σχολική τάξη (Zacharos et al., 2014).

Συμπερασματικά, στη διαδικασία μετασχηματισμού των αρχών του επίσημου αναλυτικού προγράμματος σε περιεχόμενα μαθηματικής σχολικής γνώσης, υφίσταται σημαντικές προσαρμογές και «στρεβλώσεις». Το γεγονός αυτό υποδηλώνει την ύπαρξη εγγενών αδυναμιών στο σχεδιασμό των αναλυτικών προγραμμάτων και τη συγγραφή σχολικών εγχειριδίων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Alahiotis, S. N., Karatzia-Stavlioti, E. (2006). Effective curriculum policy and cross-curricularity: analysis of the new curriculum design of the Hellenic Pedagogical Institute', *Pedagogy, Culture and Society, 14*:2, 119 – 147.

Koustourakis, G. & Zacharos, K. (2011). Changes in school mathematics knowledge in Greece: a Bernsteinian analysis,*British Journal of Sociology of Education*, 32(3), 369–387.

Bernstein, B. (2000).*Pedagogy, Symbolic Control and Identity. Theory, Research, Critique, Revised Edition* (Lanham, Rowman& Littlefield Publishers Inc.).

Fan, L. & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 61–75.

Fan, L., Zhu, Y. & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions.*ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 45 (5), 633–646.

Johannson, M. (2003). *Textbooks in mathematics education: a study of textbooks as the potentially implemented curriculum* (Licentiate thesis). (Lule: Department of Mathematics, Lule, University of Technology).

Morais, A.M., Neves, I.P.&Fontinas, F.(1999). Is there any change in science educational reforms? A sociological study of theories of instruction,*British Journal of Sociology of Education*, 20(1), 37-53.

Pepin, B., & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: A way to understand teaching and learning cultures, *Zentralblatt for the Didactics of Mathematics*, 33(5), 158–175.

Pepin, B., Gueudet, G. &Trouche, L. (2013). Investigating textbooks as crucial interfaces between culture, policy and teacher curricular practice : two contrasted case studies in France and Norway, *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 45(5), 685-698.

Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula,*Review of Educational Research*, 75(2), 211–246.

Sun, X. (2011). ‘‘Variation problems’’ and their roles in the topic of fraction division in Chinese mathematics textbook examples,*Educational Studies in Mathematics*, 76(1), 65–85.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H.&Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*(Dordrecht, Netherlands, Kluwer).

Zacharos, K., Koustourakis, G., & Papadimitriou, K. (2014). Analysing the implemented curriculum of Mathematics in Preschool Education. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 151-167.

Zhu, Y.& Fan, L. (2002). Textbook use by Singaporean mathematics teachers at lower secondary level, in: D. Edge & Y. B. Har (Eds.) *Mathematics education for a knowledge-based era,Vol. 2*(Singapore: AME),194–201.

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., & Φερεντίνος, Σ., (2012). *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου. Βιβλίο Μαθητή*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου Θ. (2014α). *Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού. Βιβλίο Μαθητή*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου Θ. (2014β). *Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού. Τετράδιο εργασιών α΄, β΄, γ΄, & δ΄* . Αθήνα: ΟΕΔΒ.

ΥΠΕΠΘ (2003). *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών. (Δ.Ε.Π.Π.Σ) και Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών (Α.Π.Σ.) Δημοτικού – Γυμνασίου 303 & 304/13-3-2003*

ΣΧΕΣΕΙΣ ΠΑΙΔΙΩΝ ΚΑΙ ΓΟΝΕΩΝ ΜΕ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΜΙΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΑ ΠΛΑΙΣΙΑ

Ζουμπούλ Μπελκάι, Μακρίδου Χριστίνα, Μπλιούμη Αναστασία

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Δημοκρίτειου Πανεπιστημίου Θράκης-Τομέας Θετικών Επιστημών

belkzoub.bz@gmail.com, anasblio35@gmail.com

Η παρούσα εργασία μελετά τη συναισθηματική σχέση μαθητών Δημοτικού Σχολείου με τα μαθηματικά σε αντιπαραβολή με τη στάση των γονέων σε ένα πλειονοτικό και ένα μειονοτικό περιβάλλον. Στο βιβλιογραφικό μέρος οριοθετούνται οι βασικές έννοιες, καθώς και οι πεποιθήσεις των παιδιών και η γονεϊκή εμπλοκή στα δύο πλαίσια. Στο εμπειρικό μέρος ζητήθηκε από 200 μαθητές της πλειονότητας και της μειονότητας να απαντήσουν σε ένα ερωτηματολόγιο, και από τέσσερις γονείς να απαντήσουν σε ερωτήσεις μιας ημι-δομημένης συνέντευξης σχετικής με τις δικές τους πεποιθήσεις για τα μαθηματικά και την εμπλοκή τους στις μαθηματικές δραστηριότητες των παιδιών τους. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι πεποιθήσεις των παιδιών συγκλίνουν με αυτές των γονέων ανεξαρτήτως πολιτισμικής προέλευσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Τις τελευταίες δεκαετίες πολλοί ερευνητές ασχολήθηκαν με το θυμικό και τη σχέση του με τα μαθηματικά. Κατά τον Hannula (2007), το θυμικό παρομοιάζεται με μια «ομπρέλα» που, εκτός από τις συμπεριφορές, τις πεποιθήσεις, τα κίνητρα και τις συγκινήσεις, καλύπτει κι όλες τις μη γνωστικές πτυχές του νου. Ο McLeod (1992) διακρίνει τρεις όψεις του θυμικού: τις πεποιθήσεις (beliefs), τις στάσεις (attitudes) και τις συγκινήσεις/ συναισθήματα (emotions).

Η έρευνα που αποτελεί αντικείμενο της παρούσας εργασίας επικεντρώνεται στις πεποιθήσεις των γονέων και των μαθητών στα μαθηματικά σε δυο διαφορετικά πλαίσια, ένα πολύ-πολιτισμικό και ένα μονο-πολιτισμικό.

Πεποιθήσεις γονέων και μαθητών στα μαθηματικά

Τα ερευνητικά δεδομένα–συγκλίνουν στο ότι οι πεποιθήσεις και οι στάσεις των γονέων έχουν επιρροή στις πεποιθήσεις και τις στάσεις των παιδιών (Hannula, Kaasila, Kaine, Markku, & Pehkonen, 2007). Πιο συγκεκριμένα, οι γονείς επηρεάζουν τη στάση των παιδιών τους απέναντι στα μαθηματικά με τρεις τρόπους. Πρώτον, με τις προσδοκίες τους για την επίτευξη των στόχων των παιδιών τους. Δεύτερον, με την ενθάρρυνση και τρίτον με τη στάση τη δική τους απέναντι στα μαθηματικά.

Για παράδειγμα, η πεποίθηση για τον ορθολογισμό των μαθηματικών και το ενδιαφέρον προς το αντικείμενο είναι αυτές που μεταβιβάζονται από το γονέα στο παιδί. Όπως αναφέρουν οι Beniagno και Ellis (2004), η ικανότητα των γονέων να μεριμνούν ποικιλοτρόπως για τη μαθηματική εκπαίδευση εξαρτάται από το πολιτισμικό αξιακό τους κώδικα. Έτσι, οι γονείς που πιστεύουν στη λειτουργική αξία των μαθηματικών φαίνεται να επιδίδονται σε αυτή με περισσότερο ζήλο.

Κατά τους Cai, Moyer και Wang (1997), η γονεϊκή εμπλοκή στο μάθημα των μαθηματικών διακρίνεται σε άμεση και έμμεση. Λιγότερο θετική επίδραση έχει η άμεση εμπλοκή όπως, παραδείγματος χάρη, η παροχή βοήθειας στα παιδιά, όταν τη χρειάζονται οι μαθητές στο μάθημα των μαθηματικών. Συγκεκριμένα, όταν οι γονείς είναι ανασφαλείς σε σχέση με τα μαθηματικά, τείνουν να πιστεύουν ότι, εφόσον οι ίδιοι δεν είναι καλοί στα μαθηματικά ούτε τα παιδιά τους μπορούν να είναι. Διαφαίνεται, λοιπόν, ότι οι εμπειρίες των παιδιών διαφέρουν ανάλογα με τη στάση των γονέων και τη βοήθεια που δέχονται από αυτούς στα μαθηματικά (Λεμονίδης κ.ά., 2004).

Το πρόβλημα οξύνεται στην περίπτωση παιδιών και γονέων που ανήκουν σε κοινωνικά ή/και πολιτισμικά ‘ευπαθείς’ ομάδες, καθώς είναι ευρέως αποδεκτό ότι οι κοινωνικές και οι οικονομικές συνθήκες του οικογενειακού περιβάλλοντος συχνά ενσωματώνονται στην καθημερινότητα των υποκειμένων, συναποτελώντας διαμορφωτικό παράγοντα των πεποιθήσεων τους (Bourdieu, 1990).

Μια από τις σημαντικές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μειονοτικοί μαθητές, δηλαδή, μαθητές που μοιράζονται κάποια χαρακτηριστικά που τους διαφοροποιούν από το συνολικό πληθυσμό μιας χώρας, όπως η γλώσσα, η θρησκεία, η παράδοση ή η εθνική προέλευση (Φραγγίδου, 2011), είναι η χαμηλή τους αυτοεκτίμηση και η ανησυχία που τους προκαλεί το μάθημα των μαθηματικών (Buxton, 1981). Τα προβλήματα αυτά είναι πιθανό να εκδηλώνονται με τη μορφή αρνητικής στάσης των μαθητών προς το μάθημα, ιδιαίτερα του άγχους ή και της φοβίας.

Οι μειονοτικοί γονείς από την άλλη, λόγω του μακρόβιου εκπαιδευτικού αποκλεισμού της ομάδας προέλευσής τους, στην πλειοψηφία τους είναι μέλη της κατά βάση αγροτικής, απομονωμένης και χαμηλού οικονομικού και μορφωτικού επιπέδου κοινωνικής ομάδας (Ασκούνη & Φραγκουδάκη, 1998). Η έλλειψη δεξιοτήτων και εμπειριών εκπαιδευτικής διαδικασίας οδηγεί στην αδυναμία στήριξης των παιδιών τους στην προετοιμασία των σχολικών μαθημάτων στο σπίτι τους.

Μια μειονοτική ομάδα με έντονα τα ανωτέρω χαρακτηριστικά είναι αυτή της μουσουλμαντικής μειονότητας στη Θράκη. Πρόκειται για τη μόνη μειονότητα που είναι επίσημα αναγνωρισμένη από το ελληνικό κράτος, απαρτίζεται από τρεις διαφορετικές πληθυσμιακές ομάδες (τουρκογενείς, αθίγγανους, πομάκους), η κάθε μία από τις οποίες διαθέτει τη δική της μητρική γλώσσα (τούρκικα, ρομανές και πομάκικα αντίστοιχα). Οι οριοθετήσεις των τριών αυτών ομάδων της μειονότητας είναι ρευστές και όχι σαφώς διακριτές, αφού τα κριτήρια με τα οποία προσδιορίζονται δεν μπορούν να θεωρηθούν αντικειμενικά ή εμφανή (Ασκούνη, 2006).

Στη γεωγραφική περιοχή της Δυτικής Θράκης λειτουργούν τα μειονοτικά σχολεία που έχουν δημιουργηθεί βάσει διεθνών συνθηκών μεταξύ Ελλάδος και Τουρκίας. Στα σχολεία αυτά φοιτούν μαθητές από τη μουσουλμανική μειονότητα, οι οποίοι ακολουθούν ένα δίγλωσσο πρόγραμμα μαθημάτων (Ασκούνη, 2006). Η πολυπλοκότητα του εκπαιδευτικού αλλά κυρίως του ιστορικο- κοιωνικο-πολιτισμικού πλαισίου δημιουργεί συχνά συγκρουσιακές συνθήκες και ανεπάρκειες που οδηγούν τους μειονοτικούς μαθητές σε χαμηλές σχολικές επιδόσεις, ειδικότερα σε μαθήματα όπως αυτό των μαθηματικών, που ανήκει στο τουρκόφωνο πρόγραμμα του μειονοτικού δημοτικού σχολείου (Σακονίδης, 2004).

Η παρούσα μελέτη επιχειρεί να διερευνήσει σε ένα πρώτο επίπεδο τις ενδεχόμενες συγκλίσεις και αποκλίσεις πεποιθήσεις των γονέων και των μαθητών στα μαθηματικά σε δυο πολιτισμικά διακριτά περιβάλλοντα, ένα πλειονοτικό και ένα μειονοτικό.

ΕΜΠΕΙΡΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Η παρούσα μελέτη επιχειρεί να διερευνήσει τη συναισθηματική σχέση με τα μαθηματικά μαθητών της Δ΄ και της Στ΄ τάξης που φοιτούν σε δημόσια και σε μειονοτικά Δημοτικά Σχολεία της Θράκης και των γονέων τους. Το ερευνητικό πρόβλημα επιμερίστηκε σε τρεις επιμέρους ερευνητικά ερωτήματα:

Ερευνητικό Ερώτημα Ι: Ποιες είναι οι πεποιθήσεις των μαθητών για τα μαθηματικά και τη σχέση τους με αυτά;

Ερευνητικό Ερώτημα ΙΙ: Ποιες είναι οι πεποιθήσεις των μαθητών για την εμπλοκή των γονιών στη μάθηση των μαθηματικών στο σπίτι;

Ερευνητικό Ερώτημα ΙΙΙ: Διαφοροποιούνται οι ανωτέρω πεποιθήσεις σε δυο διαφορετικά πολιτισμικά περιβάλλοντα;

Η διεξαγωγή της έρευνας στηρίχθηκε σε μια μεικτή ερευνητική προσέγγιση που εμπεριέχει ποιοτικά και ποσοτικά στοιχεία. Συγκεκριμένα, για τη συλλογή των δεδομένων της έρευνας, χρησιμοποιήθηκαν δύο ερευνητικά εργαλεία, το ερωτηματολόγιο και η ημι-δομημένη συνέντευξη.

Το πρώτο ερευνητικό εργαλείο, το ερωτηματολόγιο, αποτελείται από 12 ερωτήσεις, το περιεχόμενο και η μορφή του οποίου διαμορφώθηκε με βάση τα δύο Ερευνητικά Ερωτήματα. Ακολούθως, παρατίθενται ενδεικτικές ερωτήσεις ανά άξονα.

Ερευνητικό Ερώτημα Ι

- Ποια θεωρείς ότι είναι η σχέση σου με τα μαθηματικά;
- Ποια λέξη περιγράφει καλύτερα τα συναισθήματα σου για τα μαθηματικά;
- Πιστεύεις πως είσαι καλός/ή στα μαθηματικά;

Ερευνητικό Ερώτημα ΙΙ

- Πιστεύεις ότι οι γονείς πρέπει να βοηθάνε τα παιδιά με τα μαθηματικά;
- Η βοήθεια των γονιών σου είναι σημαντική όταν προετοιμάζεσαι για κάποιο τεστ ή διαγώνισμα στα μαθηματικά;
- Νιώθεις πιο σίγουρος/η, όταν οι γονείς σου σε βοηθούν με τα μαθηματικά στο σπίτι;

Το δεύτερο ερευνητικό εργαλείο, η ημι-δομημένη συνέντευξη, στοιχειοθετείται από κατηγορίες ερωτήσεων που στοχεύουν στη βαθύτερη κατανόηση του τρίτου ερευνητικού ερωτήματος. Για την ευόδωση του σκοπού αυτού ως συνεντευξιαζόμενοι επιλέχθηκαν δύο γονείς σε καθένα από τα δύο πολιτισμικά πλαίσια, συνολικά τέσσερεις. Ο προβλεπόμενος χρόνος διεξαγωγής της συνέντευξης ήταν 20 – 30 λεπτά.

Χαρακτηριστικά αναφέρονται οι εξής θεματικοί άξονες των συνεντεύξεων:

- Σχέση του γονέα με τα μαθηματικά
- Σχέση του παιδιού του/ της με αυτά
- Αιτιολογία της σχέσης των γονέων με τα μαθηματικά
- Γονεϊκή επίδραση στα μαθηματικά στο σπίτι

Για την ποσοτική προσέγγιση επιλέχτηκε η περιγραφική μέθοδος, ενώ για την ποιοτική η μελέτη περίπτωσης. Τέλος, η ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων έγινε με τη χρήση πινάκων συχνοτήτων και στατιστικής τους επεξεργασίας (πρόγραμμα SPSS) και των ποιοτικών μέσα από την κωδικοποίηση των δεδομένων σε θεματικές κατηγορίες (τεχνικές ανάλυσης περιεχομένου).

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν μαθητές της Δ΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού δημόσιων και μειονοτικών σχολείων αστικού και ημι-αστικού περιβάλλοντος του νομού Ξάνθης. Ο λόγος που προτιμήθηκαν οι μαθητές των συγκεκριμένων τάξεων είναι γιατί θεωρήθηκε πως αποτελούν κρίσιμους πληθυσμούς στην πορεία διαμόρφωσης της συναισθηματικής σχέσης των μαθητών με τα μαθηματικά αναφορικά με τη γονεϊκή εμπλοκή στα δυο πολιτισμικά διακριτά περιβάλλοντα. Τα δείγμα της έρευνας είναι συμπτωματικό, καθώς η επιλογή των υποκειμένων δεν έγινε με τυχαία δειγματοληψία. Η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε την άνοιξη του 2016.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Αναφορικά με το 1ο Ερευνητικό Ερώτημα, η σχέση των παιδιών της έρευνας με τα μαθηματικά σημειώθηκε ως άριστη και κατά επέκταση οι πεποιθήσεις τους ήταν θετικές. Συνοψίζοντας τη σχέση μεταξύ βιβλιογραφικών αναφορών και των ερευνητικών ευρημάτων για την απάντηση του 1ου ερευνητικού ερωτήματος, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι σχετικές μελέτες διαπιστώνουν πως οι μαθητές της πλειονότητας διαθέτουν θετικές πεποιθήσεις για τα μαθηματικά στο Δημοτικό Σχολείο, καθώς η πλειοψηφία τους δηλώνουν προτίμηση για τα μαθηματικά. Στην έρευνά μας επιβεβαιώθηκε ότι στα υποκείμενα του δείγματός μας υπερισχύουν οι θετικές πεποιθήσεις, καθώς χαρακτηρίζουν το αντικείμενο των μαθηματικών ως ενδιαφέρον και δηλώνουν πως διασκεδάζουν με αυτά.

Από την άλλη πλευρά, η σχέση των παιδιών της μειονότητας με τα μαθηματικά αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως αρνητική. Αυτό συνδέεται με την καθημερινότητα που έχει διαμορφωθεί για τα υποκείμενα εξαιτίας των καχεκτικών κοινωνικών και οικονομικών συνθηκών του οικογενειακού τους περιβάλλοντος (Bourdieu, 1990). Ακολούθως, αυτό αντανακλάται στη χαμηλή τους αυτοεκτίμηση και στην ανησυχία που τους προκαλεί το μάθημα των μαθηματικών με τη μορφή αρνητικής στάσης προς αυτό, ιδιαίτερα με την εκδήλωση άγχους ή και φοβίας (Buxton, 1981). Ωστόσο, πρόσφατα ερευνητικά ευρήματα εντοπίζουν και καλές σχέσεις των παιδιών γλωσσικών μειονοτήτων με τα μαθηματικά (Σακονίδης, 2004). Ίσως γιατί τα μαθηματικά είναι παρόντα στην καθημερινότητα όλων των ανθρώπων και κατ' επέκταση στη γλώσσα όλων των ανθρώπων, εκείνο που διαφοροποιείται είναι ο τρόπος διαπραγμάτευσής τους. Αυτό αποτυπώθηκε και στη δική μας ανάλυση, όπου οι μαθητές της μειονότητας εκδήλωσαν θετικές πεποιθήσεις σε υπερίσχυση.

		Φόβος	Άγχος	Ενδιαφέρον	Δυσκολία	Ενθουσιασμός	Κούραση
Πλειονότητα	Μ.Ο.	1,46	2,02	3,76	2,25	2,83	2,23
	Τ.Α.	0,77	0,95	1,21	0,98	1,34	1,30
Μειονότητα	Μ.Ο.	2,15	1,77	4,21	2,13	3,57	2,10
	Τ.Α.	1,07	0,81	0,83	1,22	1,38	1,11

Πίνακας 1. Πεποιθήσεις των παιδιών για τα μαθηματικά

Αναφορικά με το 2ο Ερευνητικό Ερώτημα, από τη βιβλιογραφία διαπιστώνεται ότι οι γονείς έχουν σχέση με την πρόοδο των παιδιών τους στα μαθηματικά μέσω της παροχής βοήθειας στις εργασίες τους. Ενδεικτικές οι δηλώσεις των συνεντευξιαζόμενων γονέων από τη μειονότητα, με την περίπτωση ενός γονεά - κτηνοτρόφου να είναι η πλέον χαρακτηριστική, καθώς σημειώνει εμφατικά πως:

> «Μερικές φορές κάνουμε και έξτρα μαθήματα, αλλά όχι με τετράδια και βιβλία αλλά με κάποιες ασκήσεις που υπάρχουν στο διαδίκτυο και είναι αρκετά δυσκολούτσικες»,

καθώς και αυτή ενός δασκάλου:

> «Μαζί διαβάζουμε τη θεωρία, ψάχνουμε παραδείγματα προς κατανόησή του τα οποία μπορεί κανείς να τα εντοπίσει με ευκολία σε διάφορες διαθέσιμες εκπαιδευτικές ιστοσελίδες».

Ακόμη, η γονεϊκή εμπλοκή ενυπάρχει στην προσωπική τους πεποίθηση, στην ενθάρρυνση και στις απαιτήσεις τους για το αντικείμενο. Οι πεποιθήσεις τους, η παρακίνηση και οι προσδοκίες τους για τα μαθηματικά έχει διαπιστωθεί ερευνητικά (Hannula, Kaasila, Kaine, Markku, & Pehkonen, 2007) ότι επιδρούν καταλυτικά τόσο στη γνώμη των μαθητών για το μάθημα των μαθηματικών όσο και στην επίδοσή τους. Όπως χαρακτηριστικά σημειώνει ο συνεντευξιαζόμενος της μειονότητας γονέας-κτηνοτρόφος:

> «Τον ενθαρρύνω συνεχώς παρομοιάζοντας το αντικείμενο των μαθηματικών ως ένα παιχνίδι, το κυνηγητό. Ότι, δηλαδή, τα μαθηματικά πρέπει να τα κυνηγάς για να πετύχεις σε αυτά, να μην αφήνεις κενά, γιατί τα μαθηματικά είναι ένας κρίκος ο οποίος, αν σπάσει, το έχασες».

Η θετική του πεποίθηση συντελεί στη διαμόρφωση υψηλών προσδοκιών για το μάθημα, όπως και ο ίδιος ομολογεί:

«Είμαι τρελαμένος με αυτά συνέχεια ασχολούμαστε με μαθηματικά στο σπίτι, με μέτρηση χρημάτων, εξόδων, εσόδων. Με την οικονομία κυρίως, αλλά και τα μαθήματά του. Τον βοηθάω πάντα και το κάνω με χαρά. Το βλέπει, το αισθάνεται. Θέλω να γίνει το ίδιο καλός με εμένα».

Τα παιδιά επηρεάζονται διαφορετικά, ανάλογα με τα συναισθήματα που συνοδεύουν τις εμπειρίες που τους έχουν προσφέρει οι γονείς τους. Θα μπορούσε να ισχυρισθεί κανείς ότι οι γονείς στη μειονότητα, λόγω του μακρόβιου εκπαιδευτικού αποκλεισμού της ομάδας προέλευσής τους, στερούνται εμπειριών εκπαιδευτικής διαδικασίας που θα μπορούσαν να αξιοποιήσουν για να στηρίξουν αποτελεσματικά τα παιδιά τους στις απαιτήσεις της τάξης και στην προετοιμασία των μαθημάτων στο σπίτι τους. Αυτό, ωστόσο, φαίνεται να μην επιβεβαιώνεται από τα ερευνητικά αποτελέσματα της παρούσας εργασίας, εφόσον τα περισσότερα υποκείμενα ισχυρίζονται πως η βοήθεια των γονιών τους είναι απαραίτητη για την κατανόηση απαντώντας θετικά στο ερώτημα με 82% της πλειονότητας να συμφωνεί και 62% της μειονότητας.

Βάσει της παράλληλης εξέτασης της βιβλιογραφίας και της έρευνας προκύπτει για το 2ο Ερευνητικό Ερώτημα ότι τα παιδιά αναγνωρίζουν την ύπαρξη της γονεϊκής εμπλοκής στη μαθηματική γνώση, χαρακτηρίζοντάς την σπουδαία κι απαραίτητη. Συνάμα, επιβεβαιώνονται οι σχετικές βιβλιογραφικές αναφορές, εφόσον η παρέμβαση λειτουργεί ενθαρρυντικά με 85% των μαθητών της πλειονότητας «να αποδίδουν σπουδαιότητα στη γονεϊκή βοήθεια» και 68% της μειονότητας.

Τέλος, σχετικά με το 3ο Ερευνητικό Ερώτημα, διερευνώντας το οικογενειακό περιβάλλον ως προς πολιτισμικό επίπεδο προκύπτουν τα ακόλουθα.

Για τις πολιτισμικές καταβολές της οικογένειας, αν και βιβλιογραφικά καταγράφεται πως η ικανότητα των γονέων να μεριμνούν ποικιλοτρόπως για τη μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών τους εξαρτάται από το πολιτισμικό αξιακό τους κώδικα (Beniagno & Ellis, 2004), στην έρευνα μας δε σημειώθηκαν αξιοσημείωτες διαφορές στα δύο πολιτισμικά πλαίσια. Αυτό αποδίδεται ενδεχομένως στο γεγονός ότι επικρατεί η επιθυμία των γονιών για μόρφωση κι η έκδηλη συμμετοχή στην εκπαίδευση των παιδιών τους και στα δύο πολιτισμικά πλαίσια.

Όσον αφορά τη θέαση των παιδιών για τον τρόπο εμπλοκής των γονέων στη μάθηση των μαθηματικών διαπιστώνεται από τις απαντήσεις των συμμετεχόντων στο ερωτηματολόγιο, η αναγκαιότητα ύπαρξης της συμβολής της. Πιο συγκεκριμένα, αποφαίνονται ότι αισθάνονται αυτοπεποίθηση, όταν δέχονται βοήθεια στο σπίτι.

		Συχνότητα	%
Πλειονότητα	Διαφωνώ απόλυτα	7	7
	Διαφωνώ	7	7
	Δεν είμαι σίγουρος/η	14	14
	Συμφωνώ	40	40
	Συμφωνώ απόλυτα	32	32
Σύνολο		100	100
Μειονότητα	Διαφωνώ απόλυτα	5	5
	Διαφωνώ	3	3
	Δεν είμαι σίγουρος/η	9	9
	Συμφωνώ	60	60
	Συμφωνώ απόλυτα	23	23
Σύνολο		100	100

Πίνακας 2. Συμβολή γονεϊκής βοήθειας στην αυτοπεποίθηση των παιδιών

Από τις απαντήσεις γίνεται εμφανές πως περισσότεροι από τους μισούς μαθητές του δείγματος και στα δύο πολιτισμικά πλαίσια, 72% στην πλειονότητα και 83% στη μειονότητα, αισθάνονται αυτοπεποίθηση, όταν δέχονται βοήθεια στο σπίτι.

Ομόφωνα αποδίδουν σπουδαιότητα στη γονεϊκή επίδραση, η οποία θετικά εκδηλώνεται ως συμβουλή στο να είναι καλοί και να έχουν καλό βαθμό, κυρίως σε αυτό το μάθημα κι αρνητικά ως επίμονη απαίτηση για διάβασμα που προκαλεί άγχος. Παρόλο που για τους γονείς της μειονότητας έχει σημειωθεί από την Ασκούνη (2006) πως αδυνατούν να ανταπεξέλθουν στις σχολικές απαιτήσεις και στην προετοιμασία των μαθημάτων, οι απαντήσεις των παιδιών στην έρευνα φανερώνουν πως τα μαθηματικά ενυπάρχουν στο οικογενειακό τους περιβάλλον. Έτσι, συνολικά για το δείγμα μας παρέχονται οι συνθήκες για τη διαμόρφωση θετικών πεποιθήσεων.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συμπερασματικά, από τη διεξοδική μελέτη των βιβλιογραφικών αναφορών και την ανάλυση της τάσης των αποτελεσμάτων της επιτόπιας έρευνας προκύπτει ότι για το 1ο Ερευνητικό Ερώτημα, οι μαθητές του δείγματος δηλώνουν θετικές πεποιθήσεις για τα μαθηματικά και αποφαίνονται με θετικό, επίσης, τρόπο για τις σχέσεις των γονέων τους με αυτά. Μάλιστα, η μικρής κλίμακα ποιοτική προσέγγιση έδειξε πως οι πεποιθήσεις των παιδιών τείνουν να συγκλίνουν με τις πεποιθήσεις των γονέων τους για το αντικείμενο.

Αναφορικά με το 2ο Ερευνητικό Ερώτημα, οι μαθητές του δείγματος τείνουν να θεωρούν την ύπαρξη της γονεϊκής εμπλοκής αναγκαία και τη συμβολή της απαραίτητη για τη μάθηση των μαθηματικών στο σπίτι.

Τέλος, για το 3ο Ερευνητικό Ερώτημα, βρέθηκε ότι οι ανωτέρω πεποιθήσεις δε διαφοροποιούνται στα δύο πολιτισμικά πλαίσια.

Συνοψίζοντας, τα ευρήματα της παρούσας μελέτης φαίνεται να υποδεικνύουν πως, ανεξαρτήτως πολιτισμικής προέλευσης, η σχέση γονέων και μαθητών με τα μαθηματικά είναι μερικές φορές αμήχανη αλλά εν πολλοίς θετική και ότι οι γονείς και των δυο ομάδων επιδιώκουν να συμβάλλουν σε αυτή τη θετική σχέση των παιδιών τους με τα μαθηματικά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Anderson, A. (1997). *Families and mathematics: A study of parent- child interactions*. Journal for Research in Math Education, 28(4), 484-511.

Ασκούνη, Ν. (2006). *Η εκπαίδευση της μειονότητας στη Θράκη*. Αθήνα: Αλεξάνδρεια.

Bennett K., Dowker, A., Smith L. (2012). Attitudes to Mathematics in Primary School Children. In H. Krinzinger (Ed.), *The Development of Attitudes and Emotions Related to Mathematics Vol.2012,(8 pages).* Hindawi Publishing Corporation: Child Development Research doi:10.1155/2012/124939

Cai, J. Moyer, J. C., & Wang, N. (1997, March). Parental roles in students' learning of mathematics. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association; Chicago, IL; March 24-28, 1997.

Kapetans, E., & Zahariades, T. (2007). Students' beliefs and attitudes about studying and learning mathematics. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Ed.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, pp. 97-104). Seoul: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Ginsburg, H.P., Posner, J.K, & Russell, R.L. (1981) *Social class and racial influencies on early mathematical thinking*. Monographs of the Society for Research in Child Development, 46 serial no. 193 .

Hannula, M.S., Kaasila, R., Pehkonen, E. & Laine, A. (2007). Elementary education students' memories of mathematics in family context. In Wo, J.-H., Lew, H.-C., Park, K.-S. & Seo D.-Y (Ed.), *Proceedings of the PME-31 conference,* (Vol 3, pp. 1–8). Seoul: The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Λεμονίδης, Χ., Τσακιρίδου, Ε., Μαρκάδας, Σ. (2004). Διερεύνηση της Εμπλοκής των Γονέων στη Μαθηματική Εκπαίδευση των Παιδιών τους. Επιμέλεια: Καλαβάσης, Φ., Καφούση, Σ., Χιονίδου, Μ., Σκουμπουρδή, Χ., Φεσάκης, Γ. Στα πρακτικά *3ου Συνεδρίου Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών* (Σελ. 89-99). Ρόδος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Μαρκάδας, Σ. (2010). *Η εμπλοκή και επιρροή των γονέων στη μάθηση των Μαθηματικών*. Διδακτορική Διατριβή. Φλώρινα: Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας.

McLeod, D. B. (1992). Beliefs, attitudes, and emotions: Affective factors in mathematics learning. In D.B. McLeod & V. Adams (eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. NY: Macmillan Publishing Company.

Σακονίδης, Χ. (2004). Μαθαίνοντας και διδάσκοντας μαθηματικά. Σειρά *Κλειδιά και Αντικλείδια*. Αθήνα: ΥΠΕΠΘ/Πανεπιστήμιο Αθηνών/ ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ, Εκπαίδευση Μουσουλμανοπαίδων 2002-2004.

Sangster, M. (2004) Parents and mathematics in the primary school. In Hendry AW(Ed.), *Proceedings a one day conference held at Leeds University*, 12th June 2004. British Society for Research into Learning Mathematics (BSRLM) 24 (2) pp.99-105.

Φραγγίδου, Ρ. (2011). *Συμπεριφορές μαθητών Γυμνασίου με μαθησιακές δυσκολίες και δίγλωσσων μαθητών και μη σε καταστάσεις πολλαπλασιασμού*. Μεταπτυχιακή εργασία. Φλώρινα: Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας/ΠΤΔΕ.

Ο ΛΟΓΟΣ (DISCOURSE) ΤΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΕΜΦΥΛΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ: ΜΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ

Μπαλαμπανίδου Ζαφείρα και Σταθοπούλου Χαρούλα

Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας ΠΤΕΑ

balabazaf@gmail.com, hastath@uth.gr

Η παρούσα μελέτη αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας για τον έμφυλο λόγο στην τάξη των μαθηματικών. Συγκεκριμένα, μελετά το λόγο των τεσσάρων εκπαιδευτικών που διδάσκουν μαθηματικά σε ένα γυμνάσιο μιας αστικής επαρχιακής πόλης ως προς τα έμφυλα χαρακτηριστικά του σχετικά με τη μαθηματική σκέψη. Μέσα από μία μεταδομιστική ανάλυση του λόγου τους, φάνηκε ότι οι εκπαιδευτικοί, παγιδευμένοι και οι ίδιοι σε μια ‘πραγματικότητα’ για τον ανδρισμό και τη θηλυκότητα, προσδίδουν στη μαθηματική σκέψη εγγενή ανδρικά χαρακτηριστικά, επηρεάζοντας δυνητικά την υποκειμενοποίηση των κοριτσιών σε σχέση με αυτά.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αν και τα τελευταία χρόνια παρατηρείται όχι μόνο ίση επίδοση των δύο φύλων στα μαθηματικά αλλά και υπεροχή των κοριτσιών σε μερικές χώρες, η έμφυλη διάσταση των μαθηματικών εξακολουθεί να παρουσιάζει ενδιαφέρον (Σταθοπούλου, 2015). Το ενδιαφέρον αυτό εστιάζει στο γεγονός ότι ενώ οι έμφυλες διαφορές φαίνεται να μειώνονται, οι γυναίκες εξακολουθούν να έχουν μικρή εκπροσώπηση σε ανώτερες σπουδές και επαγγέλματα που απαιτούν μαθηματικά, καθώς οδηγούνται σε παραδοσιακές επαγγελματικές επιλογές προς το φύλο τους και σε επαγγέλματα φροντίδας με χαμηλό κύρος και αμοιβές (Χρονάκη, 2009). Η Άννα Χρονάκη (2009) τονίζει ότι τα παραπάνω είναι αποτέλεσμα έμφυλων στερεοτύπων που τελικά τείνουν να συγκροτούν λογοθετικές πρακτικές (discursive practices) [1], οι οποίες κατασκευάζουν τη σχέση γυναίκας και Μαθηματικών ως μη επιθυμητή ή ακόμη και ανέφικτη. Γι’ αυτό, τις τελευταίες δεκαετίες ενδιαφέρον παρουσιάζει η διερεύνηση των παραγόντων που επηρεάζουν τον αποκλεισμό των γυναικών από σπουδές και επαγγέλματα κύρους που συνδέονται με τη μαθηματική εκπαίδευση (Χρονάκη, 2009). Σημαντικός παράγοντας προς αυτή την κατεύθυνση αποτελεί το σχολείο και μέσα σε αυτό ο έμφυλος λόγος (discourse) [2] των εκπαιδευτικών που διδάσκουν μαθηματικά. Έτσι, θεωρήθηκε σημαντικό, να διερευνηθεί ο έμφυλος λόγος των εκπαιδευτικών που συμμετείχαμε στην έρευνα ώστε να μας δοθεί η δυνατότητα να συνειδητοποιήσουμε τις όποιες έμφυλες πρακτικές μας και, ίσως, να τις αμφισβητήσουμε και δυνητικά να τις τροποποιήσουμε.

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΤΗΣ ΣΧΕΣΗΣ ΦΥΛΟΥ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ο Paul Ernest (2013) αναφέρει ότι αυτό που θεωρείται 'πρόβλημα' στη σχέση φύλου και Μαθηματικών διαφοροποιείται σε μεγάλο βαθμό, ανάλογα με τις αντιλήψεις και την οπτική που ο καθένας υιοθετεί για τη μαθηματική εκπαίδευση, τη φύση των Μαθηματικών, τη μάθηση και την έννοια παιδί. Έτσι, υπάρχουν εκείνες οι ερευνητικές προσεγγίσεις που αποδίδουν τις διαφορές κοριτσιών και αγοριών σε εγγενή διαφορετικά χαρακτηριστικά των δύο φύλων, υιοθετώντας θεωρίες ελλείμματος, που προσδίδουν στις διαφορές αυτές σταθερό και μόνιμο χαρακτήρα (Ding, Song & Rishardson, 2014). Επίσης, υπάρχουν οι ερευνητικές προσεγγίσεις που θεωρούν ως αιτίες των διαφορών των δύο φύλων στα Μαθηματικά τόσο τον τρόπο κοινωνικοποίησης, όσο και ψυχολογικούς παράγοντες, οι οποίοι δεν λαμβάνονται υπόψη μέσα στη σχολική τάξη, οδηγώντας τα κορίτσια σε υστέρηση στα Μαθηματικά (Walkerdine, 1998/2013). Τέλος, υπάρχουν οι προσεγγίσεις που αναλύουν τις διαφορές των δύο φύλων στηριζόμενες σε μία μεταδομιστική φουκωϊκή προσέγγιση, όπως αυτή της Valerie Walkerdine (1998/2013), η οποία επηρέασε και την παρούσα έρευνα. Η Walkerdine (1998/2013) απορρίπτει φυσιοκρατικές αντιλήψεις και απλουστευτικές αναλύσεις του τύπου αίτιο-αποτέλεσμα, όπως αυτές εμφανίζονται στις δύο πρώτες προσεγγίσεις μέσα από τις οποίες φυσικοποιείται η ανωτερότητα των αγοριών στα Μαθηματικά και οι οποίες αναζητούν την αιτία στο ίδιο το θύμα, δηλαδή στα κορίτσια (Σταθοπούλου, 2015). Επανεξετάζει το θέμα της σχέσης των κοριτσιών με τα μαθηματικά και, δανειζόμενη εργαλεία από το Foucault, προσπαθεί να αποκαλύψει τον τρόπο με τον οποίο αναπτύχθηκαν ιστορικά επιστημονικές ιδέες —τα 'καθεστώτα αλήθειας'— που αφορούν τη σχέση των κοριτσιών με τα μαθηματικά και επηρεάζουν τον έμφυλο λόγο και τις έμφυλες πρακτικές της μαθηματικής εκπαίδευσης και των εκπαιδευτικών (Walkerdine, 1998/2013). Ωστόσο, ο λόγος των εκπαιδευτικών είναι επιτελεστικός και σημαντικός στην υποκειμενοποίηση [3] και τη διαμόρφωση των έμφυλων ταυτοτήτων (Θαλάσσης, 2013). Έτσι, τονίζουν οι Chronaki & Pechtelidis (2012), τα ανθρώπινα υποκείμενα μέσα από μύθους και φαντασιώσεις τοποθετούν τους εαυτούς τους ως προς τα μαθηματικά και κατασκευάζουν υποκειμενικότητες που συνδέονται είτε με την επιτυχία είτε με την αποτυχία σε αυτά. Μέσα στο παραπάνω πλαίσιο τα κορίτσια τελικά οδηγούνται στην παθητικότητα που δεν θα τους επιτρέψει ποτέ να οδηγηθούν στην επιτυχία, καθώς η θηλυκότητα τους και η ταυτότητα που δομούν μέσα από αυτή έρχεται σε σύγκρουση με τους 'λόγους' για τα Μαθηματικά και την ταυτότητά του μαθητή των Μαθηματικών (Walkerdine, 1998/2013).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στο παρόν άρθρο επιχειρείται η διερεύνηση του έμφυλου λόγου των μαθηματικών εκπαιδευτικών ενός γυμνασίου μιας επαρχιακής αστικής πόλης σχετικά με το αν η μαθηματική σκέψη αποτελεί εγγενές βιολογικό χαρακτηριστικό των αγοριών, η οποία τα οδηγεί στην ενασχόλησή τους με τα μαθηματικά και τα επαγγέλματα STEM [4]. Αποτελεί τμήμα μιας ευρύτερης έρευνας σχετικά με τον έμφυλο λόγο των εκπαιδευτικών στην τάξη των μαθηματικών. Η έρευνα αποτέλεσε μία μελέτη περίπτωσης με στοιχεία εθνογραφικά και αυτοεθνογραφικά καθώς και η ερευνήτρια αποτέλεσε αντικείμενο της έρευνας. Τον πληθυσμό της έρευνας αποτέλεσαν οι τέσσερις καθηγήτριες που διδάσκουν μαθηματικά σε αυτό το γυμνάσιο, μεταξύ των οποίων και η ερευνήτρια. Τα δεδομένα συγκεντρώθηκαν με τη χρήση παρατηρήσεων (δύο διδακτικές ώρες σε κάθε εκπαιδευτικό με μαγνητοφώνηση και βιντεοσκόπηση στην τάξη της ερευνήτριας) και με ημιδομημένες συνεντεύξεις των εκπαιδευτικών. Η ανάλυση του υλικού που συγκεντρώθηκε πραγματοποιήθηκε με ανάλυση περιεχομένου και ανάλυση λόγου, με στόχο τη συστηματική επεξεργασία των δεδομένων και, ταυτόχρονα, την κριτική τους ερμηνεία στο πλαίσιο μιας φουκωϊκής προσέγγισης. Η φουκωϊκή προσέγγιση επιλέχθηκε σε μία προσπάθεια να αμφισβητηθούν φυσιοκρατικές αντιλήψεις και θετικιστικές ερμηνείες και να κατανοηθεί ο τρόπος με τον οποίο οι λόγοι συγκροτούν τα υποκείμενα και την πραγματικότητα για τη μαθηματική εκπαίδευση και η εξουσία – με τη σχεσιακή της έννοια – μέσα στη σχολική τάξη των Μαθηματικών καθιστά του συμμετέχοντες λιγότερο ή περισσότερο σημαντικούς (Walshaw, 2013).

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Και οι τέσσερις συμμετέχουσες στην έρευνα-η Αθηνά, η Φωτεινή, η Ελένη και η ερευνήτρια- αν και έχουμε διαφορετικές βιογραφίες εκφέρουμε—όπως φάνηκε— όχι πάντα συνειδητά, έναν έμφυλο, συχνά αντιφατικό, λόγο (discourse) σχετικά με τα κορίτσια και τα Μαθηματικά, θεωρώντας τη μαθηματική σκέψη εγγενή και αποδίδοντάς την, ρητά ή άρρητα, στα αγόρια και τους άνδρες μαθηματικούς.

Αναλυτικότερα, στο λόγο της Αθηνάς γίνεται φανερό πως η μαθηματική σκέψη είναι 'ταλέντο', 'χάρισμα', επομένως έμφυτο εγγενές χαρακτηριστικό που αφορά το άτομο, δεν συνδέεται με το φύλο και δεν χαρίζεται σε όλους '*Είναι καθαρά θέμα ανθρώπου*', όπως τονίζει η ίδια:

> […] δε θεωρώ ότι οι άνδρες έχουν χάρισμα με τα μαθηματικά, κανένα! Ότι τα αγόρια στρέφονται πιο πολύ προς τα μαθηματικά οφείλεται στα στερεότυπα που υπάρχουν […].

> […] κανένα χάρισμα δεν έχουν παραπάνω. Όχι! Ίσα ίσα! Και θεωρώ ότι στα θέματα διδασκαλίας, οι γυναίκες είναι πολύ καλύτερες, οι γυναίκες έχουν χάρισμα εκεί έναντι των ανδρών, γιατί αντιμετωπίζουν τα παιδιά τελείως διαφορετικά. Είναι χάρισμα αυτό αλλά στο θέμα του μυαλού όχι, σιγά! Τίποτα παραπάνω, καμία σχέση! Είναι καθαρά θέμα ανθρώπου.

> […] στο Γ1, τα κορίτσια είναι πιο καλά στα μαθηματικά. Τα συγκεκριμένα κορίτσια είναι ταλέντα, κατά τη γνώμη μου είναι ταλέντα.

Η Αθηνά, πιστεύοντας ότι τα μαθηματικά συνδέονται με το κοφτερό μυαλό, το οποίο είναι χάρισμα όπως «*η επιτυχής ενασχόληση με τη μουσική και τη ζωγραφική είναι ταλέντο*» (Χρονάκη, 2013α, σ. 13), θεωρεί πως η επιτυχής ενασχόληση με τα Μαθηματικά είναι θέμα ικανότητας και όχι προσπάθειας. Όμως, τονίζει η ίδια, αποτέλεσμα τέτοιων τοποθετήσεων για τα Μαθηματικά είναι να θεωρείται η έλλειψη μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων μια μόνιμη και φυσική κατάσταση στην οποία δεν υπάρχει καμία δυνατότητα παρέμβασης και βελτίωσης μέσω της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ωστόσο, παρόλο που η Αθηνά θεωρεί πως το ταλέντο της μαθηματικής σκέψης δεν συνδέεται με το φύλο, σε άλλο σημείο του λόγου της αναφέρει ότι:

> […] τα αγόρια δεν έχουν τη δυνατότητα, την επιμονή να μάθουν Ιστορία απ' έξω. Οπότε, σου λέει, εντάξει, πάμε Μαθηματικά.

Όμως, μέσα στον παραπάνω λόγο της Αθηνάς ουσιαστικά αναπαράγεται η ύπαρξη του βιολογικού μαθηματικού χαρίσματος των αγοριών τα οποία στρέφονται προς τα μαθηματικά καθώς σε αυτά δεν απαιτείται διάβασμα, αλλά ταλέντο. Έτσι, η Αθηνά άρρητα υποδηλώνει το έλλειμμα των κοριτσιών στα μαθηματικά και την υπερτέρηση των αγοριών σε αυτά.

Επιπλέον, η Αθηνά στο λόγο της αναπαράγει ένα από τα σημαντικότερα 'καθεστώτα αλήθειας' για τις γυναίκες που αφορά την υπεροχή των γυναικών στα επαγγέλματα φροντίδας, όπως η διδασκαλία, για την οποία θεωρούνται κατάλληλες από τη φύση τους (Walkerdine, 1998/2013). Η Walkerdine (1998/2013) αναφέρει πως η 'αλήθεια' αυτή έχει ιστορικά δημιουργηθεί από την εποχή του Διαφωτισμού ή και νωρίτερα, όπου η γυναίκα αναλαμβάνει τη φροντίδα των παιδιών και είναι ο θεματοφύλακας της ηθικής τάξης. Στη συνέχεια κυρίως οι γυναίκες της αστικής τάξης θα ασχοληθούν με το επάγγελμα της εκπαιδευτικού, το οποίο απαιτούσε φυσικές ικανότητες, τις όποιες αυτές διαθέτουν (Walkerdine, 1998/2013).

Ωστόσο, μέσα στο λόγο της Αθηνάς, φαίνεται πως και σήμερα οι γυναίκες εξακολουθούν να θεωρούνται ιδανικές για το επάγγελμα του εκπαιδευτικού καθώς, όπως τονίζει η Tamboukou (2008, σ. 57), ο ιδιωτικός χώρος της σχολικής τάξης αποτελεί έναν ιδανικό τόπο για να εκφραστεί η ‘φυσιολογική κλίση’ των γυναικών «*να βρίσκονται με τα παιδιά και να νοιάζονται για τους άλλους*». Επομένως, η ‘αλήθεια’, πως οι γυναίκες υπερτερούν σε επαγγέλματα φροντίδας, εξακολουθεί σήμερα να λειτουργεί ως τεχνολογία υποκειμενοποίησης και να οδηγεί τις γυναίκες μακριά από τα επαγγέλματα STEM, σε επαγγέλματα φροντίδας τα οποία έχουν χαμηλό κύρος και αμοιβές, εξυπηρετώντας έτσι μια τάξη πραγμάτων (Αθανασίου, 2006).

Το λόγο (discourse) της Αθηνάς για την εγγενή μαθηματική ικανότητα υιοθετεί και η Φωτεινή.

-Πού νομίζεις ότι οφείλεται ότι τα κατάφερνες πάντα στα Μαθηματικά, από το Δημοτικό, όπως είπες;

-Πού οφείλεται; Πιστεύω ότι είναι στην ιδιοσυγκρασία, στον τρόπο σκέψης του καθενός […]. Κοίταξε, όλοι έχουμε κάποια χαρίσματα, άλλα καλλιεργώντας τα, τα αναπτύσσουμε και κάποια άμα τα αφήσουμε εξαλείφονται, ε… και πιστεύω ότι το είχα αυτό το χάρισμα, γιατί είναι ένα χάρισμα, απλά το καλλιέργησα από μικρή ηλικία. […] είχα γενικά μία έφεση στα μαθηματικά.

Η Φωτεινή υποστηρίζει πως η μαθηματική σκέψη ως ‘χάρισμα’ πρέπει να καλλιεργηθεί και να αναπτυχθεί μέσα από μία σειρά δραστηριοτήτων, όπως το παιχνίδι. Έτσι, καθώς τα αγόρια έχουν διαφορετικές εμπειρίες παιχνιδιού και ανάπτυξης, καλλιεργούν σε μεγαλύτερο βαθμό από τα κορίτσια τη μαθηματική σκέψη και τη λογική, με αποτέλεσμα να υπερτερούν στα μαθηματικά.

Εγώ πιστεύω ότι όλο αυτό ξεκινάει από μικρή ηλικία. Δηλαδή, τα διάφορα παιχνίδια που παίζουν τα παιδιά, παίζουν ρόλο. […] Ένα κορίτσι, τι θα του πάρεις; θα του πάρεις μία κούκλα. Το αγόρι τι θα του πάρεις; θα του πάρεις ένα lego. Με τι λειτουργεί πιο πολύ το μυαλό με την κούκλα ή το lego;

Η Φωτεινή αναπαράγει έναν ηγεμονικό λόγο που τοποθετεί τα κορίτσια σε θέση υποδεέστερη των αγοριών, μέσα από μία απλουστευτική θετικιστική ερμηνεία της μορφής αίτιο-αποτέλεσμα. Στηρίζει την επιχειρηματολογία της σε θεωρίες που χρησιμοποιούν οι περιβαλλοντιστές και αποδίδει το ‘έλλειμμα’ των κοριτσιών στις διαφορετικές εμπειρίες τους μέσα από το παιχνίδι. Όπως, τονίζει η Walkerdine (1998/2013), οι επιστημονικές ιδέες που επικράτησαν στην ψυχολογία και στη σύγχρονη διδασκαλία των μαθηματικών, επηρεασμένες από τη θεωρία του εποικοδομισμού, χρησιμοποιήθηκαν ως εργαλείο στην παραγωγή της σύγχρονης 'αλήθειας' για τα κορίτσια και τα μαθηματικά. Επιπλέον, η Φωτεινή αναπαράγει έναν φιλελεύθερο λόγο σύμφωνα με τον όποιο τα αγόρια, ως αυτόνομα υποκείμενα, απλώς καθοδηγούνται σε δραστηριότητες και παιχνίδια που τους οδηγούν στην απόκτηση λογικής και ορθολογικής σκέψης με φυσικό και αβίαστο τρόπο, χαρακτηριστικά ωστόσο που ιστορικά έχουν αποκλειστεί από τις γυναίκες (Χρονάκη, 2013α). Άλλωστε, όπως τονίζει σε άλλο σημείο του λόγου της η Φωτεινή, «*οι άντρες είναι πιο στρωμένοι, πιο λογικοί από τις γυναίκες*». Μέσα στο παραπάνω πλαίσιο, αναφέρει η Χρονάκη (2013α), η εξέλιξη των παιδιών θεωρείται γραμμική και συνεχής και μέσα από ερμηνείες όπως της Φωτεινής, τα αγόρια και τα κορίτσια θεωρούνται ως δύο διαφορετικές ενιαίες ομάδες με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και σταθερές ταυτότητες. Έτσι, αγνοείται η αναγκαστική διαπραγμάτευση από τα ίδια τα παιδιά της μαθησιακής τους ταυτότητας υπό την επίδραση διαφορετικών λόγων (discourses) και πολλαπλών ταυτοτήτων (Χρονάκη, 2013α).

Η Ελένη, από την πλευρά της, θεωρεί και αυτή πως τα μαθηματικά αποτελούν μία έμφυτη ικανότητα, την οποία '*ίσως*' έχουν σε μεγαλύτερο βαθμό τα αγόρια.

> […] αλλά διάβαζα και μόνη μου, δηλαδή σαν έμφυτο, δεν μπορώ να το προσδιορίσω αλλιώς, μου άρεσαν πάντα (τα μαθηματικά) περισσότερο από τη Γλώσσα ίσως, από την Ιστορία σίγουρα!
>
> […]Από την άλλη όμως ίσως 'τα πιάνουν' πιο εύκολα (τα αγόρια) να το πω; ναι μπορεί να ισχύει, βέβαια δεν ισχύει πάντα.
>
> […] τα αγόρια ίσως έχουν πιο πολύ μαθηματικό μυαλό να το πω;

Όπως φαίνεται, και η Ελένη, επηρεασμένη ίσως από τον επιστημονικό λόγο της βιολογίας, αναπαράγει έναν ηγεμονικό λόγο που αποδίδει στα αγόρια μία υπεροχή έναντι των κοριτσιών, ως προς τα Μαθηματικά. Συχνά, η χρήση του επιστημονικού λόγου της βιολογίας έχει χρησιμοποιηθεί στην τεκμηρίωση των έμφυλων διαφορών στα Μαθηματικά, καθώς προσδίδει κύρος στα αποτελέσματα των ερευνών κάνοντάς τα να θεωρηθούν ως απόλυτες αλήθειες (Walkerdine, 1998/2013). Με τον τρόπο αυτό, τονίζει η Χρονάκη (2013α), τα κορίτσια κατατάσσονται ακόμη και σήμερα ως λιγότερο άξια σε σχέση με τα αγόρια, αφού το έμφυτο ταλέντο της μαθηματικής ικανότητας το έχουν σε μικρότερο βαθμό, σε σχέση με εκείνα. Έτσι, σύμφωνα με τη Χρονάκη

(2013α), οδηγούμαστε στο μύθο της μη συμβατότητας της γυναίκας με τα μαθηματικά ενώ, αντίθετα, το ανδρικό μυαλό θεωρείται ως ιδανικό για τη μαθηματική σκέψη και τη λογική.

Επιπλέον, τόσο η Φωτεινή όσο και η Ελένη στο λόγο τους φαίνεται να καταλογίζουν στα κορίτσια και έλλειψη πάθους και ουσιαστικού ενδιαφέροντος για τα μαθηματικά, καθώς η Φωτεινή αναφέρει ότι

> Δεν τις έχω πολύ μελετηρές που θα κάτσουν να διαβάσουν, να κάνουν επιπλέον ασκήσεις. Κάνουν αυτά που πρέπει.

και η Αθηνά τονίζει:

> Επίσης, κάποια αγόρια βρίσκουνε και πολλούς τρόπους διαφορετικούς για να λύσουν κάτι, δηλαδή τα προβλήματα, πώς να το πω, δίνουνε διαφορετικές λύσεις για το ίδιο πρόβλημα. Ενώ τα κορίτσια, άμα πούνε έναν, εφησυχάζουν.

Έτσι, οι δύο εκπαιδευτικοί φαίνεται να αναπαράγουν έναν ηγεμονικό λόγο, ο οποίος φυσικοποιεί τα κορίτσια ως μη παθιασμένα και αφοσιωμένα στα Μαθηματικά, παρουσιάζοντας τη σχέση των κοριτσιών με τα Μαθηματικά ως δευτερεύουσα, καθώς περιορίζεται στο πλαίσιο των σχολικών τους υποχρεώσεων ή στην αναζήτηση μόνο ενός τρόπου επίλυσης των μαθηματικών προβλημάτων (Χρονάκη, 2012).

Όσον αφορά το δικό μου έμφυλο λόγο, είναι ιδιαίτερα δύσκολο να τον εντοπίσω καθώς έχω επηρεαστεί σημαντικά από τη μελέτη της παρούσας εργασίας. Ωστόσο σκέφτομαι πως κι εγώ θεωρώ τη μαθηματική ικανότητα έμφυτη, η οποία ωστόσο καλλιεργείται μέσα από τη μελέτη των Μαθηματικών. Αλλά όπως και η Αθηνά, δεν της προσδίδω με ρητό τρόπο έμφυλα χαρακτηριστικά. Επιπλέον, με βρίσκει σύμφωνη η άποψη της Αθηνάς ότι τα αγόρια στρέφονται περισσότερο προς τα Μαθηματικά από ότι τα κορίτσια, γιατί πιστεύουν πως θα τα καταφέρουν καλύτερα σε σχέση με τα μαθήματα της θεωρητικής κατεύθυνσης, χωρίς να χρειαστεί να μελετήσουν πολύ. Η αντίληψη μου αυτή, σε συνδυασμό με έναν λόγο που συχνά αναπτύσσω στην τάξη μου, όπου τονίζω πως τα Μαθηματικά δεν είναι Ιστορία για να χρειάζεται να διαβάσεις ώρες, έχουν ως αποτέλεσμα να αποδίδω με άρρητο τρόπο ανδρικά έμφυλα χαρακτηριστικά στη μαθηματική σκέψη. Ακόμη, σκέφτομαι πως μέχρι τώρα δεν με είχαν προβληματίσει πρακτικές που αφορούσαν τα κορίτσια και τα Μαθηματικά αλλά τις αντιμετώπιζα σαν 'προφανείς πραγματικότητες', όπως αναφέρει και η Walkerdine (1998/2013).

Τέλος, μέσα στον παραπάνω λόγο (discourse) μας, όλες οι συμμετέχουσες στην έρευνα, φαίνεται να αποδίδουμε δύναμη και εξουσία στα Μαθηματικά ως πεδίο γνώσης που σχετίζεται με τη φυσική ικανότητα και την ευφυΐα. Το αποτέλεσμα είναι τα Μαθηματικά να αποτελούν τελικά κριτήριο αξιολόγησης και ταξινόμησης των παιδιών, με τα κορίτσια να ταξινομούνται ως υποδεέστερα των αγοριών και μέσα από διαδικασίες υποκειμενοποίησης να οδηγούνται στην παθητικότητα και στη μη ενασχόληση με τα Μαθηματικά (Walkerdine, 1998/2013).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συνοψίζοντας, θα λέγαμε πως και οι τέσσερις μαθηματικοί που συμμετείχαμε σε αυτή την έρευνα εκφράζουμε έναν ηγεμονικό λόγο όσον αφορά τη μαθηματική σκέψη αποδίδοντας σε αυτήν, ρητά ή άρρητα, εγγενή έμφυλα χαρακτηριστικά, με διαφορετικά ωστόσο στοιχεία. Η Αθηνά και εγώ με άρρητο τρόπο, μέσα από το λόγο μας για την επιλογή κατεύθυνσης, προσδίδουμε στη μαθηματική σκέψη ανδρικά έμφυλα χαρακτηριστικά. Ενώ, η Αθηνά και η Ελένη ρητά εκφράζουν την άποψη ότι τα αγόρια υπερέχουν των κοριτσιών στα Μαθηματικά είτε χάρη στις διαφορετικές τους εμπειρίες είτε στο έμφυτο ταλέντο τους. Επιπλέον, θεωρούν τα αγόρια περισσότερο παθιασμένα με τα Μαθηματικά σε σχέση με τα κορίτσια.

Με τον τρόπο αυτό, όμως, ταξινομούμε τα κορίτσια ως υποδεέστερα των αγοριών. Η ταξινόμηση αυτή, τονίζει ο Foucault (1991), είναι αποτέλεσμα των σχέσεων εξουσίας που συναντάμε στην καθημερινή μας ζωή, οι οποίες επιβάλουν ένα ‘καθεστώς αλήθειας’ που τα κορίτσια αναγνωρίζουν στον εαυτό τους με αποτέλεσμα να προσκολλώνται στις ταυτότητες τους και να τοποθετούν σταθερά τον εαυτό τους με βάση την επιτυχία ή την αποτυχία στα μαθηματικά. Έτσι, ο λόγος που αναπαράγουμε στο πλαίσιο ενός πλέγματος σχέσεων εξουσίας – επιβολής οριοθετεί τελικά το επιθυμητό πεδίο δράσης των κοριτσιών σε σχέση με τα Μαθηματικά και τα επαγγέλματα STEM καθώς, όπως αναφέρει ο Foucault (1991), λειτουργεί ως μηχανισμός υποβολής μέσω του οποίου ιδέες, συναισθήματα, επιθυμίες, επιλογές γίνονται αντικείμενα διαχείρισης και συμβάλουν στη διαμόρφωση της υποκειμενικότητας.

Στόχος βέβαια της παρούσας εργασίας δεν είναι να κατηγορηθούμε εμείς οι εκπαιδευτικοί, καθώς όπως τονίζει η Walkerdine (1998/2013) είμαστε και εμείς παγιδευμένοι σε μια ‘πραγματικότητα’ που ιστορικά έχει διαμορφωθεί για τον ανδρισμό και τη θηλυκότητα. Όμως, είναι σημαντικό να γίνει, όπως αναφέρουν οι Μπετζέλος και Σωτήρης (2004), μία κριτική των όρων με τους οποίους οι αλήθειες και οι βεβαιότητες για τα κορίτσια και τα Μαθηματικά συγκροτούνται και γίνονται κατανοητές ως τέτοιες, σε κάθε έκφανση της καθημερινότητάς μας. Είναι απαραίτητο μέσα από την αποδήμησή τους να δημιουργήσουμε, όπως τονίζει η Χρονάκη (2012), ‘ρήγματα σε κυρίαρχους λόγους’, που εξισώσουν τον ορθολογισμό και την επιστημονική σκέψη με τον ανδρισμό, οδηγώντας τα κορίτσια στην παθητικότητα και παραχωρώντας στους άνδρες εξουσία μέσα από τη γνώση που τους οδηγεί σε επαγγέλματα κύρους και υψηλών αμοιβών.

Σημειώσεις

1. Όπως αναφέρει ο Barry (2013) οι λογοθετικές πρακτικές (discursive practices) αφορούν τον τρόπο με τον οποίο μέσω του λόγου η εξουσία εσωτερικεύεται από αυτούς τους οποίους αποδυναμώνει, ώστε να μη χρειάζεται συνεχώς η εξωτερική επιβολή της.
2. Η Χρονάκη (2013β: 332) γράφει ότι ο Foucault, αναφέρεται στο λόγο ως τις «… ποικίλες πρακτικές που με συστηματικό τρόπο συγκροτούν τα αντικείμενα για τα οποία μιλάμε».
3. «Η υποκειμενικότητα είναι τα πρότυπα μέσω των οποίων οργανώνονται τα εμπειρικά και συναισθηματικά περιεχόμενα, τα αισθήματα, οι εικόνες και οι μνήμες, ώστε να δημιουργήσουν μια εικόνα του ατόμου για τον εαυτό του και τους άλλους και για τις δυνατότητες της ύπαρξης μας» (Cammak & Phillips, 2008:80).
4. STEM: Science, Technology, Engineering and Mathematics

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αθανασίου, Α. (2006). Εισαγωγή. Φύλο, Εξουσία και Υποκειμενικότητα μετά το «δεύτερο φύλο». Στο Α. Αθανασίου (Επιμ.), *Φεμινιστική Θεωρία και Πολιτισμική Κριτική* (σσ. 13-138).Αθήνα: νήσος.

Cammack, J.C.& Phillips, D.K. (2008). Ταυτότητα Φύλου, «Λόγοι» και Υποκειμενικότητες των Εκπαιδευτικών. Στο Β. Δεληγιάννη-Κουϊμτζή (Επιμ.), *Εκπαιδευτικοί και Φύλο* (σσ. 79-96). Αθήνα: Κ.Ε.Θ.Ι..

Ding, C. S., Song, K. & Rishardson, L. (2006). Do Mathematical Gender Differences Continue? A Longitudinal Study of Gender Difference and Excellence in Mathematics Performance in the U.S.. *Educational Studies. Vol 40 (3)*, pp.279-295. Doi: 10.1080_00131940701301952.

Ernest, P. (2013). Εισαγωγή, Αλλάζοντας Άποψη για το 'Πρόβλημα του Φύλου' στα Μαθηματικά. Στο Α. Χρονάκη (Επιμ.), *Αποκλείοντας τα Κορίτσια: Κορίτσια και Μαθηματικά* (σσ. 315-328). Αθήνα: Gutenberg.

Foucault, M. (1991). *Η Μικροφυσική της Εξουσίας* (Λ. Τρουλινού μτφρ). Αθήνα: Ύψιλον.

Θαλάσσης, Γ. (2013). Εισαγωγή. Στο Σ. Αθανασοπούλου-Κυπρίου, Π. Βουτσινά, Μ. Κοτζάμπαση, Μ. Νικηφορίδης, Ρ. Ποθητάκη (Επιμ.), *Να κοιτάς με Άλλα Μάτια να Βλέπεις Διαφορετικά, Έμφυλες Προσεγγίσεις στην Εκπαίδευση* (σσ. 15-21). Αθήνα: Σχολή Μωραΐτη.

Μπέτζελος, Τ. & Σωτήρης, Π. (2004). Σώματα, Λόγοι, Εξουσίες: Ξαναγυρνώντας στην «Περίπτωση Φουκώ». *Θέσεις- Τριμηνιαία Επιθεώρηση, τ. 89*, Οκτώβριος-Δεκέμβριος 2004. Προσπελάστηκε 20 Σεπτεμβρίου, 2016, από http: //www.theseis.com/index2.php?option=com_content&do_pdf=1&id=872

Σταθοπούλου, Χ. (2015). Αποκλείοντας τα Κορίτσια: Κορίτσια και Μαθηματικά Βιβλιοπαρουσίαση με μια κριτική θεώρηση. *Επιστημονική Επετηρίδα, Παιδαγωγικού Τμήματος Νηπιαγωγών Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, τ.8*, 1-24.

Tamboukou, M. (2008). Το Παράδοξο του να είσαι Γυναίκα-Εκπαιδευτικός. Στο Β. Δεληγιάννη-Κουϊμτζή (επιμ.), *Εκπαιδευτικοί και φύλο* (σσ. 52-78). Αθήνα: Κ.Ε.Θ.Ι..

Walkerdine, V. (2013). *Αποκλείοντας τα κορίτσια: κορίτσια και μαθηματικά* (Ι. Φ. Βλαχόπουλος μτφρ.). Αθήνα: Gutenberg. (Πρωτότυπη έκδοση 1998).

Walshaw, M. (2013). Post-Structuralism and Ethical Practical Action: Issues of Intetity and Power. *Journal to Research in Mathematics Education Vol. 44 (No 1)*.

Χρονάκη, Α. (2009). Φύλο και Μαθηματικά. *In fylopedia*. Προσπελάστηκε 5 Σεπτεμβρίου, 2016, από http: //www.fylopedia.uoa.

Χρονάκη, Α. (2012). Δημιουργώντας Ρήγματα σε Κυρίαρχους Λόγους. Στο Σ. Αθανασοπούλου-Κυπρίου, Π. Βουτσινά, Μ. Κοτζάμπαση, Μ. Νικηφορίδης, Ρ. Ποθητάκη (Επιμ.), *Να κοιτάς με Άλλα Μάτια να Βλέπεις Διαφορετικά, Έμφυλες Προσεγγίσεις στην Εκπαίδευση*. Αθήνα: Σχολή Μωραΐτη.

Χρονάκη, Α. (2013α). Εισαγωγή της Επιμελήτριας. Αποκλείοντας τα Κορίτσια: Μύθοι, Σκιές και Πραγματικότητες για τη σχέση φύλου και μαθηματικών. Στο Α. Χρονάκη (Επιμ.), *Αποκλείοντας τα κορίτσια: κορίτσια και μαθηματικά* (σσ. 13-43). Αθήνα: Gutenberg.

Χρονάκη, Α. (2013β). Επεξηγηματικές Σημειώσεις της Επιμελήτριας. Στο Α. Χρονάκη (Επιμ.), *Αποκλείοντας τα κορίτσια: κορίτσια και μαθηματικά* (σσ. 315-328). Αθήνα: Gutenberg.

Chronaki, A. & Pechtelidis, Y. (2012). ‘Being Good’ at Maths. Fabricating Gender Subjectivity. *Journal of Research in Mathematics Education, 1(3)*, 246-277.

ΜΕΤΑΓΝΩΣΤΙΚΕΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΕΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΡΙΑ ΜΕ ΣΥΝΔΡΟΜΟ ASPERGER: ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ

Μώκος[1] Ευάγγελος και Ιωάννης Νούλης[2]

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

inoulis@rhodes.aegean.gr, emokos@rhodes.aegean.gr

Στην παρούσα έρευνα, διερευνήσαμε *αν μαθήτρια με Σύνδρομο Asperger εμφανίζει μεταγνωστικές λειτουργίες ελέγχου και παρακολούθησης κατά την επίλυση ενός σύνθετου μαθηματικού προβλήματος. Η συλλογή των δεδομένων έγινε κατά τη διάρκεια επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος (online) με τη μέθοδο της «φωναχτής σκέψης», αλλά και με άλλο σύνθετο μαθηματικό πρόβλημα μετά τη διαδικασία επίλυσης (off line), με μεταγνωστικού τύπου ερωτηματολόγιο. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η μαθήτρια με ΣΑ παρουσίασε κάποια μεταγνωστική δραστηριότητα κατά την online, ενώ ελάχιστη κατά την off line διαδικασία.*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το Σύνδρομο Asperger (ΣΑ) ανήκει σήμερα στη Διαταραχή Αυτιστικού Φάσματος και ο εντοπισμός χαρακτηριστικού τρόπου μαθηματικού συλλογισμού και υπολογιστικών πρακτικών γι’ αυτή την πληθυσμιακή κατηγορία δεν έχει προχωρήσει πέρα από τη διάγνωση επιμέρους δυσκολιών στο πλαίσιο ψυχολογικών δοκιμασιών. Τα τελευταία χρόνια οι μεταγνωστικές λειτουργίες έχουν γίνει ένα από τα κύρια πεδία μελέτης της γνωστικής αναπτυξιακής έρευνας. Η μεταγνώση είναι μια γέφυρα μεταξύ διάφορων πεδίων, όπως για παράδειγμα μεταξύ της μάθησης και των κινήτρων για τη μάθηση όπως και μεταξύ της μάθησης και της γνωστικής ανάπτυξης (Μώκος, 2012). Οι δυσκολίες των παιδιών με ΣΑ στο γνωστικό τομέα και ειδικότερα στα μαθηματικά σε συνδυασμό με την αδυναμία τους για κοινωνική αλληλεπίδραση τα οδηγεί πολλές φορές σε εκπαιδευτικό και κοινωνικό αποκλεισμό στην τάξη (Νούλης, 2014).

Σε αυτό το πλαίσιο εντάσσεται η έρευνα που παρουσιάζουμε στην παρούσα εργασία για να διαπιστώσουμε αν οι μαθητές με ΣΑ μπορούν να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα, μέσα από ένα μεταγνωστικό πλαίσιο διαχείρισης της επίλυσης μαθηματικού προβλήματος. Σκοπός μας είναι να διαπιστώσουμε αν μπορεί μια μαθήτρια με διαπιστωμένο ΣΑ να παρουσιάσει αυθόρμητα μεταγνωστικές λειτουργίες ελέγχου και παρακολούθησης, όταν λύνει ένα συγκεκριμένο τύπο μαθηματικού προβλήματος.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Το ΣΑ συμπεριλήφθηκε για πρώτη φορά το 1994, ως ξεχωριστό σύνδρομο και μία από τις Διάχυτες Αναπτυξιακές Διαταραχές, στο διαγνωστικό εγχειρίδιο της Αμερικανικής Ψυχιατρικής Εταιρείας (APA, 1994), DSM-IV), ενώ με το DSM-5, που το αντικατέστησε το Μάιο του 2013, τα άτομα των διαφορετικών τύπων της Διάχυτης Αναπτυξιακής Διαταραχής έχουν μπει κάτω από την ίδια «ομπρέλα» της *Διαταραχής Αυτιστικού Φάσματος (ΔΑΦ)* (Autism Spectrum Disorder). Νευροβιολογικά το σύνδρομο περιγράφεται ως εγκεφαλική δυσλειτουργία κυρίως του προμετωπιαίου φλοιού, όπου εμφανίζεται ανωμαλία του μετωπιαίου λοβού και του μεταιχμιακού συστήματος (Aylward et al., 1999· Attwood, 2005) και φαίνεται να είναι γενετικά μεταβιβάσιμο. Επιπλέον έρευνες έδειξαν ότι οι μεταγνωστικές διεργασίες εδράζονται στο μετωπιαίο λοβό και βλάβη σε αυτόν (σύνδρομο Korsakoff), προκαλεί απώλεια των μεταγνωστικών ικανοτήτων (Shimamura, 2000). Οι κοινωνικο-γνωστικές δυσκολίες του ΣΑ καθώς και των ατόμων ΔΑΦ, σύμφωνα με τις ψυχολογικές προσεγγίσεις (Cumine, Leach & Stevenson, 2000· Attwood, 2009), οφείλονται κυρίως: α) Στην έλλειψη της Θεωρία του Νου (ΘτΝ) (ή αλλιώς στην απουσία ενσυναίσθησης), που είναι η ικανότητα του ατόμου να αναπαριστά το περιεχόμενο του νου και αναπτύσσεται κατά την προσχολική περίοδο, σχετιζόμενη όχι μόνο με ειδικό μεταγνωστικό λεξιλόγιο (Μισαηλίδη, 2011), αλλά και με τη γενικότερη μεταγνωστική διαδικασία (Μώκος, 2012), β) στην αδύναμη Κεντρική Συνοχή, που έχει ως αποτέλεσμα δυσκολία στην επεξεργασία πληροφοριών, στην οργάνωση της σκέψης καθώς και στην αντίληψη και κατανόηση της συνολικής εικόνας και τέλος γ) στη διαταραχή της Επιτελικής Λειτουργικότητας (δηλαδή της ικανότητας να εφαρμόζει κάποιος μια κατάλληλη στρατηγική επίλυσης προβλημάτων, για να πετύχει έναν σκοπό), που δημιουργεί δυσκολίες στην επίλυση προβλήματος καθώς και στη διαχείριση νέων καταστάσεων. Επιπλέον μεγάλο ποσοστό των ατόμων με ΣΑ παρουσιάζουν υψηλό άγχος και ελλειμματική προσοχή (Attwood, 2009).

Η έρευνα για τη μαθηματική ικανότητα των ατόμων με ΣΑ, που στηρίζεται σχεδόν αποκλειστικά σε αποτελέσματα σταθμισμένων ψυχομετρικών δοκιμασιών σχολικών επιδόσεων (WISC, WIAT, TOPS-E, WRAT), έδειξε ότι τα άτομα ΣΑ έχουν παρόμοια μαθηματική επίδοση με το μέσο όρο των συμμαθητών τους εμφανίζοντας μια τυπική μαθηματική ικανότητα (Griswold, Barnhill, Myles, Hagiwara & Simpson, 2002· Chiang & Lin, 2007· Attwood, 2009). Ωστόσο σε μια έρευνα σχεδόν τα μισά παρουσίασαν ειδικές μαθησιακές δυσκολίες στα Μαθηματικά (Reizel & Szatmari, 2003), παρουσιάζοντας ίσως δυσαριθμησία (Attwood, 2005, 2009· Jordan, 2003). Οι μεγαλύτερες όμως δυσκολίες των ατόμων με ΣΑ στα μαθηματικά εντοπίστηκαν στην επίλυση προβλήματος (Chiang & Lin, 2007) καθώς και στον υπολογισμό αριθμητικών πράξεων (Griswold et al., 2002). Έχουν «δικό τους» τρόπο σκέψης στην επίλυση προβλήματος, που μπορεί να είναι ευκολότερος από τους συμβατικούς τρόπους λύσης για τα άτομα αυτά, χωρίς γνωστική ευελιξία, δηλαδή ακολουθούν μια προσέγγιση για την επίλυση προβλήματος και δεν την αλλάζουν ακόμα και αν είναι λανθασμένη. Αυτό οφείλεται σε νευρολογικό πρόβλημα (βλάβη τμημάτων του μετωπιαίου λοβού) (Attwood, 2009). Όταν οι πληροφορίες δίνονται οπτικά ή έχουν σχέση με τα ενδιαφέροντά τους ή γίνεται χρήση της φωναχτής σκέψης, τα άτομα ΣΑ φαίνεται να διευκολύνονται (Griswold et al., 2002· Attwood, 2009). Οι μαθητές με ΣΑ που είναι ικανοί να λύσουν ένα σύνθετο μαθηματικό πρόβλημα αδυνατούν να εκφράσουν λεκτικά τον τρόπο σκέψης, που τους οδήγησε στη λύση (Attwood, 2009). Είναι πιθανό τα άτομα αυτά να αντιμετωπίζουν μεταγνωστικά προβλήματα (Νούλης, 2014).

Πολλοί ερευνητές, (Flavell, 1981· Veenman et al., 2006) θεωρούν την έννοια της μεταγνώσης αρκετά ασαφή και πολλές φορές είναι αρκετά δύσκολο να εστιαστούμε πάνω σε έννοιες και σκέψεις που έχουν σχέση με τη μεταγνώση, τα συστατικά της, τη λειτουργία της, τη μέτρησή της. Οι Nelson και Narens το 1994, μπόρεσαν να δώσουν ένα μεταγνωστικό μοντέλο που επικεντρώνεται στην αλληλεπίδραση μεταξύ δύο μεταγνωστικών λειτουργιών: της παρακολούθησης (monitoring) και του ελέγχου (control), καθώς επίσης και τη σχέση της ροής των πληροφοριών μεταξύ των δύο επιπέδων (Μώκος, 2012) (σχ. 1). Το μεταγνωστικό μοντέλο των Nelson και Narens υπονοεί ότι υπάρχουν δύο επίπεδα: το Αντικείμενο – επίπεδο (το γνωστικό επίπεδο που βασίζεται σε δεδομένα από τη διαδικασία παρακολούθησης) και το Μετά – επίπεδο (αποτελεί τη νοητική προσομοίωση του επιπέδου – αντικειμένου). Μεταξύ τους υπάρχει ροή πληροφοριών. Από το Αντικείμενο – επίπεδο προς το Μετά – επίπεδο με τη λειτουργία της Παρακολούθησης και από το Μετά – επίπεδο προς το Αντικείμενο – επίπεδο με τη λειτουργία του Ελέγχου.

Σχ. 1 Βασική αναπαράσταση του μεταγνωστικού μοντέλου των Nelson και Narens (Nelson & Narens, 1994)

Ο εντοπισμός των δύο αυτών λειτουργιών φανερώνει τη μεταγνωστική συμπεριφορά του μαθητή (Mokos & Kafoussi, 2013).

Πολλές έρευνες έχουν γίνει πάνω στη σχέση της μεταγνώσης με την επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Δύο κατηγορίες ερευνών μπορούμε να πούμε πως έχουν σχηματοποιηθεί όσον αφορά τη μεθοδολογία που ακολουθήθηκε. Οι έρευνες των οποίων τα δεδομένα συνελέγησαν με ερωτηματολόγια που δόθηκαν μετά τη μεταγνωστική δραστηριότητα (off line διαδικασία) και οι έρευνες που τα δεδομένα συνελέγησαν τη στιγμή της μεταγνωστικής διεργασίας (on line διαδικασία) (Veenman et al., 2006).

Ειδικότερα στην παρούσα εργασία επιχειρούμε να μελετήσουμε αν μπορεί μια μαθήτρια με διαπιστωμένο ΣΑ να παρουσιάσει αυθόρμητα μεταγνωστικές λειτουργίες ελέγχου και παρακολούθησης κατά τη διάρκεια επίλυσης ενός συγκεκριμένου τύπου μαθηματικού προβλήματος.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Η μελέτη μας στηρίχθηκε στην ανάλυση του τρόπου επίλυσης ενός σύνθετου μαθηματικού προβλήματος από μια μαθήτρια της Α΄ γυμνασίου (13 ετών), που μόλις είχε τελειώσει το δημοτικό, με διάγνωση ΣΑ και η έρευνα διεξήχθη το 2015. Δόθηκε για λύση ένα σύνθετο μαθηματικό πρόβλημα για on line έρευνα και ένα σύνθετο μαθηματικό πρόβλημα για την off line έρευνα. Σύνθετο μαθηματικό πρόβλημα είναι αυτό που απαιτεί για να λυθεί περισσότερες από μια μαθηματικές πράξεις και συναντάται στα ελληνικά εγχειρίδια μαθηματικής εκπαίδευσης. Τα ίδια προβλήματα δόθηκαν και σε μια μαθήτρια της τυπικής εκπαίδευσης, ίδιας ηλικίας και τάξης, η οποία αποτέλεσε την ομάδα ελέγχου. Λόγω του ότι τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών δεν περιέχουν προβλήματα στα ενδιαφέροντα των μαθητών με ΣΑ δε δόθηκε τέτοιο στην παρούσα έρευνα. Για τους σκοπούς της έρευνας χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της «φωναχτής σκέψης» (Ericsson & Simon, 1993), όπου το υποκείμενο της έρευνας λέει φωναχτά ό,τι σκέφτεται. Επίσης αναλύσαμε τις λεκτικές αναφορές τόσο της μαθήτριας με ΣΑ όσο και της τυπικής σύμφωνα με το τροποποιημένο MAI (Metacognitive Assessment Inventory) (Μώκος, 2012). Το τροποποιημένο MAI βασίζεται στο MAI των Schraw και Dennison (1994), το οποίο αποτελείται από 52 ερωτήσεις τύπου κλίμακας Likert και μετρά τη μεταγνωστική γνώση και τη ρύθμιση της γνώσης, τόσο των νέων όσο και των ενηλίκων. Σύμφωνα με το τροποποιημένο MAI αποδίδεται κάθε λεκτική αναφορά η οποία δείχνει μεταγνωστική λειτουργία στη μεταγνωστική περιοχή η οποία ελέγχεται από το τροποποιημένο MAI (Μώκος, 2012).

Το σύνθετο μαθηματικό πρόβλημα που έλυσαν οι δύο συμμετέχοντες και έγινε διερεύνηση των μεταγνωστικών λειτουργιών κατά τη στιγμή της γνωστικής διαδικασίας (on line) ήταν το εξής: *«Αγόρασε κάποιος ένα διαμέρισμα 90 τετραγωνικών μέτρων προς 2300 € το τετραγωνικό μέτρο. Πλήρωσε το μισό της αξίας μετρητοίς και το υπόλοιπο σε 25 ίσες μηνιαίες δόσεις. Πόσο πλήρωνε στην κάθε δόση;»*. Το σύνθετο μαθηματικό πρόβλημα που έλυσαν οι δύο συμμετέχοντες και έγινε διερεύνηση των μεταγνωστικών λειτουργιών μετά τη γνωστική διαδικασία (off line) ήταν το εξής: *«Στην πόλη της Θεσσαλονίκης καθημερινά κυκλοφορούν 330.000 αυτοκίνητα. Στα 45.000 από αυτά τα αυτοκίνητα επιβαίνουν μαζί με τον οδηγό 3 άτομα. Στα υπόλοιπα αυτοκίνητα επιβαίνει μόνο ο οδηγός. Πόσα αυτοκίνητα θα κυκλοφορούσαν στην πόλη αν σε κάθε αυτοκίνητο επέβαιναν 3 άτομα;»* (Μώκος, 2012).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων σχετικά με την ανίχνευση μεταγνωστικών λειτουργιών κατά τη διάρκεια της επίλυσης (on line) από τη μαθήτρια με ΣΑ (Α) και την τυπική (Τ) δίνουν τις παρακάτω λεκτικές αναφορές:

1 Μαθήτρια Α: Αφού λέει ότι πλήρωσε το μισό της αξίας του μετρητοίς, θα πρέπει να κάνουμε 2300 € δια 2, για να βρούμε πόσο είναι το μισό της αξίας…του διαμερίσματος.

2 Μαθήτρια Α: Το ξαναδιαβάζω.

3 Μαθήτρια Α: Ό, τι θα κάνω το 2300 €… θα το κάνω δια 2 έτσι ώστε να βρω το μισό της αξίας του διαμερίσματος που πλήρωσε μετρητοίς.

4 Μαθήτρια Α: Α! ναι άρα θα πρέπει να κάνουμε διαίρεση σε αυτό… Ώστε να βρούμε πόσο πληρώνει στην κάθε δόση γιατί αν δεν το κάνουμε αυτό δε θα καταλάβουμε πόσο πλήρωσε γιατί αυτό που θέλει το πρόβλημα είναι να βρούμε πόσο έκανε σε αυτές τις 25 δόσεις, πόσο ήταν το ποσό.

5 Μαθήτρια Α: Ναι. Αυτό είναι που πλήρωσε.

1 Μαθήτρια Τ: (Διαβάζει το πρόβλημα). Λοιπόν, πρώτα θα δούμε πόσα € έκανε το διαμέρισμα.

2 Μαθήτρια Τ: Οπότε θα κάνουμε 90 επί 2.300

3 Μαθήτρια Τ: Λοιπόν βγάζουμε τα μηδενικά και 3 επί 9 ίσον είκοσι επτά. 2 επί 9, δέκα οχτώ και δύο, είκοσι. Βάζουμε και τα 3 μηδενικά και βγαίνει 207.000, οπότε θα βγάλουμε …

4 Μαθήτρια Τ: Θα το κάνουμε δια δύο για να βρούμε πόσο είναι το μισό που το πλήρωσε και μετά το υπόλοιπο να το διαιρέσουμε με το 25.

5 Μαθήτρια Τ: Οπότε το 2 στο 2 μία φορά. Μία φορά το δύο, δύο από δύο μηδέν… Το αφαιρώ και μένει μηδέν. Κάτω και το 7. Τώρα … Ε! (σκέφτεται)…. Το 103.000 το άλλο μισό θα το κάνουμε δια 25 που ήταν οι δόσεις, για να δούμε πόσο ήταν η κάθε δόση. Το 25 στο 103 … Ε! … Δύο φορές το είκοσι πέντε, πενήντα. Το αφαιρώ και μένει μηδέν ….

6 Μαθήτρια Τ: Οπότε … πόσα € πλήρωσε σε κάθε δόση; … Ε! … Στην κάθε δόση πλήρωσε 4.120 € (γράφει αυτά που λέει). Τελείωσα.

Η μαθήτρια με ΣΑ παρουσίασε περισσότερες λεκτικές αναφορές που υποδηλώνουν τη μεταγνωστική λειτουργία του ελέγχου (λεκτ. αναφ. 1, 2, 3, 4) και αποδίδονται στις μεταγνωστικές στρατηγικές όπως φαίνεται και στον Πίνακα 1. Μία μόνο λεκτική αναφορά (λεκτ. αναφ. 5) που αναφέρεται στη μεταγνωστική λειτουργία της παρακολούθησης έγινε από τη μαθήτρια με ΣΑ. Αντίθετα η τυπική μαθήτρια παρουσίασε αρκετές λεκτικές αναφορές που φανερώνουν μεταγνωστικές πράξεις ελέγχου (λεκτ. Αναφ. 1, 2, 3, 5) και μεταγνωστικές πράξεις παρακολούθησης (λεκτ. Αναφ. 4, 6).

ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ					
ΕΛΕΓΧΟΣ	Α	Τ	**ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ**	Α	Τ
ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΩΝ	Α	Τ	ΕΛΕΓΧΟΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ	Α	Τ
Επιβραδύνει την ταχύτητά του όταν συναντά σημαντικές πληροφορίες			Συχνά (περιοδικά) ανακεφαλαιώνει για να βοηθηθεί να καταλάβει σημαντικές σχέσεις		
Συνειδητά επικεντρώνει την προσοχή του σε σημαντικές πληροφορίες			Αναλύει τη χρησιμότητα των στρατηγικών ενώ μελετά		4
Προσπαθεί να κατακερματίσει τη μελέτη σε μικρότερα βήματα		1	Βρίσκει τον εαυτό του να σταματά ταχτικά για να ελέγξει την κατανόησή του		
Συγκεντρώνεται περισσότερο σε γενικές παρά σε ειδικές έννοιες			ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ	Α	Τ
ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ	Α	Τ	Γνωρίζει πόσο καλά τα πήγε όταν τελειώνει ένα τεστ		6
Επανεκτιμά τις υποθέσεις του όταν μπερδεύεται			Ανακεφαλαιώνει τι έμαθε αφού τελειώσει		
Σταματά και ξαναδιαβάζει όταν μπερδεύεται	2		Ρωτά τον εαυτό του αν έχει θεωρήσει όλες τις περιπτώσεις μετά από τη λύση ενός προβλήματος		

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ	Α	Τ			
Βάζει συγκεκριμένους στόχους πριν ξεκινήσει ένα πρόβλημα					
Ρωτά τον εαυτό του ερωτήσεις σχετικά με το υλικό πριν ξεκινήσει					
Σκέφτεται πολλούς τρόπους για να λύσει ένα πρόβλημα και διαλέγει τον καλύτερο					
Διαβάζει προσεκτικά τις οδηγίες πριν ξεκινήσει ένα πρόβλημα					
ΜΕΤΑ-ΕΠΙΠΕΔΟ					
ΔΙΑΔΙΚΑΣΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ	Α	Τ	ΔΗΛΩΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ	Α	Τ
Έχει ένα συγκεκριμένο σκοπό για κάθε στρατηγική που χρησιμοποιεί	1	2	Είναι καλός στο να κρίνει το πόσο καλά καταλαβαίνει κάτι	5	
Βρίσκει τον εαυτό του να χρησιμοποιεί χρήσιμες στρατηγικές μάθησης αυτομάτως	3,4	3,5			

Πίνακας 1: Τροποποιημένο MAI με τις λεκτικές αναφορές των συμμετεχόντων

Για την ανίχνευση μεταγνωστικών λειτουργιών μετά τη διαδικασία επίλυσης του μαθηματικού προβλήματος (off line) δόθηκε το ερωτηματολόγιο του παραρτήματος με απαντήσεις από 0 έως 4 (καθόλου, ελάχιστα, λίγο, πολύ πάρα πολύ). Η μαθήτρια με ΣΑ έδωσε τις εξής απαντήσεις: Ε1-0, Ε2-2, Ε3-0, Ε4-0, Ε5-2, Ε6-3, Ε7-2, Ε8-0 και ανιχνεύθηκε μικρή μεταγνωστική λειτουργία ελέγχου (ερωτήματα 2, 6, 7) και σχεδόν καθόλου μεταγνωστική λειτουργία παρακολούθησης (ερώτημα 5). Η τυπική μαθήτρια έδωσε τις εξής απαντήσεις: Ε1-4, Ε2-3, Ε3-4, Ε4-3, Ε5-4, Ε6-3, Ε7-3, Ε8-4 οπότε ανιχνεύθηκε πολύ καλή μεταγνωστική λειτουργία ελέγχου (ερωτήματα 2, 6, 7, 8) όπως και παρακολούθησης (ερωτήματα 1, 3, 4, 5) (βλ. παράρτημα).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην on line διαδικασία παρατηρήσαμε ότι η μαθήτρια με ΣΑ παρουσίασε μεταγνωστικό έλεγχο με τη στρατηγική της διόρθωσης, ίσως γιατί σε αυτό συνέβαλε και η «φωναχτή σκέψη» και η καθοδήγηση από τον ερευνητή. Επιπλέον παρουσίασε στρατηγικές Διαδικαστικής γνώσης πράγμα που φανερώνει ότι χρησιμοποίησε το μετα-επίπεδό της πιθανώς βοηθούμενη από τη «φωναχτή σκέψη». Και η τυπική μαθήτρια παρουσίασε αυθόρμητα τις ίδιες περίπου μεταγνωστικές λειτουργίες χωρίς να έχει ανάγκη καθοδήγησης.

Αντιθέτως στην off line διαδικασία η μαθήτρια με ΣΑ φάνηκε να μην παρουσιάζει καλές μεταγνωστικές λειτουργίες ελέγχου και σχεδόν καθόλου παρακολούθησης πιθανόν και λόγω ελλειμματικής προσοχής. Σε αντίθεση η τυπική μαθήτρια στις ερωτήσεις ελέγχου και παρακολούθησης επέλεξε υψηλή κλίμακα παρουσιάζοντας πολύ καλές μεταγνωστικές λειτουργίες.

Με βάση τα αποτελέσματα της έρευνάς μας, προτείνουμε ο εκπαιδευτικός στην τάξη να φροντίζει ώστε στους μαθητές με ΣΑ κατά τη διάρκεια επίλυσης σύνθετου μαθηματικού προβλήματος να παρέχεται καθοδήγηση και να γίνεται χρήση της «φωναχτής σκέψης».

Επειδή στην έρευνά μας δε χρησιμοποιήσαμε προβλήματα στα ιδιαίτερα ενδιαφέροντα των μαθητών με ΣΑ (π.χ. δεινόσαυροι), λόγω του ότι τέτοια προβλήματα δεν υπάρχουν μέσα στα σχολικά εγχειρίδια (Νούλης, Καφούση, Παπαηλιού & Πολεμικός, 2015), καλό θα είναι να διερευνηθεί σε μετέπειτα έρευνες κατά πόσο τέτοιου είδους προβλήματα τα βοηθούν να αναπτύξουν αυθόρμητα μεταγνωστικές λειτουργίες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

American Psychiatric Association. (1994). *Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders* (4th Ed.). Washington, D.C.: American Psychiatric Association.

Attwood, T., (2005). *Παιδιά με ιδιαιτερότητες στη γλωσσική ανάπτυξη και την κοινωνική αλληλεπίδραση, Σύνδρομο Asperger: Οδηγός ανίχνευσης και αντιμετώπισης.* Α.Β. Παπαϊωάννου (Επιμ.) (Α. Κορογιαννάκη & Ε. Μιχαλέτου, Μετάφ.). Αθήνα: Σαββάλας. (Το πρωτότυπο έργο δημοσιεύτηκε το 1998).

Attwood, T., (2009). *Σύνδρομο Asperger. Ένας πλήρης οδηγός.* Β. Παπαγεωργίου (Επιμ.) (Χ. Λυμπεροπούλου, Μετάφ.). Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα. (Το πρωτότυπο έργο δημοσιεύτηκε το 2007).

Aylward, E., Minshew N., Goldstein, G., Honeycutt, N., Augustine, A., Yates, K., Barta, P., & Pearlson, G. (1999). MRI volumes of amygdale and hippocampus in non-mentally retarded autistic adolescents and adults, *Neurology*, 53, 2145–2150.

Chiang, H., & Lin, Y. (2007). Mathematical ability of students with Asperger syndrome and high-function autism: A review of literature. *Autism, 11(*6), 547-556.

Cumine, V., Leach, J., & Stevenson, G. (2000). *Σύνδρομο Asperger. Ένας πρακτικός οδηγός για δασκάλους*. Β. Παπαγεωργίου & Β. Νταφούλης (Μετάφ.). Αθήνα: Ελληνική Εταιρεία Προστασίας Αυτιστικών Ατόμων. (Το πρωτότυπο έργο δημοσιεύτηκε το 1998).

Ericsson, K., Simon, H. A. (1993). *Protocol Analysis: Verbal reports as data*. Cambridge, MA: Bradford books/MIT Press.

Flavell, J. H. (1981). Cognitive monitoring. In W. P. Dickson (Ed.), *Children's oral communication skills* (pp. 35–60). New York: Academic Press.

Griswold, D. E., Barnhill, G. P., Myles, B. S., Hagiwara, T., & Simpson, R. L. (2002). Asperger Syndrome and Academic Achievement. *Focus on Autism and Other Developmental Disabilities, 17*(2), 94-102.

Jordan, R. (2003). School-Based Intervention for Children with Specific Learning Difficulties. In M. Prior (Ed.), *Learning and Behavior Problems in AspergerSyndrome* (pp. 212-243). NY: The Guilford Press.

Μισαηλίδη, Π. (2011). Κατανόηση μεταγνωστικών όρων και Θεωρία του Νου: Μια μελέτη της σχέσης των δύο ικανοτήτων στην προσχολική ηλικία. *Helenic Journal of Psychology*, 8, 168–192.

Μώκος, Ε., & Χαβιάρης, Π. (2009). Ερευνώντας τις μεταγνωστικές δεξιότητες των μαθητών του δημοτικού στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. *Πρακτικά του 3ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Εν.Ε.Δι.Μ., Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 29 – 31 Οκτωβρίου 2009, Ρόδος*.

Mokos, E., & Kafoussi, S. (2013). Elementary students' spontaneous metacognitive functions in different types of mathematical problems. *Journal of Research in Mathematics Education, 2* (2), 242-267. doi:10.4471/redimat.201 3.29.

Μώκος, Ε., (2012). *Διερεύνηση μεταγνωστικών λειτουργιών κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων σε μαθητές ηλικίας 10 – 11 ετών*. Αδημοσίευτη Διδακτορική Διατριβή. Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Nelson, T. O., & Narens, L. (1994). Why investigate metacognition? In J. Metcalfe & A. P. Shimamura (Eds.), *Metacognition: Knowing about knowing*, pp. 1–25. Cambridge, MA: MIT Press.

Νούλης, Ι., (2014). *Η διερεύνηση της πολλαπλασιαστικής σκέψης παιδιών με διάγνωση συνδρόμου Asperger*. Αδημοσίευτη διδακτορική διατριβή. Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Νούλης, Ι., Καφούση, Σ., Παπαηλιού, Χ., & Πολεμικός, Ν. (2015). Η καταλληλότητα των πολλαπλασιαστικών έργων των σχολικών εγχειριδίων Γ΄ και Δ΄ Δημοτικού για παιδιά με σύνδρομο Asperger. *Στο Διλλήματα και Προοπτικές στην Ειδική Εκπαίδευση, 3ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ειδικής Αγωγής με διεθνή συμμετοχή, (σσ.359-373)*. Τόμος Α. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρη.

Reitzel, J., & Szatmari, P. (2003). Cognitive and Academic Problems. In M. Prior (Ed.), *Learning and Behavior Problems in Asperger Syndrome* (pp. 35 – 54). NY: The Guilford Press.

Shimamura, A. P. (2000). Toward a Cognitive Neuroscience of Metacognition. *Consciousness and Cognition* 9, 313–323.

Schraw, G., Dennison, R.S. (1994). Assessing metacognitive awareness. *Contemporary Educational Psychology*, 19, 460-475.

Veenman, M., Bernadette H. A. M. Van Hout - Wolters, Afflerbach P. (2006). Metacognition and learning: conceptual and methodological considerations, *Metacognition Learning*, 1, 3 – 14.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Παραθέτουμε το ερωτηματολόγιο που χρησιμοποιήθηκε για την ανίχνευση των μεταγνωστικών λειτουργιών μετά τη διαδικασία επίλυσης του μαθηματικού προβλήματος (βλ. Μώκος, & Χαβιάρης, 2009). Κάθε ερώτημα είχε κλίμακα από 0 έως 4 (καθόλου, ελάχιστα, λίγο, πολύ πάρα πολύ):

1. Γνωρίζω πόσο καλά τα έχω πάει μετά τη λύση του προβλήματος (παρακολούθηση)
2. Ξεχώρισα τις σημαντικές πληροφορίες του προβλήματος (έλεγχος)
3. Όταν τελείωσα το πρόβλημα αναρωτήθηκα αν υπήρχε ένας ευκολότερος τρόπος για να το λύσω (παρακολούθηση)
4. Σκέφτηκα τι έμαθα αφού τελείωσα το πρόβλημα (παρακολούθηση)
5. Σταματούσα συχνά την ώρα που έλυνα το πρόβλημα και αναρωτιόμουν αν τα πήγαινα καλά (παρακολούθηση)
6. Άλλαξα τρόπο λύσης όταν κατάλαβα ότι δεν πέτυχα το στόχο μου (έλεγχος)
7. Διάβασα προσεκτικά τα δεδομένα του προβλήματος πριν ξεκινήσω να το λύνω (έλεγχος)
8. Σταμάτησα και ξαναδιάβασα το πρόβλημα όταν μπερδεύτηκα (έλεγχος)

ΑΣΥΝΕΧΕΙΑ: ΕΝΑΣ ΔΡΟΜΟΣ ΓΙΑ ΝΑ ΑΣΚΗΣΟΥΜΕ ΚΡΙΤΙΚΗ ΣΕ ΛΟΓΟΥΣ (DISCOURSES) ΒΑΘΙΑ ΡΙΖΩΜΕΝΟΥΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Νανούρης Βασίλης

Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

vasnanouris@yahoo.gr

Πώς θα μπορούσαμε να επιχειρήσουμε να αποδομήσουμε ηγεμονικούς λόγους όπως «τη σπουδαιότητα των μαθηματικών επί του εκπαιδευτικού συστήματος, ή ακόμα και επί της κοινωνίας» ή «το διαχωρισμό σε θετική και θεωρητική κατεύθυνση στο Λύκειο ως κανονικότητα»; Πώς αλληλεπιδρούν μεταξύ τους αυτοί οι λόγοι, με ποιους τρόπους αναπαράγονται και τι (ανα)παράγουν; Ο εντοπισμός και η ερμηνεία ασυνεχειών προτείνεται ως «εργαλείο διάρρηξης» ηγεμονικών λόγων, ως τρόπος ανάδειξης των σχέσεων εξουσίας και ως δίοδος αποσταθεροποίησης κάθε «αλήθειας», που αν αναρωτηθούμε, δύσκολα θα θυμηθούμε γιατί την πιστέψαμε.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

«Όποιος το' χει με τα μαθηματικά πρέπει να πάει στη θετική». «Μπορούν να τα καταφέρουν όλοι και στις δύο κατευθύνσεις». «Στα μαθηματικά δεν μπορούν να τα καταφέρουν όλοι […] για να είσαι καλός στα μαθηματικά σίγουρα πρέπει να είσαι έξυπνος». Τα παραπάνω αποσπάσματα αποτελούν φράσεις μίας μαθήτριας της Α' Λυκείου, της Χρυσάνθης στο πλαίσιο συνέντευξης. Η Χρυσάνθη επαναλαμβάνει τις ίδιες φράσεις συχνά και προσπαθεί να τις αιτιολογήσει, χωρίς να παρατηρεί την ασυνέχεια που αναδύεται στα λεγόμενά της.

1. Πώς μπορεί όμως να ερμηνευθεί ένας λόγος που κηρύττει πως η θετική κατεύθυνση «είναι για όλους», τα μαθηματικά «είναι για κάποιους», ενώ ταυτόχρονα η ικανότητα στα μαθηματικά πρέπει να «ισοδυναμεί» με την επιλογή της θετικής κατεύθυνσης;
2. Πού θα μπορούσε να οφείλεται μια τέτοια ασυνεπής σχέση μεταξύ των λεγομένων της μαθήτριας; Πώς θα μπορούσε να «αποκατασταθεί» η παραπάνω ασυνέχεια;
3. Αλήθεια, «δικαιούμαστε» να δοκιμάσουμε να την αποκαταστήσουμε; Ή ακριβέστερα, με ποιους όρους μπορεί να αποπειράται κανείς/μία πιθανές συνέχειες;

4. Ακόμα, αν υποθέταμε ότι μία συγκεκριμένη ασυνέχεια δύναται να ερμηνευθεί, πώς θα αντιδρούσαμε αν, σαστισμένοι, συνειδητοποιούσαμε ότι μπροστά στα μάτια μας – ή καλύτερα «μπροστά στα αυτιά μας» - αρθρώνεται η ακριβώς αντίστροφη ασυνέχεια;

ΛΟΓΟΣ, ΕΞΟΥΣΙΑ, ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΟ, ΑΛΗΘΕΙΑ: ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΗΣΗ ΣΕ ΕΝΑ ΜΕΤΑΔΟΜΙΣΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η υιοθέτηση του θεωρητικού ρεύματος του μεταδομισμού μας επιτρέπει να προσεγγίσουμε τα παραπάνω ερωτήματα εστιάζοντας στην πολυδιάστατη σημασία της έννοιας της ασυνέχειας. Κι αυτό γιατί, μέσω μίας μεταδομιστικής σκοπιάς, η πίστη στην ύπαρξη της αντικειμενικής γνώσης, της ουδετερότητας, της μοναδικής αλήθειας, καθώς και κάθε λογής διπολικοί διαχωρισμοί και ταξινομήσεις, αντιμετωπίζονται με σκεπτικισμό. Στο πλαίσιο αυτό διαμορφώνεται η έννοια του *λόγου (discourse)*. Πρόκειται για μια έννοια που υπερβαίνει τη γλώσσα και την ομιλία (Foucault, 1987β), αφού αποτελεί μία κοινωνική πρακτική που διαμορφώνει τον κοινωνικό κόσμο (Phillips & Jorgensen, 2009). Έτσι, οι λόγοι λειτουργούν σαν άγραφοι νόμοι, οι οποίοι συγκροτούν κοινωνικές οντότητες και σχέσεις. Ακόμα, δεν μπορούν να αναλυθούν ξέχωρα από το κοινωνικό-ιστορικό-πολιτικό τους πλαίσιο, καθώς σε διαφορετικές χρονικές στιγμές δομούν θεσμούς και συγκροτούν τα άτομα ως σκεπτόμενα, συναισθηματικά και ενεργά υποκείμενα (Walshaw, 2013).

Όπως λοιπόν, το *υποκείμενο* συγκροτείται δια του λόγου, κατά τον ίδιο τρόπο ανακατασκευάζονται οι έννοιες της *εξουσίας* και της *αλήθειας*. Όμως, τι μπορεί να μας επιτρέψει να αρθρώσουμε κριτικές στάσεις; Ενδεχομένως, μία αποσαφήνιση της μεταδομιστικής μετατόπισης των εννοιών «υποκείμενο», «εξουσία» και «αλήθεια». Κι αυτό γιατί η δέσμη των σχέσεων που δένει τη μία με την άλλη ή τη μία με τις δύο άλλες προαναφερθείσες έννοιες είναι -κατά τον Foucault (2016)- η εστία της κριτικής. Έτσι, διευκρινίζουμε ότι στο παρόν κείμενο αντιλαμβανόμαστε το υποκείμενο ως «αποκεντρωμένο υποκείμενο», την εξουσία ως «σχέσεις εξουσίας» και την αλήθεια ως «αλήθεια στο πλαίσιο».

ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΡΙΤΙΚΗ ΣΤΑΣΗ

Η *ασυνέχεια* – όπως και η συνέχεια – είναι μία μεταβλητή έννοια, η οποία εξαρτάται από την εκάστοτε κοινωνική πραγματικότητα και τα επιμέρους άτομα, όπως διαμορφώνονται μέσα σε αυτήν (Potter & Wetherell, 2009). Βασισμένος στο έργο του Foucault, ο Βίγκλας (1994) τη χαρακτηρίζει είτε ως «ασχεσία», είτε ως έλλειψη ακολουθίας. Αντίστοιχα, ο Δοξιάδης (2008) την παρομοιάζει συχνά είτε με «ένα άλυτο αίνιγμα στην αφήγηση», είτε με «ένα κομμάτι του παζλ που δεν έχει βρεθεί».

Λαμβάνοντας υπ’ όψη τόσο την ελαστικότητα που ενέχει ως έννοια, όσο και το μεταδομιστικό πρίσμα μέσα από το οποίο την αντιλαμβανόμαστε, θα μπορούσαμε να παραλλάξουμε λίγο τις παραπάνω παρομοιώσεις. Ετσι, θα μπορούσαμε να προσεγγίσουμε την ασυνέχεια ως «μία μαύρη τρύπα στην αφήγηση» ή ως «ένα κομμάτι που λείπει από ένα διαλεκτικό/εν κινήσει παζλ». Συγκεκριμένα, αντικαθιστούμε τη φράση «άλυτο αίνιγμα», γιατί φοβόμαστε μην υπονοηθεί ότι υπάρχει μια βέβαιη λύση του αινίγματος η οποία περιμένει καρτερικά να ανακαλυφθεί από κάποιον. Ακόμα, δεν αφήσαμε απομονωμένο τον όρο «παζλ», γιατί φοβόμαστε μην υπονοηθεί ότι πρόκειται για ένα δομιστικό σύνολο κομματιών, που αν ένα κομμάτι χαθεί, τότε σίγουρα θα βρεθεί από κάποιον που θα το βάλει στην απαράλλακτη θέση του. Οι «φοβίες» μας αυτές είναι που μας υποδεικνύουν ένα ερώτημα μεταξύ των δύο μεθοδολογικών σταδίων που θα ακολουθήσουμε, δηλαδή μεταξύ του εντοπισμού των ασυνεχειών και της ερμηνείας τους. Συγκεκριμένα, μήπως με το να επιχειρεί κανείς να αποκαταστήσει ασυνέχειες, ουσιαστικά επιχειρεί να δείξει ότι όλα υπακούνε σε μία θεμελιώδη συνέχεια που πρέπει να αποκαλυφθεί; Κατά συνέπεια, μήπως ερμηνεύοντας τις ασυνέχειες και προσπαθώντας να εξηγήσει κανείς το πώς ή το γιατί εμφανίστηκαν καταλήγει σε ένα δομισμό;

- Το δρόμο για την προσέγγιση των παραπάνω προβληματισμών που σχετίζονται με το τρίτο ερευνητικό ερώτημα, τον δείχνει μία συγγενής έννοια με την ασυνέχεια, η έννοια του συμβάντος. Το συμβάν θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως η περιοχή της «απόλυτης ενδεχομενικότητας», ακριβώς γιατί είναι αυτό που πάντα ξεφεύγει από την ορθολογική σύλληψη των πραγμάτων (Foucault, 1987α). Έτσι, αν λάβουμε υπόψη ότι ο Foucault με τη γενεαλογία του επιχειρεί να αποκαλύψει τις δυνατότητες εκείνες που αποκλείστηκαν από τις κυρίαρχες λογικές της ανάπτυξης της ιστορίας, δίνοντας τη σειρά τους σε νέες αποκαλύψεις νέων δυνατοτήτων που αποκλείονται από τις υπάρχουσες ερμηνείες (Howarth, 2008), αναδεικνύεται μία ανάγκη. Πρόκειται για την ανάγκη απόπειρας ενδεχομενικών ερμηνειών των ασυνεχειών, προκειμένου να έρθουν στο φως νέες ερμηνείες, διαφορετικές από τις προαναφερθείσες κυρίαρχες λογικές. Κατ’ αυτόν τον τρόπο αυτές οι λογικές που –για διάφορους λόγους- έχουν παγιωθεί μπορούν να πάψουν να θεωρούνται γεγονότα και να αναγνωστούν κι αυτές ως ενδεχομενικές ερμηνείες.
- Η απόπειρα ανάλυσης και ερμηνείας ασυνεχειών, λοιπόν, δεν είναι παρά μία μορφή κριτικής. Μια μορφή κριτικής όμως, που δεν εγείρει αξιώσεις απόλυτης αλήθειας. Κατά συνέπεια, ως κριτική θα

μπορούσε να θεωρηθεί η κίνηση μέσω τη οποίας δίνεται στο υποκείμενο το δικαίωμα να επερωτήσει την αλήθεια σχετικά με τα αποτελέσματα εξουσίας και την εξουσία σχετικά με τους λόγους αλήθειας της (Foucault, 2016). Εξάλλου και η ίδια θεωρία του λόγου συνιστά ένα είδος κριτικής της ιδεολογίας, στο βαθμό που επιδιώκει να φανερώσει την ενδεχομενικότητα των πραγμάτων και να αποδομήσει την αντικειμενικότητα (Phillips & Jorgensen, 2009). Όμως, τι συμβαίνει όταν αδυνατούμε να προτείνουμε μια πιθανή συνέχεια στην ασυνέχεια που έχουμε εντοπίσει; Όταν, δηλαδή, έχουμε να αντιμετωπίσουμε μία κατάσταση όπως αυτή περιγράφεται στο τέταρτο ερευνητικό ερώτημα; Τότε εφαρμόζουμε την παρακάτω μέθοδο ανάλυσης λόγου, στην οποία ο αναγνώστης θα βασιστεί για να εξάγει τα δικά του συμπεράσματα. Με άλλα λόγια, ο αναγνώστης «αναλαμβάνει δράση».

ΜΙΑ ΦΟΥΚΩΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΛΟΓΟΥ

Ο Δοξιάδης (2008, 2015), βασισμένος στην «Αρχαιολογία της γνώσης» (Foucault, 1987β), ορίζει το λόγο ως τη γλώσσα σε σχέση με τα αναφερόμενά της και εντοπίζει τέσσερις θεμελιώδεις ιδιότητές του: την αναφορικότητα, την υποκειμενικότητα, την εννοιολογία και τη στρατηγική ενσωμάτωση. Κατ' αντιστοιχία στις ιδιότητες αυτές, προτείνει μία μεθοδολογία ανάλυσης λόγου, η οποία αναπτύσσεται σε τέσσερις «ελαστικούς» και αλληλεπιδρώντες άξονες. Τους παραθέτουμε, «σκιαγραφώντας» τους από ενδεικτικά ερωτήματα:

1. *Άξονας των αντικειμένων*: Ποια είναι τα αντικείμενα στα οποία αναφέρεται ο λόγος; Πώς αναφέρεται σε αυτά τα αντικείμενα;
2. *Άξονας των τρόπων εκφοράς*: α. *Εξωτερικές συνθήκες εκφοράς*: Ποιος/ποια εκφέρει το λόγο; Πού τον εκφέρει και μέσα σε ποιες κοινωνικοπολιτικές περιστάσεις; Σε ποιον/α ή ποιους/ες απευθύνεται; β. *Εσωτερικές συνθήκες εκφοράς*: Ποιο είναι ύφος με το οποίο πραγματοποιείται η εκφορά του λόγου; Πως ο/η αφηγητής/ρια εμπλέκει άλλα υποκείμενα στο λόγο και πώς εντάσσει τον εαυτό του σ' αυτόν;
3. *Άξονας των εννοιών*: Ποιες έννοιες αναπαράγει ή κατασκευάζει ο λόγος και με ποιο τρόπο; Ποια η σχέση μεταξύ των εννοιών;
4. *Άξονας των θεματικών*: Ποια ανάγκη, δυνατότητα, αντιθετική σχέση ή διαμάχη προβάλλει ο λόγος; Τι επιδιώκει ο λόγος και πώς αναπαράγει μια ιδεολογία, ικανή να καθοδηγήσει τις ζωές των υποκειμένων;

ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΙΑΖΟΜΕΝΟΙ/ΕΣ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΕΡΓΑΛΕΙΟ

Προκειμένου να απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν νωρίτερα, θα εστιάσουμε σε δύο εκ των οκτώ συμμετεχόντων/ουσών – τη Χρυσάνθη και τον Πυγμαλίονα-, που κλήθηκαν να απαντήσουν σε ημιδομημένες συνεντεύξεις διάρκειας 45-70 λεπτών, στα πλαίσια διπλωματικής εργασίας [1]. Η Χρυσάνθη ήταν μία από τους/τις τέσσερις μαθητές/ριες της Α’ Λυκείου που συγκροτούσαν την ομάδα μελέτης, η οποία αποτελούνταν από άτομα «κατά την επιλογή κατεύθυνσης» και η ίδια θα επέλεγε τη θεωρητική. Ο Πυγμαλίονας –ένας φοιτητής των ΤΕΙ Μηχανολογίας- ήταν ένας από τους/τις τέσσερις απόφοιτους του συστήματος των κατευθύνσεων, που συγκροτούσαν την ομάδα εκείνων «μετά την επιλογή κατεύθυνσης».

ΜΙΑ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΤΟ ΛΟΓΟ ΤΗΣ ΧΡΥΣΑΝΘΗΣ

Η ασυνέχεια που περιγράφεται στην εισαγωγή του παρόντος άρθρου, είναι μία από αυτές που εντοπίστηκαν στο λόγο της Χρυσάνθης. Ας σχηματοποιήσουμε την ασυνέχεια αυτή σε ένα σύστημα τριών προκειμένων, με στόχο τη διευκόλυνση της μελέτης της και *της προσέγγισης του πρώτου ερευνητικού ερωτήματος:*

1. Τα μαθηματικά καθορίζουν την επιλογή κατεύθυνσης. («Όποιος το’ χει με τα μαθηματικά πρέπει να πάει στη θετική».)
2. «Μπορούν να τα καταφέρουν όλοι και στις δύο κατευθύνσεις».
3. «Στα μαθηματικά δεν μπορούν να τα καταφέρουν όλοι […]».

Με αυτόν τον τρόπο θεωρούμε ότι γίνεται ευκολότερα ορατή μία αντίφαση ή, πιο συγκεκριμένα, μία έλλειψη εγκυρότητας. Κι αυτό γιατί αν κανείς αποδέχεται την πρώτη πρόταση, μοιάζει ασυνεπές να αποδέχεται ταυτόχρονα την δεύτερη και την τρίτη. Ποια ενδεχομενική συνέχεια όμως, θα μπορούσαμε να προτείνουμε ώστε να ερμηνεύσουμε αυτήν τη φαινομενική αντίφαση της συνεντευξιαζόμενης; Η Χρυσάνθη εκλαμβάνει το σύστημα των κατευθύνσεων ως κάτι ουδέτερο, που επιβάλλεται a priori. Η αντίληψή της αυτή μοιάζει να υποβόσκει στο παρακάτω απόσπασμα:

Ερευνητής: Έχεις σκεφτεί καθόλου αν σου αρέσει αυτό το σύστημα διαχωρισμού σε κατευθύνσεις; Το θεωρείς δίκαιο;

Χρυσάνθη: Πιστεύω ότι είναι καλό… γιατί… ε… γιατί… Γιατί; ... α… Ας πούμε της θεωρητικής που δεν τα πάνε καλά στα μαθηματικά δεν θα μπορούνε να διαβάζουνε κάτι μέχρι το τέλος στο οποίο δεν τα καταφέρνουνε… και το ίδιο και τα παιδιά της θετικής…

οπότε πιστεύω ότι οι κατευθύνσεις βοηθάνε να μπορέσει τέλος πάντων να περάσει εκεί πέρα που θέλει.

Η Χρυσάνθη χαρακτηρίζει «καλό» το σύστημα των κατευθύνσεων και στη συνέχεια διερωτάται γιατί το αποκάλεσε έτσι. Κατ' αυτόν τον τρόπο φαίνεται πως το θεωρεί μια πραγματικότητα που δεν αμφισβητείται και δεν έχει νόημα να αναστοχάζεται κάποιος γι' αυτήν. Όταν επιχειρεί, εν τέλει, να εξηγήσει αυτόν τον χαρακτηρισμό επικαλείται μία άλλη «αμετάβλητη πραγματικότητα»: το να περάσει κανείς στη σχολή που θέλει μέσω των πανελληνίων εξετάσεων. Με βάση αυτή, προβαίνει σε ένα συλλογισμό του τύπου «οι κατευθύνσεις είναι καλές γιατί με βοηθάνε να μη δώσω μαθηματικά ή φυσική που δεν τα καταφέρνω». Έτσι, αιτιολογεί συναρτήσει των εξετάσεων. Ωστόσο, τα μαθηματικά μοιάζουν να είναι για εκείνη κάτι που δεν «μοιράζεται» τόσο δίκαια, όσο οι κατευθύνσεις. Μοιάζουν να ταυτίζονται -ή τουλάχιστον να σχετίζονται άμεσα- με την «εξυπνάδα»:

Χρυσάνθη: Για να είναι κάποιος καλός στα μαθηματικά σίγουρα πρέπει να είναι έξυπνος… και… εντάξει κόβει το μυαλό του. Όχι; […] και πάει να πει ότι για να τα καταφέρνει τόσο καλά τα πιάνει πιο εύκολα απ' ότι τα πιάνουν οι άλλοι…

Έτσι, λοιπόν, θα μπορούσαμε να ερμηνεύσουμε την ασυνέχεια που εμφανίζεται στο λόγο της Χρυσάνθης ως «καλά» εδραιωμένους λόγους που, ακόμα κι αν μοιάζουν αντιφατικοί, καταφέρνουν και συνυπάρχουν στον τρόπο σκέψης της. Κι αυτό γιατί δεν αντιμετωπίζονται από την ίδια ως ενδεχομενικοί και κατά συνέπεια δεν έχει νόημα να τους αμφισβητήσει. Συγκεκριμένα, σε κάποιες στιγμές της συνέντευξης έδειχνε να συνειδητοποιεί ότι η άποψη της ότι τα μαθηματικά καθορίζουν την επιλογή κατεύθυνσης έχει ένα αντιφατικό αντίκτυπο: Κάνει μη συμβατό το λόγο ότι τα μαθηματικά είναι «ικανότητα» ή ότι έστω σχετίζονται με την «εξυπνάδα» και κατά συνέπεια δεν μπορούν να τα καταφέρουν όλοι σε αυτά, με το λόγο ότι οι κατευθύνσεις είναι σε τέτοιο βαθμό δίκαιες που θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ακόμα και εκτός λόγου και κατά συνέπεια μπορούν να τα καταφέρουν όλοι σε αυτές. Έτσι, ακόμη κι όταν η Χρυσάνθη συνειδητοποιεί την προαναφερθείσα ασυνέπεια προτιμάει να προσπαθήσει να αιτιολογήσει την ομαλή συνύπαρξη των παραπάνω λόγων, παρά να τους αποδομήσει.

Η ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΤΟ ΛΟΓΟ ΤΟΥ ΠΥΓΜΑΛΙΟΝΑ

Η ασυνέχεια που εντοπίστηκε στις απαντήσεις της Χρυσάνθης, παρατηρήθηκε σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό και στο λόγο των περισσότερων συνεντευξιαζόμενων. Ο Πυγμαλίονας όμως φαίνεται να ακολουθεί την ακριβώς αντίστροφη πορεία σκέψης από εκείνη της Χρυσάνθης και των υπολοίπων. *Προκειμένου να στοιχειοθετήσουμε μία προσέγγιση του τέταρτου ερευνητικού ερωτήματος*, αρχικά θα σχηματοποιήσουμε αυτή την «αντίστροφη ασυνέχεια»:

1. Τα μαθηματικά καθορίζουν την επιλογή κατεύθυνσης.
2. Δεν μπορούν να τα καταφέρουν όλοι και στις δύο κατευθύνσεις.
3. Στα μαθηματικά μπορούν να τα καταφέρουν όλοι.

Πρόκειται για μία ασυνέχεια που παρουσιάζει ιδιαίτερη δυσκολία στην ερμηνεία της, ακριβώς λόγω της απροσδόκητης αντίστροφης πορείας της. Αφού λοιπόν, αδυνατούμε να προτείνουμε μια πιθανή συνέχεια, θα χρειαστούμε ό,τι δεν χρειαστήκαμε στην περίπτωση της Χρυσάνθης: τη φουκωική μέθοδο ανάλυσης λόγου που περιγράψαμε. Έτσι, θα υποβάλλουμε ένα μέρος του λόγου του Πυγμαλίονα σε μία ενδεικτική ανάλυση, με σκοπό ο ίδιος ο αναγνώστης να εξάγει τα δικά του συμπεράσματα:

Ερευνητής: Μπορούν να τα καταφέρουν όλοι και στις δύο κατευθύνσεις;

Πυγμαλίονας: Όχι! Σίγουρα όχι.[…] Έχει σημασία τι σκέψη έχεις!

Ερευνητής: Τι εννοείς «τι σκέψη έχεις»;

Πυγμαλίονας: Ε… υπάρχουνε οι άνθρωποι που έχουνε αυτό που πιστεύω ότι έχω κι εγώ.. τη μαθηματική σκέψη εντός εισαγωγικών και οι άνθρωποι που δε σκέφτονται τόσο πολύ… σκέφτονται λίγο πιο φιλοσοφημένα τα πράγματα.

Ερευνητής: «Δεν σκέφτονται τόσο πολύ», δηλαδή;

Πυγμαλίονας: Σκέφτονται πιο αόριστα […] θεωρώ αυτό: ότι δεν μπορούν όλοι οι άνθρωποι να σκεφτούν μαθηματικά και οργανωμένα… Δεν το θεωρώ κακό… έτσι;… αλλά είναι απλά ένα άλλο είδος σκέψης.

Ερευνητής: Μπορούν να τα καταφέρουν όλοι στα μαθηματικά;

Πυγμαλίονας: Μέχρι ένα σημείο σίγουρα… ε… από' κει και πέρα στα βαθύτερα μαθηματικά πιστεύω ότι πρέπει να σου αρέσουνε πραγματικά. Αλλά σίγουρα στα μαθηματικά που διδάσκονται σε σχολεία, σχολές και τα λοιπά, πιστεύω ότι σίγουρα μπορούν να τα καταφέρουν όλοι… Τα' χουν φτιάξει με τρόπο ώστε να μπορούν να τα καταφέρουν όλοι τέλος πάντων. Αυτό.

Στον *άξονα των αντικειμένων* εντάσσουμε τη «σκέψη» ως έμφυτο χαρακτηριστικό των ανθρώπων, η οποία διακρίνεται από τον Πυγμαλίονα σε μαθηματική και αόριστη. Η «μαθηματική» ισοδυναμεί με την οργανωμένη σκέψη και –κατά τον Πυγμαλίονα- αποτελεί μάλλον πλεονέκτημα «να την έχει» κανείς, καταδεικνύοντας ακούσια ένα στίγμα του ηγεμονικού λόγου της κυριαρχίας των μαθηματικών στην κοινωνική ζωή. Η «αόριστη σκέψη» σημαίνει να σκέφτεται κανείς πιο φιλοσοφημένα ή να μην σκέφτεται και τόσο πολύ και παρότι ο συνεντευξιαζόμενος «δεν τη θεωρεί κακό» τρόπο σκέψης, ωστόσο δεν χαίρει και της ιδιαίτερης εκτίμησής του σε σχέση με το μαθηματικό: «Δεν μπορούν όλοι οι άνθρωποι να σκεφτούν μαθηματικά και οργανωμένα» αναφέρει, υπονοώντας ότι η μαθηματική σκέψη αποτελεί κάτι παραπάνω από ένα απλό χαρακτηριστικό. Μάλλον ικανότητα. Τα δύο αυτά είδη σκέψης συμπεριλαμβάνονται στον *άξονα των εννοιών*.

Τόσο το ύφος του Πυγμαλίονα, το οποίο δίνει την αίσθηση περιγραφής αντικειμενικών γεγονότων, όσο και η τοποθέτησή του εαυτού του επί του δίπολου «έχοντες/ μη έχοντες μαθηματική σκέψη», η οποία στοιχειοθετεί την προσπάθεια αυτο-υποκειμενοποίησής του ως καλού στα μαθηματικά, ανήκουν στον *άξονα των εσωτερικών συνθηκών εκφοράς* του λόγου. Στον ίδιο άξονα, εμπλέκονται διαφόρων ειδών υποκείμενα, από τα οποία θα σταθούμε ενδεικτικά στο ένα: «Τα’ χουν φτιάξει με τρόπο ώστε να μπορούν να τα καταφέρουν όλοι». Αυτό δηλώνει ο Πυγμαλίονας αναφερόμενος στα σχολικά μαθηματικά. Εισάγει έτσι ένα αόριστο υποκείμενο, το οποίο δεν αναφέρει: Ποιοι «τα’ χουν φτιάξει»; Οι πολιτικοί της Ελλάδας; Οι παιδαγωγοί της ιστορίας; Το σύστημα; Πάντως σε όποιους κι αν αναφέρεται μοιάζει να εννοεί ότι, μιας και «τα’ χουν φτιάξει έτσι ώστε να μπορούν να τα καταφέρουν όλοι», από εκεί και πέρα είναι καθαρά ατομική υπόθεση η επιτυχία. Κατά συνέπεια, όποιος δεν τα καταφέρνει στα μαθηματικά δεν έχει την ικανότητα να το κάνει, με όρους βιολογικού ντετερμινισμού. Ο τρόπος με τον οποίο αναπαράγεται το παραπάνω «ατομικιστικό σκεπτικό» μπορεί να συμπεριληφθεί εύλογα στον *άξονα των θεματικών*.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Προσεγγίζοντας το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, βαθιά ριζωμένοι λόγοι που δρουν αντιφατικά και «γεννούν» ασυνέχειες, θα μπορούσαν να θεωρηθούν: ο λόγος περί κυρίαρχου ρόλου των μαθηματικών και ο λόγος περί «ουδετερότητας» του θεσμικού διαχωρισμού σε θετική και θεωρητική κατεύθυνση. Γιατί όμως χαρακτηρίζουμε τα μαθηματικά «κυρίαρχα»; Πρόκειται για τον ηγεμονικό λόγο που θέτει τα μαθηματικά ως πεδίο «ξέχωρο» από την ανθρώπινη εμπειρία, μη προσβάσιμο από όλους και συσχετιζόμενο με την «καθαρή» λογική. Ως σχολικό μάθημα διακρίνουν τους/τις μαθητές/ριες ανάλογα με τις «νοητικές τους ικανότητες», «μετρούν» την ευφυΐα, «ξεχωρίζοντας» έτσι από τα υπόλοιπα μαθήματα. Μετέπειτα, λειτουργούν ως «θυροφύλακας» της συμμετοχής στις διαδικασίες λήψης αποφάσεων (Volmink, 1994).

Και τι το «ένοχο» έχει ο θεσμός των κατευθύνσεων στο Λύκειο; Πρόκειται για ένα θεσμό που ενέχει στοιχεία διαιρετικής πρακτικής. Κατηγοριοποιεί και μέσα από τις κατηγορίες που διατίθενται , οι μαθητές/ριες μαθαίνουν να γίνονται ένας ορισμένος τύπος ανθρώπου. Ταυτόχρονα αναπαράγει δίπολα, όπως «το' χει/ δεν το' χει με τα μαθηματικά» ή «του κόβει/δεν του κόβει» κατ' αντιστοιχία με την επιλογή θετικής/θεωρητικής κατεύθυνσης, κατασκευάζοντας έτσι ανισότητες απέναντι στη μαθηματική γνώση.

Αναλογιζόμενοι λοιπόν το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι μια ασυνέχεια είναι πιθανό να έχει τα αντιφατικά «μέρη» της ριζωμένα σε αντιφατικούς λόγους. Πρόκειται για λόγους τόσο καλά εδραιωμένους στο θυμικό του υποκειμένου που εκφέρει την ασυνέχεια, που δεν μπορεί να την αντιληφθεί ως τέτοια. Ο αναλυτής του λόγου υποστηρίζουμε ότι νομιμοποιείται να αποπειράται πιθανές συνέχειες και να αρθρώνει κριτική. Τι θα μπορούσε να συσταθεί ως νομιμοποιητικό κριτήριο; Η αποσαφήνιση τόσο του μεταδομιστικού θεωρητικού πλαισίου που υιοθετεί ο εκάστοτε ερευνητής, όσο και της ενδεχομενικότητας που διέπει την ανάλυσή του.

Η ανάλυση αυτή συχνά μπορεί να εξάγει ως συμπέρασμά της μία αντιστροφή της σχέσης αιτίας-αποτελέσματος. Μια τέτοια αντιστροφή παρατηρείται και στις παραπάνω αναλύσεις που αφορούν το λόγο για τη σημασία των μαθηματικών. Με άλλα λόγια, παρόλο που φαινομενικά οι άνθρωποι χρειάζονται τα μαθηματικά στην καθημερινή τους ζωή και άρα πρέπει να τα μάθουν στο σχολείο, να τι προκύπτει αν επιχειρήσουμε να αντιστρέψουμε το επιχείρημα: *από τη στιγμή που οι άνθρωποι χρειάζεται να μαθαίνουν μαθηματικά στο σχολείο, πρέπει να κατασκευαστεί ένας λόγος που πιστοποιεί τη σημασία τους, χαρακτηρίζοντας καθημερινές πρακτικές ως μαθηματικές πρακτικές*. Ως εκ τούτου, η σημασία των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή είναι το αποτέλεσμα μιας επιτελεστικής πράξης που a posteriori εκτελεί τη σημασία λόγω των σχολικών μαθηματικών (Pais, 2012). Αν τώρα, υπό το παραπάνω πρίσμα, επιχειρούσαμε να αντιστρέψουμε τη σχέση αιτίας-αποτελέσματος στο λόγο περί αναγκαιότητας διαχωρισμού σε κατευθύνσεις στο Λύκειο, ενδεχομένως να προέκυπτε κάτι τέτοιο: *Από τη στιγμή που οι μαθητές/ριες πρέπει να διαχωρίζονται σε κατευθύνσεις στο Λύκειο , πρέπει να κατασκευαστεί ένας λόγος που να πιστοποιεί τη σημασία τους, χαρακτηρίζοντας καθημερινές πρακτικές ως διαιρετικές πρακτικές*.

Σημείωση

1. Πρόκειται για τη διπλωματική μου εργασία με τίτλο "Ο λόγος (discourse) του «κυρίαρχου» ρόλου των μαθηματικών στο θεσμό του διαχωρισμού σε θετική και θεωρητική κατεύθυνση στο Λύκειο" (http://www.math.uoa.gr/me/dipl/2016-17/dipl_Nanouris.pdf.), με επιβλέποντα τον Παναγιώτη Σπύρου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Foucault, M. (1987α). *Εξουσία, γνώση και ηθική.* Αθήνα: Ύψιλον.

Foucault, M. (1987β). *Η αρχαιολογία της γνώσης.* Αθήνα: Εξάντας.

Foucault, M. (2016). *Τι είναι κριτική;.* Αθήνα: Πλέθρον.

Howarth, D. (2008). *Η έννοια του λόγου.* Πολύτροπον.

Pais, A. (2012). A Critical Approach to Equity in Mathematics Education. *Opening the cage: Critique and politics of mathematics education* (σσ. 49-93). Rotterdam: Sense Publishers.

Phillips, L., & Jorgensen, M. (2009). *Ανάλυση Λόγου. Θεωρία και Μέθοδος.* (Γ. Σταυρακάκης, Επιμ., & Α. Κιουπκιολής, Μεταφρ.) Αθήνα: Παπαζήση.

Potter, J., & Wetherell, M. (2009). *Λόγος και κοινωνική ψυχολογία.* (Ε. Αυγήτα, & Α. Τσονίδης, Μεταφρ.) Αθήνα: Μεταίχμιο.

Volmink, J. (1994). Mathematics By All. Στο S. Lerman, *Cultural Perspectives on the Mathematics Classroom.* Dortrecht: Kluwer Academic Publishers.

Walshaw, M. (2013). Post-structuralism and ethical practical action: Issues of identity and power. *Journal for Research in Mathematics Education , 44* (1), σσ. 100-118.

Βίγκλας, Κ. (1994, Σεπτέμβριος). Μισέλ Φουκώ: Προς μία Δομική Ιστορία. *Ελληνική Φιλοσοφική Επιθεώρηση , 11* (33), σσ. 199-211.

Δοξιάδης , Κ. (2008). *Ανάλυση Λόγου - Κοινωνικό-φιλοσοφική θεμελίωση.* Αθήνα: Πλέθρον.

Δοξιάδης, Κ. (2015). Ο Foucault και η ανάλυση λόγου. Στο Α. Κιουπκιολής , Υ. Κοσμά, & Γ. Πεχτελίδης, *Θεωρία του Λόγου. Δημιουργικές εφαρμογές* (σσ. 31- 40). Αθήνα : Gutenberg.

Η ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΗ ΑΝΤΙΛΗΨΗ ΠΑΙΔΙΩΝ ΜΕ ΣΥΝΔΡΟΜΟ ASPERGER

Νούλης Ιωάννης

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

inoulis@rhodes.aegean.gr

Στην παρούσα έρευνα διερευνήθηκαν οι τρόποι λύσης των παιδιών με σύνδρομο Asperger για τον υπολογισμό γινομένων σε ασύμμετρες πολλαπλασιαστικές καταστάσεις ίσων ομάδων. Εκπονήθηκαν πολλαπλές μελέτες περίπτωσης, μέσω ημιδομημένων συνεντεύξεων, σε τέσσερα ταιριασμένα ζεύγη παιδιών συνδρόμου Asperger και τυπικών παιδιών. Χορηγήθηκαν πολλαπλασιαστικά έργα με χρήση χειραπτικού υλικού, με χρήση εικονικών αναπαραστάσεων, με λεκτικά προβλήματα και με αριθμητικούς υπολογισμούς. Τα ερευνητικά αποτελέσματα που παρουσιάζουμε αφορούν στρατηγικές για τον υπολογισμό γινομένου και τρόπους αντίληψης της σχέσης μερών-όλου.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Το Σύνδρομο Asperger (ΣΑ) συμπεριλήφθηκε για πρώτη φορά το 1994, ως ξεχωριστό σύνδρομο και μια από τις Διάχυτες Αναπτυξιακές Διαταραχές (ΔΑΔ), στο διαγνωστικό εγχειρίδιο DSM-IV. Στο νέο διαγνωστικό εγχειρίδιο DSM-5, που κυκλοφόρησε το 2013, τα άτομα των διαφορετικών τύπων της ΔΑΔ έχουν μπει κάτω από την ίδια «ομπρέλα» της *Διαταραχής Αυτιστικού Φάσματος (ΔΑΦ)* (Autism Spectrum Disorder).

Οι βασικότερες διαφορές που παρουσιάζουν τα άτομα με ΣΑ από τα υπόλοιπα άτομα ΔΑΦ είναι το υψηλότερο νοητικό τους επίπεδο, η καλύτερη γλωσσική τους ανάπτυξη και το μεγαλύτερο ενδιαφέρον για κοινωνική επαφή (Κάκουρος & Μανιαδάκη, 2006). Έρευνες γύρω από το κοινωνικο-γνωστικό και γλωσσικό προφίλ τους έδειξαν ότι παρουσιάζουν δυσκολίες στην επεξεργασία πληροφοριών, την ενσυναίσθηση, την επιτελική λειτουργικότητα (δηλαδή της ικανότητας να εφαρμόζει κάποιος μια κατάλληλη στρατηγική επίλυσης προβλημάτων, για να πετύχει έναν σκοπό), το σημασιολογικό και πραγματολογικό τομέα της γλώσσας και την κατανόηση αφηρημένων εννοιών (Wing, 1981· Frith, 1991). Ως προς το σχολικό και γνωστικό τους προφίλ ικανοτήτων, τα άτομα με ΣΑ φαίνεται να παρουσιάζουν σημαντικές δυσκολίες στην επίλυση προβλήματος και στη γλωσσική κριτική σκέψη (να μπορεί κάποιος να κάνει γενικεύσεις, να βρίσκει το κρυμμένο νόημα, να κάνει συμπερασμούς που βασίζονται σε αφηρημένες πληροφορίες και έννοιες), ενώ έχουν την τάση να δημιουργούν νέες λέξεις (νεολογισμοί) (Griswold, Barnhill, Myles, Hagiwara & Simpson, 2002 · Attwood, 2005, 2009).

Η μαθηματική ικανότητα των ατόμων με ΣΑ παρουσιάζεται μέσα από λιγοστές έρευνες, που στηρίζονται σε ψυχομετρικές δοκιμασίες σχολικών και γνωστικών ικανοτήτων (WISC, WIAT, TOPS-E, WRAT). Οι μελέτες αυτές έδειξαν ότι τα άτομα με ΣΑ έχουν μέσου όρου μαθηματική επίδοση και παρουσιάζουν δυσκολίες στην επίλυση προβλημάτων (Griswold et al., 2002· Chiang & Lin, 2007). Σχεδόν τα μισά παιδιά παρουσιάζουν ειδικές μαθησιακές δυσκολίες στα Μαθηματικά (Reizel & Szatmari, 2003) και ιδιαίτερα στις αριθμητικές πράξεις (Griswold et al., 2002). Σύμφωνα με τον Attwood (2009) τα παιδιά με ΣΑ έχουν το «δικό τους τρόπο» σκέψης στην επίλυση προβλημάτων, που μπορεί να είναι ευκολότερος από τους συμβατικούς για τα άτομα αυτά, χωρίς γνωστική ευελιξία, δηλαδή ακολουθούν μια προσέγγιση για την επίλυση προβλήματος και δεν την αλλάζουν ακόμα και αν είναι λανθασμένη. (Attwood, 2009). Η μεγαλύτερη αδυναμία των ατόμων αυτών στην επίλυση προβλήματος φαίνεται να είναι οι αναγνωστικές τους δυσκολίες (Attwood, 2005, 2009). Κάποιοι μαθητές με ΣΑ αδυνατούν να εκφράσουν προφορικά τον τρόπο σκέψης που τους οδήγησε στη λύση (Asperger, 1944· Attwood, 2009). Όταν οι πληροφορίες δίνονται οπτικά ή έχουν σχέση με τα ενδιαφέροντά τους ή γίνεται χρήση της φωναχτής σκέψης, τα άτομα ΣΑ φαίνεται να διευκολύνονται (Griswold et al., 2002· Attwood, 2009).

Οι δυσκολίες των παιδιών με ΣΑ στο γνωστικό τομέα και ειδικότερα στα μαθηματικά, σε συνδυασμό με την αδυναμία τους για κοινωνική αλληλεπίδραση, τα οδηγεί πολλές φορές σε εκπαιδευτικό και κοινωνικό αποκλεισμό στην τάξη (Νούλης, 2014).

Η παρούσα εργασία εντάσσεται στο πλαίσιο έρευνας της διδακτορικής διατριβής με θέμα: «Η διερεύνηση της πολλαπλασιαστικής σκέψης παιδιών με διάγνωση συνδρόμου Asperger» που εκπονήθηκε στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου και αποσκοπεί στη διερεύνηση των τρόπων λύσεων που αναπτύσσουν τα παιδιά με ΣΑ όταν διαχειρίζονται πολλαπλασιαστικά έργα, καθώς υπάρχει έλλειψη συστηματικών ερευνητικών εργασιών για την πολλαπλασιαστική αντίληψη των παιδιών με ΣΑ. Ειδικότερα επιχειρούμε να μελετήσουμε ποιους τρόπους λύσεων αναπτύσσουν τα παιδιά με ΣΑ, ηλικίας 9 – 10 ετών, όταν διαχειρίζονται πολλαπλασιαστικά έργα με διαφορετικές αναπαραστάσεις του πολλαπλασιασμού, ποιες στρατηγικές αναπτύσσουν και πώς αντιλαμβάνονται τη σχέση μερών-όλου.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η προβληματική και τα ερωτήματα της παρούσας έρευνας

Σύμφωνα με πρόσφατες έρευνες η επίδοση των παιδιών στον πολλαπλασιαστικό συλλογισμό είναι σημαντική πρόβλεψη της μαθηματικής τους επίδοσης (Bryant & Nunes, 2009). Ο πολλαπλασιαστικός συλλογισμός διαφέρει από τον προσθετικό γιατί δεν εμπλέκει μόνο τις πράξεις της ένωσης και του διαχωρισμού, αλλά ποικίλα είδη συλλογισμών (Ζαχάρος, 2007). Ένα σημαντικό στοιχείο στην ανάπτυξη πολλαπλασιαστικής συλλογιστικής είναι ο μαθητής να δημιουργεί «σύνθετες» μονάδες, τις οποίες να μπορεί να τις αξιοποιεί ως «υλικό» σε άλλες νοητικές ενέργειες (Steffe, 1988), όπως π.χ. την κατασκευή σχέσης μερών-όλου μεταξύ δύο διαφορετικών επαναλαμβανόμενων μονάδων (π. χ. αν γνωρίζει το 7 x 6, να μπορεί να βρει το 7 x 7 ως εφτά φορές το 6 και εφτά φορές το 1) (Μπούφη, 1996: 267).

Με βάση τις παραπάνω επισημάνσεις, τα ερωτήματά μας, για την ευρύτερη έρευνα του διδακτορικού, στην οποία εντάσσεται και η παρούσα, διαμορφώθηκαν ως εξής:

- Ποιους τρόπους λύσης αναπτύσσουν τα παιδιά με ΣΑ για τον υπολογισμό γινομένων σε ασύμμετρες πολλαπλασιαστικές καταστάσεις ίσων ομάδων όταν αυτές αναπαριστώνται με: α) χειραπτικό υλικό; β) εικονικές αναπαραστάσεις; γ) λεκτικές αναφορές ή δ) αριθμητικά;
- Ποιες από τις παραπάνω αναπαραστάσεις ασύμμετρων πολλαπλασιαστικών καταστάσεων είναι πιο πρόσφορες για παιδιά με ΣΑ προκειμένου: α) να αναπτύσσουν αυθόρμητα στρατηγικές γινομένων; β) να κατανοούν τη σχέση μερών-όλου μεταξύ δύο διαφορετικών επαναλαμβανόμενων μονάδων;

Ο σχεδιασμός και η πραγματοποίηση της έρευνας

Για το σχεδιασμό και την πραγματοποίηση της έρευνας στηριχτήκαμε σε ποιοτικές μεθόδους και τεχνικές. Λόγω της μεγάλης ετερογένειας των ατόμων με ΣΑ, η έρευνά μας εστίασε στη μελέτη πολλαπλών περιπτώσεων (multiple-case studies) και χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της ημιδομημένης συνέντευξης. Η έρευνα διενεργήθηκε το πρώτο τετράμηνο του 2012 σε τέσσερα παιδιά με ΣΑ, διαγνωσμένα από ιατροπαιδαγωγικά κέντρα και τέσσερα τυπικά αναπτυσσόμενα, ταιριασμένα σε ζεύγη με βάση το δείκτη αντιστοίχησης της μαθηματικής ικανότητας (από αριθμητικό υποτέστ του WISC για τα παιδιά ΣΑ και την εκτίμηση του εκπαιδευτικού για τα τυπικά-χαμηλό, μεσαίο προς τα κάτω και προς τα πάνω, υψηλό), της τάξης φοίτησης (Δ΄ δημοτικού) και του φύλου (3 ζεύγη αγοριών και 1 κοριτσιών).

Χρησιμοποιήσαμε τις παρακάτω κατηγορίες και υποκατηγορίες πολλαπλασιαστικών έργων και σχεδιάσαμε αντίστοιχα έργα σύμφωνα με τη σχετική βιβλιογραφία της Διδακτικής των Μαθηματικών (NCTM, 2000· Steffe 1988· Angileri, 1989· Mulligan, 1992· Μπούφη, 1996· Kafoussi, Skoumpourdi & Kalabassis, 2003): *Χειραπτικό Υλικό* (ΧΥ), *Εικονικές Αναπαραστάσεις* (ΕΑ) (με ορθογώνιο σχηματισμό ή σχηματισμό ομάδων με πραγματικά ή μη αντικείμενα και με αριθμογραμμές), *Λεκτικά Προβλήματα* (ΛΠ) (ταιριασμένα με ΕΑ), *Αριθμητικούς Υπολογισμούς* (ΑΥ) (οριζόντιους και κάθετους). Κάθε έργο δόθηκε σε τρεις φάσεις:

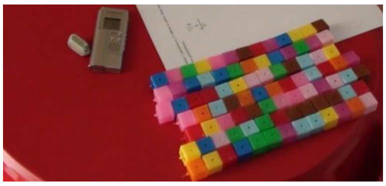
- Φάση πρώτη: α x β,
- Φάση δεύτερη: (α+1) x β = (α x β) + β, ώστε το αποτέλεσμα να μπορεί να προκύπτει βάση της γνώσης του α x β και για να ερευνηθεί αν τα υποκείμενα κατέχουν τις επαναλαμβανόμενες μονάδες - στρατηγική του ένα παραπάνω σε πολλαπλασιαστή και
- Φάση τρίτη: (α+1) x (β+1) = [(α+1) x β] + (α+1), ώστε το αποτέλεσμα να μπορεί να προκύπτει βάση της γνώσης του (α+1) x β και για να ερευνηθεί αν την αξιοποιούν για την κατανόηση της σχέσης μερών-όλου μεταξύ δύο διαφορετικών επαναλαμβανόμενων μονάδων - στρατηγική του ένα παραπάνω σε πολλαπλασιαστέο.

Όλες οι συναντήσεις (εφτά στο σύνολο, η καθεμιά είχε ελεύθερη διάρκεια ως την ολοκλήρωσή της) με τους συμμετέχοντες της έρευνας πραγματοποιήθηκαν στον ιδιαίτερο χώρο του σπιτιού τους και βιντεοσκοπήθηκαν, έπειτα από τη σύμφωνη γνώμη των γονέων τους.

Παρακάτω παραθέτουμε ενδεικτικά ένα έργο από κάθε κατηγορία πολλαπλασιαστικής αναπαράστασης παρουσιάζοντας τις τρεις φάσεις μόνο στο πρώτο έργο.

Με χρήση χειραπτικού υλικού

1. Φτιάξε 6 μπαστούνια με 12 κυβάκια το καθένα. Πόσα είναι όλα τα κυβάκια που χρησιμοποίησες;



1α. Φτιάξε τώρα 7 μπαστούνια με 12 κυβάκια το καθένα. Πόσα είναι όλα τα κυβάκια που χρησιμοποίησες;

1β Φτιάξε 7 μπαστούνια με 13 κυβάκια το καθένα. Πόσα είναι όλα τα κυβάκια που χρησιμοποίησες;

Με χρήση εικονικών αναπαραστάσεων (1η υποκατηγορία)

1. Στις εικόνες υπάρχουν 4 τραπέζια με 12 καρέκλες το καθένα. Πόσες καρέκλες υπάρχουν συνολικά;

Με λεκτικά προβλήματα (1η υποκατηγορία)

1. Η Τετάρτη τάξη ενός σχολείου παρακολούθησε μια παιδική παράσταση σε ένα θέατρο. Στην αίθουσα του θεάτρου υπήρχαν 7 σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά είχε 17 καθίσματα. Μπορείς να βρεις πόσα καθίσματα υπήρχαν στο θέατρο;

Με αριθμητικούς υπολογισμούς

1. 7 x 13 (οριζόντιους και κάθετους)

Οι μαθητές που πήραν μέρος στην έρευνα διαχειρίστηκαν τα πολλαπλασιαστικά έργα ατομικά και οι τρόποι λύσεων και οι στρατηγικές γινομένων που ανέπτυξαν κατά τον υπολογισμό γινομένων αναλύθηκαν με το μοντέλο της εννοιολογικής και διαδικαστικής ανάλυσης.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Λόγω του μεγάλου όγκου δεδομένων, παρουσιάζουμε ενδεικτικά μόνο τους πίνακες 1 και 2, που αναφέρονται στην εννοιολογική και διαδικαστική σύγκριση των συμμετεχόντων ΣΑ (Α) με τους τυπικούς (Τ) στα έργα ΕΑ της πρώτης υποκατηγορίας. Ακολουθεί συνοπτική σύγκριση όλων των συμμετεχόντων σε όλες τις κατηγορίες πολλαπλασιαστικών έργων.

Στους παρακάτω πίνακες (1 και 2) οι λόγοι δείχνουν το πλήθος των έργων στα οποία γίνονται οι συγκεκριμένες ενέργειες προς το σύνολο των έργων. Λόγω του ότι στην πρώτη υποκατηγορία ΕΑ είχαμε έξι έργα, με τρεις φάσεις το καθένα, θεωρούμε ότι έχουμε δεκαοχτώ (18) έργα.

ΕΝΕΡΓΕΙΑ	ΣΥΝΟΛΟ ΕΝΕΡΓΕΙΩΝ ΤΩΝ ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΩΝ							
Επιλογή πράξης	**Α1**	**Α2**	**Α3**	**Α4**	**Τ1**	**Τ2**	**Τ3**	**Τ4**
Επαναλαμβανόμενη πρόσθεση	1/18	0/18	0/18	6/18	2/18	0/18	6/18	0/18
Πολλαπλασιασμός	16/18	6/18	18/18	11/18	18/18	6/18	18/18	18/18
Πρόσθεση	3/18	12/18	0/18	9/18	0/18	12/18	4/18	3/18
Σύγχυση πολλαπλασιασμού - πρόσθεσης	11/18	1/18	0/18	3/18	0/18	0/18	0/18	0/18

Πίνακας 1. Εννοιολογική σύγκριση Α 1, 2, 3, 4 – Τ 1, 2, 3, 4 σε ΕΑ

ΕΝΕΡΓΕΙΑ	ΣΥΝΟΛΟ ΕΝΕΡΓΕΙΩΝ ΤΩΝ ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΩΝ							
Άμεση μοντελοποίηση (χρήση δαχτύλων, μετρητών)	**Α1**	**Α2**	**Α3**	**Α4**	**Τ1**	**Τ2**	**Τ3**	**Τ4**
Αρίθμηση ανά ένα (counting all)	16/18	1/18	6/18	2/18	0/18	1/18	4/18	1/18
Αρίθμηση ανά ένα από $2^η$ ή $3^η$ ομάδα αντικειμένων	2/18	0/18	0/18	0/18	0/18	0/18	0/18	0/18
Σχεδίαση εικόνων - σχεδίων	10/18	0/18	5/18	0/18	0/18	0/18	1/18	0/18
Γινόμενα του 10 (επιμεριστική)	0/18	0/18	0/18	0/18	0/18	0/18	0/18	5/18
Πολλαπλασιαστικός υπολογισμός (αλγόριθμος)	0/18	6/18	18/18	8/18	18/18	6/18	16/18	18/18
Προσθετικός υπολογισμός	2/18	12/18	0/18	9/18	0/18	12/18	4/18	0/18
Στρατηγική του ένα παραπάνω σε πολλαπλασιαστή (α x β) + β	5/6*	6/6	0/6	3/6	0/6	6/6	2/6	2/6
Στρατηγική του ένα παραπάνω σε πολλαπλασιαστέο (α + 1) x β + (α + 1)	5/6*	6/6	0/6	3/6	0/6	6/6	1/6	1/6
Επιμονή σε λάθος	5/18	1/18	0/18	3/18	0/18	0/18	0/18	0/18

Πίνακας 2, Διαδικαστική σύγκριση Α 1, 2, 3, 4 – Τ 1, 2, 3, 4 σε ΕΑ

*τα έργα για τις στρατηγικές του ένα παραπάνω σε πολλαπλασιαστή και πολλαπλασιαστέο είναι 6 αφού γίνονται σε μία φάση η καθεμιά ($2^η$ ή $3^η$)

Στα έργα της πρώτης υποκατηγορίας ΕΑ οι συμμετέχοντες ΣΑ επέλεξαν εύκολα την πράξη του πολλαπλασιασμού, αλλά διαφοροποιήθηκαν στις διαδικασίες επίλυσης. Οι περισσότεροι εφάρμοσαν τις στρατηγικές του ένα παραπάνω σε πολλαπλασιαστή και πολλαπλασιαστέο σε όλα τα έργα, ενώ παρουσίασαν μικρότερη σύγχυση των πράξεων πολλαπλασιασμού και πρόσθεσης και επιμονή σε λάθος (εκτός του Α1) από ότι σε άλλες κατηγορίες (κυρίως ΛΠ και ΑΥ). Οι τυπικοί επέλεξαν σχεδόν αποκλειστικά πολλαπλασιασμό και πολλαπλασιαστικό υπολογισμό και εφάρμοσαν τις δύο στρατηγικές περισσότερο από ότι στις άλλες κατηγορίες. Δεν παρουσίασαν σύγχυση ή επιμονή σε λάθος.

Συγκριτική ανάλυση συμμετεχόντων ΣΑ με τυπικούς (Α 1, 2, 3, 4 – Τ 1, 2, 3, 4) σε όλες τις κατηγορίες έργων

Ως προς την εννοιολογική σύγκριση όλων των κατηγοριών παρατηρήσαμε ότι τα έργα με ΧΥ και ΕΑ βοήθησαν περισσότερο τους συμμετέχοντες ΣΑ να εκφράσουν πολλαπλασιαστική σκέψη, αφού όλοι σχεδόν επέλεξαν την πράξη του πολλαπλασιασμού και στα περισσότερα έργα και φάσεις. Παρόλα αυτά οι συμμετέχοντες ΣΑ δυσκολεύτηκαν περισσότερο από τους τυπικούς, που επέλεξαν σε όλες τις κατηγορίες έργων την πράξη αυτή, να εξηγήσουν την επιλογή τους, κυρίως στα έργα ΛΠ. Κάποιοι συμμετέχοντες ΣΑ, κυρίως οι χαμηλότερης μαθηματικής ικανότητας (Α1, Α4), επέλεξαν το διαισθητικό μοντέλο της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης σε όλες τις κατηγορίες. Οι τυπικοί συμμετέχοντες το επέλεξαν, για να δηλώσουν και δεύτερη λύση. Πρόσθεση δήλωσαν, τόσο οι συμμετέχοντες ΣΑ όσο και οι τυπικοί, για την εφαρμογή των δύο στρατηγικών (πχ. στο πρώτο έργο ΕΑ και στη 2η φάση 48 (4x12) + 12 οι καρέκλες - βλ. και φάσεις έργων και έργα) σε όλες τις κατηγορίες έργων και κάποιοι ΣΑ λανθασμένα αντί για πολλαπλασιασμό (πχ. ο Α1, στο έργο ΛΠ, 7 + 17 για τα καθίσματα θεάτρου). Μόνο οι συμμετέχοντες ΣΑ παρουσίασαν σύγχυση των δύο πράξεων και μάλιστα καθόλου στα έργα ΧΥ και σε ελάχιστες περιπτώσεις σε ΕΑ και περισσότερο ως προς το σύμβολο των πράξεων (+ αντί x, αλλά πολλαπλασίαζαν, πχ. 4+12 = 48 οι καρέκλες) και όχι καθαρά εννοιολογική. Δεν παρουσίασαν επίσης σύγχυση σε έργα ενδιαφερόντων τους.

Ως προς τη διαδικαστική σύγκριση όλων των κατηγοριών παρατηρήσαμε ότι

οι διαδικαστικές ενέργειες των συμμετεχόντων ΣΑ παρουσίασαν διαφοροποιήσεις σε αντίθεση με τους τυπικούς. Αρίθμηση ανά ένα χρησιμοποίησαν από τους συμμετέχοντες ΣΑ περισσότερο οι χαμηλότερης μαθηματικής ικανότητας, κυρίως ο Α1, σε όλες σχεδόν τις κατηγορίες έργων, αλλά κανένας από τους τυπικούς, για να βρει τη λύση. Σχεδίαση εικόνων – σχεδίων φάνηκε να έχουν ανάγκη οι περισσότεροι συμμετέχοντες ΣΑ σε όλες τις κατηγορίες εκτός αυτής με χρήση ΧΥ. Ακόμα και σε έργα εικονικών αναπαραστάσεων σχεδίαζαν στις δεύτερες και τρίτες φάσεις που το φύλλο δεν είχε ΕΑ (πχ. σχεδίαζαν άλλο ένα τραπέζι με 12 καρέκλες σε 2^{η} φάση του έργου ΕΑ). Οι τυπικοί φάνηκε να μην την έχουν ανάγκη. Από τους συμμετέχοντες ΣΑ, πολλαπλασιαστικό υπολογισμό χρησιμοποίησαν κυρίως οι υψηλότερης μαθηματικής ικανότητας (ο Α2 στις πρώτες φάσεις για την εύρεση του αρχικού γινομένου και η Α3 σχεδόν αποκλειστικά σε όλα τα έργα). Οι περισσότεροι από τους τυπικούς επέλεξαν πολλαπλασιαστικό υπολογισμό σε όλα τα έργα και φάσεις. Προσθετικό υπολογισμό χρησιμοποίησαν τόσο κάποιοι συμμετέχοντες ΣΑ όσο και κάποιοι τυπικοί για την εφαρμογή των στρατηγικών (48+12=60 οι καρέκλες), αλλά και κάποιοι συμμετέχοντες ΣΑ λόγω σύγχυσης των πράξεων πολλαπλασιασμού και πρόσθεσης (κυρίως ο Α1 όπου έκανε κάθετα 7+17 για τα καθίσματα πότε με αλγόριθμο πρόσθεσης και πότε πολλαπλασιασμού). Γινόμενα του 10 (επιμεριστική) δεν επέλεξαν οι συμμετέχοντες ΣΑ σχεδόν σε καμιά κατηγορία, αλλά οι τυπικοί φάνηκε να τα χρησιμοποιούν κυρίως σε οριζόντιους ΑΥ (πχ. 7x13=70+21=91 η Τ4). Στρατηγικές του ένα παραπάνω σε πολλαπλασιαστή και πολλαπλασιαστέο εφάρμοσαν όλοι σχεδόν οι συμμετέχοντες ΣΑ (έστω και διαισθητικά) στις κατηγορίες ΧΥ και ΕΑ καθώς και σε έργα ενδιαφερόντων τους. Στις κατηγορίες ΛΠ και ΑΥ μόνο ο Α2 (υψηλής μαθηματικής ικανότητας) εφάρμοσε τις στρατηγικές αυτές. Τις στρατηγικές αυτές σπάνια εφάρμοσαν (κυρίως σε έργα ΕΑ) οι περισσότεροι τυπικοί. Οι περισσότεροι συμμετέχοντες ΣΑ επέμεναν σε λανθασμένες στρατηγικές και λύσεις παρόλο που έβλεπαν ότι δεν αποδίδουν (πχ. ο Α1 επέμενε να κάνει 7+17 για να βρει τα καθίσματα παρόλο που του ξαναζητήθηκε να πει τι κάνει και γιατί), σε όλες τις κατηγορίες , καθόλου όμως σχεδόν σε έργα ΧΥ και σε έργα ενδιαφερόντων τους, ενώ λιγότερο σε έργα ΕΑ της πρώτης υποκατηγορίας. Φάνηκε επίσης να μην έχουν καλή διαδικαστική γνώση του πολλαπλασιασμού και να δυσκολεύονται με πολλαπλασιαστικά δεδομένα. Επιμονή σε λάθος δεν είχε κανένας από τους τυπικούς και όλοι σχεδόν είχαν πολύ καλή διαδικαστική γνώση του πολλαπλασιασμού σε όλες τις κατηγορίες. Τέλος οι συμμετέχοντες ΣΑ χρειάστηκαν περισσότερο χρόνο για την ολοκλήρωση των έργων από τους τυπικούς σε όλες τις κατηγορίες.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων των έργων όλων των κατηγοριών αναπαράστασης του πολλαπλασιασμού έδειξε ότι οι συμμετέχοντες ΣΑ διευκολύνθηκαν σε έργα ΧΥ και ΕΑ καθώς και σε έργα ενδιαφερόντων τους τόσο στην ανάδειξη πολλαπλασιαστικής σκέψης όσο και στην ανάπτυξη στρατηγικών γινομένου και κατανόησης της σχέσης μερών-όλου.

Οι μεγάλες διαφοροποιήσεις των συμμετεχόντων ΣΑ στις διαδικασίες επίλυσης ανέδειξαν τη μεγάλη ετερογένεια της ομάδας αυτής συμφωνώντας με προηγούμενες έρευνες για την ιδιαιτερότητα που παρουσιάζουν τα άτομα ΣΑ και την αναγκαιότητα εξατομικευμένης διδασκαλίας (Griswold et al., 2002).

Οι συμμετέχοντες ΣΑ ανέπτυξαν επίσης «δικούς τους» τρόπους (αλλαγή πλαισίου σε άλλο σχετικό με τα ενδιαφέροντά τους, νεολογισμούς, λογοπαίγνια, λέξεις κλειδιά, χρήση μετρητών, σχεδίαση), για να αποκτήσουν πολλαπλασιαστικό συλλογισμό χρησιμοποιώντας και τη φωναχτή σκέψη. Οι περισσότεροι συμμετέχοντες ΣΑ φάνηκε να επιμένουν σε λάθος στρατηγικές, συμφωνώντας με άλλους ερευνητές (Attwood, 2009), ενώ στα έργα ΧΥ, ΕΑ της πρώτης υποκατηγορίας και ενδιαφερόντων τους διευκολύνθηκαν.

Με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να δίνει την ευκαιρία στους μαθητές με ΣΑ να αναπτύσσουν τους δικούς τους τρόπους λύσης σε πολλαπλασιαστικά προβλήματα. Να εντοπίζει τυχόν δυσκολίες αναγνωστικής κατανόησης, να δίνει έργα που τους διευκολύνουν και αναφέρονται στα ενδιαφέροντά τους καθώς και να τους επιτρέπει περισσότερο χρόνο σκέψης, από ότι στα τυπικά παιδιά, λόγω δυσκολίας τους στην επεξεργασία πληροφοριών.

Οι εκπαιδευτικοί φορείς της χώρας μπορούν ίσως να εντάξουν πολλαπλασιαστικά έργα με ΧΥ και ΕΑ καθώς και έργα στα ιδιαίτερα ενδιαφέροντα των παιδιών με ΣΑ είτε μέσα σε ξεχωριστά εγχειρίδια με ειδικές μεθόδους διδασκαλίας σχεδιασμένα για μαθητές με ΣΑ, και ευρύτερα όσων ανήκουν στο αυτιστικό φάσμα, είτε μέσα σε νέα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών, αφού πρώτα επεκταθεί ίσως η έρευνα αυτή σε μεγαλύτερο δείγμα για ασφαλέστερα συμπεράσματα, βοηθώντας τους μαθητές αυτούς να ενταχτούν αρμονικά στην τυπική εκπαίδευση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Anghileri, J. (1989). An investigation of young children`s understanding of multiplication. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 367-385.

Asperger, H. (1944). Autistic Psychopathy in childhood. In U. Frith. (1999), *Autism and Asperger Syndrome*. UK: Cambridge University Press.

Attwood, T. (2005). *Παιδιά με ιδιαιτερότητες στη γλωσσική ανάπτυξη και την κοινωνική αλληλεπίδραση, Σύνδρομο Asperger: Οδηγός ανίχνευσης και αντιμετώπισης*. Αθήνα: Σαββάλας.

Attwood, T., (2009). *Σύνδρομο Asperger. Ένας πλήρης οδηγός.* Β. Παπαγεωργίου (Επιμ.) (Χ. Λυμπεροπούλου, Μετάφ.). Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα. (Το πρωτότυπο έργο δημοσιεύτηκε το 2007).

Bryant, P., & Nunes, T. (2009). Multiplicative reasoning and mathematics achievement. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. 2 (pp. 217-224). Thessaloniki, Greece: PME.

Chiang, H., & Lin, Y. (2007). Mathematical ability of students with Asperger syndrome and high-function autism: A review of literature. *Autism*, *11*(6), 547-556.

Ζαχάρος, Κ. (2007). Οι μαθηματικές έννοιες στην Προσχολική εκπαίδευση και η διδασκαλία τους. Αθήνα: Μεταίχμιο.

Frith, U. (1991). Asperger and his syndrome. In U. Frith (ed), *Autism and Asperger Syndrome* (pp. 1 -35). Cambridge: Cambridge University Press.

Griswold, D. E., Barnhill, G. P., Myles, B. S., Hagiwara, T., & Simpson, R. L. (2002). Asperger Syndrome and Academic Achievement. *Focus on Autism and Other Developmental Disabilities*, *17*(2), 94-102.

Kafoussi, S., Skoumpourdi, C., & Kalabassis, F. (2003). An analysis of Greek school textbooks' pictorial representations about multiplication. *Proceedings of CIEAEM 55, The use of didactic materials for developing pupils mathematical activities*. Poland.

Κάκουρος, Ε., & Μανιαδάκη, Κ. (2006). *Ψυχοπαθολογία παιδιών και εφήβων: Αναπτυξιακή προσέγγιση*. Αθήνα: Τυπωθήτω.

Μπούφη, Α. (1996). Η πολλαπλασιαστική σκέψη του παιδιού ως βάση της διδασκαλίας. *Πρακτικά 1ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*. Αθήνα, 261–276.

Mulligan, J. (1992). Children's solutions to multiplication and division word problems: a longitudinal study. *Mathematics Education Research Journal*, *4*(1), 24-41.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reaston, VA: Author.

Νούλης, Ι., (2014). Η διερεύνηση της πολλαπλασιαστικής σκέψης παιδιών με διάγνωση συνδρόμου Asperger. Αδημοσίευτη διδακτορική διατριβή. Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Reitzel, J., & Szatmari, P. (2003). Cognitive and Academic Problems. In M. Prior (Ed.), *Learning and Behavior Problems in Asperger Syndrome* (pp. 35–54). NY: The Guilford Press.

Steffe, L. (1988). Children` s Construction of Number Sequences and Multiplying Schemes. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, Vol. 2 (pp. 119 – 140). USA: LEA, NCTM.

Wing, L. (1981). Asperger's syndrome: A clinical account. *Psychological Medicine*, *11*(1), 115-129.

ΜΗ ΤΥΠΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΤΩΝ ΓΟΝΕΩΝ ΚΑΙ ΑΤΥΠΗ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΠΑΙΔΙΩΝ: Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ ΕΠΙΜΟΝΗΣ ΣΤΗ ΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Παναούρα Ρίτα*, Δημοσθένους, Γιώργος*, Ετεοκλέους Νίκλεια * & Μπαλντούκας Αντώνης**

*Frederick University, ** ΤΕΙ Στερεάς Ελλάδας

pre.pm@frederick.ac.cy, eng.dg@frederick.ac.cy, n.eteokleous@frederick.ac.cy, abald@teemail.gr

Στην παρούσα έρευνα εξετάστηκε η δυνατότητα αξιοποίησης της γονικής εμπλοκής για τη βελτίωσης της ικανότητας των παιδιών στην επίδειξη επιμονής κατά τη λύση μαθηματικού προβλήματος. Οι γονείς ενημερώθηκαν για τη σημασία της ανάπτυξης της ικανότητας ευέλικτης αξιοποίησης διαφορετικών στρατηγικών ιδιαίτερα όταν αντιμετωπίζεται γνωστικό αδιέξοδο. Στην έρευνα μετρήθηκε η επιμονή των παιδιών στη λύση προβλήματος (χρόνος, ορθότητα και αλλαγή στρατηγικής) πριν και μετά την παρέμβαση. Τα αποτελέσματα έδειξαν θετική επίδραση του προγράμματος στο σύνολο των παιδιών, με διαφοροποίηση όμως του βαθμού επιμονής βάση της αρχική τους επίδοση στα μαθηματικά.

ΜΗ ΤΥΠΙΚΗ, ΑΤΥΠΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΓΟΝΙΚΗ ΕΜΠΛΟΚΗ

Η δια βίου μάθηση περιλαμβάνει κάθε δραστηριότητα μάθησης, τυπική, μη τυπική ή άτυπη. Έχει ένα συγκεκριμένο σκοπό, πραγματοποιείται σε συνεχή βάση και έχει ως κύριο στόχο τη βελτίωση των γνώσεων, ικανοτήτων και δεξιοτήτων (Jarvis, 2009). Αν και στο χώρο της εκπαίδευσης μας απασχολεί συνήθως η τυπική εκπαίδευση, ο ξεχωριστός ρόλος που λαμβάνει τα τελευταία χρόνια η θεσμοθέτηση της μη τυπικής και άτυπης εκπαίδευσης, επιβάλλει την αξιοποίησή τους στον προβληματισμό που κατατίθεται για βελτίωση των μαθησιακών αποτελεσμάτων. Οι διαστάσεις της δια βίου μάθησης ορίζονται στο Ν.3879/10 (ΦΕΚ163Α/21-9-10). Συγκεκριμένα ως τυπική εκπαίδευση ορίζεται το ιεραρχημένο, δομημένο σε βαθμίδες εκπαιδευτικό σύστημα με τις γενικές ακαδημαϊκές σπουδές και τα εξειδικευμένα προγράμματα και θεσμούς. Στην μη τυπική εκπαίδευση περιλαμβάνεται οποιαδήποτε οργανωμένη εκπαιδευτική δραστηριότητα εκτός του τυπικού εκπαιδευτικού συστήματος που έχει όμως συγκεκριμένους στόχους και προσδιορισμένο κοινό. Μέρος της είναι για παράδειγμα τα κέντρα επαγγελματικής κατάρτισης. Η άτυπη εκπαίδευση περιλαμβάνει όλα τα πλαίσια στα οποία οι πολίτες αποκτούν γνώσεις, δεξιότητες, και διαμορφώνουν στάσεις και αξίες, μέσα από την επίδραση του περιβάλλοντος και την καθημερινή εμπειρία. Σχετικά με τη μη τυπική εκπαίδευση ο Λιοναράκης (2013) θεωρεί ότι συντελείται συνειδητά και εθελοντικά, ενώ η άτυπη εκπαίδευση συντελείται χωρίς σκοπιμότητα και πρόθεση. Στο χώρος της παιδείας η μη τυπική εκπαίδευση των γονέων, υπό μορφή επιμόρφωσης και ενημέρωσης, διανοίγει ορίζοντες αξιοποίησής τους ως φορείς άτυπης εκπαίδευσης των παιδιών τους μέσα από τις καθημερινές δραστηριότητες και εμπειρίες. Ένα από τα πιο διαδεδομένα μοντέλα που περιγράφουν το σύστημα σχολείο και οικογένεια είναι το μοντέλο των επικαλυπτόμενων σφαιρών της Epstein (2001) σύμφωνα με το οποίο ο βαθμός αλληλοεπικάλυψης καθορίζεται από το χρόνο, τις εμπειρίες και τις πρακτικές που υιοθετούν η οικογένεια και το σχολείο.

Τα ερευνητικά δεδομένα δείχνουν τη θετική επίδραση που μπορεί να έχει η συμμετοχή των γονέων στη σχολική διαδικασία (Sammons et al., 2008; Epstein & Jansorn, 2004). Στο Principles and Standards for School Mathematics (2000) υπογραμμίζεται η σημασία της συνεργασίας των εκπαιδευτικών με τους γονείς για την καλύτερη επίτευξη των στόχων. Όλο και περισσότερες συνεργασίες ανάμεσα στους σχεδιαστές πολιτικής, τους εκπαιδευτικούς και τους γονείς απαιτούνται (European Council, 2011), ενώ φαίνεται ότι οι εκπαιδευτικοί χρειάζονται καλύτερη κατάρτιση στο πώς θα μπορούσαν να συνεργαστούν με τους γονείς (Sarama & DiBiase, 2004; Deslandes & Bertand, 2005). Διάφορα προγράμματα επιδίωξαν την αξιοποίηση των γονέων στην εκπαίδευση με στόχο τη βελτίωση της επίδοσης των παιδιών στα μαθηματικά (Mendoza, 1996), ενώ μελετήθηκαν ιδιαίτερα οι παράγοντες που επηρεάζουν την εμπλοκή τους (όπως το εκπαιδευτικό υπόβαθρο, οι προσδοκίες, το κοινωνικοοικονομικό επίπεδο κλπ). Μελέτες έχουν δείξει τη σχέση των απόψεων των γονέων με τα μαθηματικά και τη διαμεσολάβησή τους στη διαμόρφωση των στάσεων και αντιλήψεων των παιδιών τους (Λεμονίδη, Τσακιρίδου, Μαρκάδας, 2009).

Η έρευνα στο χώρο της Ελλάδας είναι αρκετά σημαντική όσον αφορά στο συγκεκριμένο θέμα τα τελευταία χρόνια. Αξίζει να σημειωθεί ότι αποτέλεσε το κύριο θέμα του 3ου συνεδρίου της ΕΝΕΔΙΜ το 2009, ενώ σχεδόν σε όλα τα συνέδρια της Ένωσης συζητούνται διαστάσεις του θέματος και παρουσιάζεται η εξέλιξη διερεύνησής του. Οι Έλληνες γονείς παιδιών ηλικίας δημοτικού αφιερώνουν αρκετό χρόνο στα μαθηματικά (Ντζιαχρήστου & Καφούση, 2003). Οι Μούτσιο – Ρέντζου και Λεοντίου (2015) ακολούθησαν μια συστημική προσέγγιση για τη μελέτη της γονικής εμπλοκής στα μαθηματικά στο γυμνάσιο περιλαμβάνοντας κοινωνικο-αναπτυξιακούς παράγοντες (τάξη, φύλο παιδιού, φύλο γονέων, μορφωτικό κεφάλαιο γονέων, μαθηματική επίδοση παιδιών). Έδειξαν ότι η γονική εμπλοκή είναι λιγότερο έντονη καθώς αυξάνεται η ηλικία των παιδιών, ενώ οι μητέρες έχουν πιο ενεργό ρόλο στην ενίσχυση της αυτοεκτίμησης των παιδιών. Τίθεται πρόσθετα έντονα ο προβληματισμός για τη μεθοδολογία διερεύνησης του θέματος εφόσον παρατηρείται αντίφαση ανάμεσα στην άποψη των γονέων για τη συχνότητα εμπλοκής τους και την πραγματική τους εμπλοκή (Τσουρέλη και Καλδρυμίδου, 2015). Έχουν χρησιμοποιηθεί τόσο εργαλεία, όπως ερωτηματολόγια τα οποία στην πορεία εγκυροποιούνται, όσο και ημερολόγιο για την καταγραφή των δράσεών τους.

Οι τύποι γονικής εμπλοκής στα μαθηματικά κατηγοριοποιήθηκαν σε δύο μεγάλες ομάδες, άμεση και έμμεση (Cai, Moyer & Wang, 1997). Η άμεση εμπλοκή αφορά στη βοήθεια που παρέχουν οι γονείς στο σπίτι για να υπερβούν τα παιδιά τις δυσκολίες τους σε μία μαθηματική δραστηριότητα. Η παρούσα έρευνα επιδιώκει να διερευνήσει τη δυνατότητα αξιοποίησης της άμεσης εμπλοκής των γονέων, επιχειρώντας στο πλαίσιο της μη τυπικής εκπαίδευσής τους να καθιερωθεί μία συμπεριφορά τους που ευνοεί την ενίσχυση των μηχανισμών των παιδιών τους για επιμονή στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, κατά την ενασχόληση με την κατοίκον εργασία.

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΕΠΙΜΟΝΗΣ ΣΤΗ ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Η λύση προβλήματος εδώ και πολλά χρόνια βρίσκεται στο επίκεντρο της διαδικασίας ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης και του μαθηματικού συλλογισμού. Τα τελευταία χρόνια στα Standards for Mathematical Practice του NCTM παρουσιάζονται διάφορες πρακτικές που πρέπει να καλλιεργούν οι εκπαιδευτικοί σε όλα τα επίπεδα της εκπαίδευσης. Η πρώτη πρακτική αφορά στην ικανότητα των παιδιών να κατανοούν το μαθηματικό πρόβλημα και να επιμένουν στην επίλυσή του. Ουσιαστικά στο στόχο της κατανόησης του προβλήματος που υπήρχε για αρκετά χρόνια έχει προστεθεί η διάσταση της ανάγκης επιμονής του ατόμου στην επίλυση του προβλήματος, τροποποιώντας εάν χρειάζεται τη στρατηγική που είχε αρχικά επιλεγεί. Η επιμονή έχει ως κύριο χαρακτηριστικό την επίδειξη ευέλικτης συμπεριφοράς στην τροποποίηση της στρατηγικής μέχρι την επίτευξη του στόχου της επίλυσης του προβλήματος. Για την επίτευξη αυτού του απαιτητικού μαθησιακού στόχου, με βάση τους De Corte, Vershaffel και Opt'Eynde (2000) απαιτούνται ρεαλιστικά και απαιτητικά μαθηματικά προβλήματα, όπου η επιλογή στρατηγικής δεν είναι δεδομένη και το σχέδιο επίλυσης δεν είναι γνωστό. Ως εκ τούτου η αντιμετώπιση γνωστικού αδιεξόδου είναι δυνατή. Όταν οι μαθητές αντιμετωπίσουν κάποια δυσκολία ή γνωστικό αδιέξοδο η συνήθης πρακτική τους είναι η αναζήτηση εξωτερικής βοήθειας είτε από τον εκπαιδευτικό τους στο σχολείο είτε από το γονέαν τους στο σπίτι (Panaoura, 2012). Η συμπεριφορά αυτή αποτελεί εμπόδιο στο βασικό χαρακτηριστικό της διερεύνησης η οποία απαιτεί επίμονες και επίπονες προσπάθειες υπέρβασης τού γνωστικού αδιεξόδου με εκτίμηση του γνωστικού φόρτου και αλλαγή πλάνου. Προϋπόθεση για την ανάπτυξη νέου πλάνου είναι η ενεργοποίηση του γνωστικού μηχανισμού αυτοαξιολόγησης της κατάστασης και αυτορύθμισης τόσο των συναισθημάτων όσο και των σκέψεων. Καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη του μηχανισμού αυτοαξιολόγησης και αυτορύθμισης έχει ο εκπαιδευτικός. Ο Marchis (2011) έδειξε ότι στην περίπτωση μη επιτυχούς επίλυσης ενός προβλήματος, μόνον το ένα τρίτο των εκπαιδευτικών ζητά από τους μαθητές του να χρησιμοποιήσει διαφορετικές μεθόδους.

Η παρούσα έρευνα είχε ως στόχο την ανάπτυξη της ικανότητας επιμονής στη λύση προβλήματος μέσω της αξιοποίησης της άτυπης εκπαίδευσης των παιδιών από τους γονείς τους στο πλαίσιο της κατοίκον εργασίας. Τέθηκαν τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα: (1) Πώς μπορεί να αξιοποιηθεί η μη τυπική εκπαίδευση των γονέων στη άτυπη εκπαίδευση των παιδιών τους για επίδειξη επιμονής στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος; (2) Πώς η αρχική μαθηματική επίδοση των παιδιών διαφοροποιεί τα αποτελέσματα της παρέμβασης;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Δείγμα

Το δείγμα της έρευνας ήταν 128 παιδιά που φοιτούσαν στην Ε΄ και Στ΄ τάξη ενός δημοτικού σχολείο, το οποίο επιλέγηκε λόγω εύκολης πρόσβασης και οικειότητας των ερευνητών. Στο παρεμβατικό πρόγραμμα συμμετείχε ο γονέας του κάθε παιδιού που δήλωσε ότι «επιβλέπει» την εκτέλεση της κατοίκον εργασίας του παιδιού του (97 γυναίκες και 31 άντρες). Οι ερευνητές στηρίχθηκαν στην υπόθεση ότι οι γονείς τήρησαν τους κανόνες δεοντολογίας, ειλικρίνειας και ηθικής στην έρευνα, υπογραμμίζοντας ότι είναι ανάμεσα στους περιορισμούς της πειραματικής διαδικασίας που αναπτύχθηκε.

Διαδικασία

Οι γονείς χωρίστηκαν με τυχαίο τρόπο σε 6 ομάδες για πρακτικούς λόγους (25 περίπου άτομα σε κάθε ομάδα) και κλήθηκαν σε δύο συναντήσεις με τους ερευνητές. Οι συναντήσεις μετά την παρουσίαση που γινόταν από τους ερευνητές, έπαιρναν τη μορφή ομαδικής συζήτησης και έκφραση απόψεων όπου αναδείχτηκε η ανάγκη της ανάπτυξης της ικανότητας επιμονής των παιδιών τους για την επιτυχία σε ένα παιχνίδι (ατομικό ή ομαδικό) και κατ' αντίστοιχο τρόπο στη διαδικασία λύσης ενός προβλήματος. Συγκεκριμένα στην πρώτη συνάντηση οι γονείς ενημερώθηκαν για τα θετικά που μπορεί να έχει η επιμονή των παιδιών τους στην ενασχόληση με την οποιαδήποτε δραστηριότητα περιλαμβανομένου κάποιου παιχνιδιού, οι δυσκολίες που θα πρέπει να αντιμετωπίζει από μόνο του το παιδί για να επιτυγχάνει σε κάθε παιχνίδι και η ανάγκη αυτόνομης μελέτης στο χώρο του σπιτιού. Στη δεύτερη συνάντηση οι γονείς ενημερώθηκαν για τους στόχους της μαθηματικής παιδείας σήμερα, τη σημασία της λύσης προβλήματος και τη σύνδεση της προσπάθειας από μέρους των παιδιών τους για επίλυση ενός προβλήματος, με την προσπάθεια επιτυχίας σε ένα παιχνίδι. Δόθηκε στους γονείς η οδηγία ότι σε τακτά χρονικά διαστήματα θα λάμβαναν από τους ερευνητές ηλεκτρονικά μηνύματα ή κείμενα στα κινητά τους τηλέφωνα με υπενθύμιση του ρόλου τους για μη παρέμβαση στην προσπάθεια των παιδιών τους, κατά την «επίβλεψη» της προσπάθειας λύσης προβλημάτων (αριθμητικής μόνο μορφής) στην κατοίκον εργασία. Δόθηκαν εισηγήσεις για τρόπους αντιμετώπισης των δυσκολιών των παιδιών με σχόλια προς τα ίδια του τύπου: «Δοκίμασε να το ξαναδιαβάσεις», «Ξεκούρασε το μυαλό σου και μετά δοκίμασε με τελείως διαφορετικό τρόπο», «Κράτα το κομμάτι που νομίζεις ότι είναι σωστό και άλλαξε τη συνέχεια». Ειδικά όσον αφορά στη συνήθη αντίδραση των παιδιών ότι δεν έχουν καταλάβει, κλήθηκαν να απαντούν «Διάβασέ το και πες μου ποια λέξη δεν ξέρεις τι σημαίνει», χωρίς να δίνουν πρόσθετες επεξηγήσεις, ενώ για το ερώτημα του κατά πόσο είναι σωστή η απάντησή τους κλήθηκαν να απαντούν «Σκέψου εάν έχει νόημα η απάντησή σου», χωρίς οποιαδήποτε αξιολόγηση από τους ίδιους. Οι παρεμβάσεις που έπρεπε να κάνουν οι γονείς στόχευαν στην αυτοαξιολόγηση σταδίων της λύσης από τα ίδια τα παιδιά, αλλαγή της στρατηγικής ή της πορείας λύσης και ως παρώθηση για μη εγκατάλειψη της προσπάθειας επίλυσης.

Εργαλείο συλλογής δεδομένων

Αν και είχαν συλλεγεί και δεδομένα που αφορούσαν στις απόψεις και αντιλήψεις των γονέων για το ρόλο τους στην εκπαίδευση των παιδιών τους, όπως και ποιοτικά δεδομένα αξιολόγησης της παρέμβασης, η παρουσίαση περιορίζεται στα δεδομένα που αφορούν στην απάντηση των συγκεκριμένων ερευνητικών ερωτημάτων.

Διαμορφώθηκε ένα δοκίμιο με τρία προβλήματα που δόθηκαν στους μαθητές στην αρχή της έρευνας και ένα δοκίμιο με τρία ισοδύναμα σε βαθμό δυσκολίας προβλήματα που δόθηκαν στο τέλος της έρευνας. Τα δοκίμια χορηγήθηκαν στο χώρο του σχολείου. Το περιεχόμενο των προβλημάτων αφορούσε ύλη που τα παιδιά είχαν διδαχτεί μέχρι το τέλος της Δ΄ τάξης. Η ισοδυναμία του βαθμού δυσκολίας των έργων στα δύο δοκίμια και η εγκυρότητά τους, ελέγχθηκε σε πιλοτική φάση της έρευνας. Για κάθε πρόβλημα λήφθηκαν υπόψη τρεις μεταβλητές: α) η ορθότητα της λύσης και η αιτιολόγησή της (με 3 βαθμούς για την ορθότητα και 2 για την αιτιολόγηση). Σημειώνεται ότι κάθε πρόβλημα ζητούσε από τα παιδιά καταγραφή της πορείας λύσης και αιτιολόγησή της, β) ο χρόνος που αφιέρωσε το παιδί στην επίλυσή του (με χρονομέτρηση από ομάδα ερευνητών) γ) η αλλαγή στρατηγικής ή σχεδίου λύσης. Τέλος είχε χορηγηθεί αρχικά ένα τεστ μαθηματικής ικανότητας με βάση την επίδοση του οποίου χωρίστηκαν οι μαθητές (cluster analysis) σε τρεις ομάδες (χαμηλή 32 παιδιά , μέτρια 68 και ψηλή 28 παιδιά).

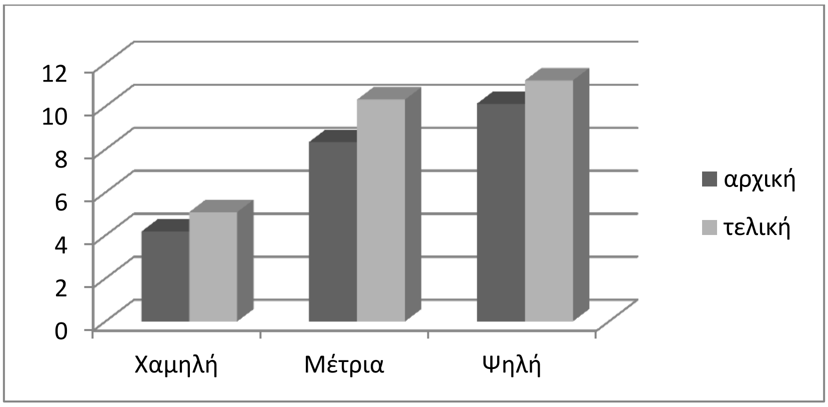
Περιορισμοί

Σημειώνεται ότι παρόλο που θεωρούμε ότι το σύστημα γονείς, μαθητές, σχολείο περικλείει πολύπλοκες σχέσεις αλληλεπίδρασης οι οποίες επηρεάζονται από το κοινωνικο-πολιτισμικό συγκείμενο, αποτελεί περιορισμό της παρούσας έρευνας η προσπάθεια απομόνωσης της συμπεριφοράς των παιδιών και μελέτης κατά την ενασχόληση με τα μαθηματικά στο πλαίσιο της κατοίκον εργασίας. Οποιαδήποτε δημογραφικά, πολιτισμικά και άλλα χαρακτηριστικά των οικογενειών μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο διερεύνησης σε επόμενη ερευνητική προσπάθεια. Πρόσθετα ενδεχομένως η συμπεριφορά των μαθητών να διαφοροποιείται ανάλογα με τα διαφορετικού τύπου μαθηματικά προβλήματα ή ειδικούς τομείς των μαθηματικών. Η παρούσα έρευνα περιορίστηκε σε προβλήματα αριθμητικής τα οποία θεωρήθηκε ότι ήταν πιο οικεία στους γονείς. Τέλος αν και είχαν συλλεχθεί και ποιοτικά δεδομένα που αφορούσαν στο είδος της στρατηγικής που επέλεγαν τα παιδιά για την επίλυση των προβλημάτων η παρούσα έρευνα περιορίζεται μόνο στο χρόνο ενασχόλησης με την ορθότητα της λύσης και της αιτιολόγησης, τη μη εγκατάλειψη της προσπάθειας και την τροποποίηση της στρατηγικής.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Αρχικά εξετάστηκε η διαφοροποίηση στην επίδοση των μαθητών στο δοκίμιο που χορηγήθηκε πριν την παρέμβαση και μετά την παρέμβαση. Ο μέσος όρος για το σύνολο του δείγματος πριν την παρέμβαση ήταν 8.76 (Τ.Α.=1.23) και μετά από αυτή ήταν 9.81 (Τ.Α.=1.07). Η σύγκριση των μέσων όρων έδειξε ότι η συγκεκριμένη διαφορά ήταν στατιστικά σημαντική ($t=2.93$, $p<0.05$), μπορεί όμως να μην θεωρηθεί ικανοποιητική εάν ληφθεί υπόψη ότι η μέγιστη βαθμολογία ήταν 15 και ότι η διάρκεια του χρονικού διαστήματος του προγράμματος επέβαλλε μία κάποια βελτίωση στα αποτελέσματα, εφόσον τα παιδιά συνέχιζαν την κανονική φοίτηση στο σχολείο. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι η μέση επίδοση ορθότητας της λύσης ήταν 5.13 (Τ.Α. = 0.98) και έγινε 5.42 (Τ.Α. =1.27), χωρίς στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση ($p>0.05$). Όμως διαφοροποιήθηκε με στατιστικά σημαντικό τρόπο ($t=5.72$, $p<0.05$) ο μέσος όρος αιτιολόγησης των απαντήσεων (από 2.46 σε 3.87), στοιχείο που θεωρείται σημαντικό στη μαθηματική εκπαίδευση.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον προκαλεί η διαφοροποίηση της ικανότητας επίλυσης των προβλημάτων στις τρεις ομάδες τους δείγματος. Στο Διάγραμμα 1 φαίνεται η σύγκριση των επιδόσεων των τριών ομάδων πριν και μετά την παρέμβαση. Φαίνεται ότι η επίδραση του προγράμματος ήταν μεγαλύτερη στους μαθητές με μέτρια αρχική επίδοση (από 8.35 έγινε 10.32), σημαντική στους μαθητές με ψηλή επίδοση (από 10.13 έγινε 11.21) και μη ικανοποιητική στους αδύνατους μαθητές (από 4.18 έγινε 5.09). Η διαφοροποίηση ήταν στατιστικά σημαντική μόνο στην περίπτωση των μαθητών με μέτρια επίδοση ($p<0.05$).



Διάγραμμα 1: Σύγκριση των επιδόσεων του δείγματος στις δύο μετρήσεις

Ιδιαίτερα σημαντική κρίνεται η συμβολή του προγράμματος παρέμβασης στη βελτίωση του χρόνο που αφιέρωναν οι μαθητές στα έργα. Ο αρχικός μέσος όρος ενασχόλησης με τα τρία προβλήματα ήταν 6 λεπτά και 12 δευτερόλεπτα, ενώ ο τελικός μέσος όρος ενασχόλησης ήταν 8 λεπτά και 48 δευτερόλεπτα. Η μεγαλύτερη αύξηση παρατηρήθηκε στους μαθητές με τη ψηλή επίδοση στα μαθηματικά, στοιχείο που δείχνει ότι με παρακίνηση πιο εύκολα στα παιδιά με ψηλή επίδοση ενισχύεται η χρονική ενασχόληση με το πρόβλημα.

Την ίδια όμως στιγμή οι μαθητές με ψηλή επίδοση στα μαθηματικά επέδειξαν μικρότερη ευελιξία στην αλλαγή στρατηγικής επίλυσης ενός προβλήματος, στοιχείο που δείχνει ότι η προαναφερθείσα χρονική ενασχόληση αφορούσε στην προσκόλληση στο ίδιο σχέδιο επίλυσης του προβλήματος. Με διαπινακοποίηση των δεδομένων έχει διαφανεί ότι από το σύνολο των μαθητών που δεν έλυσαν σωστά το πρόβλημα και είχαν ψηλή επίδοση στα μαθηματικά, μόλις 5% τροποποίησε το σχέδιο λύσης ή τη στρατηγική λύσης και στα τρία προβλήματα του δοκιμίου, 9% στα δύο προβλήματα και 21% σε ένα πρόβλημα. Ενώ μεγαλύτερη διάθεση για αλλαγή σχεδίου ή στρατηγικής παρατηρήθηκε στους μαθητές με μέτρια επίδοση. Τα αντίστοιχα ποσοστά ήταν 8%, 17% και 29%. Ενώ στους αδύνατους μαθητές τα αντίστοιχα ποσοστά ήταν μόλις 2%, 4% και 11%.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η πρώτη μαθηματική πρακτική που θέτει το Αναλυτικό Πρόγραμμα των Μαθηματικών της Κύπρου (2011), ακολουθώντας τις κατευθύνσεις άλλων Αναλυτικών Προγραμμάτων διεθνώς, αφορά στην κατανόηση του προβλήματος και στην επιμονή για τη λύση προβλήματος. Έχουν αναπτυχθεί πολλές διαφορετικές ερευνητικές προσεγγίσεις που αφορούν στην άμεση διδακτική παρέμβαση για την επίτευξη του στόχου (Bass & Ball, 2015), το ρόλο του εκπαιδευτικού (Goos, 2004) και τη δυνατότητα αξιοποίησης της τεχνολογίας (Willacy & Calder,2017). Πεποίθησή μας είναι ότι η ανάπτυξη στρατηγικών στο άτομο είναι μία δια βίου διαδικασία μάθησης η οποία εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την ανάπτυξη της ικανότητας αυτορύθμισης της γνωστικής του συμπεριφοράς. Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει την αξιολόγηση, την τροποποίηση και την ευέλικτη χρήση στρατηγικών που να συνάδουν με το συγκεκριμένο κάθε φορά έργο. Κομμάτι της δια βίου μάθησης του ατόμου είναι η άτυπη εκπαίδευση η οποία υλοποιείται στο πλαίσιο των καθημερινών εμπειριών, μέρος των οποίων δομείται στη φάση της σχολικής ζωής από τους γονείς.

Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας έδειξαν ότι η μη τυπική εκπαίδευση των γονέων που αφορά στο ρόλο τους για εμπλοκή στην κατοίκον εργασία των παιδιών μπορεί να έχει θετικά αποτελέσματα όσον αφορά στην ανάπτυξη στρατηγικών επιμονής των παιδιών τους για την αντιμετώπιση των δυσκολιών και των γνωστικών εμποδίων κατά τη λύση μαθηματικού προβλήματος. Η διαφοροποίηση των αποτελεσμάτων βάση της επίδοσης των παιδιών στα μαθηματικά δείχνει ότι η συγκεκριμένη μορφή άτυπης εκπαίδευσης δεν λειτουργεί ως εκπαιδευτική πρακτική με ομοιόμορφα αποτελέσματα. Οι μαθητές με χαμηλή επίδοση στα μαθηματικά χρειάζονται πιο συστηματικές ενδεχομένως παρεμβάσεις.

Η παρούσα έρευνα καταδεικνύοντας τη δυνατότητα αξιοποίησης της γονικής εμπλοκής στη μαθησιακή διαδικασία υπογραμμίζει ότι σε καμία περίπτωση δεν αποτελεί στόχο η μεταφορά των αρχών της τυπικής δομημένης εκπαίδευσης και του ρόλου του εκπαιδευτικού στους γονείς. Η μη τυπική εκπαίδευσή τους όμως συμβάλλει σε ένα πιο εποικοδομητικό ρόλο που αφορά στην άτυπη εκπαίδευση των παιδιών τους μέσα από τις καθημερινές ασχολίες και δείχνει πρόσθετες κατευθύνσεις που μπορεί να έχει η έρευνα της μαθηματικής παιδείας στο συγκεκριμένο πεδίο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Λεμονίδης, Χ., Τσακιρίδου, Ε. & Μαρκάδας, Σ. (2009).Διερεύνηση της εμπλοκής των γονέων στη μαθηματική εκπαίδευση των παιδιών τους. Στο Φ. Καλαβάσης, Σ. Καφούση, Μ. Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Χ. Σκουμπουρδή & Γ. Φεσάκης (Επ.), *Πρακτικά 3ου Συνεδρίου της ΕΝΕΔΙΜ* (σελ. 89 - 100). Ρόδος.

Λιοναράκης, Α. (2013). *Κοινωνία των πολιτών και άτυπη μάθηση: δύο διαμορφωτές του πολιτικού γίγνεσθαι του εκπαιδευτικού συστήματος. Θέματα εκπαιδευτικού σχεδιασμού.* Αθήνα: Διάδραση.

Μούτσιος – Ρέντζος, Α. & Λεοντίου, Ε. (2015). Γονική εμπλοκή για τα μαθηματικά: Μια συστημική προσέγγιση. *Πρακτικά 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ* (σσ. 539-548). Θεσσαλονίκη.

Ντζιαχρήστος, Β. & Καφούση, Σ. (2003). Γονείς, μαθητές, δάσκαλοι και μαθηματικά. *Μαθηματική Επιθεώρηση, 60,* 63-84.

Τσουρέλη, Δ. & Καλδρυμίδου, Μ. (2015). Διερευνώντας την ενασχόληση των γονέων με τη μελέτη των παιδιών σε μαθηματικά: Ζητήματα και αντιφάσεις. *Πρακτικά 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ* (σσ. 658-666). Θεσσαλονίκη.

Bass, H. & Ball, D.L. (2015). *Beyond "You Can Do it". Developing Mathematical Perseverance in Elementary School.* University of Michigan.

Cai, J., Moyer, J. & Wang, N. (1997). Parental Roles in Students' Learning of Mathematics: An Exploratory Study. *Paper presented at the Annual meeting of the American Educational Research Association*. Chicago.

De Corte, E., Verschaffel, L., & Op' t Eynde, P. (2000). Self-regulation: A characteristic and a goal of Mathematics Education. In M. Boekaerts, P.R. Pintrich & M. Zeidner (Eds.), *Handbook of Self-Regulation* (pp. 687-726). Academic Press.

Deslandes, R. & Bertand, R. (2005). Motivation of parent involvement in secondary-level schooling. *Journal of Educational Research, 98(3),* 164-175.

Epstein, J. (2001). *School, family, and community partnerships: reparing educators and improving schools*. Boulder, CO: Westview Press.

Epstein, J. L. & Jansorn, N.R. (2004). Developing successful partnership programs: Principal leadership makes a difference. *Principal, 83 (3),* 10-15.

European Commission Staff Working Paper (2011). *Reducing Early School Leaving. Accompanying document to the Proposal for a Council Recommendation on policies to reduce Early School Leaving*. 26th January 2011. European Council.

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Research in Mathematics Education, 35 (4),* 258-291.

Jarvis, P. (2009). *International handbook of lifelong learning*. NY: Routledge.

Marchis, I. (2011). How mathematics teachers develop their pupils’ self-regulated learning skills. *Acta Didactica Naposensia, 4 (2-3),* 9-14.

Mendoza, Y. (1996). *Developing and implementing a parental awareness program to increase parental involvement and enhance mathematics performance and attitude of at-risk seventh grade students.* Nova Southeasten University.

National Council of the Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* VA Reston.

Panaoura, A. (2012). Improving problem solving ability in mathematics by using a mathematical model. A computerized approach. *Computers in Human Behavior, 28,* 2291-2297.

Sammons, P., Sylva, K., Melhuish, E., Siraj-Blatchford, I., Taggart, B., Barreau, S. & Grabbe, Y. (2008). *The Influence of School and Teaching Quality on Children’s Progress in Primary School*. Report No DCSF-RR028 Nottingham: DfES Publications.

Sarama, J. & DiBiase, M. (2004). The professional development challenge in preschool mathematics. In D.H. Clements, J. Sarama & A. M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 415-446). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Willacy, H. & Calder, N. (2017). Making mathematics learning more engaging for students in health schools through the use of Apps. *Education Sciences, 7,* 48-68.

ΚΟΙΝΩΝΙΚΟΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΚΑΙ ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΩΝ ΑΝΑΠΑΝΤΗΤΩΝ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΣΤΗΝ TIMSS

Παπαναστασίου* Έλενα Κ. και Ξενοφώντος Κωνσταντίνος**

Πανεπιστήμιο Λευκωσίας, Κύπρος

*papanastasiou.e@unic.ac.cy , **xenofontos.c@unic.ac.cy

Βασισμένο σε δεδομένα από την TIMSS 2015 στα μαθηματικά, το παρόν άρθρο εξετάζει τη σχέση ανάμεσα σε διάφορους κοινωνικοπολιτισμικούς παράγοντες και τη συχνότητα αναπάντητων ερωτήσεων (α.ε.) σε χώρες με παρόμοιες επιδόσεις. Το παιδαγωγικό περιβάλλον του σπιτιού και οι πεποιθήσεις επάρκειας των παιδιών φαίνεται να σχετίζονται με τη συχνότητα των α.ε. σε όλες τις χώρες που εξετάστηκαν, παρόλο που η δύναμη αυτών των σχέσεων διέφερε από χώρα σε χώρα. Διαφορές εντοπίστηκαν και σε άλλους παράγοντες μεταξύ των χωρών. Συμπεραίνεται ότι η ύπαρξη α.ε. δεν μπορεί να θεωρηθεί τυχαία, γεγονός που χρήζει περαιτέρω μελέτης για σκοπούς μείωσης της στατιστικής μεροληψίας σε αντίστοιχες έρευνες.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Τα τελευταία 30 περίπου χρόνια, η έρευνα στη μαθηματική παιδεία έχει θέσει υπό εξέταση τη σχέση των σχολικών μαθηματικών με διάφορα ζητήματα πολιτισμικού (D’Ambrosio, 1997), κοινωνικού (Lerman, 2000), και πιο πρόσφατα κοινωνικοπολιτικού χαρακτήρα (Gutiérrez, 2013). Μάλιστα, πληθώρα ερευνών συμπεραίνει πως οι επιδόσεις των παιδιών στα μαθηματικά επηρεάζονται σημαντικά από παράγοντες όπως οι στάσεις και οι πεποιθήσεις των γονιών τους για το μάθημα (Parsons, Adler, & Kaczala, 1982), το παιδαγωγικό περιβάλλον του σπιτιού (Bachman & Dierking, 2011), η κοινωνική τάξη και η εθν(οτ)ική κουλτούρα της οικογένειας (Tate, 1997), οι πεποιθήσεις επάρκειας των παιδιών στα μαθηματικά (Pajares & Graham, 1999), καθώς και η συνάφεια ανάμεσα στη γλώσσα που ομιλείται στο σπίτι και αυτήν των σχολικών μαθηματικών (Setati, 2008).

Στο πνεύμα αυτό, κύριος στόχος της παρούσας εργασίας είναι η προσπάθεια επεξήγησης του φαινομένου των αναπάντητων ερωτήσεων σε διεθνείς εξετάσεις, μέσω κοινωνικών και πολιτισμικών παραγόντων. Οι αναπάντητες ερωτήσεις, ή αλλιώς, ελλείπουσες τιμές (missing values), παρατηρούνται σε περιπτώσεις όπου δεν παρέχονται απαντήσεις σε συγκεκριμένες ερωτήσεις, γεγονός που παρατηρείται πολύ συχνά στην έρευνα (Graham, 2009· Rubin, 1976). Παρόλο όμως που έχουν γίνει έρευνες για τον τρόπο αντιμετώπισης των ελλειπουσών τιμών, στις περισσότερες περιπτώσεις οι ερευνητές είτε επικεντρώνονται σε τρόπους αντικατάστασης των ελλειπουσών τιμών, είτε στο πώς να απομακρύνονται από τις αναλύσεις. Ελάχιστες έρευνες έχουν γίνει όμως για επεξήγηση του φαινομένου ύπαρξης των ελλειπουσών τιμών σε εξεταστικά δοκίμια ή για τις πιθανές επιπτώσεις της ύπαρξής τους.

Κάποιες από τις προσπάθειες επεξήγησης της ύπαρξης αυτών των τιμών σχετίζονταν με την οικειότητα του εξεταζόμενου με τη μορφή των ερωτήσεων του γραπτού. Για παράδειγμα, οι Matters και Burnett (1999) σημειώνουν ότι η παρουσίαση ελλειπουσών τιμών σε εξεταστικά δοκίμια σχετίζεται με τη μορφή των ερωτήσεων του δοκιμίου. Σε άλλη έρευνα, οι Dolly και Williams (1986) βρήκαν ότι η επάρκεια των μαθητών ή και η εξοικείωσή τους με διάφορες στρατηγικές συμπλήρωσης δοκιμίων σχετιζόταν με την ύπαρξη αναπάντητων ερωτήσεων. Με τη σειρά τους, οι Gillmore, Longback, και Poggio (2014) εντόπισαν αρνητική συσχέτιση ανάμεσα στο σύνολο των αναπάντητων ερωτήσεων και των συνολικών επιδόσεων των συμμετεχουσών χωρών στην έρευνα PISA. Δεν έχουν γίνει όμως αντίστοιχες έρευνες που να εξετάζουν την ύπαρξη αυτών των ερωτήσεων σε σχέση με το οικογενειακό περιβάλλον των μαθητών καθώς και με άλλους ενδογενείς παράγοντες όπως οι πεποιθήσεις επάρκειας και οι στάσεις για το μάθημα.

Κατά συνέπεια, το παρόν άρθρο βασίζεται σε δευτερογενείς αναλύσεις δεδομένων από την έρευνα Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) του 2015, η οποία διεξάγεται από τον διεθνή οργανισμό International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). Τα ερευνητικά ερωτήματα που εξετάζονται είναι τα εξής:

1. Σε ποιο βαθμό εξωγενείς παράγοντες όπως η μόρφωση των γονέων, οι στάσεις των γονέων απέναντι στα μαθηματικά, τα εκπαιδευτικά ερεθίσματα στο σπίτι, και η γλώσσα ομιλίας στο σπίτι μπορούν να εξηγήσουν τη συχνότητα των αναπάντητων ερωτήσεων των μαθητών, και πώς διαφέρει αυτή η σχέση από χώρα σε χώρα;
2. Σε ποιο βαθμό ενδογενείς παράγοντες όπως οι πεποιθήσεις επάρκειας των μαθητών, οι στάσεις τους για τα μαθηματικά, και οι προηγούμενες γνώσεις τους μπορούν να εξηγήσουν τη συχνότητα των αναπάντητων ερωτήσεων των μαθητών, και πώς διαφέρει αυτή η σχέση από χώρα σε χώρα;

3. Ποιο είναι το μέγιστο ποσοστό της διασποράς των αναπάντητων ερωτήσεων που μπορεί να επεξηγηθεί ανά χώρα, με βάση τις πιο πάνω μεταβλητές;

Στην παρούσα έρευνα, ο όρος «ενδογενείς παράγοντες» αναφέρεται σε παράγοντες που έχουν να κάνουν με το ίδιο το παιδί, είτε είναι γνωστικοί είτε συναισθηματικοί (π.χ. γνώσεις, στάσεις, πεποιθήσεις). Ο όρος «εξωγενείς παράγοντες» αναφέρεται σε παράγοντες που σχετίζονται με το άμεσο οικογενειακό περιβάλλον του παιδιού στο σπίτι.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για την παρούσα έρευνα χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα από τη διεθνή έρευνα TIMSS, που συλλέχθηκαν κατά το έτος 2015. Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν παιδιά τέταρτης τάξης του δημοτικού από Ευρωπαϊκές χώρες, οι επιδόσεις των οποίων στο δοκίμιο των μαθηματικών δεν είχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές με την επίδοση της Κύπρου. Κατά συνέπεια, χρησιμοποιήθηκαν δεδομένα μαθητών από την Κύπρο, τη Βουλγαρία, την Τσεχία, τη Γερμανία, την Ουγγαρία, τη Σερβία, τη Σλοβενία και τη Σουηδία. Η ανάλυση των δεδομένων έγινε με τη χρήση του International Database Analyzer και με τη χρήση του SPSS 21.

Για τους σκοπούς της στατιστικής ανάλυσης, χρησιμοποιήθηκαν οι αναπάντητες ερωτήσεις οι οποίες βρίσκονταν από την αρχή του δοκιμίου μέχρι και την τελευταία απαντημένη ερώτηση. Οι ερωτήσεις που έμειναν αναπάντητες στο τέλος του γραπτού λόγω έλλειψης χρόνου δεν λήφθηκαν υπόψη στην παρούσα ανάλυση. Ο αριθμός των αναπάντητων απαντήσεων των μαθητών αποτέλεσε την εξαρτημένη μεταβλητή της έρευνας. Λόγω της διαφοράς στο μέγεθος του δείγματος από χώρα σε χώρα, χρησιμοποιήθηκε το SENATE WEIGHT στην ανάλυση των δεδομένων.

Οι εξωγενείς μεταβλητές που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα ήταν οι στάσεις των γονέων για τα μαθηματικά και την επιστήμη, η συχνότητα ομιλίας της γλώσσας της εξέτασης στο σπίτι, καθώς και το παιδαγωγικό περιβάλλον του σπιτιού που σχετιζόταν με το ανώτερο επίπεδο μόρφωσης και επαγγέλματος των γονέων, την ύπαρξη διαδικτύου και τον αριθμό των βιβλίων στο σπίτι των παιδιών. Οι ενδογενείς παράγοντες που χρησιμοποιήθηκαν ήταν οι στάσεις των παιδιών για τα μαθηματικά, οι πεποιθήσεις επάρκειάς τους στα μαθηματικά, η συχνότητα εμπλοκής των παιδιών σε δραστηριότητες αριθμητισμού στο σπίτι κατά τη νηπιακή ηλικία, καθώς και οι ικανότητες πρώιμου αριθμητισμού που είχαν κατακτήσει τα παιδιά κατά την νηπιακή τους ηλικία. Όλες οι πιο πάνω μεταβλητές δημιουργηθεί από τον IEA και παρουσιάζονται αναλυτικά στο Martin, Mullis, και Hooper (2016).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η πρώτη παλινδρομική ανάλυση εξέτασε τη σχέση ανάμεσα στη συχνότητα των αναπάντητων ερωτήσεων σε κάθε χώρα και σε εξωγενείς παράγοντες σχετικά με τους μαθητές, όπως οι στάσεις των γονέων για τα μαθηματικά και την επιστήμη, το παιδαγωγικό περιβάλλον του σπιτιού καθώς και η γλώσσα ομιλίας στο σπίτι (Πίνακας 1). Τα αποτελέσματα της ανάλυσης των πλείστων χωρών του δείγματος ήταν στατιστικά σημαντικά, με εξαίρεση τη Γερμανία και τη Σλοβενία. Η μεταβλητή που ήταν στατιστικά σημαντική σε όλες τις υπόλοιπες χώρες ήταν το παιδαγωγικό περιβάλλον του σπιτιού, η οποία είχε αντιστρόφως ανάλογη σχέση με τη συχνότητα των αναπάντητων ερωτήσεων. Οι στάσεις των γονέων δεν ήταν στατιστικά σημαντικές σε καμία χώρα, ενώ η ομιλία της γλώσσας της εξέτασης στο σπίτι ήταν στατιστικά σημαντική μόνο στη Βουλγαρία.

		Unstandardized Coefficients		**t**	**Sig.**
		B	S.E.		
Βουλγαρία (F=37,82 p=0,000)	Σταθερά	12,164	1,901	6,399	,000
	Στάσεις γονέων για μαθηματικά & επιστήμη	-,202	,116	-1,746	,081
	Παιδαγωγικό περιβάλλον σπιτιού	-,834	,128	-6,539	,000
	Ομιλίας γλώσσας της εξέτασης στο σπίτι	,890	,287	3,104	,002
Κύπρος (F=2,67 p=0,047)	Σταθερά	7,068	1,959	3,607	,000
	Στάσεις γονέων για μαθηματικά & επιστήμη	-,037	,118	-,311	,756
	Παιδαγωγικό περιβάλλον σπιτιού	-,380	,143	-2,669	,008
	Ομιλίας γλώσσας της εξέτασης στο σπίτι	,172	,227	,760	,448
Τσεχία (F=3,14 p=0,025)	Σταθερά	8,151	1,717	4,749	,000
	Στάσεις γονέων για μαθηματικά & επιστήμη	-,101	,104	-,971	,332
	Παιδαγωγικό περιβάλλον σπιτιού	-,374	,132	-2,828	,005
	Ομιλίας γλώσσας της εξέτασης στο σπίτι	-,166	,299	-,554	,580

Γερμανία (F=2,19 p=0,089)	Σταθερά	6,916	1,987	3,480	,001
	Στάσεις γονέων για μαθηματικά & επιστήμη	,004	,132	,029	,977
	Παιδαγωγικό περιβάλλον σπιτιού	-,372	,151	-2,455	,015
	Ομιλίας γλώσσας της εξέτασης στο σπίτι	,111	,317	,350	,726
Ουγγαρία (F=12,44 p=0,000)	Σταθερά	7,264	1,191	6,101	,000
	Στάσεις γονέων για μαθηματικά & επιστήμη	-,090	,082	-1,093	,275
	Παιδαγωγικό περιβάλλον σπιτιού	-,449	,077	-5,816	,000
	Ομιλίας γλώσσας της εξέτασης στο σπίτι	,354	,338	1,045	,297
Σερβία (F=7,93 p=0,000)	Σταθερά	11,885	2,019	5,886	,000
	Στάσεις γονέων για μαθηματικά & επιστήμη	-,177	,110	-1,604	,109
	Παιδαγωγικό περιβάλλον σπιτιού	-,695	,155	-4,475	,000
	Ομιλίας γλώσσας της εξέτασης στο σπίτι	,397	,420	,947	,344
Σλοβενία (F=2,53 p=0,057)	Σταθερά	4,338	1,866	2,325	,021
	Στάσεις γονέων για μαθηματικά & επιστήμη	-,010	,111	-,093	,926
	Παιδαγωγικό περιβάλλον σπιτιού	-,260	,151	-1,719	,087
	Ομιλίας γλώσσας της εξέτασης στο σπίτι	,519	,269	1,931	,054
Σουηδία (F=5,07 p=0,002)	Σταθερά	6,594	1,568	4,204	,000
	Στάσεις γονέων για μαθηματικά & επιστήμη	-,012	,103	-,117	,907
	Παιδαγωγικό περιβάλλον σπιτιού	-,371	,114	-3,269	,001
	Ομιλίας γλώσσας της εξέτασης στο σπίτι	,251	,244	1,028	,305

Πίνακας 1: Εξωγενείς παράγοντες και αναπάντητες ερωτήσεις.

Η δεύτερη παλινδρομική ανάλυση εξέτασε τη σχέση ανάμεσα στη συχνότητα των αναπάντητων ερωτήσεων σε κάθε χώρα και σε ενδογενείς παράγοντες των μαθητών, όπως οι στάσεις τους για τα μαθηματικά, οι πεποιθήσεις επάρκειάς τους, η συχνότητα εμπλοκής τους σε προσχολικές δραστηριότητες αριθμητισμού, και η ικανότητα πρώιμου αριθμητισμού.

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης των πλείστων χωρών του δείγματος ήταν στατιστικά σημαντικά, με εξαίρεση τη Γερμανία (Πίνακας 2). Η μεταβλητή που ήταν στατιστικά σημαντική σε όλες τις υπόλοιπες χώρες ήταν οι πεποιθήσεις επάρκειας των μαθητών για τα μαθηματικά. Οι στάσεις για τα μαθηματικά ήταν στατιστικά σημαντικές μόνο στη Σερβία. Η μεταβλητή «προσχολικές δραστηριότητες αριθμητισμού ήταν στατιστικά σημαντική μόνο στη Βουλγαρία, ενώ η μεταβλητή «πρώιμος αριθμητισμός» ήταν στατιστικά σημαντική στη Βουλγαρία, στην Ουγγαρία και στη Σερβία.

Χώρα		**Unstandardized Coefficients**		**t**	**Sig,**
		B	Std, Error		
Βουλγαρία (F=24,43 p=0,000)	Σταθερά	17,459	1,718	10,163	,000
	Στάσεις για τα μαθηματικά	,033	,164	,203	,839
	Πεποιθήσεις επάρκειας	-,436	,142	-3,067	,002
	Προσχ. δραστ. αριθμητισμού	-,504	,116	-4,343	,000
	Πρώιμος αριθμητισμός	-,470	,130	-3,610	,000
Κύπρος (F=4,87 p=0,001)	Σταθερά	8,810	1,743	5,055	,000
	Στάσεις για τα μαθηματικά	,033	,122	,266	,790
	Πεποιθήσεις επάρκειας	-,382	,117	-3,278	,001
	Προσχ. δραστ. αριθμητισμού	-,090	,102	-,881	,379
	Πρώιμος αριθμητισμός	-,124	,125	-,991	,322
Τσεχία (F=3,83 p=0,004)	Σταθερά	7,786	1,762	4,419	,000
	Στάσεις για τα μαθηματικά	-,021	,135	-,154	,878
	Πεποιθήσεις επάρκειας	-,306	,136	-2,246	,025
	Προσχ. δραστ. αριθμητισμού	,052	,119	,437	,663
	Πρώιμος αριθμητισμός	-,227	,119	-1,917	,056
Γερμανία (F=2,21 p=0,068)	Σταθερά	7,813	2,038	3,834	,000
	Στάσεις για τα μαθηματικά	,079	,158	,500	,617
	Πεποιθήσεις επάρκειας	-,322	,151	-2,130	,034
	Προσχ. δραστ. αριθμητισμού	-,072	,145	-,498	,619
	Πρώιμος αριθμητισμός	-,141	,157	-,899	,370
Ουγγαρία (F=6,54 p=0,000)	Σταθερά	7,752	1,368	5,667	,000
	Στάσεις για τα μαθηματικά	,079	,108	,736	,462
	Πεποιθήσεις επάρκειας	-,292	,096	-3,030	,003
	Προσχ. δραστ. αριθμητισμού	-,127	,099	-1,283	,200
	Πρώιμος αριθμητισμός	-,204	,097	-2,117	,035

Σερβία (F=7,25 p=0,000)	Σταθερά	10,421	1,882	5,536	,000
	Στάσεις για τα μαθηματικά	,286	,144	1,988	,047
	Πεποιθήσεις επάρκειας	-,466	,130	-3,584	,000
	Προσχ. δραστ. αριθμητισμού	-,154	,126	-1,224	,222
	Πρώιμος αριθμητισμός	-,293	,126	-2,323	,021
Σλοβενία (F=2,39 p=0,051)	Σταθερά	5,343	1,810	2,952	,003
	Στάσεις για τα μαθηματικά	,119	,142	,836	,404
	Πεποιθήσεις επάρκειας	-,326	,134	-2,429	,016
	Προσχ. δραστ. αριθμητισμού	,034	,124	,272	,786
	Πρώιμος αριθμητισμός	-,151	,131	-1,150	,251
Σουηδία (F=3,39 p=0,009)	Σταθερά	7,179	1,580	4,545	,000
	Στάσεις για τα μαθηματικά	,135	,129	1,048	,295
	Πεποιθήσεις επάρκειας	-,333	,130	-2,560	,011
	Προσχ. δραστ. αριθμητισμού	-,072	,106	-,673	,502
	Πρώιμος αριθμητισμός	-,169	,099	-1,695	,091

Πίνακας 2: Ενδογενείς παράγοντες και αναπάντητες ερωτήσεις.

Τα ποσοστά της διασποράς R^2 που επεξηγούνται για κάθε χώρα από τις δύο παλινδρομικές ήταν συνήθως μικρά, παρόλο που κυμαινόταν από 1,1% σε 19,3%. Η χώρα στην οποία μπόρεσαν οι παλινδρομικές αναλύσεις να επεξηγήσουν το μεγαλύτερο ποσοστό της διασποράς των αναπάντητων ερωτήσεων ήταν η Βουλγαρία.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι υπάρχουν τόσο ενδογενείς όσο και εξωγενείς παράγοντες που σχετίζονται με τη συχνότητα ύπαρξης αναπάντητων ερωτήσεων από μαθητές δημοτικού. Το παιδαγωγικό περιβάλλον του σπιτιού (Bachman & Dierking, 2011) από τους εξωγενείς παράγοντες, και οι πεποιθήσεις επάρκειας (Pajares & Graham, 1999) από τους ενδογενείς παράγοντες φάνηκαν να σχετίζονται με την ύπαρξη των αναπάντητων ερωτήσεων σε όλες τις χώρες όπου οι παλινδρομικές αναλύσεις ήταν στατιστικά σημαντικές. Με άλλα λόγια, η παροχή ευκαιριών στα παιδιά να αλληλεπιδράζουν με παιδαγωγικά εργαλεία (π.χ. βιβλία, Η/Υ) στο περιβάλλον του σπιτιού, αλλά και η καλλιέργεια θετικών πεποιθήσεων για τις μαθηματικές τους ικανότητες μειώνουν τις πιθανότητες τα παιδιά να αφήνουν αναπάντητες ερωτήσεις σε γραπτά δοκίμια. Πέρα από αυτές τις μεταβλητές όμως, υπήρξαν αρκετές διαφοροποιήσεις στις μεταβλητές που ήταν στατιστικά σημαντικές από χώρα σε χώρα, γεγονός που ενισχύει την άποψη ότι σε κάθε εκπαιδευτικό σύστημα, διαφορετικοί παράγοντες, συμπεριλαμβανομένων των κοινωνικών, πολιτισμικών και πολιτικών πιθανόν να σχετίζονται με διαφορετικό τρόπο με ζητήματα της μαθηματικής παιδείας (Wong, Taha, & Veloo, 2001). Αυτοί, και πιθανόν αρκετοί άλλοι παράγοντες, υποδεικνύουν ότι η ύπαρξη των αναπάντητων ερωτήσεων δεν μπορεί πλέον να θεωρείται τυχαία, και ότι η μη εξέταση αυτού του φαινομένου μπορεί να οδηγήσει σε συστηματική στατιστική μεροληψία. Κατά συνέπεια, είναι σημαντικό να μελετηθεί το φαινόμενο των αναπάντητων ερωτήσεων σε μεγαλύτερο βάθος, καθώς δεν είναι ούτε τυχαίο ούτε αμελητέο, ώστε να μπορούν να εξάγονται ακόμα πιο ακριβή αποτελέσματα από τα δοκίμια αξιολόγησης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bachman, J., & Dierking, L. (2011). Co-creating Playful Environments That Support Children's Science and Mathematics Learning as Cultural Activity: Insights from Home-Educating Families. *Children, Youth and Environments, 21*, 294-311.

D’Ambrosio, U. (1997). Ethnomathematics and its Place in the History and Pedagogy of Mathematics. In A. Powell & M. Frankenstein (eds.), *Ethnomathematics, Challenging Eurocentrism in Mathematics Education* (pp. 13-24). Albany: State University of New York Press.

Dolly, J. P., & Williams, K. S. (1986). Using test-taking strategies to maximize multiple choice test scores. *Educational and Psychological Measurement, 46*, 619-625.

Gillmore, S., Longabach, T., & Poggio, J. (2014). A new threat to validity: An examination of cultural discrepancies in omission rates on international assessments. *Paper presented on the AERA conference*, Philadelphia, PA.

Graham, J. W. (2009). *Missing Data Analysis: Making It Work in the Real World. Annual Review of Psychology, 60*, 549-576.

Gutiérrez, R. (2013). The sociopolitical turn in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*, 37-68.

Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and* learning (pp. 19–44). Westport, CT: Ablex.

Martin, M. O., Mullis, I. V. S., & Hooper, M. (Eds.). (2016). *Methods and Procedures in TIMSS 2015*. Retrieved from Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center website: http://timssandpirls.bc.edu/publications/timss/2015-methods.html

Matters, G. N., & *Burnett*, P. C. (*1999*). Multiple-choice versus short-response items: Differences in omit behavior. *Australian Journal of Education*, *43*, 117-128.

Pajares, F., & Graham, L. (1999). Self-efficacy, motivation constructs, and mathematics performance of entering middle school students. *Contemporary Educational Psychology*, *24*, 124-139.

Parsons, J. E., Adler, T. F., & Kaczala, C. M. (1982). Socialization of Achievement Attitudes and Beliefs: Parental Influences. *Child Development*, *53*(2), 310-321.

Rubin, D. B. (1976). Inference and missing data. *Biometria*, *63*, 581-592.

Setati, M. (2008). Access to mathematics versus access to the language of power: the struggle in multilingual mathematics classrooms. *South African Journal of Education*, *28*, 103-116.

Tate, W. F. (1997). Race-Ethnicity, SES, Gender, and Language Proficiency Trends in Mathematics Achievement: An Update. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*, 652-679.

Wong, K. Y., Taha, Z. B., & Veloo, P. (2001). Situated sociocultural mathematics education: Vignettes from Southeast Asian practices. In B. Atweh, H., Forgasz, & B. Nerbes (Eds.), *Sociocultural research on mathematics education: an international perspective* (pp. 113-134). London: Laurence Erlbaum Associates.

ΟΨΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ ΜΕΙΟΝΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΘΡΑΚΗΣ

Σακονίδης Χ., Κλώθου Α., Φακούδης Ε., Μαργαρίτης Χ., Ανταμπούφης Ν., Δραμαλίδης Α., Νιζάμ Α.

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

xsakonid@eled.duth.gr, aklothou@eled.duth.gr, fakoudis@sch.gr, akis.margaritis@gmail.com, antanik@otenet.gr, adramali@psed.duth.gr, anizam@sch.gr

Το ερευνητικό ενδιαφέρον για τις μαθηματικές επιδόσεις των μαθητών επανέρχεται τα τελευταία χρόνια, αναζητώντας κοινωνικο-πολιτισμικές αναγνώσεις της σχολικής αποτυχίας στα μαθηματικά. Η παρούσα μελέτη εστιάζεται στις θεμελιώδεις μαθηματικές γνώσεις μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης από τη μουσουλμανική μειονότητα της Θράκης. Τα αποτελέσματα καταδεικνύουν τον ενισχυτικό ρόλο της παρεχόμενης μαθηματικής εκπαίδευσης στην παρεμπόδιση της περαιτέρω ακαδημαϊκής τους επιτυχίας.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι διεθνείς έρευνες αξιολόγησης των μαθηματικών γνώσεων των μαθητών, παρά τις επιφυλάξεις που μπορεί να εγείρουν αναφορικά με την αξιοπιστία τους, αποτυπώνουν ανησυχητικά χαμηλές επιδόσεις για τους Έλληνες μαθητές, επιβεβαιώνοντας αντίστοιχα ευρήματα ερευνών στην Ελλάδα (π.χ., Σακονίδης & Δραμαλίδης, 2006). Για παράδειγμα, το ποσοστό των 15χρονων Ελλήνων μαθητών με χαμηλή μαθηματική επίδοση στην τελευταία αξιολόγηση PISA (2015) είναι 35,7% και παραμένει σταθερό από το 2006 (ο μέσος όρος της ΕΕ είναι 22,1%). Η κατάσταση εμφανίζεται ακόμη πιο απογοητευτική στην περίπτωση μαθητών που φοιτούν σε σύνθετα εκπαιδευτικά περιβάλλοντα, όπως αυτοί των εσπερινών σχολείων (Stathopoulou, 2017), για τους οποίους, ωστόσο, απουσιάζουν μελέτες μεγάλης κλίμακας.

Η παρούσα εργασία επιχειρεί να παρουσιάσει κάποια πρώτα αποτελέσματα από μια μελέτη των μαθηματικών γνώσεων υποδομής μαθητών της μουσουλμανικής μειονότητας στη Θράκη, η οποία πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο ενός μακροχρόνιου προγράμματος παρέμβασης, το οποίο στόχευε στη βελτίωση της εκπαίδευσής τους.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Την τελευταία εικοσαετία, αναζητώντας να ερμηνεύσει την επίμονη αποτυχία πολλών μαθητών στα μαθηματικά, η σχετική έρευνα στράφηκε προς μια κοινωνικο-πολιτισμικο-πολιτική ανάγνωσή της, σύμφωνα με την οποία η μάθηση και η διδασκαλία των μαθηματικών αποτελούν πρακτικές που διαμορφώνουν διαφορετικές συνθήκες πρόσβασης σε έναν «κοινωνικά προνομιούχο πόρο» (Valero & Pais, 2016) και άρα διαφορετικούς «μαθηματικούς γραμματισμούς». Ο όρος αναφέρεται στην ικανότητα του ατόμου να αναγνωρίζει και να κατανοεί τον ρόλο που διαδραματίζουν τα μαθηματικά στον κόσμο, ώστε να διατυπώνει κρίσεις και να λαμβάνει τεκμηριωμένες αποφάσεις που ανταποκρίνονται στις ανάγκες της ζωής του ως αναστοχαζόμενου πολίτη (PISA, 2015). Η βιβλιογραφία υποδεικνύει τρεις κρίσιμες συνιστώσες του μαθηματικού γραμματισμού (OECD, 2017): (i) Μαθηματικό περιεχόμενο (Ποσότητα, Αλλαγή και Σχέσεις, Χώρος και Σχήμα, και Αβεβαιότητα), (ii) Επίπεδα (αναπαραγωγής, συνδέσεων, αναστοχασμού και (iii) Κρίσιμες ικανότητες (λογικός συλλογισμός και επιχειρηματολογία, επίλυση προβλήματος, μοντελοποίηση, αναπαράσταση, εφαρμογή συμβολικών και τεχνικών στοιχείων, επικοινωνία).

Ο μαθηματικός γραμματισμός των μαθητών απασχόλησε με διαφορετικούς τρόπους την έρευνα: εστίαση στα λάθη και τις παρανοήσεις τους κατά τη δεκαετία του 1980 και υιοθέτηση κοινωνικο-πολιτισμικών θεωρήσεων κατά τη δεκαετία του 1990. Οι τελευταίες επανέφεραν το ερευνητικό ενδιαφέρον στην αποτύπωση των μαθηματικών επιδόσεων των μαθητών αλλά πλέον ως μέτρηση του μαθηματικού τους γραμματισμού σε διαφορετικά πλαίσια, όπως συμβαίνει με τις μελέτες PISA και TIMSS.

Σε καθέναν από τους τέσσερις λογισμούς που συνδέονται με τον μαθηματικό γραμματισμό[1], η έρευνα υποδεικνύει κάποιες κεντρικές τάσεις στις επιδόσεις των μαθητών. Έτσι, στον αριθμητικό λογισμό, οι δυσκολίες με τους φυσικούς αριθμούς εντοπίζονται σε ζητήματα αξίας θέσης ψηφίων, κατανόησης της διαδικασίας των πράξεων, πρωτίστως της διαίρεσης, καθώς και δομικών χαρακτηριστικών του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης, ενώ κλάσματα και δεκαδικοί αριθμοί δυσκολεύουν τους μαθητές σε θέματα που συνδέονται με τον συμβολισμό, τη διαφάνεια των διαδικασιών και τη σχέση τους με τις αντίστοιχες στους ακεραίους και τους ρητούς αριθμούς (Lortie-Forgues, Tian & Siegler, 2015). Στη Γεωμετρία σοβαρά προβλήματα καταγράφονται στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης, στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς και στην αποδεικτική διαδικασία (Jones

& Tzekaki, 2016). Τα ποσοστά αποτυχίας που συνδέονται με την ελλιπή κατανόηση δομικών στοιχείων της αριθμητικής και την αδυναμία μετασχηματισμού διεργασιών σε αντικείμενα παραμένουν εντυπωσιακά υψηλά στον αλγεβρικό λογισμό (Arcavi, Drijvers & Stacey, 2017). Τέλος, πολλοί μαθητές αντιμετωπίζουν σοβαρές δυσκολίες στον στοχαστικό λογισμό εξαιτίας της πολυπλοκότητας που τον χαρακτηρίζει, της ελλιπούς ανάπτυξης της αναλογικής σκέψης και της επικράτησης «διαισθητικών» τρόπων σκέψης (Batanero et al., 2016).

Είναι φανερό ότι μια σχετικά αξιόπιστη καταγραφή του επιπέδου της μαθηματικής εκπαίδευσης που παρέχεται σε μια συγκεκριμένη εκπαιδευτική συνθήκη απαιτεί τη συστηματική ανίχνευση του μαθηματικού γραμματισμού που επιτυγχάνεται στο σχολείο. Κατά συνέπεια, την αποτύπωση της γνώσης και της σκέψης που αναπτύσσουν οι μαθητές σε κρίσιμες πτυχές του μαθηματικού λογισμού που αποτελεί αντικείμενο της υποχρεωτικής μαθηματικής εκπαίδευσης.

ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ-ΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΤΗΣ ΣΧΟΛΙΚΗΣ ΑΠΟΤΥΧΙΑΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Οι μαθηματικές επιδόσεις που συζητήθηκαν στην προηγούμενη ενότητα αφορούν τον γενικό μαθητικό πληθυσμό και αποτυπώνουν τις δυσκολίες του από μια ατομική, κυρίως ψυχολογική οπτική, η οποία τοποθετεί το αντικείμενο μάθησης, δηλαδή, τα μαθηματικά, στο κέντρο του προβλήματος, ενοχοποιεί το υποκείμενο μάθησης, δηλαδή τον μαθητή, και πριμοδοτεί ένα μοντέλο ελλειμματικής σκέψης (Lerman & Zevenbergen, 2014). Ωστόσο, οι σύγχρονες προσεγγίσεις αναζητούν τα αίτια της αποτυχίας στα μαθηματικά σε κοινωνικο-πολιτισμικά και πολιτικά χαρακτηριστικά του περιβάλλοντος μάθησης.

Η έρευνα για τη σχέση μεταξύ μαθηματικής επίδοσης και κοινωνικής τάξης υποδεικνύει ότι κοινωνικά χαρακτηριστικά, όπως η μόρφωση των γονιών, κυρίως της μητέρας, και το βιοτικό επίπεδο της οικογένειας συνδέονται με την επίδοση στα μαθηματικά (Caygill & Kirkham, 2008; Wylie & Hogden, 2007). Το ίδιο και οι αποκλίσεις του γλωσσικού κώδικα και γενικά της επικοινωνίας που έχει εγκαθιδρυθεί στο σχολείο και στο σπίτι (Hoadley, 2007). Η Zevenbergen (2000) υποδεικνύει τρεις τέτοιους τύπους επικοινωνίας: των μαθηματικών κειμένων, του προφορικού λόγου της τάξης των μαθηματικών και αυτής που ορίζεται ως 'νόμιμη γνώση' (legitimate knowledge) στην τάξη. Όσο μεγαλύτερη είναι η απόσταση μεταξύ των τύπων επικοινωνίας που υφίστανται στο σχολείο και στο σπίτι τόσο αυξάνεται η πιθανότητα αποτυχίας στα σχολικά μαθηματικά εξαιτίας των εντάσεων που αναπόφευκτα αναδεικνύει αυτή η απόσταση, δυσχεραίνοντας την πρόσβαση σε ‘νόμιμη’ μαθηματική γνώση (Barwell et al., 2016).

Εκτός της κοινωνικής τάξης και της γλώσσας του σπιτιού, οι μαθηματικές επιδόσεις βρέθηκε να συνδέονται και με την ομάδα προέλευσης του μαθητή. Ειδικότερα, μαθητές της κυρίαρχης ομάδας τείνουν να παρουσιάζουν καλύτερες επιδόσεις από αυτούς των μειονοτικών ομάδων (Bouchey & Harter, 2005), με διαφορά που συχνά ξεπερνά το 20%-30%, ειδικά σε περιοχές υψηλών γνωστικών απαιτήσεων όπως η άλγεβρα (NCES, 2003).

Είναι φανερό ότι η θεώρηση των μαθηματικών ως μιας κοινωνικο-πολιτισμικής πρακτικής επιτρέπει την αναγνώριση πτυχών της παιδαγωγικής τους που μπορεί να αποκλείουν κάποιους μαθητές. Καλύτερη κατανόηση των τρόπων με τους οποίους κοινωνικά, γλωσσικά και χαρακτηριστικά εξουσίας εμπλέκονται στην πρόσβαση στη μαθηματική γνώση μπορεί να οδηγήσει στην υιοθέτηση προσεγγίσεων που καθιστούν τα μαθηματικά προσβάσιμα σε όλους.

Η ΜΕΛΕΤΗ

Το Πρόγραμμα «Εκπαίδευση Μουσουλμανοπαίδων» (ΠΕΜ) απευθύνεται στους μειονοτικούς μαθητές της Θράκης ηλικίας 6-18 ετών (1997–σήμερα, με ενδιάμεσες διακοπές). Στόχος του είναι ο περιορισμός της σχολικής αποτυχίας και βασική του αρχή η αναγνώριση της ταυτότητας και ο σεβασμός των εθνοπολιτισμικών ιδιαιτεροτήτων της μειονότητας[2]. Στο πλαίσιο του Προγράμματος οργανώθηκε για τα Μαθηματικά δράση υποστήριξης των μαθητών της Β/θμιας εκπαίδευσης σε ώρες πρόσθετες στο σχολικό πρόγραμμα. Η δράση αναπτύχθηκε σε περισσότερα από 30 Γυμνάσια και Λύκεια της Θράκης, με τη συμμετοχή περισσότερων από 1.500 μαθητών και 60 εκπαιδευτικών κατά μέσο όρο ανά σχολικό έτος. Υιοθετώντας μια κοινωνικο-πολιτισμική θεώρηση, επιχειρήθηκε στο πλαίσιο της δράσης η διερεύνηση της ποιότητας της μαθηματικής εκπαίδευσης που προσφέρεται στα συγκεκριμένα σχολεία, εστιάζοντας στις δυσκολίες και τις αντιστάσεις που την οριοθετούν.

Τα δεδομένα που αξιοποιούνται στην παρούσα εργασία αποτελούν μέρος μιας ευρύτερης έρευνας, η οποία είχε ως αντικείμενο τη διερεύνηση του μαθηματικού γραμματισμού των μειονοτικών μαθητών που συμμετείχαν στο ΠΕΜ την περίοδο 2011-2014 και αναπτύχθηκε σε δύο επίπεδα: (α) συλλογικό: μελέτη των βασικών μαθηματικών γνώσεων των συμμετεχόντων μαθητών, και (β) ατομικό: παρατήρηση της “ενεργοποίησης” μαθητών και των διδακτικών πρακτικών εκπαιδευτικών σε επιλεγμένες σχολικές μονάδες.

Στην παρούσα εργασία αξιοποιήθηκαν τα δεδομένα της (α) περίπτωσης και αφορούσαν τις απαντήσεις 7.629 συνολικά μαθητών (3.290 μειονοτικών και 4.339 πλειονοτικών) των Α, Β και Γ τάξεων Γυμνασίου από τους τρεις νομούς της Θράκης, στις ερωτήσεις ενός ερωτηματολογίου που δόθηκε στο τέλος κάθε σχολικού έτους κατά την περίοδο 2011-2014 (Πίνακας 1). Οι 19 ερωτήσεις του ερωτηματολογίου κατανέμονται στους τέσσερις λογισμούς του ΠΣ των Μαθηματικών της υποχρεωτικής εκπαίδευσης κατ' αναλογία της βαρύτητάς τους σε αυτό και αφορούν σε σχετικές γνώσεις υποδομής. Ειδικότερα, οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν σε 9 ερωτήσεις (18 υπο-ερωτήματα) αριθμητικής (σύνολα αριθμών, διάταξη αριθμών, τρόποι γραφής, πράξεις των αριθμών, τοποθέτηση στην αριθμογραμμή), σε 3 ερωτήσεις (8 υπο-ερωτήματα) άλγεβρας (χρήση μεταβλητής, διατύπωση σχέσης, κανονικότητα, επίλυση εξίσωσης), σε 5 ερωτήσεις (14 υπο-ερωτήματα) γεωμετρίας (περίμετρος, γωνία, εμβαδόν, όγκος, αναγνώριση γεωμετρικών σχημάτων) και σε 2 ερωτήσεις (5 υπο-ερωτήματα) στοχαστικών μαθηματικών (μέσος όρος, γραφικές παραστάσεις).

ΕΤΟΣ	**Α΄ τάξη**		**Β΄ τάξη**		**Γ΄ τάξη**		**Σύνολα**		
	Μ	Π	Μ	Π	Μ	Π	Μ	Π	Σ
2011	1065	374	794	172	449	134	2308	680	2988
2012	348	520	292	347	331	135	971	1002	1973
2013	238	279	272	185	110	85	620	549	1169
2014	164	478	146	362	130	219	440	1059	1499
Σύνολο	1815	1651	1504	1066	1020	573	4339	3290	7629

Πίνακας 1. Το δείγμα της μελέτης

Τα ερωτηματολόγια διακινήθηκαν από συνεργάτες του Προγράμματος, ήταν κοινά για όλους τους μαθητές και συμπληρώθηκαν κατά τη διάρκεια μίας διδακτικής ώρας.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πακέτο SPSS (οι απαντήσεις του δείγματος καταχωρήθηκαν ως ορθές ή ως λανθασμένες). Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στη συνέχεια αφορούν σε τρία είδη ανάλυσης: πίνακες συχνοτήτων, έλεγχος κεντρικών τάσεων και έλεγχος συσχετίσεων.

Με βάση τον Πίνακα 2, μειονοτικοί και πλειονοτικοί μαθητές παρουσιάζουν αντίστοιχες επιδόσεις σε όλους τους λογισμούς, με τη μέγιστη διαφορά επίδοσης μεταξύ τους να κυμαίνεται στο 20% - 25% υπέρ των τελευταίων. Ειδικότερα, αναφορικά με τις χαμηλές επιδόσεις (<50% σωστές απαντήσεις), η διαφορά ανέρχεται στο 20% στις Α και Β τάξεις, όπου οι μειονοτικοί μαθητές παρουσιάζουν συχνότερα από τους πλειονοτικούς πολύ χαμηλές επιδόσεις (<25% σωστές απαντήσεις) στην άλγεβρα και στη γεωμετρία. Όσον αφορά τις υψηλές επιδόσεις (> 50% σωστές απαντήσεις), η διαφορά φτάνει το 27% στις Β και Γ τάξεις, στις οποίες οι πλειονοτικοί μαθητές εμφανίζουν πιο συχνά από τους μειονοτικούς πολύ υψηλές επιδόσεις (>75% σωστές απαντήσεις), καταρχάς στην αριθμητική και μετά στην άλγεβρα και τη γεωμετρία.

		ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ				ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ				Σ
	ΤΑΞΗ	1	2	3	4	1	2	3	4	
Μειο-νοτικοί	Α	13,1	38,1	32,6	16,2	52,3	19,4	15,4	12,9	100% (1432)
	Β	11,5	40,2	37,3	11,0	46,5	18,2	23,1	12,2	100% (899)
	Γ	11,9	40,9	31,1	16,1	37,4	20,8	22,1	19,7	100% (553)
Πλειο-νοτικοί	Α	7,7	31,7	31,3	29,3	33,4	24,6	22,0	20	100% (1462)
	Β	6,2	23,1	32,2	38,5	28,7	24,6	17,2	29,5	100% (1133)
	Γ	4,3	21,4	33,1	41,2	30,2	19,5	18,2	32,1	100% (771)
		ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ				ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ				
Μειο-νοτικοί	Α	44,1	41,3	8,9	5,7	40,1	28,4	19,1	12,4	100% (1432)
	Β	41,4	42,8	12,3	3,5	30,0	27,1	24,8	18,1	100% (899)
	Γ	30,0	49,0	15,0	6,0	26,2	23,0	28,0	22,8	100% (553)
Πλειο-νοτικοί	Α	24,7	41,0	22,1	12,4	33,4	31,9	21,7	13	100% (1462)
	Β	19,7	35,8	24,8	19,7	26,9	20,1	31,5	21,5	100% (1133)
	Γ	21,3	33,1	28,0	17,6	25,8	23,1	24,5	26,6	100% (771)

1= < 25%, **2**=25% - 50%, **3**=Περισσότερο από 50% και λιγότερο από 75%, **4**=75%-100%

Πίνακας 2.Επιδόσεις των μαθητών κατά λογισμό και τάξη

Εστιάζοντας στις επιδόσεις των μαθητών του δείγματος κατά λογισμό, υψηλές επιδόσεις εμφανίζονται στον αριθμητικό λογισμό (60%-70% για την πλειονότητα και περίπου 50% για τη μειονότητα σε όλες τις τάξεις). Οι αμέσως επόμενες καλές επιδόσεις του δείγματος, αλλά με σημαντική διαφορά, παρουσιάζονται στον αλγεβρικό λογισμό, όπου 42%-52% των πλειονοτικών και 30%-42% των μειονοτικών μαθητών έχουν υψηλές επιδόσεις. Ακολουθεί ο στοχαστικός λογισμός που δυσκόλεψε εξίσου τους μαθητές των δύο δειγμάτων (διαφορά επιδόσεων < ±7%), καθώς μόλις περίπου 1:2 έως 2:3 μαθητές απάντησαν σωστά σε περισσότερες από τις μισές ερωτήσεις. Οι χαμηλότερες επιδόσεις εμφανίζονται στον γεωμετρικό λογισμό, με 34%-46% των πλειονοτικών και μόλις 14%-21% των μειονοτικών να επιδεικνύουν υψηλές επιδόσεις.

Αναφορικά με την τάξη φοίτησης, οι υψηλές επιδόσεις των μειονοτικών μαθητών παρουσιάζουν μικρές διακυμάνσεις από τάξη σε τάξη (2%-15%), πιο υψηλές μεταξύ της Α και της Γ τάξης, κυρίως στον στοχαστικό λογισμό. Ομοίως οι υψηλές επιδόσεις των πλειονοτικών μαθητών βρίσκονται στο 2%-16%, οι μεγαλύτερες εμφανίζονται μεταξύ της Α και της Γ αλλά και της Β τάξης, πάλι στον στοχαστικό λογισμό.

Για τον στατιστικό έλεγχο των ανωτέρω ευρημάτων, για τις δύο ομάδες μαθητών, υπολογίστηκαν οι μέσοι όροι και οι τυπικές αποκλίσεις της επίδοσής τους κατά λογισμό (αριστερό μέρος του Πίνακα 3) και εφαρμόστηκε το t-τεστ σε κάθε λογισμό (δεξί μέρος του Πίνακα 3).

Μέσοι όροι & Τυπική Απόκλιση				**t- τεστ ανεξάρτητων δειγμάτων**		
Λογισμός		Μ.Ο.	Τ.Α.	t	df	Sig. (2-tailed)
Αριθμητική	Π	0,616	0,222	19,021	6155,3	.000
	Μ	0,511	0,215			
Άλγεβρα	Π	0,505	0,305	13,386	6248	.000
	Μ	0,408	0,305			
Γεωμετρία	Π	0,467	0,262	23,793	6230,8	.000
	Μ	0,325	0,213			
Στοχαστικά	Π	0,495	0,326	7,937	6240,1	.000
	Μ	0,433	0,290			

Σημείωση 1: Πλειονοτικοί (Π): 3366, Μειονοτικοί (Μ): 2884. Σημείωση 2: Για την Άλγεβρα ως τιμή t θεωρήθηκε αυτή των ίσων διακυμάνσεων (Levene's Test: F=0,475 και p=0,491), ενώ στις υπόλοιπες περιοχές αυτή των άνισων διακυμάνσεων (p<0,001).

Πίνακας 3. Μέσοι όροι & t-τεστ: αποτελέσματα κατά λογισμό και δείγμα

Τα στοιχεία του Πίνακα 3 επιβεβαιώνουν τα ευρήματα που προέκυψαν με βάση τον Πίνακα 2, δηλαδή ότι η διαφορά επιδόσεων είναι παντού υπέρ των πλειονοτικών μαθητών και στατιστικά σημαντική.

Για τον έλεγχο της μαθηματικής επίδοσης κατά τάξη και λογισμό εφαρμόστηκαν δύο είδη στατιστικών ελέγχων: η ανάλυση διακύμανσης (One-Way Anova) στους λογισμούς όπου οι μέσοι όροι (μ.ο.) επίδοσης παρουσίαζαν ομοιογενείς διακυμάνσεις (τεστ ομοιογένειας Levene) και το μη παραμετρικό τεστ Kruskal-Wallis στις υπόλοιπες περιπτώσεις.

Η ανάλυση διακύμανσης για τους πλειονοτικούς μαθητές στον αριθμητικό και τον γεωμετρικό λογισμό έδειξε πως οι μ.ο. επιδόσεων της Α τάξης είναι στατιστικώς σημαντικά (σ.σ.) χαμηλότεροι από αυτούς των Β και Γ τάξεων, ενώ για τους μειονοτικούς μαθητές στον γεωμετρικό λογισμό οι μ.ο. επίδοσης των Α και Β τάξεων είναι σ.σ. χαμηλότεροι αυτών της Γ τάξης. Ακόμη ότι ο μ.ο. επίδοσης στον στοχαστικό λογισμό αυξάνεται σ.σ. με την τάξη (ο έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας πραγματοποιήθηκε με τα τεστ Tukey, Duncan και Scheffe).

Το μη παραμετρικό τεστ Kruskal-Wallis εφαρμόστηκε για τους πλειονοτικούς μαθητές στον αλγεβρικό λογισμό (X^2 (2,3366)=26,91, $p < 0,001$), όπου βρέθηκε ότι η Α τάξη είχε χαμηλότερη επίδοση από τις Β και Γ και στον στοχαστικό λογισμό, όπου οι επιδόσεις των μαθητών αυξάνονταν ανάλογα με την τάξη (X^2 (2,3366) = 68,98, $p < 0,001$). Η χρήση του τεστ Kruskal-Wallis στις επιδόσεις των μειονοτικών μαθητών έδειξε ότι δεν υπήρχε διαφορά από τάξη σε τάξη στον αριθμητικό λογισμό (X^2 (2,2884) =0,186, $p = 0,911$), ενώ στον αλγεβρικό οι επιδόσεις αυξάνονταν με την τάξη (X^2 (2,2884)=48,517, $p < 0,001$).

Τέλος, ο έλεγχος των μέσων όρων επίδοσης των μαθητών ανά ερώτηση έδειξε υψηλές επιδόσεις και για τα δύο δείγματα στον αριθμητικό λογισμό: στην *ανάγνωση αριθμού* (κυρίως στις μεγάλες τάξεις) και στο *ποσοστό ως κλάσμα* (κυρίως στη Γ τάξη), όπου περίπου 90% των μαθητών και των δύο ομάδων απάντησαν ορθά, στην *απεικόνιση κλάσματος σε σχήμα* (εύρος επιδόσεων 74%-80%) και στις *προσθέσεις φυσικών αριθμών και ομώνυμων κλασμάτων* (εύρος επιδόσεων 65%-70%). Χαμηλές επιδόσεις εντοπίστηκαν στην *προτεραιότητα πράξεων* με φυσικούς ή κλάσματα (πρωτίστως στις δύο πρώτες τάξεις), όπου οι ορθές απαντήσεις δεν ξεπέρασαν το 20%. Επίσης, στις έννοιες του *εμβαδού επιφανειών* και του *όγκου στερεών* (κυρίως στην Α τάξη), όπου 28% των πλειονοτικών και 7%-17% των μειονοτικών μαθητών απάντησαν ορθά.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

Με βάση την ανάλυση που προηγήθηκε, οι μαθηματικές επιδόσεις των μειονοτικών μαθητών υπολείπονται των πλειονοτικών σε ποσοστό που ανέρχεται στο 20-25%, επιβεβαιώνοντας το σχετικό 'χάσμα επίδοσης' που καταγράφει η έρευνα (NCES, 2003). Ωστόσο, το μέγεθος αυτού του 'χάσματος' διαφέρει από λογισμό σε λογισμό: είναι μικρό στην αριθμητική και στα στοχαστικά μαθηματικά (όπου οι επιδόσεις είναι υψηλές και χαμηλές αντιστοίχως) και μέτριο στη γεωμετρία και στην άλγεβρα (όπου οι επιδόσεις είναι χαμηλές).

Παρά την υπεροχή της μαθηματικής επίδοσης των πλειονοτικών σε σχέση με τους μειονοτικούς μαθητές, τα δομικά χαρακτηριστικά της δεν διαφοροποιούνται ιδιαίτερα για τις δύο ομάδες: παρατηρείται ευχέρεια στην εκτέλεση αλγοριθμικών διαδικασιών και περιορισμένη κατανόηση εννοιολογικών συστημικών χαρακτηριστικών των μαθηματικών. Οι λόγοι αυτής της ‘ομοιότητας’ μπορούν να αναζητηθούν σε εγγενή, επίμονα ελλειμματικά στοιχεία της ελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης, όπως ανελαστικές διδακτικές πρακτικές που επενδύουν στην αναπαραγωγή, ‘κλειστό’ Πρόγραμμα Σπουδών, απόλυτη κυριαρχία του σχολικού εγχειριδίου και εγκαταλελειμμένοι εκπαιδευτικοί. Το πρόσθετο έλλειμμα στις μαθηματικές επιδόσεις των μειονοτικών μαθητών μπορεί να συνδεθεί με κοινωνικο-πολιτισμικά και πολιτικά δεδομένα της εκπαιδευτικής τους πραγματικότητας, όπως φτωχές μαθηματικές εμπειρίες στο μειονοτικό σχολείο, ανεπαρκές επίπεδο κατανόησης και χρήσης της ελληνικής γλώσσας, άτυπες μαθηματικές γνώσεις και μορφές καθημερινής επικοινωνίας που αποκλίνουν από αυτές του δημόσιου σχολείου, ελλιπώς προετοιμασμένοι εκπαιδευτικοί, με χαμηλές προσδοκίες και τουλάχιστον αμήχανη διαχείριση του μειονοτικού μαθητή και γονείς εγκλωβισμένοι ανάμεσα σε ‘μονο-’ και ‘πολυ-’ εκδοχές της καθημερινότητάς τους. Η προσθετική δράση αυτών των παραγόντων αιτιολογεί εν μέρει και τη μικρή πρόοδο της επίδοσής τους από τάξη σε τάξη. Τα ανωτέρω ευρήματα συμφωνούν με τα αντίστοιχα της βιβλιογραφίας που καταγράφει επίμονα χαμηλές επιδόσεις σε γνωστικά απαιτητικές περιοχές του ΠΣ των μαθηματικών (PISA, 2015), ειδικά από μαθητές μειονοτήτων, αποδίδοντας τη διαφορά εν πολλοίς και σε αποκλίσεις μεταξύ σπιτιού και σχολείου σε μια σειρά από κοινωνικο-πολιτισμικά χαρακτηριστικά, όπως η γλώσσα και η ‘κουλτούρα’ του ‘σκέπτεσθαι και πράττειν’ καθημερινώς (Zevenbergen, 2000).

Συμπερασματικά, τα ευρήματα της μελέτης υποδεικνύουν ότι η ελληνική μαθηματική εκπαίδευση συνεχίζει να αποξενώνει μεγάλες μάζες μαθητών, κυρίως μειονοτικών, προετοιμάζοντας μαθηματικά μη εγγράμματους πολίτες, περιορίζοντας έτσι καθοριστικά τις πιθανότητες δυναμικής προσωπικής τους ανάπτυξης και συλλογικής δράσης στην ενήλικη ζωή. Είναι αυτονόητη η ανάγκη περαιτέρω έρευνας για την ανίχνευση των λειτουργιών αυτού του μηχανισμού ‘αποξένωσης’.

Σημειώσεις

1. Το Πρόγραμμα Σπουδών της υποχρεωτικής εκπαίδευσης περιλαμβάνει τέσσερις διακριτές περιοχές μαθηματικού λογισμού: τον αριθμητικό, τον γεωμετρικό, τον αλγεβρικό και τον στοχαστικό λογισμό. Ο πρώτος αφορά σε στοιχεία κλασικής αριθμητικής (μελέτη αριθμητικών εννοιών και διαδικασιών) και θεωρίας αριθμών (μελέτη αριθμητικών ιδιοτήτων, δομών και συστημάτων). Ο γεωμετρικός λογισμός εστιάζει στη γεωμετρία του επιπέδου και στις μετρήσεις, με συστημικά στοιχεία της Ευκλείδειας αντίληψης του χώρου να εισάγονται προοδευτικά. Ο αλγεβρικός λογισμός περιλαμβάνει την πρώιμη άλγεβρα (π.χ., μοτίβα) και σταδιακά τη συμβολική και τη συναρτησιακή άλγεβρα. Τέλος, ο στοχαστικός λογισμός επικεντρώνεται κυρίως σε ζητήματα επεξεργασίας, αναπαράστασης και ερμηνείας όγκου δεδομένων.

2. Στη Θράκη ο διαχωρισμός μεταξύ πλειονότητας και μειονότητας γίνεται με βάση το θρησκευτικό στοιχείο. Οι μειονοτικοί μαθητές φοιτούν κυρίως σε δίγλωσσα μειονοτικά σχολεία και ορισμένοι σε ελληνόφωνα δημόσια σχολεία της χώρας. Μετά από έξι χρόνια στο απομονωμένο μειονοτικό δημοτικό σχολείο, οι μαθητές της μειονότητας φοιτούν σε δημόσια Γυμνάσια και ακολούθως σε Λύκεια, αμιγώς μειονοτικά στα ορεινά και μικτά στις υπόλοιπες περιοχές (Ασκούνη, 2006). Το πλημμελώς προετοιμασμένο εκπαιδευτικο προσωπικό, τα ακατάλληλα εκπαιδευτικά υλικά και το παρωχημένο Πρόγραμμα Σπουδών (δίγλωσσο στην Α/θμια εκπαίδευση – τα μαθηματικά διδάσκονται στα τουρκικά- και μονόγλωσσο στη Β/θμια εκπαίδευση, πολιτισμικά προσανατολισμένο στο γίγνεσθαι της μειονότητας στην πρώτη και σε μια κατά κανόνα ξένη προς τη μειονότητα πλειονοτική αντίληψη στη δεύτερη) σκιαγραφούν το φτωχό επίπεδο εκπαίδευσης που προσφέρεται στα παιδιά της μειονότητας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arcavi, A., Drijvers, P. & Stacey, K. (2017). *The learning and teaching of algebra*. New York: Routledge

Ασκούνη, Ν. (2006). *Η εκπαίδευση της μειονότητας στη Θράκη*. Αθήνα: Αλεξάνδρεια.

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H., and E. Sanchez (2016). *Research on Teaching and Learning Probability*. ICME-13 Topical Surveys, DOI 10.1007/978-3-319-31625-3_1

Barwell R., Chapsam L., Nkambule T., Phakeng M.S. (2016). Tensions in teaching mathematics in contexts of language diversity. In R. Barwell et al. (Eds). *Mathematics Education and Language Diversity*. New ICMI Study Series. Springer, Cham.

Bouchey, H. A., & Harter, S. (2005). Reflected appraisals, academic perceptions, and math/science performance during early adolescence. *Journal of Educational Psychology*, *97*(4), 673-686.

Caygill, R., &Kirkham, S. (2008). *Mathematics: trends in Year 5 mathematics achievement 1994 to 2006*. NZ: Ministry of Education.

Jones, K., &Tzekaki, M. (2016). Research on the Teaching and Learning of Geometry. In A. Guietierez, P. Boero, & G. Leder (Eds.), *2nd Handbook of Research on the PME*. The Netherlands: Sense.

Hoadley, U. (2007). The reproduction of social class inequalities through mathematics pedagogies in South African primary schools. *Journal of Curriculum Studies*, *39*(6), 679-706.

Lerman, S., & Zevenbergen, R. (2014). The Socio-Political Context of the Mathematics Classroom. In P. Valero & R. Zevenbergen (Eds.) *Researching the socio-political dimensions of mathematics education* (pp.27-42). Dordrecht: Kluwer.

Lortie-Forgues, H. Tian, J., & Siegler, R.S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, *38*, 201-221.

NCES. (2003). *Status and trends in Hispanic education*. (NCES Report No. 2003-008). Washington, DC: U.S. Department of Education. Διαθέσιμο: http://nces.ed.gov/pubs2003/hispanics/Section9.asp

OECD (2017). *Mathematics performance (PISA)* (indicator). Doi: 10.1787/04711c74-en (Accessed on 13 July 2017).

Δραμαλίδης, Α., & Σακονίδης, Χ. (2006). Η επίδοση μαθητών ηλικίας 12-15 χρόνων σε θέματα σχολικής άλγεβρας. *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, 11, 100-114.

Stathopoulou, C. (2017). Once Upon a Time… In M. Rosa, L. Shirley, M. Gavarrete, & W. Alangui (Eds.), *Ethnomathematics and its Diverse Approaches for Mathematics Education*. NY: Springer.

Valero, P., & Pais, A. (2015). Examining Political Perspectives in Maths Education. In C. Bergsten, & B. Sriraman (Eds.), *Refractions of Mathematics Education* (pp. 173-196). Charlotte: Information Age Publ.

Wylie, C., & Hogden, E., (2007). *Competent learners at 16*. Wellington, NZ: Council for Educational Research.

Zevenbergen, R. (2000). “Cracking the code” of mathematics classrooms. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 201-224). Westport, CT: Ablex.

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΜΙΑΣ «ΗΜΕΡΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ» ΣΕ ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

Σανιδά[1] Μαρία, Keijzer[2] Ronald, Μισαηλίδου[1] Χριστίνα

[1]Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης ΕΚΠΑ, [2]iPabo University of Applied Sciences, Amsterdam

mrk_snday@yahoo.gr, r.keijzer@ipabo.nl, C.Misailidou@primedu.uoa.gr

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζονται επιλεγμένα δεδομένα από μια πιλοτική έρευνα σχεδίασης και υλοποίησης μιας «Ημέρας Μαθηματικών» σε ελληνικό δημοτικό σχολείο. Κατά τη διάρκεια αυτής της ημέρας, από την έναρξη μέχρι και την συνήθη ώρα λήξης των μαθημάτων τους, όλοι οι μαθητές του σχολείου ασχολήθηκαν μόνο με μαθηματικές δραστηριότητες. Ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων έγινε με στόχο την επίτευξη «Μάθησης μέσω Διερεύνησης». Ταυτόχρονα θεωρήθηκε ιδιαίτερα σημαντικό να είναι διασκεδαστικές και ενδιαφέρουσες για τα παιδιά. Η ενθουσιώδης συμμετοχή των παιδιών καθώς και η θετική αξιολόγηση των δραστηριοτήτων από τους δασκάλους τους, προτείνονται ως ενδείξεις για την επιτυχία του εγχειρήματος.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα μαθηματικά αποτελούν ένα αναπόσπαστο κομμάτι του προγράμματος σπουδών σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης. Ωστόσο, η στάση πολλών μαθητών απέναντι σε αυτό το μάθημα είναι αρνητική και μάλιστα έχει βρεθεί ότι στις περισσότερες περιπτώσεις, αυτή η αποστροφή προς τα μαθηματικά τους ακολουθεί σε όλη τους τη ζωή (Swan, 2004). Επιπλέον, κάποιοι υποφέρουν από άγχος όχι μόνο όταν καλούνται να λύσουν μαθηματικά προβλήματα αλλά ακόμη και στην προοπτική να περάσουν μια διδακτική ώρα ασχολούμενοι με μαθηματικά (Fraser & Honeyford, 2000).

Ο Swan (2004) υποστηρίζει πως η αλλαγή της αρνητικής στάσης απέναντι στα μαθηματικά μπορεί να επιτευχθεί μόνο με τον επαναπροσδιορισμό του τρόπου διδασκαλίας τους. Πιο συγκεκριμένα, προτείνει ως λύση, τον σχεδιασμό δραστηριοτήτων που να προάγουν το ενδιαφέρον των μαθητών και την ενεργή συμμετοχή τους.

Μια τέτοια προσέγγιση υιοθετήθηκε από το Ινστιτούτο Freudenthal του Πανεπιστημίου της Ουτρέχτης. Προκειμένου να προσφέρει στους μαθητές της Ολλανδίας μια διαφορετική εμπειρία μαθηματικών από αυτήν της παραδοσιακής σχολικής τάξης, το Ινστιτούτο καθιέρωσε το 2004 μια ετήσια διοργάνωση την οποία ονόμασε 'Μεγάλη Ημέρα των

Μαθηματικών' ('Grote Rekendag', Abels et al., 2016). Πρόκειται για μια ημέρα κατά την οποία οι μαθητές ενός ολόκληρου σχολείου δεν διδάσκονται τα συνηθισμένα μαθήματα. Αντίθετα, παίρνουν μέρος σε πρωτότυπες και διασκεδαστικές δραστηριότητες μαθηματικού περιεχομένου που μοιάζουν να προκαλούν τα παιδιά να τις παίξουν-λύσουν (Wijers & Jonker, 2011).

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζονται κάποια από τα αποτελέσματα της πραγματοποίησης σε ένα ελληνικό δημοτικό σχολείο μιας ανάλογης «Ημέρας Μαθηματικών». Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζονται επιλεγμένα δεδομένα από τις δραστηριότητες στις οποίες πήραν μέρος οι μαθητές της Γ΄ και της Δ΄ δημοτικού.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στην ετήσια 'Μεγάλη Ημέρα των Μαθηματικών' στην Ολλανδία παίρνει μέρος πάνω από το ένα πέμπτο των δημοτικών σχολείων της χώρας. Οι μαθητές, κατά τη διάρκεια μιας ολόκληρης σχολικής ημέρας, ασχολούνται μόνο με δραστηριότητες μαθηματικού περιεχομένου οι οποίες έχουν ως στόχο

Α. Να κεντρίσουν το ενδιαφέρον και να πετύχουν την ενεργή συμμετοχή τους

Β. Να προκαλέσουν «Διερευνητική Μάθηση» («Inquiry Based Learning»)

«Διερευνητική» είναι η μάθηση που έχει ως επίκεντρο τον μαθητή και εστιάζει στην ανάπτυξη της δημιουργικότητας και της συνεργασίας (Doorman, 2011). Κεντρικό ρόλο σε μια διδασκαλία που έχει ως στόχο τη μάθηση μέσω διερεύνησης κατέχουν οι ερωτήσεις που πηγάζουν από τους ίδιους τους μαθητές πάνω σε θέματα που πραγματικά τους ενδιαφέρουν. Τα παιδιά εργάζονται σε ομάδες πάνω σε δραστηριότητες οι οποίες έχουν νόημα γι' αυτά. Ο δάσκαλος έχει ρόλο καθοδηγητή ώστε οι μαθητές να βρίσκουν μόνοι τους τις απαντήσεις και ταυτόχρονα να δημιουργούν νέες και ενδιαφέρουσες ερωτήσεις (Mascil Project, 2013; Healey, 2005). Η στείρα απομνημόνευση δεν έχει θέση σε αυτές τις δραστηριότητες, ενώ πρωταρχική σημασία έχουν οι προϋπάρχουσες εμπειρίες και γνώσεις των μαθητών (Youth Learn, 2016).

Τα οφέλη μιας τέτοιας διδακτικής προσέγγισης είναι σημαντικά: οι μαθητές ενδιαφέρονται για αυτό που πρέπει να μάθουν και συνεργάζονται ουσιαστικά για την επίτευξη του στόχου τους. Στην πραγματικότητα, εργάζονται ως «ερευνητές» και κατανοούν τις θεωρητικές αρχές του αντικειμένου που τους ενδιαφέρει, δίνοντας ουσιαστικό νόημα στην μάθησή τους (Edelson, Gordin & Pea, 1999).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Με πρότυπο τη δομή μιας ΗΜ όπως αυτή πραγματοποιείται στην Ολλανδία επιχειρήθηκε ο σχεδιασμός ενός διδακτικού πειράματος (Steffe & Thompson, 2000) με θέμα μια ελληνική «Ημέρα Μαθηματικών» («ΗΜ»). Τα ερευνητικά ερωτήματα ήταν:

1. Ποια πρέπει να είναι η δομή μιας ΗΜ σε ένα ελληνικό σχολείο;
2. Ποια χαρακτηριστικά πρέπει να έχει μια μαθηματική δραστηριότητα για να είναι κατάλληλη για μια ΗΜ;
3. Ποια είναι η στάση των Ελλήνων μαθητών και δασκάλων απέναντι σε μια ΗΜ;

Το πείραμα πραγματοποιήθηκε σε ένα δημοτικό σχολείο του νομού Αττικής με τη συμμετοχή όλων των μαθητών του σχολείου. Σχεδιάστηκαν τρεις ομάδες μαθηματικών δραστηριοτήτων: μία για την Α΄ και Β΄ τάξη, μία για την Γ΄ και Δ΄ και μια για την Ε΄ και Στ΄ τάξη.

Ο σχεδιασμός των δραστηριοτήτων της ΗΜ έγινε από μια εξαμελή ομάδα σχεδιαστών με βάση τις αρχές της διερευνητικής μάθησης, τα δεδομένα της ολλανδικής εμπειρίας αλλά και τα ενδιαφέροντα των παιδιών στα οποία απευθύνονταν. Αξίζει να σημειωθεί πως το ένα μέλος της ομάδας είναι ταυτόχρονα και βασικό μέλος της σχεδιαστικής ομάδας της ολλανδικής ΗΜ με αποτέλεσμα την μεταφορά πολύτιμης εμπειρίας και τεχνογνωσίας.

Το άρθρο επικεντρώνει στις δραστηριότητες της Γ΄ και Δ΄ τάξης. Οι 34 μαθητές των δύο αυτών τάξεων χωρίστηκαν σε 6 ομάδες, από τις οποίες οι τέσσερις ήταν εξαμελείς και οι άλλες δύο πενταμελείς. Οι ομάδες ήταν μεικτές, καθώς περιείχαν μαθητές και των δύο τάξεων ενώ στη διαδικασία σύστασής τους βοήθησε το γεγονός ότι οι δάσκαλοί τους είχαν ήδη χωρισμένους τους μαθητές τους σε τριάδες.

Στην περίπτωση της Γ΄ και Δ΄ Δημοτικού οι γενικοί μαθησιακοί στόχοι της ημέρας επιλέχθηκαν να είναι οι χρηματικές συναλλαγές, οι νοεροί υπολογισμοί και η οπτικοχωρική αντίληψη. Ειδικότεροι μαθησιακοί στόχοι συνδέθηκαν με επιμέρους δραστηριότητες (όπως φαίνεται παρακάτω). Η ημέρα είχε τον γενικό τίτλο «Λούνα Παρκ» και αποτελούνταν από τρία μέρη:

Α. Την «εισαγωγική δραστηριότητα»

Β. Την «κυκλική δραστηριότητα», η οποία περιείχε 3 χώρους με διαφορετικά παιχνίδια

Γ. Την «κύρια δραστηριότητα»

Η διάρκεια της ΗΜ ήταν 7 διδακτικές ώρες και στα διαλείμματα οι μαθητές ήταν ελεύθεροι να ξεκουραστούν. Οι δραστηριότητες υλοποιήθηκαν στην αίθουσα πολλαπλών χρήσεων του σχολείου, η οποία χωρίστηκε με τη βοήθεια θρανίων σε τρεις νοητούς χώρους, έναν για κάθε δωμάτιο της κυκλικής δραστηριότητας. Στις υπόλοιπες δραστηριότητες, οι μαθητές μοιράστηκαν σε όλο το μήκος της αίθουσας.

Τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν ήταν απλά. Έτσι, σχεδιάστηκαν σε χαρτί χρήματα «Λούνα Παρκ» με διάφορες αξίες, δόθηκαν φακελάκια ως πορτοφόλια, κόλλες μεγέθους Α4 με αριθμούς, πλαστικά ζωάκια και χάρτινες καρδούλες, στόχος με βελάκια, μπουκάλια με κρίκους από φωσφορούχα βραχιόλια, ξύλινο επιτραπέζιο παιχνίδι με τουβλάκια, καθρέφτης με εκτυπωμένους λαβυρίνθους, χαρτόνια και είδη γραφής.

Η ημέρα συντονίστηκε από 4 μέλη της σχεδιαστικής ομάδας. Κάθε συντονιστής/εκπαιδευτής είχε στην επίβλεψή του δύο ομάδες και έπρεπε να συμπληρώσει από ένα φύλλο παρατήρησης για κάθε ομάδα. Τέλος, ένα άτομο είχε αναλάβει το ρόλο του γενικού παρατηρητή και κατέγραφε με κάθε δυνατή λεπτομέρεια όσα συνέβαιναν.

Τα δεδομένα που συλλέχτηκαν αποτελούνταν από

1. Λεπτομερείς καταγραφές των δραστηριοτήτων
2. Φωτογραφικά στιγμιότυπα
3. Φύλλα παρατήρησης
4. Συζητήσεις και ανατροφοδότηση από τους μαθητές και τους δασκάλους του σχολείου.

Η ανάλυση κάθε συντονιστή εστίασε στην πορεία της μιας ομάδας παιδιών (από τις δύο που είχε στην επίβλεψή του), η οποία επιλέχθηκε τυχαία και ονομάστηκε «παρατηρούμενη ομάδα». Χρησιμοποιήθηκαν ωστόσο και συμπληρωματικά δεδομένα από τις υπόλοιπες ομάδες, όπου κρίθηκε απαραίτητο. Ως μονάδα ανάλυσης, υιοθετήθηκε το «θεματικό επεισόδιο» το οποίο ορίστηκε ως το σύνολο των δράσεων και διαλόγων των παιδιών σχετικά με ένα συγκεκριμένο «θέμα». Μέσω της μελέτης των θεματικών επεισοδίων έγινε προσπάθεια να απαντηθούν το πρώτο και το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα. Τέλος, τα δεδομένα για την απάντηση του τρίτου ερευνητικού ερωτήματος συλλέχθηκαν από τις συζητήσεις με τους δασκάλους και τους μαθητές.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η ΗΜ ξεκίνησε με τη γνωριμία των συντονιστών-εκπαιδευτών με τα παιδιά και με μια γενική ενημέρωσή τους για όσα θα ακολουθούσαν. Στη συνέχεια, δόθηκαν οι απαραίτητες οδηγίες και τα υλικά (χρήματα, πορτοφόλια) για την εισαγωγική δραστηριότητα με τίτλο «Παίζοντας με τα Χρήματα». Στις ομάδες με τον μικρότερο αριθμό μαθητών, οι απαιτήσεις της δραστηριότητας προσαρμόστηκαν αναλόγως ώστε να προκύψει το ίδιο αποτέλεσμα με τους υπόλοιπους. Η ημέρα συνεχίστηκε με την κυκλική δραστηριότητα, στην οποία όλες οι ομάδες πέρασαν κυκλικά από όλους τους χώρους-δωμάτια. Έτσι, υπήρχε το «Δωμάτιο του Τρόμου» με μια παραλλαγή του κλασικού επιτραπέζιου παιχνιδιού «φιδάκι», το «Δωμάτιο Ευστοχίας», που περιείχε παιχνίδια με κρίκους και στόχο και τέλος, το «Διαστημικό Δωμάτιο», που περιλάμβανε τα παιχνίδια «τουβλάκια» και «διαδρομή». Για να μπουν σε κάθε χώρο, τα παιδιά έπρεπε να καταβάλλουν το αντίστοιχο αντίτιμο ενώ κατά περίπτωση, υπήρχαν και βραβεία. Η μέρα έκλεισε με την κύρια δραστηριότητα που ονομαζόταν «Φτιάξτε το δικό σας Λούνα Παρκ».

Το άρθρο εστιάζει στις προσπάθειες μιας «παρατηρούμενης ομάδας» («ΠΟ») κατά τη διάρκεια της εισαγωγικής και της κυκλικής δραστηριότητας. Η ΠΟ αποτελούνταν από έξι (6) μαθητές, τρεις (3) από την Γ΄ και τρεις (3) από την Δ΄ Δημοτικού. Κατά την ανάλυση των δεδομένων απομονώθηκαν 10 θεματικά επεισόδια. Χαρακτηριστικά μέρη αυτών των επεισοδίων (με δεδομένα και από άλλες ομάδες, όπου χρειάζεται) παρουσιάζονται παρακάτω.

Εισαγωγική δραστηριότητα: «Παίζοντας με τα Χρήματα»

Πριν το ξεκίνημα της «εισαγωγικής δραστηριότητας» δόθηκαν σε κάθε ομάδα 59 χρήματα «Λούνα Παρκ». Αυτά, έπρεπε να μοιραστούν δίκαια στα μέλη της ομάδας, έτσι ώστε να επιστρέψουν όσο το δυνατόν λιγότερα ρέστα. Μαθησιακά, οι στόχοι της δραστηριότητας ήταν η εξάσκηση των μαθητών στους νοερούς υπολογισμούς και στις χρηματικές συναλλαγές καθώς και η αντιμετώπιση της «διαίρεσης με υπόλοιπο» σε ρεαλιστικό πλαίσιο.

Τα μέλη της ΠΟ άρχισαν να μοιράζουν τα χρήματα, ξεκινώντας από τα χαρτονομίσματα με τον αριθμό «1». Ένα μαθητής πρότεινε να βρουν πρώτα το συνολικό ποσό κι έπειτα να κάνουν διαίρεση διά του αριθμού των ατόμων της ομάδας. Η ομάδα ακολούθησε αρχικά αυτήν την επιλογή, όμως σταμάτησε όταν έγινε αντιληπτό ότι τα λεφτά δε γινόταν να μοιραστούν ακριβώς. Τότε, ο συντονιστής τους επεσήμανε πως μπορούν να επιστρέψουν ορισμένα χρήματα. Η διαδικασία στο σημείο αυτό ξεκίνησε από την αρχή, παίρνοντας ο καθένας πάλι από ένα χαρτονόμισμα, παρά την προσπάθεια του ίδιου μαθητή να χρησιμοποιήσουν διαίρεση. Όταν όλα τα μέλη της ομάδας είχαν ίδιο αριθμό χαρτονομισμάτων και δε μπορούσαν να πάρουν άλλα, σταμάτησαν και τοποθέτησαν στην άκρη όσα περίσσευαν. Με παρόμοιο τρόπο δούλεψαν και με τα υπόλοιπα χαρτονομίσματα με τις μεγαλύτερες αξίες. Οι άλλες ομάδες ακολούθησαν την ίδια τακτική στη διανομή των χρημάτων. Μόνο μία ομάδα δήλωσε ότι δοκίμασε διαφορετικό τρόπο, καθώς τα μέλη της σκέφτηκαν «πόσες φορές χωράει το 6 στο 58» για να βρουν το ποσό που αντιστοιχούσε στον καθένα. Ωστόσο, διαχώρισαν αυτόν τον τρόπο από την πράξη της διαίρεσης.

Στον αναστοχασμό που ακολούθησε, τα περισσότερα παιδιά υποστήριξαν ότι η διαδικασία της μοιρασιάς δε τους δυσκόλεψε, γεγονός που αντιπαρατίθεται με τις δοκιμές που έκαναν για να φτάσουν στο σκοπό τους. Στο τέλος, ζητήθηκε από τις ομάδες να συγκρίνουν τον τρόπο διανομής των χρημάτων τους και κατέληξαν όλοι στο συμπέρασμα πως η διαίρεση θα ήταν ένας πιο σύντομος και σίγουρος τρόπος που θα παρείχε το ίδιο αποτέλεσμα. Παρόλο που τα παιδιά της Γ΄ και Δ΄ Δημοτικού θεωρείται πως έχουν κατακτήσει την «διαίρεση», η συγκεκριμένη δραστηριότητα αποτέλεσε αφορμή για μια νέα διερεύνηση της έννοιας από όλες τις ομάδες. Ταυτόχρονα, προκάλεσε το ενδιαφέρον όλων των μαθητών, οι οποίοι συμμετείχαν ενεργά, συνεργάστηκαν σωστά και επιπλέον φάνηκαν να διασκεδάζουν!

Κυκλική δραστηριότητα

Μετά το μοίρασμα των χρημάτων, οι μαθητές ενημερώθηκαν ότι θα τα χρησιμοποιούσαν για να παίξουν στα παιχνίδια του «Λούνα Παρκ». Οι συντονιστές τόνισαν στα παιδιά

1. να είναι προσεκτικά στη διαχείριση γιατί είχαν ακριβώς το ποσό που χρειάζονταν για να μπουν σε όλα τα δωμάτια και
2. να συνεργάζονται μεταξύ τους για όλες τις αποφάσεις τους.

Η κάθε ομάδα επέλεξε ένα μέλος που θα λειτουργούσε ως ταμίας και ξεκίνησαν όλοι με ενθουσιασμό να συμμετέχουν στα παιχνίδια. Παρακάτω παρουσιάζονται επεισόδια από το «Δωμάτιο Ευστοχίας» και το «Διαστημικό Δωμάτιο».

Κυκλική δραστηριότητα: «Δωμάτιο Ευστοχίας»

Στο «Δωμάτιο Ευστοχίας», υπήρχαν δύο παιχνίδια: το «παιχνίδι των κρίκων» και το «παιχνίδι του στόχου» κατά το οποίο οι μαθητές έπρεπε να πετάξουν μπαλάκια που «κολλούσαν» στον στόχο (Εικόνα 1). Τα παιδιά, για να εισέλθουν στο δωμάτιο, έπρεπε να πληρώσουν το καθένα 4 χρήματα «Λούνα Παρκ» (2 για κάθε παιχνίδι).

Για το «παιχνίδι του στόχου» , με τα 2 «Λούνα Παρκ», κάθε παίκτης αγόραζε 2 προσπάθειες. Ανάλογα με το σκορ που θα συγκέντρωναν, θα τους επιστρεφόταν ένα μέρος των χρημάτων που είχαν ήδη πληρώσει, το οποίο όμως έπρεπε να υπολογίσουν οι ίδιοι. Έτσι, αν πετύχαιναν 50 έως 69 πόντους, έπαιρναν πίσω το ¼ των χρημάτων τους, ενώ με 70 πόντους και πάνω, τους επιστρεφόταν το ½. Επιθυμητά μαθησιακά αποτελέσματα αυτής της δραστηριότητας ήταν η εξάσκηση στους νοερούς υπολογισμούς και η αντιμετώπιση κλασματικών αριθμών σε ρεαλιστικές καταστάσεις.

Εικόνα 1: Δωμάτιο Ευστοχίας

Τα παιδιά της ΠΟ διαπληκτίστηκαν στην αρχή μεταξύ τους για τη σειρά ρίψης μα τελικά κατάφεραν να βρουν τη λύση μόνοι τους. Κάθε μέλος της ομάδας έριξε από 2 μπαλάκια, με αποτέλεσμα να συγκεντρώσουν αρκετούς πόντους. Οι μαθητές υπολόγισαν νοερά το σύνολο των βαθμών που μάζεψαν με αρκετή ευκολία. Χρειάστηκαν λίγο περισσότερο χρόνο στο να βρουν το ποσό των χρημάτων που έπρεπε να τους επιστραφεί, αφού ο καθένας έπρεπε να πάρει στο πορτοφόλι του το ½ των χρημάτων που έδωσε για να παίξει. Ένα μέλος της ομάδας υποστήριξε τότε ότι μπορούν να κόψουν το 4, τα χρήματα δηλαδή που έδωσε ο καθένας, στη μέση ώστε να βρουν πόσα θα πάρουν. Τελικά, κατέληξαν πως σε όλους έπρεπε να επιστραφούν 2 «Λούνα Παρκ».

Η ανάγκη για τη χρήση κλασμάτων στους υπολογισμούς, προκάλεσε συζήτηση και διερεύνηση προκειμένου οι μαθητές να καταλήξουν στο ποσό των χρημάτων που θα τους επιστρεφόταν. Τα παιδιά, έπαιξαν με πολλή χαρά το «παιχνίδι του στόχου» το οποίο ήξεραν από προηγούμενες επισκέψεις τους σε Λούνα Παρκ. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, έδειξαν ιδιαίτερη επιμονή και ενδιαφέρον για την επίδοσή τους γιατί είχαν ως έναυσμα την επιστροφή των χρημάτων τους. Τέλος, αν και στην αρχή επικράτησε ένταση ανάμεσα στα μέλη της ΠΟ, στη συνέχεια εμψύχωναν ο ένας τον άλλο με σκοπό την καλύτερη ρίψη και τη μεγαλύτερη συλλογή πόντων.

Κυκλική δραστηριότητα: «Διαστημικό Δωμάτιο»

Στο παιχνίδι «Τουβλάκια» του «Διαστημικού Δωματίου», οι μαθητές έπρεπε να τοποθετήσουν πολύχρωμα τουβλάκια διαφορετικού σχήματος σε έναν ορισμένο χώρο, μέσα σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα και με τέτοιο τρόπο ώστε να χωράνε όλα (Εικόνα 2).

Εικόνα 2: Διαστημικό Δωμάτιο: Παιχνίδι «Τουβλάκια»

Ο μαθησιακός στόχος του παιχνιδιού ήταν η ανάπτυξη της οπτικοχωρικής αντίληψης και η αναγνώριση γεωμετρικών σχημάτων. Τα παιδιά της ΠΟ δε κατάφεραν και πάλι να συντονιστούν, με αποτέλεσμα να προκληθεί αναστάτωση. Παρόλα αυτά, μετά από σχετική σύσταση, η ομάδα συνεργάστηκε επιτυχώς και ολοκλήρωσε με ιδιαίτερη επιτυχία το συγκεκριμένο παιχνίδι: δοκίμασαν κάθε δυνατό συνδυασμό που μπορούσαν να σκεφτούν για να κατακτήσουν το σκοπό τους.

Το παιχνίδι «Τουβλάκια» απαίτησε αυξημένη διερεύνηση εκ μέρους των παιδιών. Τα τουβλάκια ήταν όλα διαφορετικού σχήματος, επομένως δεν ήταν εύκολο να χωρέσουν με την πρώτη προσπάθεια μέσα στον καθορισμένο χώρο. Οι μαθητές έπρεπε να συνεργαστούν ουσιαστικά για να καταφέρουν να ολοκληρώσουν με επιτυχία την δραστηριότητα. Δοκίμαζαν διάφορους τρόπους τοποθέτησης των κομματιών και τους άλλαζαν θέσεις και πλευρές. Χαρακτηριστικό παράδειγμα του ενδιαφέροντος των παιδιών για το συγκεκριμένο παιχνίδι είναι ότι ακόμα και μετά το τέλος του χρόνου ήθελαν να παραμείνουν στο χώρο για να καταφέρουν να χωρέσουν τα τουβλάκια στο κουτί.

Μετά την ολοκλήρωση όλων των παιχνιδιών της κυκλικής δραστηριότητας από όλες τις ομάδες (και τον απαραίτητο αναστοχασμό πάνω στις δράσεις τους), έγινε η απονομή βραβείων και μεταλλίων.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σε αυτό το άρθρο παρουσιάστηκαν επιλεγμένα αποτελέσματα από την διεξαγωγή μιας «Ημέρας Μαθηματικών» σε ελληνικό δημοτικό σχολείο. Τα αποτελέσματα αυτά είναι ενδεικτικά του συνόλου των δεδομένων της συγκεκριμένης έρευνας και θεωρούνται ιδιαίτερα ενθαρρυντικά.

Οι δραστηριότητες προκάλεσαν ουσιαστική μάθηση μέσω διερεύνησης αλλά και ενεργή συμμετοχή των μαθητών. Οι μαθητές τις αντιμετώπισαν σαν παιχνίδια και επέδειξαν ενθουσιασμό και δέσμευση να τις ολοκληρώσουν με επιτυχία. Επιπλέον, οι συζητήσεις και οι ενέργειές τους ήταν ενδεικτικές της ποικιλίας των μαθηματικών που χρησιμοποιήσαν προκειμένου να πετύχουν τον στόχο τους. Μετά την ολοκλήρωση της ΗΜ, οι μαθητές παρατήρησαν ότι «χρησιμοποίησαν μαθηματικά αλλά με διαφορετικό τρόπο» και τόσο αυτοί όσο και οι δάσκαλοί τους αξιολόγησαν πολύ θετικά την συμμετοχή τους στην ΗΜ.

Πρέπει βέβαια να σημειωθεί πως παρουσιάστηκαν και κάποια περιστατικά μη ομαλής συνεργασίας των ομάδων. Το γεγονός αυτό δεν θεωρήθηκε ανησυχητικό, αφού το πλαίσιο δουλειάς ήταν καινούριο για τους μαθητές. Σε κάθε περίπτωση, τα προβλήματα διευθετήθηκαν-συχνά χωρίς την παρέμβαση των συντονιστών.

Η διοργάνωση της «Ημέρας Μαθηματικών» αποδείχτηκε τελικά αξιόλογη εμπειρία τόσο για τους ερευνητές-σχεδιαστές όσο και για τους δασκάλους και τους μαθητές του συγκεκριμένου σχολείου. Μια τέτοια διοργάνωση επιβεβαιώνει πως τα μαθηματικά μπορούν να γίνουν ελκυστικά και ενδιαφέροντα για όλα τα παιδιά όταν «προσφέρονται» μέσω «παιχνιδιών» που προάγουν την διερευνητική μάθηση.

Ευχαριστίες: Οι συγγραφείς ευχαριστούν θερμά τους Βαρβάρα Δούκα, Μαριάννα Μπίκινη και Σίμο Πασινιό για τη συμμετοχή τους στον σχεδιασμό και την πραγματοποίηση της «Ημέρας Μαθηματικών».

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abels, M., Jonker, V., Keijzer, R. & Wijers, M. (2016). *Let's have a look behind the code. The Big Mathematics Day 2016 (Netherlands) about coding without computer*. Διαθέσιμο στον ιστότοπο: http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/2016_jonker_wijers_abels_keijzer_patt.pdf

Doorman, M. (2011). *PRIMAS WP3 – Materials: Teaching and professional development materials for IBL (version 2)*. Netherlands.

Edelson, D. C., Gordin, D. N., & Pea, R. D. (1999). Addressing the challenges of inquiry-based learning through technology and curriculum design. *Journal of the learning sciences*, *8*(3-4), 391-450.

Fraser, H., & Honeyford, G. (2000). *Children, parents and teachers enjoying numeracy*. London: David Fulton.

Healey, M. (2005). Linking research and teaching exploring disciplinary spaces and the role of inquiry-based learning. Reshaping the university: new relationships between research, scholarship and teaching, 67-78.

Mascil Project (2013) *Defining inquiry-based learning*. Διαθέσιμο στον ιστότοπο: http://mascil-project.eu/research/8-defining-inquiry-based-learning

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Swan, P. (2004). I hate mathematics. *Paper presented at the MAV annual conference 2004*, Melbourne.

Wijers, M. & Jonker, V. (2011). *Big Maths Day*. Διαθέσιμο στον ιστότοπο: http://www.primas-project.eu/servlet/supportBinaryFiles?referenceId=2&supportId=1268

Youth Learn. (2016) *Inquiry-based Learning: An Approach To Educating And Inspiring Kids.* Διαθέσιμο στον ιστότοπο: http://youthlearn.org/resources/inquiry-based-learning

ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ: ΚΟΙΝΩΝΙΚΕΣ ΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΒΟΥΛΗΣΗ

Στουραΐτης Κωνσταντίνος

ΕΚΠΑ, Τμήμα Μαθηματικών

kstouraitis@math.uoa.gr

Η μελέτη των αποφάσεων των εκπαιδευτικών μέσω της Θεωρίας Δραστηριότητας (ΘΔ) συμβάλλει ουσιαστικά στην κατανόηση του γιατί οι εκπαιδευτικοί θέτουν στόχους και πώς δημιουργείται ο ορίζοντας των δυνατών δράσεων. Όπως σε όλες τις μαρξιστικής προέλευσης οπτικές, δίνοντας προτεραιότητα στους κοινωνικούς παράγοντες έναντι των ατομικών, τίθενται τα προβλήματα του ντετερμινισμού και της ελεύθερης βούλησης στη λήψη απόφασης και γενικότερα στην ανθρώπινη νόηση. Σε αυτή την εργασία εμπειρικά ευρήματα σχετικά με τις αποφάσεις των εκπαιδευτικών επιχειρείται να συνδεθούν με φιλοσοφικές προσεγγίσεις σχετικά με την ελευθερία, τον αυτοπροσδιορισμό και την κυριαρχία στα εργαλεία.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

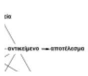
Η μελέτη των αποφάσεων και των επιλογών των εκπαιδευτικών είναι ένα σημαντικό μέρος της έρευνας για τη διδασκαλία των μαθηματικών, ακόμη κι αν οι αποφάσεις δεν αναφέρονται ρητά στα ερευνητικά ερωτήματα. Την τελευταία δεκαετία κάποιοι ερευνητές επιχειρούν να προσεγγίσουν το πλαίσιο στο οποίο διαμορφώνονται οι επιλογές των εκπαιδευτικών και ανιχνεύουν τους παράγοντες που επιδρούν. Για παράδειγμα, ο Skott (2013) χρησιμοποιεί την προσέγγιση των προτύπων συμμετοχής (patterns of participation) για να μελετήσει μια εκπαιδευτικό για πάνω από δύο χρόνια. Βρίσκει ότι η αίσθηση που έχει η εκπαιδευτικός για τη θέση της στην τάξη και στο σχολείο επηρεάζεται από διαφορετικές πρακτικές που συμμετέχει.

Σε προηγούμενες μελέτες (Stouraitis, 2016, 2017) χρησιμοποίησα τη ΘΔ για να μελετήσω τις αποφάσεις των εκπαιδευτικών κατά την εφαρμογή ενός νέου προγράμματος σπουδών (ΠΣ). Ένα από τα κύρια συμπεράσματα είναι ότι οι αποφάσεις των εκπαιδευτικών επηρεάζονται από τις δραστηριότητες στις οποίες συμμετέχουν τώρα ή συμμετείχαν στο παρελθόν, από τα εργαλεία που διαμεσολαβούν αυτές τις δραστηριότητες και από τις σχέσεις που διαμορφώνουν στις αντίστοιχες κοινότητες. Αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με την οπτική της ΘΔ και το μαρξιστικό φιλοσοφικό υπόβαθρό της, στο πλαίσιο των οποίων το κοινωνικό έχει προτεραιότητα έναντι του ατομικού. Αλλά τότε, πώς εμπλέκεται η ελεύθερη βούληση, αν υπάρχει κάτι τέτοιο; Έχει το άτομο τη δυνατότητα να επιλέγει τις δράσεις που αναλαμβάνει, δηλαδή να αποφασίζει; Ή οι δράσεις του είναι προκαθορισμένες από την ιστορία του και από το κοινωνικό πλαίσιο;

Σε αυτή τη μελέτη επιχειρώ κάποιες συνδέσεις μεταξύ της έρευνας και αυτών των φιλοσοφικών ερωτημάτων. Διανοητές από διαφορετικά ρεύματα (πχ, Σαρτρ, Χάμπερμας, Χάιντεγκερ) έχουν συμβάλλει με ουσιώδη τρόπο στη συζήτηση αυτών των ανοικτών προβλημάτων. Ωστόσο εδώ περιορίζομαι στη μαρξιστική οπτική επειδή είναι το φιλοσοφικό υπόβαθρο της ΘΔ που χρησιμοποιώ στην έρευνά μου. Επιπλέον, δεν επιδιώκω να κάνω κάποιου είδους εφαρμογή μιας φιλοσοφικής οπτικής στην έρευνα, αλλά, αντίθετα, προσπαθώ να παρουσιάσω τον τρόπο που κάποια φιλοσοφικά προβλήματα αναδύθηκαν από τα συμπεράσματα της έρευνάς μου (που έχει παρουσιαστεί αλλού) και να συζητήσω κάποιες ερμηνείες μου για αυτά τα συμπεράσματα. Έτσι, αφού περιγράψω το πλαίσιο της ΘΔ και κάποια σχετικά φιλοσοφικά προβλήματα, θα παρουσιάσω παραδείγματα από την έρευνά μου και τις ερμηνείες μου και, τέλος, θα επιστρέψω στα φιλοσοφικά προβλήματα και τη σχέση τους με τα εμπειρικά ευρήματα.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΟΠΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Η ΘΔ προσφέρει φακούς για να επιχειρήσει κανείς να συλλάβει την πολυπλοκότητα της διδασκαλίας ενσωματώνοντας διαλεκτικά την ατομική και την κοινωνική διάστασή της. Η ανθρώπινη δραστηριότητα κατευθύνεται προς ένα αντικείμενο που αποτελεί και το κίνητρό της (Leont'ev, 1978). Εδώ, η δραστηριότητα της διδασκαλίας των μαθηματικών κατευθύνεται κυρίως από το κίνητρο της μάθησης των μαθηματικών από τους μαθητές. Η μονάδα ανάλυσης είναι το σύστημα δραστηριότητας (ΣΔ) που ενσωματώνει τους κοινωνικούς παράγοντες (η βάση του τριγώνου στο σχήμα 1) οι οποίοι πλαισιώνουν τις σχέσεις υποκειμένου–αντικειμένου με τη διαμεσολάβηση των εργαλείων.



Σχήμα 1: Το σύστημα δραστηριότητας (Engeström, 2001a)

Η δραστηριότητα διεξάγεται μέσω δράσεων οι οποίες είναι σχετικά διακριτά τμήματα συμπεριφοράς που έχουν ένα στόχο, όπως πχ. η επιλογή ενός έργου για τη δραστηριότητα των μαθητών στην τάξη.

Κάθε ΣΔ χαρακτηρίζεται από αντιθέσεις οι οποίες είναι η κινητήρια δύναμη για την ανάπτυξη οποιουδήποτε δυναμικού συστήματος (Ilyenkov, 2009), εφόσον μπορεί να δημιουργούν ευκαιρίες μάθησης για το υποκείμενο διευρύνοντας τον ορίζοντα της δραστηριότητας (Engeström, 2001α, Potari, 2013). Στην έρευνά μου, η εισαγωγή ενός νέου ΠΣ δημιούργησε ή αποκάλυψε αντιθέσεις στη διδασκαλία οι οποίες αναδύθηκαν σε ομαδικές συζητήσεις των εκπαιδευτικών (Stouraitis, Potari, & Skott, 2017). Η προσπάθεια υπέρβασης των αντιθέσεων μπορεί να ενεργοποιεί τη διαδικασία λήψης αποφάσεων σχετικά με τους στόχους που πρέπει να τεθούν και τις δράσεις που τους υλοποιούν. Αυτές οι αποφάσεις μπορεί να οδηγήσουν στην κατασκευή ενός ριζικά νέου και ευρύτερου αντικειμένου της δραστηριότητας (Engeström, 2001α).

Οι Engeström, Engeström, & Kerosuo (2003) διακρίνουν μεταξύ των βασισμένων στη δράση αποφάσεων (action-based decisions), που αναφέρονται στην ανάληψη συγκεκριμένων δράσεων, και του προσανατολισμένου στο μέλλον οραματισμού (future-oriented envisioning), που είναι η επιθυμητή μελλοντική κατάσταση του αντικειμένου όπως την φαντάζεται το υποκείμενο. Πρόκειται για διαφορετικά επίπεδα αποφάσεων – που αντιστοιχούν στις δράσεις και στη δραστηριότητα – οι οποίες συνδέονται διαλεκτικά. Αντλώντας από τη μελέτη τους στον τομέα της δημόσιας υγείας, ισχυρίζονται ότι "η ιστορία δημιουργείται μέσα από εντοπισμένες δράσεις που είναι προσανατολισμένες στο μέλλον" (σ. 287).

Η έμφαση στον κοινωνικό και ιστορικό χαρακτήρα της ανθρώπινης δραστηριότητας και σκέψης έχει τις ρίζες της στο φιλοσοφικό υπόβαθρο της ΘΔ, δηλαδή στις ιδέες των Μαρξ, Ένγκελς, Χέγκελ και Σπινόζα. Σε αυτό το πλαίσιο, η ανθρώπινη νόηση είναι "ενσωματωμένη στη δραστηριότητα που την υποστηρίζει και τη συγκροτεί" (Derry, 2004). Ο Leont'ev (1978) δηλώνει ότι όπως η συνείδηση, "έτσι και η προσωπικότητα του ανθρώπου 'παράγεται' – δημιουργείται από τις κοινωνικές σχέσεις στις οποίες το άτομο εισάγεται στη δραστηριότητά του" (σ. 108). Υπερβαίνοντας το διαχωρισμό μεταξύ νόησης και ύλης το ρεύμα του "διαλεκτικού υλισμού" επιχειρεί να προσφέρει μια εξήγηση της νόησης. Αυτή η προσπάθεια συχνά ερμηνεύεται ότι αγνοεί την ελεύθερη βούληση και ότι ανάγει την ανθρώπινη σκέψη και δράση σε μηχανική και προκαθορισμένη (Derry, 2013). Ωστόσο, το πρόβλημα του ντετερμινισμού και της ανθρώπινης ελευθερίας έχει τεθεί από τους ίδιους τους μαρξιστές διανοητές. Έτσι, ο Ilyenkov (2009) αρνείται μια μηχανιστική ανάγνωση του έργου του Σπινόζα που ανάγει τη διάνοια σε προϊόν του ανθρώπινου εγκεφάλου. Και ο Vygotsky επιδιώκει να συμβάλλει σε μια εξήγηση που "δεν ανάγει το υψηλότερο στο χαμηλότερο, το λογικό στο αυτόματο, το ελεύθερο στο μηχανικό" (1999, σ. 173), αλλά και δεν θα καταφεύγει "σε μια αρχή της απόλυτης ελεύθερης βούλησης που δεν υπόκειται στη φυσική αναγκαιότητα" (ο.π).

Θα πρέπει να τονιστεί ότι η έννοια της ελευθερίας έχει διαφορετικό περιεχόμενο σε διαφορετικές φιλοσοφικές παραδόσεις. Το καθημερινό νόημα της ελευθερίας είναι εκείνο της ελεύθερης επιλογής, της απουσίας περιορισμών. Αυτό το νόημα είναι βασισμένο στον καρτεσιανό διαχωρισμό νόησης και ύλης (Derry, 2004). Αντίθετα, για τον Σπινόζα η ελευθερία βασίζεται στον αυτοπροσδιορισμό. Ελεύθερος δεν είναι ο άνθρωπος που η δράση του δεν καθορίζεται αλλά εκείνος που ο ίδιος καθορίζει τη δράση του. Η οπτική του Σπινόζα για την ελευθερία αναπτύχθηκε περαιτέρω από τον Χέγκελ και τον Ένγκελς:

> Για αυτόν [τον Χέγκελ], η ελευθερία είναι η επίγνωση της αναγκαιότητας. … Η ελευθερία δεν συνίσταται σε καμία φαντασίωση ανεξαρτησίας από τους φυσικούς νόμους, αλλά στη γνώση αυτών των νόμων και στη δυνατότητα να τους κάνεις να δουλέψουν συστηματικά προς καθορισμένους στόχους. … [Η] ελευθερία της θέλησης δεν σημαίνει παρά την ικανότητα να λαμβάνεις αποφάσεις με πραγματική γνώση του αντικειμένου. (Engels, 1987, σ. 105)

Αυτή η θέαση της ελευθερίας αναπτύχθηκε από τον Vygotsky. Η ελεύθερη βούληση βασίζεται στην κατανόηση της πραγματικότητας και στην κυριαρχία του ανθρώπου στις διαδικασίες της συμπεριφοράς του, η οποία επιτυγχάνεται μέσω της χρήσης εργαλείων και σημείων. Έτσι, η ανθρώπινη δράση παύει να είναι αντίδραση στις εδώ–και–τώρα ανάγκες και γίνεται ελεύθερη δράση που κατευθύνεται στο μέλλον. "[Η] ανάπτυξη της ελευθερίας της δράσης είναι ευθέως λειτουργικά εξαρτώμενη από τη χρήση των σημείων" (Vygotsky, 1999, σ. 65). Ο αυτοπροσδιορισμός του Σπινόζα έρχεται με τη διαμεσολάβηση των εργαλείων και των σημείων. Από την άλλη, ο Leont'ev (1978) εστιάζει στο ρόλο της δραστηριότητας ως καθοριστικού παράγοντα της ανθρώπινης συμπεριφοράς, και θεωρεί τα συγκρουόμενα κίνητρα ως μια προϋπόθεση για κάθε εκούσια δράση, εφόσον ο ίδιος ο άνθρωπος διαμορφώνει τις ιεραρχίες των κινήτρων του.

Ως ερευνητής, κατανοώ την εκούσια δράση ως πράξη που ακολουθεί την αναγνώριση συγκρουόμενων κινήτρων, βασίζεται στην κατανόηση της κατάστασης και στην κυριαρχία στα διαμεσολαβητικά εργαλεία–σημεία, και προσανατολίζεται στο μέλλον. Συγχρόνως δεν υιοθετώ ντετερμινιστικές προσεγγίσεις και δεν θεωρώ ότι υπάρχει μια μοναδική αναγκαιότητα την οποία οι άνθρωποι μπορούν να γνωρίζουν και οφείλουν να υποτάσσονται.

ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ: ΕΜΠΕΙΡΙΚΑ ΕΥΡΗΜΑΤΑ

Τη χρονιά 2012–13 συνεργάστηκα με εκπαιδευτικούς σε τρία γυμνάσια που εφάρμοζαν πιλοτικά ένα νέο ΠΣ υποστηρίζοντάς τους σε συναντήσεις όπου συζητούσαν ομαδικά το σχεδιασμό των μαθημάτων τους και τις εμπειρίες τους από τη διδασκαλία κάποιων διδακτικών ενοτήτων του νέου ΠΣ. Τα δεδομένα, που αποτελούνται από απομαγνητοφωνημένες συζητήσεις και συνεντεύξεις, αρχικά αναλύθηκαν με μεθόδους θεμελιωμένης θεωρίας. Περαιτέρω ερμηνείες για τις αντιθέσεις και τις αποφάσεις διαμορφώθηκαν από τις οπτικές της ΘΔ. Έτσι, ενώ η ΘΔ δεν χρησιμοποιήθηκε για το σχεδιασμό της αναπτυξιακής παρέμβασης, αποτέλεσε τον οδηγό στις ερμηνείες μου. Παρακάτω περιγράφω συνοπτικά τρία παραδείγματα από την παραπάνω έρευνα εστιάζοντας στους στόχους της παρούσας μελέτης και αναφερόμενος σε τρεις εκπαιδευτικούς: τη Μαρίνα και τη Λίντα από το σχολείο Α και τον Πέτρο (ψευδώνυμα) από το σχολείο Β. Η αφετηρία των συζητήσεων είναι προτάσεις που εισάγονται με το νέο ΠΣ και οι αντιθέσεις που αναδύονται κατά την εφαρμογή τους στην τάξη.

Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί και η ευκλείδεια ισότητα τριγώνων

Σε τρεις διαδοχικές συναντήσεις στην ομάδα των εκπαιδευτικών του σχολείου Α συζητείται ο συνδυασμός των γεωμετρικών μετασχηματισμών με την ισότητα τριγώνων στη διδασκαλία της γεωμετρίας της Γ γυμνασίου. Η Μαρίνα βλέποντας τη δυνατότητα "να ξεφύγεις από την ευκλείδεια γεωμετρία" αποφασίζει να συνδυάσει τις δύο προσεγγίσεις με στόχο οι μαθητές να αναγνωρίσουν τις διαφορές τους και να μπορούν να τα αξιοποιούν ως δύο εναλλακτικά αποδεικτικά εργαλεία. Για το σκοπό αυτό επιλέγει έργα απόδειξης που να αναδεικνύουν τα πλεονεκτήματα της κάθε προσέγγισης. Αναφέρει ότι είχε παρακολουθήσει ένα σεμινάριο για τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς και είχε διδάξει πειραματικά τους μετασχηματισμούς σε ένα άλλο σχολείο παλαιότερα. Αντίθετα, η Λίντα επιλέγει να μην εμπλέξει τις δύο προσεγγίσεις, θεωρώντας ότι οι ο στόχος της να αναπτύξουν οι μαθητές ικανότητες αιτιολόγησης και απόδειξης μπορεί να επιτευχθεί μέσα από τη διδασκαλία της ισότητας τριγώνων με ευκλείδεια οπτική, χωρίς την εμπλοκή των μετασχηματισμών.

Οι εκπαιδευτικοί φαίνεται να αναγνωρίζουν την αντίθεση μεταξύ των δύο εργαλείων απόδειξης, η οποία ερμηνεύτηκε ως εκδήλωση της διαλεκτικής αντίθεσης *διαίσθηση–λογική*. Αναλύοντας τις αποφάσεις των εκπαιδευτικών, η Μαρίνα εμφανίζεται να έχει μεγαλύτερη ευχέρεια με τα μαθηματικά των γεωμετρικών μετασχηματισμών, κάτι που μπορεί να εξηγηθεί από την εμπλοκή της σε δραστηριότητες στο παρελθόν, ενώ η Λίντα δεν έχει τέτοιες εμπειρίες. Αλλά και οι δύο έχουν ισχυρό, αν και διαφορετικό, οραματισμό για το μέλλον των μαθητών τους: η Μαρίνα θέλει οι μαθητές της να χρησιμοποιούν με ευελιξία τα δύο εναλλακτικά εργαλεία απόδειξης ενώ η Λίντα θέλει να αναπτύξουν ικανότητες αιτιολόγησης και απόδειξης μέσα από την ευκλείδεια γεωμετρία. Αυτός ο οραματισμός παρέχει στις αποφάσεις τους τη δύναμη να διατηρηθούν στο χρόνο, όπως φάνηκε στις συνεντεύξεις οκτώ μήνες μετά.

Η χρήση των μετρητών στη διδασκαλία των πράξεων ακεραίων

Στην 4η συνάντηση στο σχολείο Α συζητείται η διδασκαλία των ακεραίων και των πράξεών τους. Η Λίντα περιγράφει τη χρήση των μετρητών σε αφηρημένη, συμβολική μορφή (το ● για το +1 και το ○ για το -1). Εξηγεί ότι ο στόχος της είναι οι μαθητές να καταλάβουν τις πράξεις και ειδικά την αφαίρεση, "όχι να το χρησιμοποιούν για καιρό, αλλά να καταλάβουν γιατί η αφαίρεση γίνεται πρόσθεση". Η Μαρίνα λέει ότι "χρειάζεσαι πολύ χρόνο για να διδάξεις ένα μοντέλο που κάποιοι [μαθητές] δεν θα καταλάβουν ποτέ" ενώ "φαίνεται πολύ λογικό να τους πεις ότι η αφαίρεση είναι το αντίθετο της πρόσθεσης". Και περιγράφει πως στηριζόμενη σε αυτό τους λέει τον κανόνα και προχωράει με στόχο να χειρίζονται τους αρνητικούς αριθμούς κάνοντας σωστά και γρήγορα πράξεις. Η Λίντα διαφωνεί λέγοντας ότι αν θέλουμε κάτι τέτοιο πρέπει να τους έχουμε πείσει. "Εκτός αν τους μαθαίνεις έτσι, φορμαλιστικά τελείως, ότι αυτό είναι τελείωσε. Αλλά τότε το μάθημα των μαθηματικών έχει το νόημα 'κάνε ότι σου λένε'. Δεν είναι σωστό."

Οι δύο εκπαιδευτικοί φαίνεται να αναγνωρίζουν την αντίθεση ανάμεσα στο συγκεκριμένο πλαίσιο στο οποίο βασίζονται οι πράξεις με φυσικούς και στον αφηρημένο (μαθηματικό) ορισμό των πράξεων με ακεραίους. Η Λίντα φαίνεται να είναι περισσότερο εξοικειωμένη με υλικά και μοντέλα ώστε να τα εκμεταλλευτεί ως διδακτικά εργαλεία στις πράξεις με ακεραίους. Σε αυτό ίσως συνέβαλλε η εμπλοκή της Λίντας πριν μερικά χρόνια με την παραγωγή διδακτικού υλικού και την επιμόρφωση εκπαιδευτικών, ενώ η Μαρίνα δεν είχε συμμετοχή σε αντίστοιχη δραστηριότητα. Αυτή η διαφορά στην ιστορία των δύο εκπαιδευτικών μπορεί να εξηγεί τις διαφορετικές τους αποφάσεις. Αλλά πάλι, και οι δύο έχουν έναν ισχυρό, αν και διαφορετικό, οραματισμό για το μέλλον των μαθητών τους: η Λίντα θέλει να πείθονται και να κατανοούν το γιατί κάνουν κάτι στα μαθηματικά, ενώ η Μαρίνα επιδιώκει να αποκτήσουν γρήγορα ευχέρεια στις πράξεις.

Η μοντελοποίηση στη διδασκαλία των πολυωνύμων

Στην 3η συνάντηση στο σχολείο Β ο Πέτρος περιγράφει το εισαγωγικό του μάθημα στα μονώνυμα, όπου χρησιμοποιεί μόνο ορισμούς, παραδείγματα και αντιπαραδείγματα. Στη συζήτηση με έναν συνάδελφό του και τον ερευνητή για το "γιατί" της διδασκαλίας των πολυωνύμων, ο Πέτρος λέει ότι κι ένας μαθητής τον ρώτησε το ίδιο. Η μοντελοποίηση έρχεται στη συζήτηση και ο Πέτρος φαίνεται να αρχίζει να σκέφτεται τις δυνατότητες που μπορεί να έχει. Αργότερα λέει ότι η μοντελοποίηση του αρέσει, διότι "δείχνει αυτό που κάνουμε στα μαθηματικά". Σε επόμενες συναντήσεις περιγράφει τη χρήση διαδικασιών μοντελοποίησης στη διδασκαλία των συναρτήσεων και των εξισώσεων και την εμπλοκή των μαθητών.

Πριν εργαστεί στο σχολείο, περίπου πριν από 15 χρόνια, ο Πέτρος εργαζόταν στην φροντιστηριακή εκπαίδευση προετοιμάζοντας μαθητές για εξετάσεις. Ίσως αυτή η εμπειρία επηρέασε τον Πέτρο στην απόφαση να εισάγει τα πολυώνυμα με έναν τυπικό τρόπο, εφόσον δεν είχε και διαφορετικές εμπειρίες. Αλλά στη συζήτηση φαίνεται να αναγνωρίζει την αντίθεση ανάμεσα στην εισαγωγή των πολυωνύμων με τυπικό αφηρημένο τρόπο και στη χρήση ρεαλιστικών καταστάσεων και διαδικασιών μοντελοποίησης. Σε άλλες ενότητες, όπως στις συναρτήσεις, ο Πέτρος φαίνεται να αξιοποιεί φαινόμενα και τύπους από τη φυσική για να εισάγει την έννοια της συμμεταβολής μέσω μοντελοποίησης. Ωστόσο, δεν αλλάζει τον τρόπο που εισάγει τα πολυώνυμα, όπως φαίνεται από τη συνέντευξη στην αρχή του επόμενου χρόνου. Ερμηνεύω αυτή τη διαφορά ως απουσία οραματισμού για την ικανότητα των μαθητών να εργάζονται με πολυώνυμα μοντελοποιώντας καταστάσεις, ενώ υπάρχουν ενδείξεις για τέτοιους μακροπρόθεσμους στόχους στη διδασκαλία συναρτήσεων και εξισώσεων.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΤΩΝ ΕΥΡΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Οι παραδοσιακές οπτικές εντοπίζουν τη λήψη απόφασης στο άτομο και σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Τέτοιες οπτικές μπορούν να βοηθήσουν στην κατανόηση κάποιων λεπτομερειών, αλλά δεν αρκούν για να εξηγηθεί το ευρύτερο πλαίσιο στο οποίο λαμβάνονται οι αποφάσεις, ούτε τους λόγους που λαμβάνονται αυτές και όχι άλλες. Αντίθετα, μελετώντας με κοινωνικοπολιτισμικές οπτικές (όπως η ΘΔ) τι κάνει τους εκπαιδευτικούς να θέτουν στόχους και πώς δημιουργείται ο ορίζοντας των δυνατών δράσεών τους, συμβάλλει σημαντικά στην κατανόησή μας για τη λήψη απόφασης. Αν και η δραστηριότητα είναι συλλογική και το αντικείμενό της διαμορφώνεται κοινωνικά και ιστορικά, διαφορετικοί εκπαιδευτικοί μπορεί να έχουν (και συνήθως έχουν) διαφορετικές θέσεις και ιστορίες, και έτσι, διαφορετικές οπτικές γωνίες. Οι διαφορετικές αποφάσεις της Μαρίνας και της Λίντας για την αντιμετώπιση των ίδιων αντιθέσεων μπορεί μερικώς να εξηγηθεί με τις διαφορετικές ιστορίες τους. Ομοίως, οι αποφάσεις του Πέτρου φαίνεται να επηρεάζονται από προηγούμενες δραστηριότητες. Η συμμετοχή σε δραστηριότητες, οι σχέσεις με τις αντίστοιχες κοινότητες και η χρήση των αντίστοιχων εργαλείων διαμεσολάβησης προσφέρουν στους εκπαιδευτικούς τρόπους να σκέφτονται τις καταστάσεις που αντιμετωπίζουν και τους παρέχουν ποικίλα επίπεδα κυριαρχίας στα διαφορετικά εργαλεία.

Σε αυτές τις ερμηνείες αναδεικνύεται η κοινωνική προέλευση των αποφάσεων των εκπαιδευτικών. Οι δραστηριότητες που εντοπίστηκαν στα προηγούμενα παραδείγματα είναι μόνο λίγες από τις δραστηριότητες, κοινότητες και κοινωνικές επιδράσεις που θα μπορούσαν να εντοπιστούν αν κανείς μελετούσε με λεπτομέρεια μεγάλες περιόδους της ζωής των εκπαιδευτικών της παρούσας μελέτης. Όπως σημειώνει ο Ilyenkov (2009, σ. 42) για τη διερεύνηση της σκέψης "πρέπει να ερευνήσεις όχι την ανατομία και τη φυσιολογία του εγκεφάλου, … αλλά την 'ανατομία και τη φυσιολογία' του κόσμου του πολιτισμού του [ανθρώπου], του κόσμου των 'πραγμάτων' που παράγει και αναπαράγει μέσα από τη δραστηριότητά του".

Στα προηγούμενα παραδείγματα οι εκπαιδευτικοί φαίνονται ενήμεροι για τις αντίστοιχες αντιθέσεις και στα δύο πρώτα από αυτά επιχειρούν να τις υπερβούν. Φαίνονται τρεις δυνατότητες για την πιθανή επίδραση των αποφάσεων στο μέλλον της δραστηριότητας. Οι αποφάσεις της Μαρίνας στο πρώτο παράδειγμα και της Λίντας στο δεύτερο έχουν τη δυνατότητα να μετασχηματίσουν τη δραστηριότητα διευρύνοντας τον ορίζοντα των τρόπων που αυτή διεξάγεται. Η προσέγγιση της Λίντας στο πρώτο παράδειγμα και της Μαρίνας στο δεύτερο δεν έχουν τέτοιες δυνατότητες, αλλά ξεκαθαρίζουν και ενισχύουν τον υπάρχοντα τρόπο διεξαγωγής της δραστηριότητας. Οι αποφάσεις του Πέτρου δεν επιδρούν προς τη μετατόπιση του τρόπου που διεξάγει τη δραστηριότητα, αλλά και χωρίς να ενισχύουν της υπάρχουσα πρακτική. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι αυτή η απόφαση δεν έχει τη δύναμη να επηρεάσει τη δραστηριότητα.

Ποια είναι η διαφορά μεταξύ των αποφάσεων της Μαρίνας και της Λίντας από τη μια μεριά και του Πέτρου από την άλλη, που τους προσδίδει διαφορετική ισχύ; Σύμφωνα με την ερμηνεία μου, η διαφορά βασίζεται στις συνδέσεις των αποφάσεων για τη δράση με τον οραματισμό για το μέλλον του αντικειμένου. Οι αποφάσεις της Μαρίνας και της Λίντας, για τις δράσεις που αναλαμβάνουν, υποστηρίζονται από μια ισχυρή προβολή στο μέλλον της κατανόησης από τους μαθητές τους. Αυτό προσθέτει ευελιξία στην επιλογή των δράσεων που υλοποιούν τους σχετικούς στόχους και παρέχει τη δυνατότητα οι αποφάσεις να σταθεροποιηθούν στο χρόνο, ακόμη κι αν αυτό αναφέρεται μόνο στους ατομικούς τρόπους διεξαγωγής της δραστηριότητας. Από την άλλη μεριά, οι αποφάσεις του Πέτρου φαίνεται να περιορίζονται στο επίπεδο της δράσης, χωρίς να θεμελιώνονται σε έναν οραματισμό για το μέλλον του αντικείμενου, δηλαδή για το επιθυμητό σημείο που θα πρέπει να βρίσκονται οι μαθητές ως αποτέλεσμα των διαδοχικών δράσεων. Η απουσία προσανατολισμού προς το μέλλον περιορίζει τον ορίζοντα των δυνατών δράσεων και μειώνει τη δυνατότητα σταθεροποίησής τους.

Όλοι αυτοί οι τρόποι που οι εκπαιδευτικοί σκέφτονται και αποφασίζουν μπορούν να θεωρηθούν ως διαφορετικά επίπεδα κατανόησης των αντίστοιχων καταστάσεων και κυριαρχίας στα εργαλεία που διαμεσολαβούν τη διδασκαλία. Ισχυρίζομαι ότι η αναγνώριση της κατάστασης και της αντίστοιχης αντίθεσης δείχνει κάποιο βαθμό "πραγματικής γνώσης του αντικειμένου" (Engels, 1987, σ. 105). Και η θέληση των εκπαιδευτικών να ασχοληθούν με τις αντιθέσεις χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα εργαλεία διαμεσολάβησης είναι μια εκδήλωση αυτοπροσδιορισμού (Vygotsky, 1999). Οι συμμετοχή σε δραστηριότητες και οι αντίστοιχες κοινωνικές σχέσεις επηρεάζουν αποφασιστικά την κατανόηση της πραγματικότητας και την κυριαρχία των εκπαιδευτικών στα εργαλεία. Έτσι, με την προσέγγιση του Σπινόζα, οι προηγούμενες δραστηριότητες μπορούν να λειτουργούν ως παράγοντας ενίσχυσης της ελευθερίας επιλογής των εκπαιδευτικών. Αυτή η ελευθερία είναι ειδικότερα συνδεδεμένη με τον οραματισμό που έχουν κάποιοι εκπαιδευτικοί για τα μελλοντικά αποτελέσματα της δραστηριότητας. Η προσανατολισμένη στο μέλλον διάσταση των δράσεων και ειδικότερα η επιλογή των οραματικών στόχων μεταξύ διαφορετικών δυνατοτήτων μπορεί να θεωρηθεί ως άσκηση της ελεύθερης βούλησης, όχι με την καρτεσιανή έννοια της μη εξωτερικά υπαγορευμένης επιλογής, αλλά με το νόημα της ικανότητας του εκπαιδευτικού να αποφασίζει κοιτώντας το μέλλον, ελεύθερος από μια άμεση ανάγκη αντίδρασης, αν και οι αποφάσεις του είναι βασισμένες στην προηγούμενη και την παρούσα συμμετοχή του σε δραστηριότητες και κοινότητες.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΚΕΨΕΙΣ

Η θεώρηση της ελευθερίας ως κατανόηση της πραγματικότητας και ως αυτοπροσδιορισμός μέσω της κυριαρχίας στα εργαλεία, μας παρέχει έναν τρόπο να κατανοήσουμε την έννοια της ελευθερίας με έναν τρόπο συμβατό με τις μαρξιστικές ρίζες της ΘΔ. Πάντως, χρειάζεται να συνδεθούν τα φιλοσοφικά επιχειρήματα με τα εμπειρικά ευρήματα ώστε να έχουμε μια καλύτερη κατανόηση της λήψης απόφασης. Συνδέσεις και περαιτέρω συζήτηση νομίζω ότι χρειάζεται σχετικά με τα ερωτήματα: Σε ποιο βαθμό και με ποιον τρόπο οι προηγούμενες δραστηριότητες επηρεάζουν τις αποφάσεις; Ποιοι είναι οι παράγοντες μιας συγκεκριμένης κατάστασης, τα απρόβλεπτα και οι συμπτώσεις που μπορούν να κάνουν μια απόφαση να στραφεί προς τη μία ή την άλλη κατεύθυνση;

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Derry, J. (2004). The unity of intellect and will: Vygotsky and Spinoza. *Educational Review, 56*(2), 113-120.

Engels, F. (1987). Anti– Dühring. Στο Karl Marx, Frederick Engels, Collected Works, Volume 25 (σσ. 5–309). New York: International Publishers.

Engeström, Y. (2001α) Expansive Learning at Work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work, 14*(1), 133–156.

Engeström, Y., Engeström, R., & Kerosuo, H. (2003). The discursive construction of collaborative care. *Applied linguistics, 24*(3), 286–315.

Ilyenkov, E. V. (2009). *The ideal in human activity*. Pacifica, CA: Marxists Internet Archive. Ανακτημένο τον Οκτώβριο 2013.

Leont'ev, A. N. (1978). *Activity, Consciousness and Personality*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Potari, D. (2013). The relationship of theory and practice in mathematics teacher professional development: an activity theory perspective. *ZDM, 45*(4), 507–519.

Skott, J. (2013). Understanding the role of the teacher in emerging classroom practices: searching for patterns of participation. *ZDM, 45*(4), 547–559.

Stouraitis, K. (2016). Decision making in the context of enacting a new curriculum: an activity-theoretical perspective. Στο Csíkos, C., Rausch, A., & Szitányi, J. (Eds.). *Proceedings of the 40th Conference of the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4, σσ. 235–242. Szeged, Hungary: PME.

Stouraitis, K. (2017). Teachers’ decisions and the transformation of teaching activity. *Εργασία που παρουσιάστηκε στο CERME10 (2017)*.

Stouraitis, K., Potari, D. & Skott, J. (2017) Contradictions, dialectical oppositions and shifts in teaching mathematics. *Educational Studies in Mathematics 95*(2), 203–217.

Vygotsky, L. S. (1999). Tool and sign in the development of the child and The teaching about emotions. Στο R. W. Rieber (Ed.) *The collected works of L. S. Vygotsky*. *Volume 6: Scientific Legacy*, (σσ. 3–236). New York: Kluwer Academic / Plenum Publishers.

ΑΝΤΙΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΕΣ ΓΟΝΙΚΕΣ ΕΠΙΡΡΟΕΣ ΑΠΟ ΠΑΙΔΙΑ ΣΤ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΤΗ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΤΟΥΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ: ΕΠΙΔΟΣΗ ΚΑΙ ΣΤΑΣΕΙΣ

Χαβιάρης Πέτρος, Σόνια Καφούση και Ανδρέας Μούτσιος-Ρέντζος

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

chaviaris@aegean.gr, kafoussi@aegean.gr, amoutsiosrentzos@aegean.gr

Στην παρούσα εργασία, στα πλαίσια μιας ευρύτερης έρευνας σχετικά με τις αντιλαμβανόμενες γονικές επιρροές από παιδιά που τελειώνουν το δημοτικό σχολείο στη μαθηματική τους ταυτότητα, επικεντρωνόμαστε στην επίδοση και στις στάσεις τους στα μαθηματικά. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι αντιλαμβανόμενες γονικές επιρροές από τους αυτοπροσδιοριζόμενους/ες ως «καλούς/ές» μαθητές/τριες παρουσιάζουν συνεκτικότητα στην επίδοση και στις στάσεις, ενώ κάτι τέτοιο δεν εμφανίζεται στα παιδιά που αυτοπροσδιορίζονται ως «μέτριοι/ες» στην επίδοση. Σημαντική πηγή πληροφόρησης για τον προσδιορισμό της επίδοσης και των στάσεών τους αναδείχθηκε η αλληλεπίδραση του παιδιού με τους γονείς στο σπίτι, ενώ η σχολική ζωή καταγράφηκε ως «αδύναμη» πηγή πληροφόρησης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης γίνεται προσπάθεια να αποκτηθεί πληρέστερη κατανόηση των διαφοροποιήσεων που εμφανίζονται στην επίδοση των παιδιών, καθώς και στη σχέση που διαμορφώνουν με τα μαθηματικά τόσο στο σχολικό πλαίσιο όσο και στην καθημερινή τους ζωή. Η προσπάθεια αυτή έχει οδηγήσει σε έρευνες που έχουν επικεντρωθεί στην αλληλεπίδραση μεταξύ της μάθησης που συντελείται μέσα στο σχολείο και των πρακτικών, στάσεων και αντιλήψεων που εμφανίζονται στο ευρύτερο κοινωνικο-πολιτισμικό περιβάλλον του παιδιού. Σύμφωνα με τις Sfard και Prusak (2005), η διερεύνηση αυτής της αλληλεπίδρασης μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω της μελέτης της ταυτότητας που διαμορφώνουν τα παιδιά στα μαθηματικά, καθώς συμμετέχουν σε διάφορες κοινότητες πρακτικής, συμπεριλαμβανομένων των σχολικών τάξεων και της οικογένειας (Abreu & Cline, 2003· Crafter & Abreu, 2010· Wenger, 1998). Η μελέτη αυτή αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη χώρα μας, καθώς οι Έλληνες γονείς αφιερώνουν περισσότερο χρόνο για τα μαθηματικά των παιδιών τους στο σπίτι, σε σχέση με άλλα μαθήματα στο δημοτικό σχολείο (Καφούση & Χαβιάρης, 2013). Πώς όμως αντιλαμβάνονται τα παιδιά τη συμμετοχή των γονιών τους στη διαμόρφωση της μαθηματικής τους ταυτότητας; Αντλώντας στοιχεία από μια ευρύτερη μελέτη σχετικά με τις αντιλαμβανόμενες γονικές επιρροές στη μαθηματική ταυτότητα παιδιών που τελειώνουν το δημοτικό σχολείο, στην παρούσα εργασία εστιαζόμαστε στη διαμόρφωση στοιχείων της μαθηματικής ταυτότητας σχετικών με την επίδοση και τις στάσεις τους στα μαθηματικά.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ο ρόλος της οικογένειας στην ανάπτυξη θετικών στάσεων και καλύτερων επιδόσεων των μαθητών στα μαθηματικά έχει αποτελέσει βασικό ερώτημα πολλών ερευνών (ενδ. Cao, Bishop & Forgasz, 2006· Hyde, Else-Quest, Alibali, Knuth & Romberg, 2006· Wang, 2004). Τα αποτελέσματα συγκλίνουν στο ότι οι απόψεις των γονέων σχετικά με την αξία των μαθηματικών επηρεάζουν τις στάσεις των παιδιών τους, ενώ οι υψηλές προσδοκίες τους επηρεάζουν θετικά την επίδοση και την αυτοπεποίθηση των παιδιών τους, ιδιαίτερα στα πρώτα χρόνια της σχολικής τους εκπαίδευσης (Galindo & Sheldon, 2012). Επιπλέον, η ποιότητα της συνεργασίας μεταξύ γονέων και παιδιών επηρεάζει την αποτελεσματικότητα της προετοιμασίας του παιδιού στο σπίτι (Hyde κ.ά., 2006). Ακόμα, έχει βρεθεί ότι ο αντιλαμβανόμενος από το παιδί ρόλος της μητέρας για τα μαθηματικά φαίνεται να διαφέρει από τον ρόλο του πατέρα (Moutsios-Rentzos, Chaviaris & Kafoussi, 2015).

Η Abreu και οι συνεργάτες της υποστηρίζουν ότι η διαμόρφωση της μαθηματικής ταυτότητας των παιδιών κατά την αλληλεπίδραση σχολικής κοινότητας και οικογένειας ενσωματώνει τρεις συμπληρωματικές διαδικασίες (Abreu & Cline, 2003· Crafter & Abreu, 2010): α) *του αυτοπροσδιορισμού*, β) του *προσδιορισμού από τον «άλλο»* και γ) *προσδιορισμού του «άλλου»*. Οι παραπάνω διαδικασίες στηρίζονται σε πηγές πληροφόρησης (ενδεχομένως διαφορετικές για κάθε διαδικασία) οι οποίες ενημερώνουν το άτομο οδηγώντας σε συγκεκριμένες τοποθετήσεις (Crafter, 2012).

Με βάση τα παραπάνω, ένα κρίσιμο ζήτημα σήμερα στη μαθηματική εκπαίδευση αφορά στα βασικά χαρακτηριστικά του οικογενειακού πλαισίου το οποίο θα υποστηρίξει την ανάπτυξη μιας δημιουργικής σχέσης των παιδιών με τα μαθηματικά. Στην ευρύτερη έρευνά μας χρησιμοποιήσαμε το θεωρητικό πλαίσιο της Abreu και των συνεργατών της για να μελετήσουμε τις αντιλαμβανόμενες γονικές επιρροές των παιδιών μιας τάξης Στ΄ Δημοτικού, τοποθετώντας στη θέση του σημαντικού «άλλου» τη μητέρα και τον πατέρα τους και εστιάζοντας σε έξι άξονες: επίδοση, συνεργασία παιδιών-γονέων για την εργασία στα μαθηματικά στο σπίτι, απόψεις για τη φύση των μαθηματικών, στάσεις, αξίες και αυτοπεποίθηση (Kafoussi, Moutsios-Rentzos & Chaviaris, 2017). Στην παρούσα εργασία επικεντρωνόμαστε στις αντιλαμβανόμενες γονικές επιρροές που αφορούν στην επίδοση και τις στάσεις.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στην Αθήνα, τον Μάιο του 2015 με παιδιά μιας Στ΄ τάξης δημοτικού, στην οποία φοιτούσαν 8 αγόρια και 8 κορίτσια (13 ελληνικής καταγωγής, 3 άλλης εθνικότητας). Για τη συλλογή δεδομένων πραγματοποιήθηκαν δομημένες συνεντεύξεις βάσει της αφηγηματικής θεωρίας της ταυτότητας (Sfard & Prusac, 2005). Οι συνεντεύξεις (διάρκειας περίπου 30 λεπτών) πραγματοποιήθηκαν από το δάσκαλο της τάξης και διαρθρώθηκαν σε συμφωνία με τις τρεις διαδικασίες διαμόρφωσης της ταυτότητας (βλ. Πίνακα 1). Στην παρούσα μελέτη αναλύονται τα δεδομένα από 15 παιδιά της τάξης (N=15· ένα παιδί με μαθησιακές δυσκολίες δεν εντάχθηκε στην παρούσα έρευνα). Η ανάλυση των αποτελεσμάτων αναπτύχθηκε σε δύο άξονες: α) ως προς τις τοποθετήσεις των μαθητών για την επίδοση και τις στάσεις στα μαθηματικά και β) ως προς τις πηγές πληροφόρησής τους σε σχέση με τις τοποθετήσεις τους.

αυτοπροσδιορισμός	
επίδοση	Πιστεύεις ότι είσαι καλός/ή στα Μαθηματικά; Τι σε κάνει να το πιστεύεις αυτό;
στάση	Σου αρέσουν τα Μαθηματικά; Γιατί σ’ αρέσουν;
προσδιορισμός από τον «άλλο»	
επίδοση	Η μητέρα/ο πατέρας σου πιστεύει ότι είσαι καλός/ή στα Μαθηματικά; Τι σε κάνει να το πιστεύεις αυτό;
στάση	Η μητέρα σου/ο πατέρας σου θεωρεί ότι σου αρέσουν τα Μαθηματικά; Τι την/τον κάνει να το θεωρεί αυτό;
προσδιορισμός του «άλλου»	
επίδοση	Πιστεύεις ότι η μητέρα σου/ ο πατέρας σου είναι καλή/ος στα Μαθηματικά; Τι σε κάνει να το πιστεύεις αυτό;
στάση	Πιστεύεις ότι αρέσουν στη μητέρα σου/ στον πατέρα σου τα Μαθηματικά; Τι σε κάνει να το πιστεύεις αυτό;

Πίνακας 1: Ερωτήματα συνέντευξης που αφορούν επίδοση και στάση.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων σχετικά με τον αυτοπροσδιορισμό των παιδιών στην επίδοση και τις στάσεις τους, μάς οδήγησε στη δημιουργία δύο ομάδων: Ομάδα Α (7 παιδιά· τα παιδιά που αυτοπροσδιορίζονται ως ‘καλοί/ές’ στα μαθηματικά) και Ομάδα Β (8 παιδιά· τα παιδιά που αυτοπροσδιορίζονται ως ‘μέτριοι/ες’ στα μαθηματικά). Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων δομείται βάσει αυτών των ομάδων, καθώς βρέθηκαν ποιοτικές διαφοροποιήσεις στις αντιλαμβανόμενες γονικές επιρροές.

Επίδοση

Σχετικά με τις τοποθετήσεις των παιδιών για την επίδοση (βλ. Πίνακα 2), 5 παιδιά της Ομάδας Α δήλωσαν ότι και οι δυο γονείς τούς/τίς θεωρούν ‘καλούς/ές’, ενώ μόνο ένα παιδί δήλωσε ότι οι γονείς του δεν έχουν την ίδια εικόνα για αυτόν. Πέντε παιδιά της Ομάδας Β δήλωσαν ότι δεν γνωρίζουν την εικόνα που έχει γι’ αυτά τουλάχιστον ένας από τους γονείς τους. Φαίνεται ότι στην Ομάδα Α παρουσιάζεται συνέπεια στις τοποθετήσεις των παιδιών για την επίδοσή τους ανάμεσα στον αυτοπροσδιορισμό τους και τον προσδιορισμό τους από τους γονείς, σε αντίθεση με την Ομάδα Β. Σχετικά με την εικόνα που έχουν για τους γονείς τους, η πλειοψηφία των παιδιών τούς θεωρεί ‘καλούς’. Επισημαίνεται ότι ο χαρακτηρισμός ‘μέτριος’ αφορά σχεδόν μόνο τη μητέρα, συνήθως ως αποτέλεσμα αυθόρμητης σύγκρισης των δύο γονέων π.χ. «Ο πατέρας μου είναι πολύ καλύτερος … γιατί εάν δεν ξέρω κάτι, τον ρωτάω και μου απαντάει. Η μητέρα μου δεν απαντάει αμέσως» (Π_4, Ομ_Β). Τέλος, 6 αυτοπροσδιορισμοί των παιδιών διέφεραν από τους προσδιορισμούς του δασκάλου της τάξης: 3 της Ομάδας Α (για το δάσκαλο ‘μέτριοι/ες’) και 3 της Ομάδας Β (για το δάσκαλο ‘καλοί/ές’).

	προσδιορισμός από		*αυτοπροσδιορισμός*	*προσδιορίζοντας*	
	Μητέρα	Πατέρα	Ομάδα Α	Μητέρα	Πατέρα
Καλός/ή	7	5	7	5	5
Μέτριος/α	-	1		2	1
Δεν ξέρω	-	-		-	-
	Μητέρα	Πατέρα	Ομάδα Β	Μητέρα	Πατέρα
Καλός/ή	3	2	8	5	7
Μέτριος/α	2	1		3	-
Δεν ξέρω	3	4		-	-

Σημείωση. Δυο μονογονικές οικογένειες

Πίνακας 2: Τοποθετήσεις για την μαθηματική επίδοση.

Σχετικά με τις πηγές πληροφόρησης αυτοπροσδιορισμού της επίδοσης των παιδιών, αναγνωρίστηκαν τέσσερις κατηγορίες (βλ. Πίνακα 3), με κυρίαρχες την ανταπόκριση στις σχολικές δραστηριότητες και τις προσωπικές πρακτικές.

Πηγές πληροφόρησης	Ομάδα Α	Ομάδα Β	Ν
Ανταπόκριση στις σχολικές δραστηριότητες [π.χ. «*Πιστεύω γενικά ότι δεν έχω κενά, απλά κάνω μερικά λάθη απροσεξίας*» (Π_9, Ομ_Α)]	2	5	7
Προσωπικές πρακτικές [π.χ. «*Γιατί υπάρχουν φορές που διαβάζω και υπάρχουν και κάποιες φορές που δεν διαβάζω πολύ*» (Π_7, Ομ_Β)]	2	4	6
Συναισθηματικοί παράγοντες [π.χ. «*Μου φαίνονται πιο εύκολα και πιο ευχάριστα από τα άλλα μαθήματα*» (Π_1, Ομ_Α)]	4	-	4
Σχολική επίδοση[π.χ.«*Γιατί έχω δει πως τα πάω [στο σχολείο] με τα μαθηματικά*» (Π5, ΟμΑ)]	1	-	1

Πίνακας 3: Πηγές πληροφόρησης για τον αυτοπροσδιορισμό στην επίδοση.

Στις πηγές πληροφόρησης των παιδιών για τον προσδιορισμό της επίδοσης από τους γονείς (βλ. Πίνακα 4) κυριαρχεί η αλληλεπίδραση μαζί τους: θετική στην Ομάδα Α και αρνητική ή μη υπαρκτή στην Ομάδα Β. Σύμφωνα με τα παιδιά, η αξιολόγηση του δασκάλου δεν αποτελεί σημαντική πηγή πληροφόρησης για τους γονείς. Επιπλέον, σε σχέση με τη μητέρα και τον πατέρα, μόνο στην Ομάδα Β βρέθηκαν διαφοροποιήσεις σε τρεις περιπτώσεις παιδιών στις πηγές πληροφόρησης τα οποία δήλωσαν έλλειψη συνεργασίας με κάποιον από τους γονείς στο σπίτι.

Πηγές πληροφόρησης	Ομάδα Α		Ομάδα Β		Ν
	Μ	Π	Μ	Π	
Αλληλεπίδραση με γονείς [π.χ. «*Ναι, μου βάζει ασκήσεις και βλέπει πως τα καταφέρνω, τα κάνω γρήγορα, σωστά*» (Π_1, Ομ_Α)]	4*	2	3	3	9
Έλλειψη αλληλεπίδρασης με γονείς [π.χ. «*Επειδή δεν διαβάζω μαζί της μαθηματικά και δεν ξέρει…*» (Π_3, Ομ_Β)]	-	-	2	3	4
Προσδοκίες γονιών [π.χ. «*Επειδή πιστεύει σε μένα ότι μπορώ να τα καταφέρω περισσότερο στα μαθηματικά*» (Π_5, Ομ_Α)]	2	1	1	-	3
Σχολική επίδοση [π.χ. «*Γιατί έχει δει τους βαθμούς των δυο τριμήνων των μαθηματικών*» (Π_8, Ομ_Α)]	1	1	2	1	3
Προσωπικές πρακτικές [π.χ. «*Δουλεύω πολύ και ο πατέρας μου το βλέπει*» (Π_1, Ομ_Α)]	-	2	1	-	3
Σύγκριση με γονείς [π.χ.«*Ναι, γιατί κι αυτή είναι καλή και ξέρει περίπου τι μπορώ να κάνω και συγκρίνοντας με τα δικά της νομίζει ότι είμαι καλή*» (Π_12, Ομ_Α)]	1	-	-	-	1

Σημειώσεις. Μ: Μητέρα. Π: Πατέρας. *: εμφανίσεις ανά πηγή. Ν: παιδιά ανά πηγή.

Πίνακας 4: Πηγές πληροφόρησης για τον προσδιορισμό επίδοσης από γονείς.

Οι πηγές πληροφόρησης των παιδιών για τον προσδιορισμό της «επίδοσης» των γονιών (βλ. Πίνακα 5) σχετίζονται με αυτές για τον προσδιορισμό της επίδοσης τους από τους γονείς, αλλά διαφέρουν από τις πηγές του αυτοπροσδιορισμού τους. Η αλληλεπίδραση με τους γονείς κυριαρχεί, αν και αρκετά παιδιά διαμορφώνουν την τοποθέτησή τους και βάσει του επαγγέλματος των γονιών (κυρίως Ομάδα Β) ή των δηλώσεων των γονιών.

Πηγές πληροφόρησης	Ομάδα Α		Ομάδα Β		Ν
	Μ	Π	Μ	Π	
Αλληλεπίδραση με γονείς [π.χ. «*Μου τα εξηγεί, ότι δεν έχω καταλάβει είναι σαν να κάνουμε μάθημα*» (Π_1, Ομ_Α)]	5*	4	4	3	10
Έλλειψη αλληλεπίδρασης με γονείς [π.χ. «*όταν του λέω να με βοηθήσει λέει άλλα για να γλιτώσει*» (Π_5, Ομ_Α)]	-	1	-	-	1
Κατά δήλωση [π.χ. «*Κάθε φορά που της ζητάω βοήθεια μου λέει: κοίτα δεν το έχω και τόσο με τα μαθηματικά*» (Π_9, Ομ_Α]	3	1	3	-	6
Επάγγελμα γονιών [π.χ. «*Ο πατέρας μου λόγω επαγγέλματος πιστεύω ότι είναι καλός*» (Π_9, Ομ_Α)]	1	2	3	4	6
Πρακτικές γονέων [π.χ.«*Και οι δυο κάθονται και κάνουν τους λογαριασμούς με τις ώρες, δεν χρησιμοποιούν κομπιουτεράκι*» (Π_1, Ομ_Α)]	1	1	-	-	1

Σημειώσεις. Μ: Μητέρα. Π: Πατέρας. *: εμφανίσεις ανά πηγή. Ν: παιδιά ανά πηγή.

Πίνακας 5: Πηγές πληροφόρησης για τον προσδιορισμό επίδοσης γονέων.

Στάσεις

Οι τοποθετήσεις των παιδιών για τις στάσεις απέναντι στα μαθηματικά συνοψίζονται στον Πίνακα 6. Φαίνεται ότι και οι δύο ομάδες παιδιών είχαν θετική στάση ανεξάρτητα από τον αυτοπροσδιορισμό τους για την επίδοσή τους. Επίσης, σε αντίθεση με την επίδοση, υπάρχει συμφωνία μεταξύ γονιών και παιδιών –μέσα από τα μάτια των παιδιών– σχετικά με τις στάσεις τους.

	προσδιορισμός από		*αυτοπροσδιορισμός*	*προσδιορίζοντας*	
	Μητέρα	Πατέρα	Ομάδα Α	Μητέρα	Πατέρα
Θετική	6	5	7	5	4*
Αρνητική	1	1	-	2	2
Δεν ξέρω	-	-	-	-	-

	Μητέρα	Πατέρα	Ομάδα Β	Μητέρα	Πατέρα
Θετική	6	5	7	5	7*
Αρνητική	2	1	1	2	-
Δεν ξέρω	-	1	-	1	-

Σημείωση. *Δύο μονογονικές οικογένειες

Πίνακας 6: Τοποθετήσεις για τις στάσεις στα μαθηματικά.

Αναφορικά με τις πηγές πληροφόρησης, η στάση των παιδιών για τα μαθηματικά συνδέεται με την επίλυση προβλήματος, με συναισθηματικούς παράγοντες και με τη χρησιμότητα του μαθήματος (βλ. Πίνακα 7).

Πηγές πληροφόρησης	Ομάδα Α	Ομάδα Β	Ν
Επίλυση προβλήματος [π.χ. «*Βρίσκεις πολλούς τρόπους για να λύσεις ένα πρόβλημα, είναι πολύ ξεχωριστό*» (Π_5, Ομ_Α)]	3	6	9
Συναισθηματικοί παράγοντες [π.χ. «*Μου φαίνονται πιο ευχάριστα από τα άλλα μαθήματα*» (Π_1, Ομ_Α)]	2	2	4
Χρησιμότητα [«*Όταν μεγαλώσω και βρω δουλειά και μου λείπει κάτι, να το λύσω με τα μαθηματικά*» (Π_2, Ομ_Α)]	3	-	3

Σημειώσεις. Μ: Μητέρα. Π: Πατέρας. *: εμφανίσεις ανά πηγή. Ν: παιδιά ανά πηγή.

Πίνακας 7: Πηγές πληροφόρησης για τον αυτοπροσδιορισμό στάσης.

Σχετικά με τις πηγές πληροφόρησης των παιδιών για τον προσδιορισμό της στάσης τους από τους γονείς τους, βρέθηκε ότι οι κύριες πηγές είναι οι προσωπικές πρακτικές και η δήλωση του παιδιού (βλ. Πίνακα 8).

Πηγές πληροφόρησης	Ομάδα Α		Ομάδα Β		Ν
	Μ	Π	Μ	Π	
Προσωπικές πρακτικές [π.χ. «*...με βλέπει που δεν κάθομαι να ασχοληθώ τόσο με τα μαθηματικά*» (Π_1, Ομ_Β)]	4	4	4	2	10
Δήλωση παιδιού [π.χ. «*Επειδή της το έχω πει και με πιστεύει*» (Π_7, Ομ_Β)]	1		3	1	4
Σχολική επίδοση [π.χ. «*Επειδή έχει δει την πρόοδό μου* [στο σχολείο]» (Π_5, Ομ_Α)]	1	1	-	1	3
Εξωσχολικές δραστηριότητες [π.χ. «*Επειδή πάω σκάκι που θέλει πολλή σκέψη και μ' αρέσει πολύ, θα μ' αρέσει να σκέφτομαι, άρα ποιο μάθημα έχει πολλή σκέψη; Τα μαθηματικά!*» (Π_4, Ομ_Β)]	-	-	-	1	1

Σημειώσεις. Μ: Μητέρα. Π: Πατέρας. *: εμφανίσεις ανά πηγή. Ν: παιδιά ανά πηγή.

Πίνακας 8: Πηγές πληροφόρησης για προσδιορισμό της στάσης από γονείς.

Τέλος, σχετικά με την στάση των γονιών (θετική ή αρνητική) και οι δύο ομάδες αναφέρονται στην αλληλεπίδραση μαζί τους (βλ. Πίνακα 9). Ιδιαίτερα η Ομάδα Β αναφέρεται έντονα και στο επάγγελμα του πατέρα.

Πηγές πληροφόρησης		Ομάδα Α		Ομάδα Β		Ν
		Μ	Π	Μ	Π	
Αλληλεπίδραση Ή Έλλειψη Αλληλεπίδρασης με γονείς [π.χ *«Όταν με βοηθά σε κάποια άσκηση το κάνει με πολλή όρεξη»* (Π_5, Ομ_Β)]	Θετ	2	3	3	2	7
	Αρν	1	1	1	-	2
Επάγγελμα [π.χ. «*Του χρειάζονται στη δουλειά του*» (Π_3, Ομ_Α)]	Θετ	-	2	1	5	7
	Αρν	-	-	-	-	-
Γνώση Ή Έλλειψη Γνώσης γονιού [π.χ. «*Ξέρει πολλά πράγματα*» (Π_3, Ομ_Α)]	Θετ	1	1	-	-	1
	Αρν	1	1	-	-	1
Δήλωση γονιού [π.χ. «*Μου το είπε*» (Π_8, Ομ_Β)]	Θετ	-	-	-	1	1
	Αρν	1	-	-	-	1
Σχολική επίδοση γονιού [π.χ. «*…η μαμά μου τα έκανε όλα σωστά και η δασκάλα της συγκινήθηκε*» (Π_8, Ομ_Β)]	Θετ	1	-	1	-	2
	Αρν	-	-	-	-	-
Πρακτικές γονιών [π.χ. «*…είναι και διαχειρίστρια και κάνει όλο πράξεις*» (Π_1, Ομ_Α)]	Θετ	1	-	-	-	1
	Αρν	-	-	-	-	-

Σημειώσεις. Μ: Μητέρα. Π: Πατέρας. *: εμφανίσεις ανά πηγή. Ν: παιδιά ανά πηγή. Θετ: Θετική στάση γονιού. Αρν: Αρνητική στάση γονιού.

Πίνακας 9: Πηγές πληροφόρησης για προσδιορισμό της στάσης των γονέων.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία εστιαστήκαμε στη διαμόρφωση δύο στοιχείων της μαθηματικής ταυτότητας των παιδιών: την επίδοση και τις στάσεις σε μια Στ΄ τάξη ενός δημόσιου σχολείου. Ο αυτοπροσδιορισμός των παιδιών σχετικά με την επίδοσή τους στα μαθηματικά οδήγησε στην αναγνώριση δύο ομάδων με διακριτά ποιοτικά χαρακτηριστικά ως προς τον τρόπο που βιώνουν την επίδραση των γονέων τους στη διαμόρφωση της μαθηματικής τους ταυτότητας. Οι τοποθετήσεις των ‘καλών’ εμφανίζουν συνεκτικότητα και στις τρεις διαδικασίες συγκρότησης ταυτότητας τόσο στην επίδοση όσο και στη στάση, η οποία μπορεί να συνδέεται με τη λειτουργία της οικογένειας ως συνεπές σύστημα. Αντίθετα, κάτι τέτοιο δεν υποστηρίζεται στα παιδιά που αυτοπροσδιορίζονται ως «μέτριοι/ες», καθώς αν και παρατηρήθηκε κάποια συνεκτικότητα στις στάσεις, δε βρέθηκε το ίδιο στην επίδοση.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η ποικιλία και η συχνότητα εμφάνισης των πηγών πληροφόρησης που χρησιμοποιούν τα παιδιά για τις τοποθετήσεις τους. Για τον αυτοπροσδιορισμό τους, τα παιδιά πληροφορούνται κυρίως από την ανταπόκρισή τους στις σχολικές δραστηριότητες και τις προσωπικές τους πρακτικές, ενώ στις δύο διαδικασίες προσδιορισμού γονιού και προσδιορισμού από γονιό, πληροφορούνται κυρίως μέσα από την καθημερινή αλληλεπίδραση (ή την έλλειψή της) στο σπίτι. Συχνά εμφανιζόμενη πηγή για τον προσδιορισμό της στάσης και της επίδοσης των γονιών είναι το επάγγελμά τους, ενώ ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η «αδύναμη» εμφάνιση της σχολικής ζωής ως πηγής πληροφόρησης. Μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι οι πηγές πληροφόρησης φανερώνουν μια ασθενή αλληλεπίδραση σχολείου-οικογένειας, καθώς αφορούν είτε τη σχέση παιδιού-σχολείου, είτε τη σχέση παιδιού-οικογένειας.

Καθώς η «καθημερινή εργασία στο σπίτι» αποτελεί κυρίαρχο πολιτισμικό χαρακτηριστικό του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος, οι οικογενειακές πρακτικές στις οποίες τα παιδιά συμμετέχουν ενεργά ή αλληλεπιδρούν έμμεσα, προσφέρουν διαφορετικές ευκαιρίες στη διαμόρφωση της μαθηματικής τους ταυτότητας. Συνεπώς, ο εκπαιδευτικός σχεδιασμός μπορεί να περιλαμβάνει δράσεις που επιτρέπουν την αλληλεπιδραστική σχέση σχολείου και γονέων στα μαθηματικά. Το ερευνητικό πλαίσιο που υιοθετήθηκε φαίνεται πρόσφορο για τον προσδιορισμό των γονικών επιρροών στη μαθηματική ταυτότητα των παιδιών και τα αποτελέσματα της ευρύτερης έρευνας αναμένεται να δώσουν σαφέστερη εικόνα στο συγκεκριμένο θέμα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Abreu, G. D., & Cline, T. (2003). Schooled mathematics and cultural knowledge. *Pedagogy, Culture and Society, 11*(1), 11-30.

Cao, Z., Bishop, A., & Forgasz, H. (2006). Perceived parental influence on mathematics learning: a comparison among students in China and Australia. *Educational Studies in Mathematics, 64*, 85-106.

Crafter, S., & Abreu, G. (2010). Constructing identities in multicultural learning contexts. *Mind, Culture and Activity*, *17*(2), 102-118

Crafter, S. (2012). Parental cultural models and resources for understanding mathematical achievement in culturally diverse school settings. *Educational Studies in Mathematics, 81*, 31-46.

Galindo, C., & Sheldon,S. (2012). School and home connections and children’s kindergarten achievement gains: The mediating role of family involvement. *Early Childhood Research Quarterly*, *27*, 90-103.

Hyde, J. S., Else-Quest, N. M., Alibali, M. W., Knuth, E., & Romberg, T. (2006). Mathematics in the home: Homework practices and mother–child interactions doing mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, *25*, 136–152.

Kafoussi, S., Moutsios-Rentzos, A., & Chaviaris, P. (2017). Investigating parental influences on sixth graders' mathematical identity: the case of attainment. In A. Chronaki (Ed.), *Proceedings of the 9th International Mathematics Education and Society Conference (MES 9)* (vol. 2, pp. 592-602), Volos, Greece: University of Thessaly Press.

Καφούση, Σ., & Χαβιάρης, Π. (2013). *Σχολική τάξη, οικογένεια, κοινωνία και μαθηματική εκπαίδευση*. Αθήνα: Πατάκη.

Moutsios-Rentzos, A., Chaviaris, P., & Kafoussi, S. (2015). School socio-cultural identity and perceived parental involvement about mathematics learning in Greece. *Journal of Research in Mathematics Education*, *4*(3), 234-259.

Sfard, A., & Prusak, A. (2005). Telling Identities: In Search of an Analytical Tool for Investigating Learning as a Cultural Shaped Activity. *Educational Researcher*, *34*(4), 14-22.

Wang, D. B. (2004). Family background factors and mathematics success: A comparison of Chinese and US students. *International journal of educational research*, *41*, 40-54.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΣ ΑΓΓΕΙΟΠΛΑΣΤΗ

Χούτου Χρυσούλα

Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

chry_chou@hotmail.com

Η παρούσα έρευνα αποτελεί το δεύτερο κομμάτι μιας έρευνας που αφορά στις μαθηματικές πρακτικές της κεραμικής τέχνης. Ασχολείται με τη διερεύνηση των μαθηματικών πρακτικών στον χώρο της Αγγειοπλαστικής, κάνοντας μελέτη περίπτωσης ενός αγγειοπλάστη. Εξετάζονται οι μαθηματικές πρακτικές που εμφανίζονται στον χώρο του, ο τρόπος με τον οποίο τα χρησιμοποιούμενα εργαλεία τις διαμεσολαβούν και η αναγνώριση αυτών από τον ίδιο. Τέλος, τα αποτελέσματα της έρευνας σχολιάζονται σε σχέση με αυτά του προηγούμενου άρθρου, με σκοπό την καλύτερη ανάδειξη των ευρημάτων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια η μαθηματική εκπαιδευτική κοινότητα ψάχνει τρόπους να κερδίσει τους μαθητές και να δώσει κίνητρο και νόημα στην ενασχόλησή τους με τα μαθηματικά. Προσπάθειες στην κατεύθυνση αυτή επιχειρούνται μέσα από τη σύνδεση των μαθηματικών με θέματα όπως ο πολιτισμός, η τέχνη και ο χώρος εργασίας. Μέσα από μία τέτοια σύνδεση οι μαθητές ωφελούνται με αυθεντικές εμπειρίες, κίνητρα για μάθηση και μία αίσθηση οικειότητας για τα μαθηματικά. Εμείς επιλέγουμε τον παραδοσιακό καλλιτεχνικό χώρο εργασίας της Αγγειοπλαστικής, με σκοπό τη διερεύνηση των μαθηματικών πρακτικών που υπάρχουν σε αυτόν. Θεωρούμε τη φύση του χώρου πολύ σημαντική. Πρόκειται για ένα απλοϊκό πλαίσιο, μία εργασία και παράλληλα τέχνη, άρρηκτα συνδεδεμένη με τον πολιτισμό και τη παράδοση της χώρας μας. Το γεγονός αυτό εξυψώνει τη σημασία των μαθηματικών που τυχόν υπάρχουν μέσα σε αυτόν.

Το παρόν άρθρο αποτελεί το δεύτερο κομμάτι μιας έρευνας που αφορά στις μαθηματικές πρακτικές της κεραμικής τέχνης. Το πρώτο μέρος αυτής δημοσιεύτηκε στο 6ο συνέδριο της Εν.Ε.Δι.Μ. στο άρθρο με τίτλο «Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΜΙΑΣ ΚΕΡΑΜΙΣΤΡΙΑΣ» σελ. 338-348 (Χούτου, 2015). Στην έρευνα αυτή μελετήθηκαν οι μαθηματικές πρακτικές στον χώρο της κεραμικής. Συγκεκριμένα έγινε μελέτη περίπτωσης μίας καλλιτέχνιδας της κεραμικής (Κεραμίστρια). Η ίδια κατέχει ένα καλό εκπαιδευτικό υπόβαθρο, έχει σπουδάσει Αρχιτεκτονική και έχει κάνει μεταπτυχιακό στην κεραμική. Πριν από τη συμμετοχή της στην έρευνα αδυνατούσε να βρει συνδέσεις της κεραμικής με τα μαθηματικά. Στη μαθηματική πρακτική που αναδύθηκε στο χώρο εργασίας της εμφανίζεται ποικιλία μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών. Κάποιες φορές τα εργαλεία καθορίζουν την εμφάνιση των μαθηματικών αυτών και κάποιες η εμφάνιση αυτή πηγάζει άμεσα από την ίδια. Κάποιες φορές αντιλαμβάνεται πλήρως ότι χρησιμοποιεί μαθηματικά, κάποιες άλλες δεν το αντιλαμβάνεται καθόλου. Στις περισσότερες περιπτώσεις κατανοεί τι κάνει αλλά δεν το αντιλαμβάνεται ως μαθηματικά.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στην έρευνα της Χούτου (2015) αναφέρονται οι πολλαπλές συνδέσεις των μαθηματικών με τον πολιτισμό, την τέχνη και τον χώρο εργασίας. Τα μαθηματικά θεωρούνται ένα παν-ανθρώπινο φαινόμενο που διαφοροποιείται από πολιτισμό σε πολιτισμό (Bishop, 1988), ενώ ο D’Ambrosio (1985) μας μιλάει για τα εθνομαθηματικά τα οποία πολλές φορές δεν χαρακτηρίζονται από τον φορμαλισμό των ακαδημαϊκών μαθηματικών. Η τέχνη, μεγάλο μέρος του πολιτισμού, παρουσιάζει πολλές συνδέσεις με τα μαθηματικά: κανόνες, διατάξεις, συμμετρία, μοτίβα, αλγοριθμική σκέψη, μοντελοποίηση μορφής κ.α. (Cucker, 2013; Bickley-Green, 1995). Σημαντικά εμφανίζονται διάφορα πολιτισμικά τεχνουργήματα ανά τους αιώνες (αγγεία, καλάθια, μωσαϊκά) με εμφανείς τις μαθηματικές αυτές έννοιες, όπου για την κατασκευή τους πολλές φορές χρησιμοποιούνται άτυπα, ανεπίσημα μαθηματικά (Millroy, W. 1991; Mukhopadhyay, 2009). Ακόμα, η σύνδεση με τον χώρο εργασίας θεωρείται σημαντική όσον αφορά στην ανάδειξη των μαθηματικών πρακτικών που υπάρχουν στον κάθε χώρο. Ως μαθηματικές πρακτικές θεωρούνται οι επαναλαμβανόμενες δράσεις κατά τις οποίες οι άνθρωποι, όχι μαθαίνουν αλλά κάνουν μαθηματικά (Boaler, 2002). Εμφανίζονται συνήθως ως μαθηματικά βασικού επιπέδου και περιλαμβάνουν μετρήσεις, υπολογισμούς, ποσοστά, λόγους, μοτίβα, κλίμακα, όγκο, διαγράμματα, μοντελοποίηση, οπτικοποίηση κ.α. (Nicol, 2002; Millroy, 1992). Σε κάθε χώρο, στη διαμόρφωση των πρακτικών αυτών σημαντικά αναφέρονται το πλαίσιο και τα εργαλεία (Naresh, 2009; Noss, Hoyles & Pozzi, 2002; Triantafillou & Potari, 2010), που σαν μαύρα κουτιά (Williams & Wake, 2007) καθιστούν τα μαθηματικά αόρατα. Πολλές φορές, μάλιστα, οι ίδιοι οι εργαζόμενοι δεν κατανοούν ότι χρησιμοποιούν μαθηματικά (Nicol, 2002).

Τα εκπαιδευτικά οφέλη αυτών των τριών συνδέσεων είναι σημαντικά. Οι μαθητές βλέπουν τα μαθηματικά ως κάτι ανθρώπινο με το οποίο μπορεί να συνδέεται ο καθένας (Mukhopadhyay, 2009). Βλέπουν ότι τα μαθηματικά υπάρχουν σε μέρη και πλαίσια που δεν το περιμένουν, κατανοούν καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες και εκτιμούν τη «δύναμη» των μαθηματικών, νιώθοντάς τα πιο αληθινά (Nicol, 2002).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στην προηγούμενή μας έρευνα (Χούτου, 2015) το υποκείμενο έκανε ευρεία χρήση πολλών τεχνικών της κεραμικής πλην όμως του τροχού, ένα εργαλείο που εξ' αρχής θεωρήσαμε σημαντικό. Για αυτό επιλέξαμε ως δεύτερο συμμετέχοντα ένα τεχνίτη της αγγειοπλαστικής, ο οποίος κάνει σχεδόν αποκλειστική χρήση αυτού, για να συμπληρώσει τα αποτελέσματά μας. Ο Αγγειοπλάστης είναι ο συμμετέχοντας του παρόντος άρθρου.

Ερευνητικά ερωτήματα – Μέθοδος έρευνας – Συμμετέχοντες

Τα ερευνητικά μας ερωτήματα είναι τα εξής: (1) Ποιές είναι οι μαθηματικές πρακτικές που εμφανίζονται στον χώρο της Αγγειοπλαστικής; (2) Πώς τα χρησιμοποιούμενα εργαλεία διαμεσολαβούν τις μαθηματικές αυτές πρακτικές; (3) Σε ποιο βαθμό επιτυγχάνεται η αναγνώριση των μαθηματικών αυτών πρακτικών από τον τεχνίτη; Η έρευνα αφορά στη μελέτη περίπτωσης ενός τεχνίτη από τον χώρο της Αγγειοπλαστικής (Αγγειοπλάστης), με χρήση στοιχείων από την εθνογραφική ερευνητική μεθοδολογία μειωμένου χρόνου (Eisenhart, 1988). Το εκπαιδευτικό υπόβαθρο του συμμετέχοντος περιλαμβάνει μόνο τις τάξεις του Δημοτικού, όπου δεν είχε καλή επίδοση, ειδικά στα μαθηματικά, καθώς δεν τον ενδιέφεραν «τα γράμματα» αλλά να «παίζει με τα χώματα».

Συλλογή και Ανάλυση δεδομένων

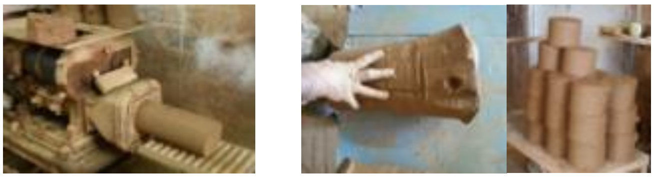
Έγιναν δύο επισκέψεις στο εργαστήριο του Αγγειοπλάστη, συνολικής διάρκειας 4,5 ωρών. Αρχικά, έγινε ημιδομημένη συνέντευξη 15 λεπτών, για τη σκιαγράφηση του γενικότερου υποβάθρου και πλαισίου εργασίας. Ακολούθησε παρατήρηση δράσεων και τεχνουργημάτων διάρκειας 4 ωρών, όπου μέσα από ανεπίσημες συζητήσεις ο τεχνίτης μας περιέγραψε τεχνικές και εργαλεία που χρησιμοποιεί, συνήθεις δράσεις του, κάποια έτοιμα αντικείμενα και τον τρόπο κατασκευής τους. Ακόμα, μας επέτρεψε την παρατήρηση κατά την συνήθη εργασία του, παρουσιάζοντάς μας την κατασκευή αντικειμένων. Ακολούθησε ημιδομημένη συνέντευξη 15 λεπτών, σχετική με την αναγνώριση μαθηματικών πρακτικών εκ μέρους του. Οι συζητήσεις μαγνητοφωνήθηκαν, κρατήθηκαν σημειώσεις πεδίου και συλλέχθηκαν φωτογραφίες και βίντεο. Ως μέθοδος ανάλυσης δεδομένων χρησιμοποιήθηκε η Θεμελιωμένη Θεωρία (Strauss & Corbin, 1998). Μετά την απομαγνητοφώνηση του ακουστικού και μαγνητοσκοπημένου υλικού έγινε ανοιχτή κωδικοποίησή του. Η ανάλυση των δεδομένων έγινε με βάση την επιλογή κρίσιμων συμβάντων, ενώ η κατηγοριοποίησή τους βασίστηκε σε τρεις βασικούς άξονες: την μαθηματική πρακτική του συμμετέχοντα, τη διαφάνεια αυτής, και την αναγνώριση ή μη αυτής εκ μέρους του. Θα δούμε τις προκύπτουσες κατηγορίες μέσα από την περιγραφή των αποτελεσμάτων.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Αρχικά, θα περιγράψουμε ενδεικτικά παραδείγματα από την πρακτική του Αγγειοπλάστη και τη μαθηματική πρακτική που εμφανίζεται. Έπειτα, θα σχολιάσουμε τα αποτελέσματα του Αγγειοπλάστη σε αντιδιαστολή με της Κεραμίστριας του προηγούμενου άρθρου (Χούτου, 2015).

Παραδείγματα από την πρακτική του Αγγειοπλάστη

Ο Αγγειοπλάστης ρίχνει τον πηλό μέσα στο ζυμωτήριο (μηχάνημα που ζυμώνει τον πηλό), ο οποίος εξάγεται μέσω μίας κυκλικής θύρας σε σχήμα κυλινδρικό (Εικ. 1, Αρ.). Όπως εξηγεί ο ίδιος, «το σχήμα της είναι τέτοιο γιατί βγαίνοντας ο πηλός κυλινδρικός είναι έτοιμος να δουλευτεί κατευθείαν στον τροχό» παρότι «και τετράγωνο να ήταν το σχήμα του τελικά έτσι θα γίνει» (λόγω της κυκλικής τροχιάς που επιβάλει η περιστροφή του τροχού, όλα τα αντικείμενα βγαίνουν αναγκαστικά συμμετρικά και συγκεκριμένα οποιαδήποτε οριζόντια τομή είναι κύκλος). Έτσι, ο Αγγειοπλάστης κάνει έμμεση χρήση του κύκλου και του κυλίνδρου, καθώς αυτά είναι ενσωματωμένα στο ζυμωτήριο, επιβάλλονται δηλαδή από αυτό (μη διαφανής ρόλος). Η αντίληψή του είναι μερική, καθώς γνωρίζει τα σχήματα αυτά αλλά δεν τα αναγνωρίζει ως μαθηματικά. Έχει υπολογίσει ότι για την κατασκευή του συγκεκριμένου αντικειμένου θα χρειαστεί μια παλάμη πηλό. Όπως βγαίνει, ο κυλινδρικός πηλός μετράει επάνω του την παλάμη του και τον κόβει με ένα σύρμα εκεί που αυτή τελειώνει (Εικ. 1, Δ.). Κάνει, έτσι, άμεση χρήση με μερική αντίληψη της (άτυπης) μέτρησης με παλάμη (γιατί δεν επιβάλλεται αναγκαστικά από κάποιο εργαλείο) και της έννοιας της ισότητας αφού θέλει να κόψει ίσα κομμάτια πηλού, ώστε στον τροχό τα αντικείμενα να κατασκευαστούν ίσα μεταξύ τους (Εικ. 1, Δ.) (είναι μερική αντίληψη διότι γνωρίζει ότι αυτό που κάνει είναι να μετράει με σκοπό να τα βγάλει ίσα, αλλά δεν το αναγνωρίζει ως μαθηματικά).



Εικόνα 1: Αριστερά: Το ζυμωτήριο. Δεξιά: Μέτρηση με παλάμη.

Στην κύρια κατασκευή στον τροχό, ο Αγγειοπλάστης ακολουθεί πάντα μια συγκεκριμένη ακολουθία βημάτων, κάνοντας έτσι άμεση χρήση αλγορίθμου, με μερική αντίληψη επί αυτού, καθώς γνωρίζει τι κάνει (ο ίδιος το ονομάζει «πιασίματα»), αλλά δεν γνωρίζει τη μαθηματική του φύση. Χρησιμοποιεί, επίσης, έμμεσα την έννοια της κεντρικής συμμετρίας λόγω της φύσης του εργαλείου (μη διαφανής ρόλος), με μερική αντίληψη αυτού.

Εικόνα 2: Αριστερά: Ο κώνος. Κέντρο: Ο κύλινδρος. Δεξιά: Το ξύλο

Αρχικά, «πετάει» πάνω στον τροχό το κυλινδρικό κομμάτι πηλού, αρχίζει το «κεντράρισμα» και του δίνει σχήμα κώνου (Εικ. 2, Αρ.), κάνοντας άμεση χρήση του γεωμετρικού σχήματος, έχοντας όμως μερική αντίληψη. Έπειτα, βάζει το χέρι του μέσα στον κώνο ανοίγοντας χώρο και συνεχίζει με το ένα χέρι μέσα στο κενό και το άλλο απέξω, στην ίδια «ανταπόκριση» τραβώντας λίγο τον πηλό να σηκωθεί φτάνοντάς το σε σχήμα σχεδόν κυλίνδρου (Εικ. 2, Κ.). Κάνει, έτσι, άμεση χρήση με μερική αντίληψη της διαδικασίας της εκτίμησης και της έννοιας του κυλίνδρου. Ξέρει ότι θα σηκώσει τον κύλινδρο μέχρι λίγο πιο πάνω από το ύψος που υποδεικνύει η μύτη του ξύλου (Εικ. 2, Δ.). Όταν μετά «ανοίξει τον πηλό» (του δώσει καμπυλότητα) αυτός θα κατέβει λίγο και το ύψος του θα βρει ακριβώς τη μύτη του ξύλου. Παρατηρούμε ισχυρή αίσθησης της αναλογίας των τριών διαστάσεων με δυνατή την αίσθηση απαιτούμενης ποσότητας πηλού και δυνατότητα οπτικοποίησης, με άμεση χρήση και μερική αντίληψη. Τέλος, δείχνει ότι επαληθεύεται το ύψος του αντικειμένου σε σχέση με το ξύλο (Εικ. 3, Δ.).

Στη συνέχεια, φτιάχνει μικρούς κουμπαράδες για τους οποίους παίρνει μία χούφτα πηλό. Βλέποντας σε ένα ράφι τοποθετημένους κουμπαράδες με συνεχόμενα αυξανόμενο μέγεθος (Εικ. 3, Αρ.), ρωτάμε αν μπορεί να υπολογίσει πόσο παραπάνω πηλό θα χρειαστεί. Φαίνεται ότι μέσα από δοκιμές και λάθη έχει γενικεύσει και υιοθετήσει την στρατηγική της (άτυπης) μέτρησης με τη χούφτα (μία χούφτα πηλός αντιστοιχεί στον μικρό κουμπαρά). Χρησιμοποιεί άμεσα τις διαδικασίες αυτές και έχει μη αντίληψη επ' αυτού, καθώς δεν κατανοεί το τι κάνει, ούτε το συνδέει με τα μαθηματικά. Ενώ για το μικρότερο μέγεθος που έκανε πριν έπαιρνε μία γεμάτη χούφτα πηλό, για το αμέσως επόμενο παίρνει δυο κ.ο.κ. (Εικ. 3, Δ.). Μάλιστα, λέει χαρακτηριστικά ότι τα μεγέθη είναι συνεχόμενα και «ο μεγαλύτερος είναι 30 πόντους, μετά 25, 20, 15. Ανά 5 πόντοι ανεβαίνει». Εμφανίζεται, έτσι, άμεση χρήση της ομοιότητας και της αναλογίας, με μη αντίληψη, αλλά και της συσχέτισης διαστάσεων – όγκου, με μερική.

Εικόνα 3: Αριστερά: Οι όμοιοι κουμπαράδες. Δεξιά: Μέτρηση με τη χούφτα.

Έπειτα, θέλει να διακοσμήσει ένα πιθάρι. Έχει φτιάξει ήδη δυο αλυσιδίτσες και θέλει να γεμίσει το χώρο ανάμεσά τους με γραμμούλες σε τριγωνικά σχήματα. Με το αριστερό χέρι στρίβει τον τροχό και με το σκαλιστήρι στο δεξί (διαφανής ρόλος) χαράσσει γραμμές / και \ (Εικ. 4, Αρ.), εμφανίζοντας τριγωνικά μοτίβα, με άμεση χρήση και μη αντίληψη εκ μέρους του. Τα τριγωνάκια μοιάζουν ισοσκελή/ισόπλευρα, αν και ο ίδιος δεν καταφέρνει να το χαρακτηρίσει έτσι (μη αντίληψη). Κάνει πρώτα την αριστερή πλευρά (/) και μετά τη δεξιά (\). Για να χαράξει την τελευταία αριστερή, κοιτάει να την κάνει όσο μπορεί το «ίδιο πλαγιαστή» με την πρώτη αριστερή. Ουσιαστικά, επιχειρεί να σχεδιάσει παράλληλες γραμμές, χωρίς να το αντιλαμβάνεται. Έπειτα τα γεμίζει με γραμμούλες, που φαίνονται παράλληλες (ο ίδιος φαίνεται να μην γνωρίζει τη λέξη «παράλληλες» και δεν δύναται να μας τις χαρακτηρίσει, αλλά αρκείται στο να μας κάνει χειρονομίες με τα χέρια) (Εικ. 4, Δ.). Κάνει, λοιπόν, άμεση χρήση της παραλληλίας και των ισοσκελών τριγώνων, με μερική αντίληψη αυτού.

Εικόνα 4: Αριστερά: Τα τριγωνικά μοτίβα. Δεξιά: Οι παράλληλες γραμμές.

Η μαθηματική πρακτική του Αγγειοπλάστη

Η μαθηματική πρακτική που εντοπίστηκε στον χώρο του Αγγειοπλάστη αναλύθηκε σε σχέση με τα μαθηματικά που αναδείχθηκαν, τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν και το κατά πόσο αυτά τα μαθηματικά αναγνωρίστηκαν από τον ίδιο.

Ως προς τα μαθηματικά που αναδείχθηκαν διακρίνουμε έννοιες και διαδικασίες. Στις *μαθηματικές έννοιες* εμφανίστηκαν οι *γεωμετρικές έννοιες* των επίπεδων και στερεών σχημάτων και του όγκου. Επίσης, οι *μαθηματικές σχέσεις* της ισότητας, της παραλληλίας, της συμμετρίας, της αναλογίας, της ομοιότητας, της συσχέτισης διαστάσεων-όγκου και του μοτίβου. Ακόμα, εμφανίστηκαν οι *μετασχηματισμοί* της οριζόντιας/κατακόρυφης μετατόπισης και της περιστροφής. Ως προς τις *μαθηματικές διαδικασίες* αναδεικνύεται η *επίλυση προβλήματος*, με την οπτικοποίηση και με στρατηγικές επίλυσης (σύγκριση, εκτίμηση, δοκιμή – πλάνη, επαλήθευση, γενίκευση) και η *μέτρηση* με άτυπες μονάδες (παλάμη, χούφτα, δάχτυλα, καμπούρα, ξύλα) ή με τυπικές (μέτρο). Ακόμα, οι *υπολογισμοί/πράξεις* και η *χρήση αλγορίθμου*.

Τα εργαλεία κατηγοριοποιήθηκαν ως προς το είδος και τον ρόλο τους. Ως προς το είδος, εμφανίστηκαν *μη μαθηματικά*, όπου ανήκουν ο τροχός, το ζυμωτήριο, το γρανάζι, το σκαλιστήρι, τα χέρια, τα ξυλάκια, το ξύλο και το μέτρο. Ως προς τον ρόλο, εμφανίστηκε ο *μη διαφανής ρόλος* κάποιων εργαλείων καθιστώντας *έμμεση* τη *χρήση μαθηματικών*. Συγκεκριμένα, στον τροχό εμφανίστηκε η συμμετρία, η περιστροφή, στο ζυμωτήριο οι γεωμετρικές έννοιες του κύκλου και του κυλίνδρου, στο γρανάζι τα μοτίβα και η παραλληλία. Τα υπόλοιπα εργαλεία εμφανίζονται με *διαφανή ρόλο* επιτρέποντας *άμεση χρήση μαθηματικών* (τυπική και άτυπη μέτρηση, γεωμετρικά σχήματα, ομοιότητα, παραλληλία κ.α.), η οποία εμφανίζεται και χωρίς την παρουσία κάποιου εργαλείου (οπτικοποίηση κ.α.).

Σχετικά με την αναγνώριση των μαθηματικών εκ μέρους του, ο Αγγειοπλάστης παρουσιάζει *πλήρη αντίληψη* στη μέτρηση με το μέτρο και τις πράξεις για τον υπολογισμό του ΦΠΑ. *Μερική αντίληψη* παρουσιάζει σχετικά με τις γεωμετρικές έννοιες (επίπεδα και στερεά σχήματα), τη μέθοδο δοκιμής και πλάνης, τη γενίκευση, τον αλγόριθμο και τη μέτρηση. Σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις παρουσιάζει *μη αντίληψη*.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Φαίνεται ότι το κάθε τελικό αντικείμενο αποτελεί την προσπάθεια του Αγγειοπλάστη για τη βέλτιστη δυνατή λύση στο κατασκευαστικό πρόβλημά του (Gerdes, 1988; Wake, 2014), συμφωνώντας με την περίπτωση της Κεραμίστριας του προηγούμενου άρθρου (Χούτου, 2015). Ο χαρακτηρισμός βέλτιστη, όμως, έχει διαφορετικό νόημα για αυτόν, αφού προσπαθεί συνεχώς μέσα από συγκρίσεις, μετρήσεις, εκτιμήσεις, δοκιμή και πλάνη να κατασκευάσει το σωστό αντικείμενο και έπειτα να το αντιγράψει. Τα βασικά χαρακτηριστικά της πρακτικής του συμφωνούν με αυτά της Κεραμίστριας. Στη προσπάθεια του εμφανίζονται μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, είτε άμεσα από τον ίδιο, είτε έμμεσα λόγω της εμπλοκής κάποιου εργαλείου (Bickley-Green, 1995; Naresh,2009). Η πρακτική του συνδέεται με τη Γεωμετρία, ενώ βασίζεται στην οπτικοποίηση (Nicol, 2002; Millroy, 1992) (καθώς φαντάζεται στο μυαλό του τι αποτέλεσμα θα έχει η κάθε πράξη του), αλλά και στη χρήση αλγορίθμων (Bickley-Green, 1995) σε όλη τη διαδικασία κατασκευής. Ο Αγγειοπλάστης φαίνεται να μην εξάγει τους δικούς του βασικούς εργασιακούς αλγορίθμους, αλλά απλά ακολουθεί τα βήματα που του έμαθαν όταν ήταν παιδί, κάτι που έρχεται σε αντιπαράθεση με τα ευρήματα της Κεραμίστριας (Χούτου, 2015). Σημαντική εμφανίζεται, επίσης, η δοκιμή και πλάνη, και μέσω αυτών η γενίκευση.

Όσον αφορά στο πώς εμφανίζονται τα μαθηματικά στην πρακτική του, αντίθετα με την Κεραμίστρια (Χούτου, 2015), ο Αγγειοπλάστης στο μεγαλύτερος μέρος της εργασίας του χρησιμοποιεί μαθηματικές έννοιες έμμεσα γιατί τα εργαλεία το επιβάλλουν. Παρότι κάνει άμεση χρήση μαθηματικών όταν μετράει με το χέρι, επιλέγοντας να χρησιμοποιεί τη παλάμη του ως μονάδα μέτρησης, αλλά τα εργαλεία οδηγούν στην ανάδειξη σημαντικότερων εννοιών, όπως η συμμετρία στον τροχό ή ο κύλινδρος στο ζυμωτήριο. Συγκεκριμένα, αυτά τα δυο εργαλεία αποτελούν μαύρα κουτιά (Williams & Wake, 2007). Ενώ ο τροχός ρυθμίζει όλη την εργασιακή διαδικασία, τα υπόλοιπα εργαλεία απλά διατηρούν μια ιδιοσυγκρασιακή φύση (Noss, et al., 2002; Triantafillou & Potari, 2010; Williams & Wake, 2007; Χούτου, 2015). Για παράδειγμα, στη διακόσμηση με παράλληλες γραμμές, όπως και στη μέτρηση με παλάμη, η σκέψη του Αγγειοπλάστη πηγάζει από την οπτικοποίησή του, την επίλυση προβλήματος, τη δοκιμή – πλάνη και όχι από το εργαλείο που χρησιμοποιεί (παλάμη).

Όσον αφορά στην αναγνώριση των μαθηματικών πρακτικών του, ο αγγειοπλάστης αντίθετα με την Κεραμίστρια (Χούτου, 2015), ούτε εξ αρχής πιστεύει ότι χρησιμοποιεί μαθηματικά, ούτε στο τέλος το αντιλαμβάνεται. Αυτό πιθανόν οφείλεται στην έλλειψη κατάλληλου εκπαιδευτικού υποβάθρου. Καθώς ο ίδιος δεν έχει διδαχθεί επίσημα μαθηματικά, οτιδήποτε δεν περιλαμβάνει αριθμούς δεν το θεωρεί μαθηματικά και συνήθως αδυνατεί να τα αναγνωρίσει στη πρακτική του.

Παρόλα αυτά έχει μάθει βασικές μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες μέσα από την εργασιακή διαδικασία, χωρίς μάλλον να το γνωρίζει. Μάλιστα, έχει εφεύρει σε μεγάλο βαθμό τα δικά του, άτυπα, μαθηματικά. Σε αυτό, βασικό ρόλο παίζει το πλαίσιο εργασίας του. Σε αντίθεση με το πλαίσιο εργασίας της Κεραμίστριας, ο Αγγειοπλάστης έχει έναν πολύ τυποποιημένο τρόπο εργασίας. Ο εργασιακός του σκοπός, η διαδικασία κατασκευής, καθώς και τα ίδια τα ζητούμενα αντικείμενα είναι εξαιρετικά οριοθετημένα. Πρόκειται για μαζική παραγωγή αντικειμένων που αφορούν σε «παραγγελίες» και έτσι προσπαθεί να έχει την καλύτερη ισορροπία μεταξύ ακρίβειας αποτελέσματος και ταχύτητας διαδικασίας. Για αυτό και ουσιαστικά όλη η εργασία του αποτελεί έναν τυποποιημένο αλγόριθμο.

Όσον αφορά στην εκπαιδευτική αξία της έρευνας, ο Αγγειοπλάστης μας λέει ότι «όταν είσαι μικρός η δουλειά αυτή σου φαίνεται σαν παιχνίδι», ένα παιχνίδι που μπορεί να προωθήσει την ανάπτυξη της οπτικοποίησης. Αντίθετα από την άποψη ότι δεν μπορείς να δεις τα μαθηματικά, όχι μόνο τα βλέπεις, αλλά στην περίπτωση της τροχήλατης συμμετρίας τα παράγεις με τα ίδια σου τα χέρια. Το σημαντικότερο όφελος είναι η μάθηση των μαθηματικών μέσα σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο, δίνοντας νόημα και υπόσταση στις εμπλεκόμενες έννοιες. Το γεγονός ότι πρόκειται για ένα απλοϊκό παραδοσιακό πλαίσιο, εξυψώνει τη δύναμη των μαθηματικών στην πολιτισμική μας κληρονομιά. Καθώς ο Αγγειοπλάστης είναι μη τυπικά εκπαιδευμένος, τα μαθηματικά εμφανίζονται ως κάτι που δεν είναι μόνο για λίγους ή εκλεκτούς, αλλά στο οποίο έχουν δικαίωμα όλοι.

Συνοψίζοντας, εμφανίζεται η άμεση χρήση μαθηματικών εννοιών (πχ. ομοιότητα) και διαδικασιών (πχ. μέτρηση) εκ μέρους του Αγγειοπλάστη, αλλά και η έμμεση χρήση αυτών λόγω αναγκαστικής επιβολής τους από κάποιο εργαλείο με μη διαφανή ρόλο (πχ. συμμετρία στον τροχό). Λόγω του τυποποιημένου τρόπου εργασίας του και τον βασικό ρόλο των χρησιμοποιούμενων εργαλείων (ζυμωτήρι, τροχός) χρησιμοποιεί περισσότερο έμμεσα τα μαθηματικά. Ξεχωριστό ενδιαφέρον έχει το γεγονός ότι ο Αγγειοπλάστης στις περισσότερες περιπτώσεις χρησιμοποιεί άτυπα μαθηματικά. Λόγω του χαμηλού εκπαιδευτικού υποβάθρου ο ίδιος συνήθως δεν μπορεί ούτε να περιγράψει ούτε να κατανοήσει τη χρήση αυτή. Συγκρίνοντας με την Κεραμίστρια (Χούτου, 2015) παρατηρούμε ότι το εκπαιδευτικό υπόβαθρο, το πλαίσιο και τα εργαλεία της εργασίας διαδραματίζουν βασικό ρόλο στη διαμόρφωση των μαθηματικών πρακτικών μέσα στον χώρο εργασίας της κεραμικής και της αγγειοπλαστικής.

Σαν πρόταση για περεταίρω έρευνα θα προτείναμε τη μελέτη των πρακτικών διαφόρων τεχνιτών – καλλιτεχνών των πλαστικών τεχνών καθώς και τη μελέτη του τρόπου αξιοποίησης τυχών ευρημάτων στην εκπαιδευτική διαδικασία, το οποίο αποτελεί ακόμη ένα ανοιχτό ερώτημα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bickley-Green, C. A. (1995). Math and art curriculum integration: A post-modern foundation. *Studies in Art Education*, 6-18.

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education*. Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers.

Boaler, J. (2002). Exploring the nature of mathematical activity: Using theory, research and working hypotheses' to broaden conceptions of mathematics knowing. *Educational Studies in Mathematics*, *51*(1-2), 3-21.

Cucker, F. (2013). *Manifold mirrors: the crossing paths of the arts and mathematics*. Cambridge University Press.

D'Ambrosio, U. (1990). The role of mathematics education in building a democratic and just society. For the Learning of Mathematics, 10(3) 20-23.

Eisenhart, M. A. (1988). The ethnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in mathematics education*, 99-114.

Gerdes, P. (1986). How to recognize hidden geometrical thinking: A contribution to the development of anthropological mathematics. *For the learning of mathematics*, *6*(2), 10-12.

Millroy, W. L. (1991). An ethnographic study of the mathematical ideas of a group of carpenters. *Learning and individual differences*, *3*(1), 1-25.

Mukhopadhyay, S. (2009). The decorative impulse: ethnomathematics and Tlingit basketry. *ZDM*, *41*(1-2), 117-130.

Naresh, N. (2009). Interplay between School Mathematics and Work Place Mathematics, Proceedings of epiSTEME 3.

Nicol, C. (2002). Where's the math? Prospective teachers visit the workplace. *Educational Studies in Mathematics*, *50*(3), 289-309.

Noss, R., Hoyles, C., & Pozzi, S. (2002). Working knowledge: Mathematics in use. In *Education for mathematics in the workplace* (σελ. 17-35). Springer Netherlands.

Strauss, A., και Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory*. Thousand Oaks: Sage.

Triantafillou, C., & Potari, D. (2010). Mathematical practices in a technological workplace: the role of tools. *Educational Studies in Mathematics*, *74*(3), 275-294.

Wake, G. (2014). Making sense of and with mathematics: The interface between academic mathematics and mathematics in practice. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(2), 271-290.

Williams, J., & Wake, G. (2007). Black boxes in workplace mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *64*(3), 317-343.

Χούτου, Χ. (2015). Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΜΙΑΣ ΚΕΡΑΜΙΣΤΡΙΑΣ. *Πρακτικά 6ου συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ*, σελ. 338-348.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ

ΑΞΟΝΑΣ-4: Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ

ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΠΩΣ ΑΥΤΟ ΛΕΙΤΟΥΡΓΕΙ ΣΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Αγγελή Ασημίνα και Γαγάτσης Αθανάσιος

ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, ΕΚΠΑ, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

angeli_mina@windowslive.com, gagatsis@ucy.ac.

Η έρευνα αυτή εξέτασε δυο συνιστώσες: την κατανόηση του Γεωμετρικού σχήματος καθώς και τον γεωμετρικό συλλογισμό των μαθητών. Έγινε μια προσπάθεια σύνδεσης τους: πώς μπορεί η κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος να επηρεάσει την γεωμετρική απόδειξη. Ο κύριος στόχος της μελέτης ήταν να εξετάσει την λειτουργία του γεωμετρικού σχήματος στο γεωμετρικό συλλογισμό σε μαθητές Λυκείου για να διερευνηθούν τα τέσσερα είδη κατανόησης, αντιληπτική, σειριακή (ακολουθιακή), λεκτική και λειτουργική. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος έχει μια ισχυρή επίδραση στη γεωμετρική απόδειξη.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Κατά τη διάρκεια των τελευταίων είκοσι χρόνων, ο γεωμετρικός συλλογισμός εξετάστηκε από διάφορους μελετητές της Διδακτικής των Μαθηματικών (Tall D., (1991), Fischbein E., (1993), Γαγάτσης Α. (2009), Κολεζά Ε., (2009)), βασισμένοι ο καθένας σε διαφορετική θεωρητική θεώρηση. Τα σύγχρονα προγράμματα των μαθηματικών τονίζουν τη σπουδαιότητα της Γεωμετρίας, τόσο ως αυτόνομου θέματος όσο και ως μέσου για την ανάπτυξη άλλων μαθηματικών εννοιών (Kuzniak A., 2000). Λαμβάνοντας υπόψη τη σημαντικότητα του γεωμετρικού συλλογισμού στη μαθηματική εκπαίδευση, ο σχηματισμός ενός πλαισίου ικανοτήτων καθίσταται αναγκαίος, αφού οι ικανότητες αυτές θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν για την ενδυνάμωση της απόδοσης των μαθητών στη Γεωμετρία (Γαγάτσης Α., 2013). Ο Duval (1998) είχε πει ότι υπάρχουν δυο τρόποι προσέγγισης ενός γεωμετρικού αντικειμένου, «δια του λόγου: επικεντρώνεται στη γεωμετρική έννοια με βάση ορισμούς, θεωρήματα και αξιώματα» και «δια του σχήματος: επικεντρώνεται στην εξεικόνιση (visualization), δηλαδή πως βλέπει κανείς τις χωρικές σχέσεις ανάμεσα σε γεωμετρικά αντικείμενα». Διακρίνονται δυο τύποι εξεικόνισης: η εικονική που ορίζει αποκλειστικά την οπτική αντίληψη των σχημάτων όπου κυρίως αντιλαμβάνονται οι μαθητές ένα σχήμα διαισθητικά και η μη εικονική εξεικόνιση που θεωρεί την σύλληψη του σχήματος μέσω νοερών πράξεων και τον εντοπισμό ιδιοτήτων και σχέσεων (ευρετικό εργαλείο). Το σχήμα έχει μια ευρετική σκέψη που οδηγεί σε παραγωγική σκέψη (Duval,1995).

Συγκεκριμένα ο Duval (1995), προσδιορίζει τέσσερις τύπους «γνωστικής κατανόησης» (cognitive apprehension) ενός γεωμετρικού σχήματος:

Την αντιληπτική κατανόηση (perceptual apprehension), που συνίσταται στην κατανόηση της συνολικής μορφής τού σχήματος με την πρώτη ματιά.

Την σειριακή (ακολουθιακή) κατανόηση (sequential apprehension), που συνίσταται στην αντίληψη του τρόπου δόμησης των επιμέρους στοιχείων του.

Τη λεκτική κατανόηση (discursive apprehension), που συνδέεται με την εκφώνηση και την παρακολούθηση ενός μαθηματικού συλλογισμού στα πλαίσια μιας απόδειξης, ή εκτέλεσης αριθμητικών υπολογισμών.

Τη λειτουργική κατανόηση (operative apprehension), στην οποία το σχήμα θεωρείται ευρετικό εργαλείο (ευφυής οργάνωση-τροποποίηση του σχήματος. Ένα είδος τροποποίησης που προτείνει ο Duval είναι η μερεολογική (mereologic) που αφορά στην ανάλυση ή διάσπαση του σχήματος σε διάφορα υποσχήματα, συντελείται μια αναδιοργάνωση του σχήματος (reconfiguration). Ένα ακόμα είδος τροποποίησης είναι η αλλαγή θέσης που αφορά αλλαγή του προσανατολισμού ενός σχήματος (στροφή κατά κάποιες μοίρες).

Για να λειτουργήσει μια φιγούρα ως γεωμετρικό σχήμα, πρέπει να προκαλέσει την ενεργοποίηση της αντιληπτικής σύλληψης και τουλάχιστον ενός από τους υπόλοιπους τύπους σύλληψης (Duval 1995).

Έρευνα

Ερευνητικά ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν:

1. Να προσδιοριστούν οι γνωστικές διαδικασίες και ο τύπος σύλληψης γεωμετρικού σχήματος που ενεργοποιείται κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων.
2. Πως προσεγγίζουν οι μαθητές ένα γεωμετρικό αντικείμενο και πως η προσέγγιση αυτή επηρεάζει την γεωμετρική απόδειξη.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε 168 μαθητές της Α΄ Λυκείου το σχολικό έτος 2016-17 το δεύτερο τετράμηνο στα πλαίσια της διπλωματικής μου εργασίας στο Μεταπτυχιακό Διδακτικής του ΕΚΠΑ. Στην έρευνα συμμετείχαν: 117 μαθητές από το 6^{ο} Γενικό Λύκειο Ν. Σμύρνης, 21 μαθητές από το 1^{ο} Γενικό Λύκειο Π. Φαλήρου και 30 μαθητές από το 2^{ο}

Γενικό Λύκειο Άνω Λιοσίων. Αναπτύχθηκε ένα δοκίμιο που αποτελούνταν από τρία μέρη (A-B-C Μέρος). Το πρώτο μέρος περιελάμβανε πέντε έργα γεωμετρίας που αφορούσαν τα είδη κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος που πρότεινε ο Duval, το δεύτερο μέρος επίσης περιελάμβανε πέντε έργα γεωμετρίας που αφορούσαν στην απόδειξη και το τελευταίο περιείχε ένα έργο για το γεωμετρικό σχήμα και ένα έργο για την απόδειξη. Στην παρούσα εργασία θα αναλύσουμε δυο έργα από το κάθε μέρος. Τα έργα αυτά είναι A4, A5, B2, B3, C1, C2 (πινάκας 1).

Η ανάλυση των απαντήσεων των έργων πραγματοποιήθηκε με τη χρήση του λογισμικού προγράμματος C.H.I.C. (Classification Hiérarchique, Implicative et Cohésitive) των Bodin et al (2000) όπως περιγράφεται στο Γαγάτσης Α., & Σιακαλλή, Μ. (2000), από την οποία προέκυψαν διαγράμματα ομοιότητας: ομάδες έργων τα όποια αντιμετωπίζονται από τους μαθητές με όμοιο τρόπο και συνεπαγωγικά διαγράμματα: επιτυχία σε ένα έργο συνεπάγεται την επιτυχία σε κάποιο άλλο έργο, τα έργα που εμφανίζονται στην κορυφή του διαγράμματος έχουν μεγαλύτερη δυσκολία στην επίλυση από αυτά που εμφανίζονται στη βάση.

Αποτελέσματα

Στον Πίνακα 1 φαίνονται τα έργα του δοκιμίου:

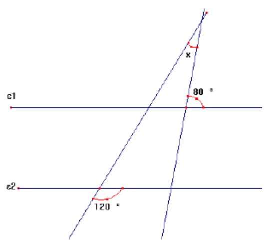
<table>
<tr><th>Α ΜΕΡΟΣ</th><th>Β ΜΕΡΟΣ</th><th>C ΜΕΡΟΣ</th></tr>
<tr>
<td>Έργο Α4

Δυο ίσα ορθογώνια τρίγωνα είναι τοποθετημένα σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις 3×8 όπως φαίνεται στο σχήμα (α). Εάν τα ίδια δυο τρίγωνα επανατοποθετηθούν μέσα στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο όπως φαίνεται στο σχήμα (β), ποιο είναι το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους</td>
<td>Έργο Β2

Στο σχήμα οι ευθείες ε1 και ε2 είναι παράλληλες. Πόσες μοίρες είναι η γωνία x;

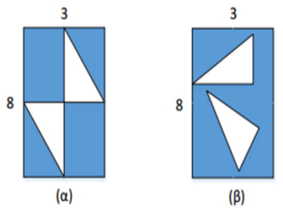
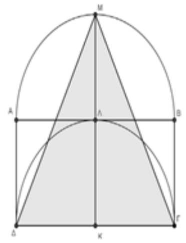
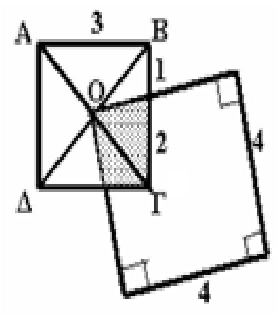
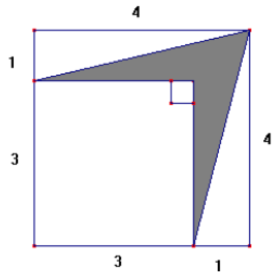
Α.70° Β.60°
Γ. 40° Δ.30°
Ε.20°

Εξηγήστε πως εργαστήκατε.


</td>
<td>Έργο C1

Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρά ΒΓ=5 cm και τα τόξα ΑΜΒ και ΔΛΓ είναι ημικύκλια με διαμέτρους ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα. Τα σημεία Μ και Λ είναι τα μέσα των ημικυκλίων ΑΜΒ και ΔΛΓ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΜΓ.

Να φαίνονται όλες οι πράξεις.</td>
</tr>
</table>

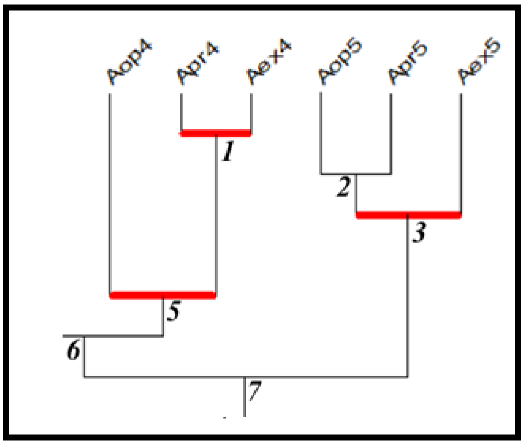
στο σχήμα (β);  		
Έργο A5 Εάν στο παρακάτω σχήμα Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραγώνου ΑΒΓΔ, τότε με ποσό ισούται το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής ; Να εξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.  	Έργο B3 Το εμβαδόν του σκιασμένου σχήματος είναι : Α.1 Β.2 Γ.3 Δ.4 Ε.5  	Έργο C2 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και η διάμεσός του ΑΜ. Φέρουμε ημιευθεία Γx ⊥ΒΓ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα ΓΔ= ΑΒ. Να αποδείξετε ότι: α) ΑΜ // ΓΔ β) η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑΓ. γ) $\Delta\hat{A}\Gamma = 45^o - \hat{B}/2$

Πίνακας 1 :Έργα δοκιμίου

Τα έργα του δοκιμίου κωδικοποιήθηκαν με τα αρχικά: Aop4 (λειτουργική– μερεολογικής φύσεως-λεκτική κατανόηση), Aop5 (λειτουργική- λεκτική κατανόηση-αλλαγή θέσης), Bde2 (γεωμετρική απόδειξη) - Bde3 (μερεολογικής φύσεως), Cop1 (λειτουργική), Cfig2, Cde2a, Cde2b, Cde2c (λεκτική-ακολουθιακή).

Σχέσεις Ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών στα Έργα Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος (Μέρος Α)

Τα έργα Α4 και Α5 συνδέονται μεταξύ τους, αφού εμπλέκουν και τα δύο τη λειτουργική και λεκτική σύλληψη για την επίλυση τους. Επίσης έχουν το κοινό χαρακτηριστικό ότι και τα δύο σχετίζονται με την έννοια του εμβαδού.

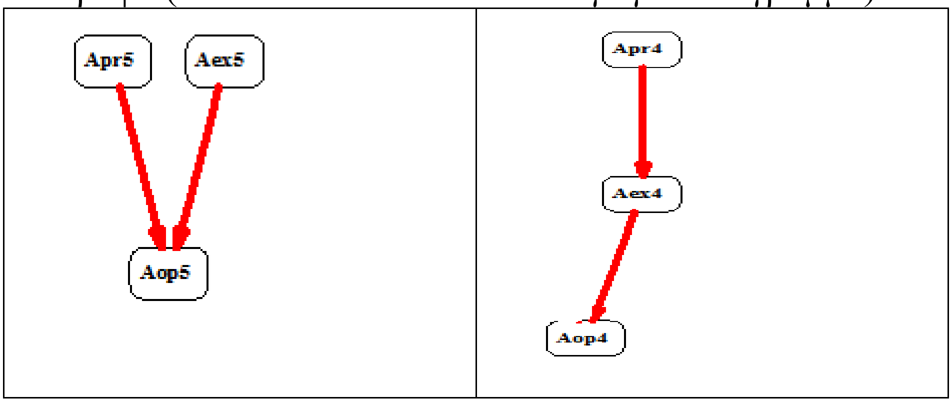


Εικόνα 1. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών στα έργα Α4-Α5

Παρατηρούμε ότι στα έργα Α4 και Α5, η διαδικασία (Apr4-Apr5) που ακολουθήθηκε συνδέεται σημαντικά με την εξήγηση (Aex4-Aex5) που δόθηκε (Εικόνα 1).

Συνεπαγωγικές Σχέσεις Μεταξύ των απαντήσεων των μαθητών στα Έργα Σύλληψης του Γεωμετρικού Σχήματος (Μέρος Α)

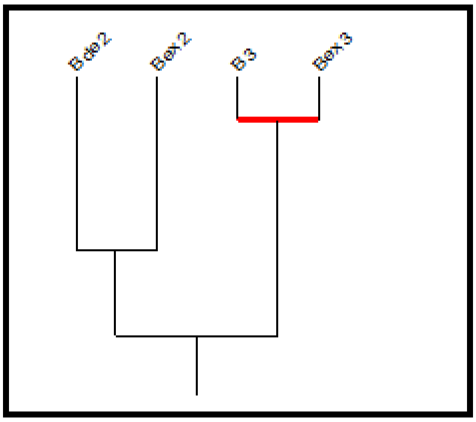
Από το διάγραμμα (Εικόνα 2) παρατηρούμε ότι σχηματίστηκαν δυο διαφορετικές ομάδες συνεπαγωγών: η μια ομάδα αφορά τις τρείς μεταβλητές του έργου Α5 (Apr5-Aex5-Aop5) και η άλλη ομάδα αφορά στις τρείς μεταβλητές του έργου Α4 (Apr4-Aex4-Aop4). Η επίλυση τους επηρεάζεται από την διαδικασία που ακολουθήθηκε και την εξήγηση που δόθηκε. Η επιτυχία στο έργο Α4 δεν συνεπάγεται επιτυχία στο έργο Α5 και αντίστροφα (δεν συνδέονται στο συνεπαγωγικό διάγραμμα).



Εικόνα 2. Ομάδα των τριών μεταβλητών του έργου Α5 και Α4

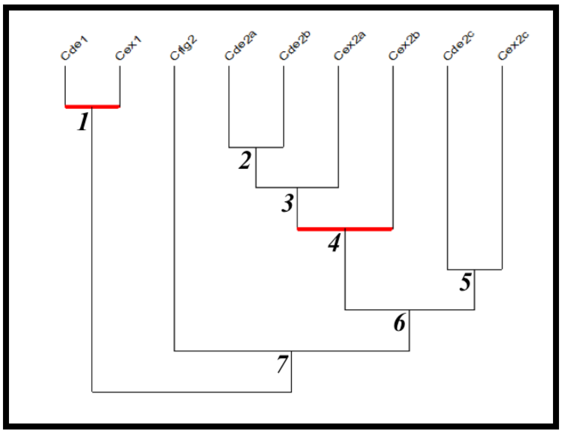
Σχέσεις Ομοιότητας Μεταξύ των απαντήσεων των μαθητών στα Έργα Γεωμετρικού Συλλογισμού (Μέρος Β)

Τα έργα Β2 και Β3 σχηματίζουν ομάδα ομοιότητας με την εξήγηση τους (Εικόνα 3). Ενώ για το έργο Β2 απαιτείται η αντιληπτική και η λεκτική σύλληψη, εμφανίζει ομοιότητα με το έργο Β3, το οποίο κατασκευάστηκε για εξέταση της λειτουργικής σύλληψης. Φαίνεται λοιπόν ότι για τους μαθητές το έργο Β3 δε λειτούργησε ως τέτοιο και ενέπλεξαν την αντιληπτική και λεκτική σύλληψη για να το λύσουν.



Εικόνα 3. Κλάση ομοιότητας των απαντήσεων Β2-Β3

Σχέσεις Ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών στα Έργα Γεωμετρικού Συλλογισμού (Μέρος Γ)

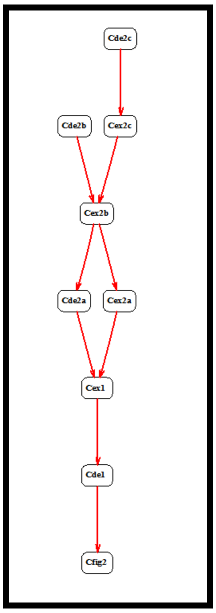


Εικόνα 4. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων των μαθητών στα έργα του Γ Μέρους

Δημιουργούνται τρεις ομάδες ομοιότητας (Εικόνα 4): Στην πρώτη ομάδα εμφανίζεται σημαντικός δεσμός μεταξύ επίλυσης και εξήγησης του έργου C1. Στη δεύτερη ομάδα σχηματίζεται σημαντικός δεσμός ομοιότητας μεταξύ της επίλυσης και της εξήγησης στα δύο πρώτα ερωτήματα του έργου C2. Από την άλλη η επίλυση και η εξήγηση του ερωτήματος C2c σχηματίζει μια τρίτη ομάδα ομοιότητας, η οποία όμως συνδέεται και με την δεύτερη ομάδα. Τα δύο έργα (C1, C2) διαχωρίζονται μεν σε ξεχωριστές ομάδες, πιθανόν λόγω της παρουσίας ή μη του σχήματος, αλλά συνδέονται ταυτόχρονα με σχέση ομοιότητας, όπως φαίνεται στον πίνακα 4, στην σύνδεση 7. Άρα για το έργο C1 ενεργοποιήθηκε η λεκτική, παρά η λειτουργική σύλληψη.

Συνεπαγωγικό διάγραμμα των απαντήσεων των μαθητών στα έργα του Γ Μέρους

Στο πάνω μέρος της συνεπαγωγικής αλυσίδας (Εικόνα 5) εμφανίζονται συνεπαγωγές μεταξύ των μεταβλητών του έργου C2. Η παραγωγή της απόδειξης στα ερωτήματα του έργου αυτού επηρεάζει την εξήγηση της. Στο κάτω μέρος της αλυσίδας βρίσκουμε συνεπαγωγή μεταξύ της εξήγησης και της απάντησης στο έργο C1. Το έργο C2 εμφανίζεται ως πιο απαιτητικό για τους μαθητές, παρά το έργο C1, πιθανόν λόγω της ανάγκης για κατασκευή του γεωμετρικού σχήματος. Η σχεδίαση του σχήματος εμφανίζεται στη βάση της αλυσίδας.

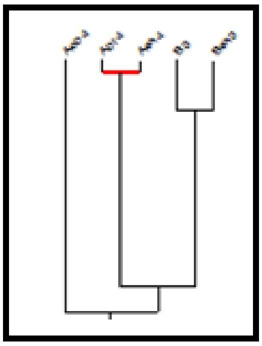
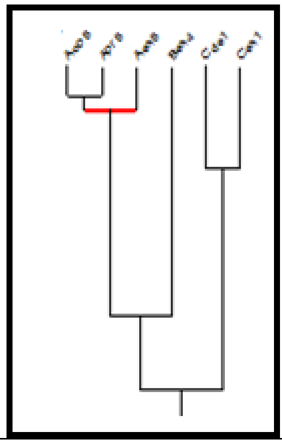


Εικόνα 5. Συνεπαγωγικό διάγραμμα των απαντήσεων όλων των μαθητών στα έργα του Γ Μέρους

Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων στα Έργα και των τριών Μερών

Στην Εικόνα 6 έχουμε το έργο A4 που συνδέεται με το έργο B3. Έχουμε δύο έργα τα οποία απαιτούν λειτουργική σύλληψη και αναδιοργάνωση του δοσμένου σχήματος για να λυθούν (μερεολογικής φύσεως). Το κοινό χαρακτηριστικό των δυο αυτών έργων είναι ότι και τα δυο αφορούν στην έννοια του εμβαδού και αποτελούν μια λειτουργική ομάδα. Παρατηρούμε ότι η επίλυση του έργου A5 (Apr5-Aex5-Aop5) συνδέεται με το έργο C1

(Cpr1-Cex1). Τα έργα αυτά αποτελούν λειτουργική ομάδα. Από την άλλη το έργο C2 αποτελεί λεκτική ομάδα.

Εικόνα 6. Διάγραμμα ομοιότητας των απαντήσεων στα έργα και των τριών Μερών

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ισχυρές σχέσεις βρέθηκαν μεταξύ της λειτουργικής και της λεκτικής κατανόησης. Σημαντικές, επίσης, ήταν οι σχέσεις που προέκυψαν μεταξύ της λεκτικής και της ακολουθιακής κατανόησης, τονίζοντας τη σημασία της γνώσης των μαθηματικών ιδιοτήτων για τις γεωμετρικές κατασκευές και τις διαδικασίες συλλογισμού για τις γεωμετρικές αποδείξεις.

Φαίνεται λοιπόν ότι για τους μαθητές τα έργα λειτουργικής κατανόησης δε λειτουργούν ως τέτοια, αφού οι μαθητές δεν κατέφεραν να προσεγγίσουν το σχήμα ως ευρετικό εργαλείο, αλλά το προσέγγισαν αντιληπτικά και ενέπλεξαν τη λεκτική σύλληψη για να το λύσουν. Άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η λειτουργική σύλληψη των μαθητών επισκιάζεται από την αντιληπτική και τη λεκτική σύλληψη.Τα έργα που ήταν λειτουργικής σύλληψης δυσκόλεψαν τους μαθητές. Τα αποτέλεσμα επιβεβαιώνονται και από τα αποτελέσματα των Elia I. και Philippou G. (2004) αναφορικά με τη μη συνειδητοποίηση του βοηθητικού ρόλου των εικόνων από τους μαθητές. Άρα αν προσεγγίσουμε περισσότερο λειτουργικά τα σχήματα θα επιτύχουμε κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος και κατ' επέκταση επιτυχή γεωμετρικό συλλογισμό.

Παρατηρούμε ότι στα έργα μερεολογικής φύσεως οι μαθητές συμπεριφέρονται όμοια. Οι μαθητές στα έργα τους δεν έκαναν διάσπαση και ανασύνθεση του σχήματος. Άρα η μερεολογική λειτουργία δεν συνείσφερε και πολλά στη γεωμετρική απόδειξη.

Συμπεραίνουμε ότι οι μαθητές προσεγγίζουν τα σχήματα κυρίως μέσω λεκτικής σύλληψης και όχι λειτουργικής. Το γεγονός αυτό ίσως να οφείλεται στον τρόπο αντίδρασης των μαθητών στα έργα αυτά που συνδέεται άμεσα με τις διδακτικές τους εμπειρίες, αφού καλούνται να χρησιμοποιήσουν ορισμούς, ιδιότητες, θεωρήματα για να αποδείξουν κάτι. Από τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας οι μαθητές μένουν στην προσέγγιση ενός αντικείμενου δια του λόγου. Δεν είναι εξοικειωμένοι με την εξεικόνιση. Αυτό που έχουν ανάγκη είναι να οδηγηθούν στην μη εικονική εξεικόνιση, έτσι ώστε το σχήμα να έχει ευρετική δύναμη που να οδηγεί σε παραγωγική σκέψη και στη συνέχεια σε γεωμετρικό συλλογισμό για την επιτυχία μιας γεωμετρικής απόδειξης. Παρατηρούμε ότι ενώ οι μαθητές κατασκευάζουν με επιτυχία ένα σχήμα δεν μπορούν να διακρίνουν τις ιδιότητες του σχήματος, το παρατηρούν και βλέπουν μια στατική εικόνα. Η σχεδίαση του σχήματος συνδέεται ισχυρά με την επίλυση του έργου και την παροχή εξήγησης. Αυτό είναι σύμφωνο με τα ευρήματα προηγούμενων ερευνών (π.χ. Hanna G. & Sidoli N., 2007), που συμπεραίνουν ότι υπάρχει μια δυνητική συμβολή των οπτικών αναπαραστάσεων στη μαθηματική απόδειξη. Ευρήματα αποκαλύπτουν επίσης ότι η λειτουργική προσέγγιση είναι εκείνη που συνεισφέρει τα μέγιστα στην κατανόηση του γεωμετρικού σχήματος. Συνεπώς αναδεικνύεται ο σημαντικός ρόλος της κατανόησης του γεωμετρικού σχήματος για την επίλυση γεωμετρικών έργων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Γαγάτσης Α., & Σιακαλλή, Μ. (2000). CHIC: Ένα στατιστικό πρόγραμμα επεξεργασίας δεδομένων σε σχέση με τη διδακτική των Μαθηματικών – εφαρμογή στις συναρτήσεις. *Πρακτικά 17ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας: Τα Μαθηματικά Κλειδί Ανάπτυξης* (σσ. 602-612). Αθήνα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Γαγάτσης, Α., Δεληγιάννη, Ε., Ηλία, Ι., Μονογυιού, Α., & Παναούρα, Α. (2009). *Πειραματική Διδακτική των Μαθηματικών: Έννοιες-Μέθοδοι-Έρευνες.* Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου, Σχολή Κοινωνικών Επιστημών και Επιστημών τη Αγωγής.

Γαγάτσης, Α., Καλογήρου, Π. (2013). *Ανάπτυξη της χωρικής ικανότητας και της αντίληψης του γεωμετρικού σχήματος.* Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου, Σχολή Κοινωνικών Επιστημών και Επιστημών τη Αγωγής.

Κολέζα, Ε.(2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Τόπος.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education* (pp. 142-157). Berlin: Springer-Verlag.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view, In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century* (pp. 37-51). Dordrecht: Kluwer Academic.

Elia, I., and Philippou, G. (2004). The functions of pictures in problem solving. In M. Johnsen Høines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 327-334). Bergen, Norway: PME .

Fischbein, E. (1993). Theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *2*(42), 139-162 .

Hanna, G., & Sidoli, N. (2007). Visualization and proof: a brief survey of philosophical perspectives. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 73-78.

Kuzniak A., Athanasios Gagatsis, Matthias Ludwig, Carlo Marchini, Michaelides, M.P. (2003). Age and Gender differences in performance on a spatial rotation test NCTM. (2000). Principles and standards for school mathematics.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Eds), *Advanced mathematical thinking*, pp3-21.Dordrecht:Kluwer.

ΤΑ ΕΙΔΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΙ Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

Αντωνόπουλος Ματθαίος

Υποψήφιος Διδάκτορας Τμήματος Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

m.antonopoulos@outlook.com

Η συνέχεια ως έννοια έχει κεντρικό ρόλο στα μαθηματικά. Η συγκεκριμένη έρευνα πραγματοποιήθηκε σε φοιτητές του μαθηματικού τμήματος. Σκοπός της εργασίας είναι να μελετήσει την αντιμετώπιση των φοιτητών κατά τον έλεγχο της συνέχειας ανάλογα με το είδος αναπαράστασης της συνάρτησης. Τα αποτελέσματα της έρευνας σε συνδυασμό με το θεωρητικό πλαίσιο, φανερώνουν ότι πολλές φορές υπάρχουν διαφορές στον τρόπο αντιμετώπισης για το χαρακτηρισμό της συνέχειας ενώ οι απαντήσεις κάποιων φοιτητών εμφανίζουν αντιφάσεις ανάλογα με την αναπαράσταση της συνάρτησης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια της συνέχειας κατέχει κεντρικό ρόλο στον τομέα της Ανάλυσης. Είναι κοινώς αποδεκτό πως δημιουργεί δυσκολίες τόσο στους μαθητές όσο και στους φοιτητές αλλά ορισμένες φορές ακόμα και στους καθηγητές. Μπορούμε να υποθέσουμε πως οι φοιτητές δεν έχουν από το σχολείο μια ικανοποιητική γνώση της έννοιας της συνέχειας. Η προϋπάρχουσα γνώση με την οποία ξεκινούν τα μαθήματα της ανάλυσης συνήθως είναι περιορισμένη κάτι που σημαίνει ότι οι καθηγητές στο πανεπιστήμιο πρέπει να διαγνώσουν τις εννοιολογικές δυσκολίες, τις παρανοήσεις και να αναπτύξουν στρατηγικές διδασκαλίας οι οποίες θα αντιμετωπίζουν αυτά τα προβλήματα (Bezuidenhout 2001).

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι διαφορές στην αντιμετώπιση των φοιτητών όταν οι συναρτήσεις παρουσιάζονται με διαφορετικές αναπαραστάσεις (Lauten et al. 1994, Duru et al. 2010).

Η συγκεκριμένη εργασία έχει ως σκοπό τη μελέτη της έννοιας της συνέχειας σε σχέση με το είδος αναπαράστασης μιας συνάρτησης.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στη μαθηματική εκπαίδευση είναι κάτι το οποίο έχει αναδειχθεί στη βιβλιογραφία. Για μια βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση, το μάθημα δεν θα πρέπει να εξαντλείται μόνο στη χρήση αλγεβρικών παραστάσεων αλλά επιπλέον θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη οι γεωμετρικές και διαισθητικές αναπαραστάσεις που αντιστοιχούν στα μαθηματικά αντικείμενα καθώς και στην αλληλεπίδραση μεταξύ των πολλαπλών αναπαραστάσεων (Kaput 1994). Η ικανότητα της αναπαράστασης της ίδιας έννοιας με διαφορετικούς τρόπους, θεωρείται προϋπόθεση για την κατανόησή της (Duval 2002).

Οι οπτικές αναπαραστάσεις μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν την έννοια της συνέχειας και να αποφύγουν γνωστές παρανοήσεις όπως ότι συνεχής είναι μόνο η συνάρτηση της οποίας το γράφημα δεν διακόπτεται (Takaci et al, 2003).

Σε έρευνα των Tall καιVinner (1981), ορισμένοι χαρακτηρίζουν μια συνάρτηση ως συνεχή απλώς επειδή σε αυτή αντιστοιχεί μια εξίσωση. Επιπλέον συναρτήσεις με πολλούς κλάδους τείνουν να θεωρούνται ασυνεχείς, με αποτέλεσμα συναρτήσεις ενός τύπου να θεωρούνται συνεχείς. Για παράδειγμα όταν δίνονταν μόνο ο αλγεβρικός τύπος π.χ. υπερβολοειδής συνάρτηση, ακόμα κι αν το γράφημά τους διακόπτεται οι φοιτητές έτειναν να χαρακτηριστούν τη συνάρτηση ως συνεχή. Στην ίδια έρευνα βλέπουμε το γεγονός οι μαθητές να απαντούν σωστά, αλλά το σκεπτικό που ακολούθησαν να είναι λάθος, ή να παρουσιάζεται πλήρη αδυναμία αιτιολόγησης της απάντησής τους π.χ., μπορεί να αποφανθούν ότι η συνάρτηση είναι συνεχής επειδή δίνεται από έναν μόνο τύπο.

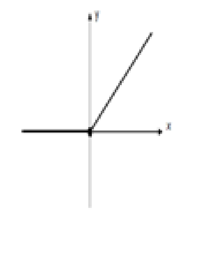
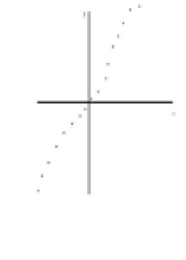
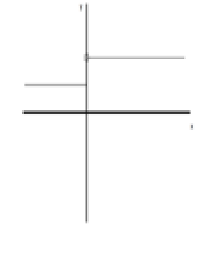
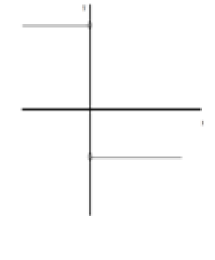
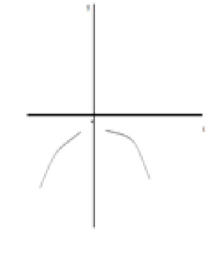
Σύμφωνα με τους Ferrini-Mundy και Graham (1994), όταν τα προβλήματα παρουσιάζονται με διαφορετικές αναπαραστάσεις τότε, οι μαθητές χρησιμοποιούν διαφορετικούς τρόπους σκέψης. Οι Lauten et al. (1994) αναφέρουν ότι όταν το ίδιο πρόβλημα δίνεται με διαφορετική αναπαράσταση όπως αλγεβρική ή γραφική οι μαθητές το χειρίζονται με διαφορετικό τρόπο. Μάλιστα όταν οι ερευνητές ζήτησαν να ακούσουν τις ιδέες τους για τη συνέχεια φάνηκε να μην υπάρχει κάποια σύνδεση ανάμεσα στον τρόπο που επιχειρηματολογούν στη γραφική και στη συμβολική αναπαράσταση. Σύμφωνα με τον Cornu (1991) η έννοια της συνέχειας στην καθημερινή ζωή δημιουργεί παρανοήσεις όταν δίνεται το γράφημα μιας συνάρτησης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να συγχέουν την έννοια της συνεκτικότητας και της συνέχειας. Μάλιστα οι καθηγητές φαίνεται όταν αντιμετωπίζουν ασκήσεις με το γράφημα μιας συνάρτησης να χρησιμοποιούν εκφράσεις όπως «σχεδιάζεται χωρίς να σηκώνουμε το μολύβι» συντηρώντας αυτή τη σύγχυση.

Οι φοιτητές φαίνεται να προτιμούν την αλγεβρική αναπαράσταση της συνάρτησης και να φέρνουν καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με τη γραφική αναπαράσταση αυτής κατά τον έλεγχο της συνέχειας. Αυτό οφείλεται στη συχνή τριβή μαθητών και φοιτητών με διαδικασίες που αφορούν τη συμβολική γραφή κατά την επίλυση προβλημάτων (Duru et al. 2010). Μάλιστα σύμφωνα με την έρευνα των Karatas et al. (2011) τα ποσοστά επιτυχίας στο χειρισμό γραφικών αναπαραστάσεων, από φοιτητές που προορίζονται για καθηγητές μαθηματικών, μειώνονται όσο αυξάνονται τα χρόνια σπουδών.

Στο εκπαιδευτικό σύστημα της Ελλάδας οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τον ορισμό της συνέχειας συνάρτησης στην τελευταία σχολική τάξη όπου διδάσκονται ότι αν το xο είναι σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης τότε αυτή είναι συνεχής στο xο όταν $\lim_{x\to x_o} f(x) = f(x_o)$, έπειτα στο πανεπιστήμιο διδάσκονται τον ορισμό: Έστω XCR, f:X→R μία πραγματική συνάρτηση και xο∊R. Η f είναι συνεχής στο αν για κάθε ε>0 υπάρχει δ>0 ώστε αν x∊X και $|x - xo| < δ$ τότε $|f(x) - f(xo)| < ε$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η συγκεκριμένη εργασία αποτελεί μέρος μια εκτενέστερης μελέτης που αφορά της έννοια της συνέχειας της συνάρτησης. Η διαδικασία συλλογής δεδομένων που ακολουθήθηκε ήταν η εξής: Το ακαδημαϊκό έτος 2014-2015 μοιράστηκαν ερωτηματολόγια σε 96 φοιτητές τμήματος Μαθηματικών. Ζητήθηκε προαιρετικά η συμπλήρωση του ονοματεπώνυμου των φοιτητών καθώς και η συμπλήρωση του εξάμηνου σπουδών των φοιτητών. Από τους φοιτητές που συμπλήρωσαν τα στοιχεία τους η πλειοψηφία βρίσκονταν στο 7^o εξάμηνο σπουδών είτε ήταν σε κάποιο επί πτυχίω εξάμηνο, ενώ αρκετοί φοιτητές ήταν εγγεγραμμένοι στο 5^o εξάμηνο σπουδών. Μετά τη συμπλήρωση των ερωτηματολογίων και την αρχική τους ανάλυση επιλέχθηκαν συγκεκριμένοι φοιτητές ,ανάμεσα σε αυτούς που είχαν συμπληρώσει τα στοιχεία τους, σύμφωνα με το ενδιαφέρον που κρίθηκε ότι είχαν οι απαντήσεις τους για περεταίρω μελέτη. Για τη συγκεκριμένη εργασία αξιοποιήθηκαν μόνο οι απαντήσεις που δόθηκαν στα ερωτηματολόγια που μοιράστηκαν. Το ερευνητικό ερώτημα είναι ποιες είναι οι διαφορές που παρουσιάζουν οι φοιτητές κατά τον έλεγχο της συνέχειας ανάμεσα στη γραφική και τη συμβολική αναπαράσταση μιας συνάρτησης. Το ερώτημα ελέγχεται μέσα από δύο ερωτήματα που βρίσκονταν σε ένα ευρύτερο ερωτηματολόγιο και μελετήθηκαν συγκριτικά. Συγκεκριμένα στη μία ερώτηση της έρευνας δίνονταν ορισμένα γραφήματα συναρτήσεων, ενώ στην άλλη δίνονταν ο τύπος κάποιων συναρτήσεων με αντίστοιχα χαρακτηριστικά με αυτές της προηγούμενης ερώτησης αλλά με διαφορετική σειρά.

				
Γράφημα 1	**Γράφημα 2**	**Γράφημα 3**	**Γράφημα 4**	**Γράφημα 5**

Εξετάστε αν οι δοθείσες συναρτήσεις είναι συνεχείς και <u>αιτιολογήστε</u> το συμπέρασμά σας.				
$f(x)=x^3$, $x\in N$ **Συνάρτηση 1**	$f(x)=\begin{cases}5, & x>0\\ 13, & x\le 0\end{cases}$ **Συνάρτηση 2**	$f(x)=\begin{cases}-2, & x>0\\ 2, & x<0\end{cases}$ **Συνάρτηση 3**	$f(x)=\begin{cases}0, & x>0\\ -x, & x\le 0\end{cases}$ **Συνάρτηση 4**	$f(x)=\begin{cases}x^2, & \lvert x\rvert>1\\ 0, & x=0\end{cases}$ **Συνάρτηση 5**

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Γράφημα 1-Συνάρτηση 4

Θα μπορούσαμε να χωρίσουμε τις αντιλήψεις των φοιτητών σε τέσσερις κατηγορίες. Συνεκτική αντίληψη(1): Αρκετοί φοιτητές συγχέουν την έννοια της συνεκτικότητας με αυτή της συνέχειας. Για παράδειγμα «συνεχής αφού δεν διακόπτεται το γράφημα». Έλεγχος <u>μόνο</u> των πλευρικών ορίων στα σημεία αλλαγής του πεδίου ορισμού(2): Για παράδειγμα ένας φοιτητής γράφει «συνεχής παντού πλευρικά ίσα στο 0». Έλεγχος της συνέχειας <u>μόνο</u> στο σημείο αλλαγής του τύπου της συνάρτησης(3): Για παράδειγμα ο φοιτητής γράφει «$\boldsymbol{\lim_{x\to 0^+} 0 = \lim_{x\to 0^-}(-x) = f(0) = 0}$» ενώ δε χαρακτήρισε τη συνάρτηση ως συνεχή στο πεδίο ορισμού της το οποίο είναι το R. Πλήρης έλεγχος της συνέχειας σε όλο το πεδίο ορισμού της (4). Π.χ. «συνεχής ως σταθερή στο (0,+∞) , ως πολυωνυμική στο (-∞,0]».

Γράφημα 2-Συνάρτηση 1

Τις απαντήσεις των φοιτητών θα μπορούσαμε να τις χωρίσουμε σε πέντε κατηγορίες. Δεν έχει νόημα να εξετάσουμε τη συνέχεια (1): «δεν μπορώ να μιλήσω για συνέχεια γιατί το πεδίο ορισμού είναι μεμονωμένα σημεία. Συνεκτική αντίληψη(2): «ασυνεχής διότι έχει μεμονωμένα σημεία» Ασυνεχής λόγω των πλευρικών ορίων(3). Συνεχής επειδή αποτελείται από μεμονωμένα σημεία (ανάκληση από βάση δεδομένων) (4): Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε πως αρκετοί συγκράτησαν τη φράση «μεμονωμένα σημεία= συνεχής συνάρτηση» σαν κανόνα μέσα από τα ακούσματα που έχουν από τα μαθήματα του απειροστικού λογισμού και αυτή από μόνη της αποτέλεσε επιχείρημα για το χαρακτηρισμό της συνέχειας συνάρτησης. Συνεχής με χρήση του ορισμού του πανεπιστημίου (5).

Γράφημα 3-Συνάρτηση 2

Μπορούμε να εντάξουμε τους φοιτητές σε πέντε κατηγορίες. Συνεκτική αντίληψη(1): «έχει σημείο ασυνέχειας την οπή στον y'y».Ταύτιση πεδίου ορισμού της συνάρτησης με τη συνέχεια(2): «κάθε σημείο του πεδίου ορισμού έχει κάποια τιμή άρα συνεχής». Έλεγχος των πλευρικών ορίων(3) : $\boldsymbol{\lim_{x\to 0^-} f(x) = 13 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 5}$». Χρήση του ορισμού του λυκείου(4): «$\boldsymbol{f(0) = 13 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 5}$». Χρήση του ορισμού του πανεπιστημίου(5): «έστω ε=1/2 ∃ δ>0 αν x ε A και $|x - 0| < \boldsymbol{\delta}$ τότε $|\boldsymbol{f(x) - f(0)}| = |\boldsymbol{y_1 - y_1}| = \boldsymbol{0 < \frac{1}{2} = \varepsilon}$» «έστω ε > 0 και ε < α, τότε δεν μπορώ να βρω δ>0 που να ισχύει ο ορισμός, άρα ασυνεχής στο 0 οπότε όχι συνεχής».

Γράφημα 4-Συνάρτηση 3

Προέκυψαν έξι κατηγορίες απαντήσεων. Συνεκτική αντίληψη(1): «Το γράφημα διακόπτεται άρα ασυνεχής». Ταύτιση πεδίου ορισμού της συνάρτησης με τη συνέχεια(2): «ασυνεχής ,διότι δεν ορίζεται στο x=0, «δεν υπάρχει καμία τιμή της συνάρτησης για τα σημεία που βρίσκονται στον y'y άρα είναι ασυνεχής». Ασυνεχής λόγω των πλευρικών ορίων(3): «η συνάρτηση είναι συνεχής σε όλο το R (που είναι το πεδίο ορισμού) εκτός από το σημείο x_o=0, καθώς $\boldsymbol{\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)}$». Συνεχής με παράλληλη αναφορά σε σημείο που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού(4): «το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης οπότε δεν έχει νόημα να μιλήσω για συνέχεια στο 0 όμως για τα x τα οποία ανήκουν στο πεδίο ορισμού η συνάρτηση είναι συνεχής». Συνεχής με αναφορά στην κατά τμήματα συνέχεια λόγω της σταθερής συνάρτησης(ανάκληση από βάση δεδομένων)(5): «συνεχής στα δύο διαστήματα ως σταθερή». Συνεχής με αναφορά στον ορισμό της συνέχειας(6): «είναι συνεχής ικανοποιείται ο ορισμός στο (-∞, $\boldsymbol{0}$) ∪(0,+ ∞)».

Γράφημα 5-Συνάρτηση 5

Οι κατηγορίες των απαντήσεων που προέκυψαν ήταν έξι. Συνεκτική αντίληψη(1): «μη συνεχής γραφική παράσταση= μη συνεχής συνάρτηση στο R» Ασυνεχής λόγω του μεμονωμένου σημείου (2): «Όχι στο 0, μεμονωμένο σημείο». Ταύτιση του πεδίου ορισμού της συνάρτησης με τη συνέχεια(3): «ασυνεχής γιατί κοντά στο 0 δεν έχουμε f». Προσπάθεια εμπλοκής των ορίων(4): «ασυνεχής πρόβλημα στο όριο». Συνεχής με αναφορά στο μεμονωμένο σημείο (ανάκληση από τη βάση δεδομένων)(5): «μεμονωμένο σημείο, πολυωνυμική άρα συνεχής». Συνεχής με αναφορά στον ορισμό της συνέχειας του πανεπιστημίου(6).

Οι αντιφάσεις στον χαρακτηρισμό της συνέχειας αλλά και στον τρόπο χαρακτηρισμού της συνέχειας ανάλογα με το είδος αναπαράστασης της συνάρτησης δεν έλειψαν, κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι:

Γράφημα-Συνάρτηση	Γράφημα συνάρτησης	Τύπος συνάρτησης	Κατηγορία
1-4	Ελέγχει μόνο τα πλευρικά όρια στο 0	Χρήση ορισμού στο 0	2-3
	Πλήρης και σωστός έλεγχος σε όλο το πεδίο ορισμού	Έλεγχος της συνέχειας μόνο στο 0	4-3 Ελέγχει μόνο στο μηδέν όταν δίνεται ο αναλυτικός τύπος
	Συνεχής αφού σχεδιάζεται μονοκονδυλιά	Δεν είναι συνεχής, έχει δύο κλάδους	1- αντίφαση
2-1	Όχι συνεχής από πλευρικά όρια	Όχι συνεχής, έχει μεμονωμένα σημεία	3-2
	Μη συνεχής έχει μεμονωμένα σημεία.	Συνεχής ως πολυωνυμική	2-4 αντίφαση
3-2	Είναι συνεχής αφού σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού το όριο είναι ίσο με την εικόνα του μέσω της f	Δεν υπάρχει το όριο λόγω πλευρικών άρα όχι συνεχής στο 0	4-3 αντίφαση
	Δεν είναι συνεχής στο 0 από ορισμό ε-δ	Ασυνεχής στο 0 λόγω πλευρικών ορίων	5-3

4-3	Συνεχής ως σταθερή αλλά ασυνεχής στο σημείο αλλαγής τύπου	Ασυνεχής καθώς $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$	4-3 αντίφαση
	Δεν είναι συνεχής στο x_o=0 γιατί δεν υπάρχει το $f(x_o)$	Συνεχής εκτός του x_o=0 που δεν ορίζεται	2-4 αντίφαση
5-5	Ασυνεχής αφού δεν υπάρχουν τα πλευρικά στα α, β	Συνεχής από τον ορισμό	4-6 αντίφαση
	Δεν είναι συνεχής γιατί έχει κενά	Είναι συνεχής αφού $\lim_{x\to 1+} f(x) = f(1) = \lim_{x\to -1-} f(x) = f(-1)$	1-4 αντίφαση

ΣΥΖΗΤΗΣΗ-ΣΥΜΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ορισμένοι φοιτητές όταν τους δόθηκε το γράφημα των συναρτήσεων είχαν την ανάγκη να γράψουν με βάση αυτό τον αναλυτικό τύπο της συνάρτησης και έπειτα να κάνουν τον έλεγχο της συνέχειας. Αντίστοιχα αποτελέσματα παρουσιάζονται και στην έρευνα των Duru et al. (2010). Παρατηρήσαμε λοιπόν μία αδυναμία των φοιτητών να κάνουν χειρισμούς όταν δίνονταν το γράφημα μιας συνάρτησης.

Τα ποσοστά επιτυχίας ήταν μεγαλύτερα κατά τον χειρισμό των τύπων των συναρτήσεων σε σχέση με όταν δίνονταν οι γραφικές παραστάσεις τους, κάτι που φάνηκε και στην έρευνα των Karatas et al. (2011). Είναι σημαντικό λοιπόν η διδασκαλία της συνέχειας να εμπλουτιστεί με περισσότερες γραφικές παραστάσεις.

Είδαμε στις περισσότερες απαντήσεις διαφορές στο τρόπο χειρισμού των συναρτήσεων ανάλογα με το είδος αναπαράστασης που δίνονταν, μάλιστα φάνηκε να μην υπάρχει σε πολλούς κάποιος συσχετισμός ανάμεσα στη γραφική αναπαράσταση και τον τύπο μιας συνάρτησης στον τρόπο που επιχειρηματολογούν όπως και στις έρευνες των Ferrini-Mundy και Graham (1994), Lauten et al. (1994). Η συγκεκριμένη μελέτη όμως έδειξε ότι πέρα από τις διαφορές στον τρόπο χειρισμού παρουσιάζονται διαφορές ακόμα και ως προς το χαρακτηρισμό της συνέχειας για συναρτήσεις με ίδια χαρακτηριστικά. Για παράδειγμα όταν δόθηκε η $f(x)=x^3$ με $x \in N$ με βάση το γράφημα χαρακτηρίστηκε ασυνεχής από ορισμένους φοιτητές ενώ όταν δόθηκε ο τύπος της χαρακτηρίστηκε συνεχής ως πολυωνυμική. Φάνηκε ότι το πλήθος των αντιφάσεων ανάμεσα στα δύο είδη αναπαράστασης είναι μεγαλύτερο όταν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής.

Στα ερωτήματα που δίνονταν το γράφημα μία συνάρτησης με δύο κλάδους ορισμένοι φοιτητές πήγαν στο σημείο αλλαγής του τύπου και υπολόγισαν τα πλευρικά όρια χωρίς να ξέρουν τις ακριβείς τιμές. Αυτό ίσως οφείλεται στο ότι οι φοιτητές είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με τις διαδικασίες (Duru et al. 2010) και στο ότι μία λύση η οποία βασίζεται αρκετά στο γράφημα θεωρούν ότι δεν έχει την ίδια αυστηρότητα με άλλες.

Όταν δόθηκε το γράφημα μια συνάρτησης με δύο κλάδους και ένα μεμονωμένο σημείο κάποιοι από τους φοιτητές είχαν την ανάγκη να ασχοληθούν με το μεμονωμένο σημείο κάτι το οποίο όμως δεν συνέβη όταν τους δόθηκε ο τύπος μιας συνάρτησης με τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά.

Στις περιπτώσεις όπου δίνονταν ο τύπος μιας συνάρτησης τα ποσοστά αποτυχίας μειώθηκαν σημαντικά. Ένας επιπλέον λόγος που μπορεί να συμβαίνει αυτό είναι ότι πολλές φορές ένα γράφημα «εγκλωβίζει» τον φοιτητή στην αντίληψη ότι πρέπει να είναι συνεκτικό. Είναι συχνή η χρήση οπτικών ερεθισμάτων κατά τον έλεγχο της συνέχειας και η επιχειρηματολογία με εκφράσεις όπως «μονοκόμματο γράφημα», «λείο», «απουσία απότομων στροφών», «απουσία αλμάτων» κ.α. όπως φάνηκε και στην έρευνα των Tall και Vinner (1981).

Σύμφωνα με έρευνα του Nair (2010) ορισμένοι φοιτητές θεωρούν ότι αν μια συνάρτηση έχει για πεδίο ορισμού όλο το R τότε είναι πάντα συνεχής. Παρ' όλα αυτά όταν τους δίνεται το γράφημα μίας συνάρτησης που ισχύει κάτι τέτοιο αλλά σε ένα σημείο το γράφημα διακόπτεται και εκεί η συνάρτηση έχει ένα μεμονωμένο σημείο την χαρακτηρίζουν με ευκολία ως ασυνεχή. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα παρουσιάστηκε και στην παρούσα έρευνα, εικάζουμε πως στο άκουσμα της φράσης μια συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού όλο το R ο φοιτητής ανασύρει στη μνήμη του ένα συνεκτικό γράφημα, όταν όμως του δοθεί ένα γράφημα το οποίο έχει το συγκεκριμένο πεδίο ορισμού αλλά έχει και ένα μεμονωμένο σημείο αυτό τον φέρνει σε σύγκρουση με τη «συνεκτική αντίληψη» που έχει.

Μεγάλη σύγχυση παρουσίασαν οι φοιτητές όταν τους δόθηκε το γράφημα μίας συνάρτησης με μεμονωμένα σημεία. Ορισμένοι ισχυρίστηκαν πως δεν έχει νόημα η μελέτη της συνέχειας. Κάτι τέτοιο οφείλεται στην αδυναμία χρήσης του ορισμού του πανεπιστημίου, αφού προσέγγισαν το συγκεκριμένο θέμα μέσω της χρήσης του ορισμού του λυκείου αδυνατώντας όμως να τον εφαρμόσουν καθώς έλλειπαν τα σημεία συσσώρευσης. Μία άλλη ομάδα φοιτητών χαρακτήρισε ως ασυνεχή την συνάρτηση διότι έχει μεμονωμένα σημεία, ενώ κάποιοι προσπάθησαν λανθασμένα να εφαρμόσουν τον ορισμό του λυκείου. Εντύπωση προκαλεί πως ακόμα και αυτοί που την χαρακτήρισαν ως συνεχή διότι αποτελείται από μεμονωμένα σημεία αδυνατούσαν να αποδείξουν τον ισχυρισμό τους.

Στο σημείο αυτό παρ’ ότι αρχικά δεν αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης προέκυψε μία μεγάλη κατηγορία φοιτητών. Στη συγκεκριμένη κατηγορία οι φοιτητές χαρακτήρισαν τη συνέχεια κάνοντας επίκληση σε φράσεις όπως: «μεμονωμένα σημεία άρα συνεχής», «συνεχής ως πολυωνυμική», «συνεχής ως σταθερή συνάρτηση», «ασυνεχής από πυκνότητα ρητών αρρήτων», «το γράφημα δεν διακόπτεται στο πεδίο ορισμού της» αδιαφορώντας για την απόδειξη του ισχυρισμού τους ή μη μπορώντας ,παρόλο που τους ζητούνταν, να τον αποδείξουν όπως συνέβη και στην έρευνα των Tall και Vinner (1981) .

Η αποκλειστική μελέτη πολυωνυμικών και εκθετικών συναρτήσεων οι οποίες είναι συνεχείς οδήγησε σε μια γενίκευση για την συνέχεια. Όπως βλέπουμε οι φοιτητές πολλές φορές συγκρατούν φράσεις από το μάθημα, με αποτέλεσμα για αυτούς μια συνάρτηση με μεμονωμένα σημεία να πάντα είναι συνεχής, αδυνατώντας όμως να αιτιολογήσουν γύρω από τον ισχυρισμό τους καθώς δε κατανοούν σε βάθος τις διαδικασίες ή τις έννοιες που περιέχει η κάθε φράση.

Θα ήταν σημαντικό οι διδάσκοντες να δώσουν ιδιαίτερη σημασία στην εννοιολογική κατανόηση της συνέχειας από τους μαθητές και στον εμπλουτισμό του μαθήματός τους από παραδείγματα από όλα τα είδη αναπαράστασης μια συνάρτησης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: Some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *32*(4), 487-500. doi: 10.1080/00207390010022590

Cornu, B. (1991). Limits. In Tall D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Duru, A., Köklü, Ö., & Jakubowski, E. (2010). Pre-service mathematics teachers’ conceptions about the relationship between continuity and differentiability of a function. *Scientific Research and Essays, 5*, 1519-1529.

Duval, R. The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1*(2), p. 1-16, 2002.

Ferrini-Mundy J, Graham KG (1994). Research in calculus learning: Understanding limits, derivatives, and integrals. In E. Dubinsky and J. Kaput (Eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics: Preliminary Analyses and Results*. Washington, DC: Mathematical Association of America, pp. 31-45.

Kaput, J. Democratizing access to calculus: New routes to old roots. In: Schoenfeld, A. (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale, NJ, USA: Lawrence Erlbaum, 1994. p. 77 – 156.

Karatas, Ilhan; Guven, Bulent; Cekmez, Erdem ‘A Cross-Age Study of Students' Understanding of Limit and Continuity Concepts’ Boletim de Educação Matemática, *24*(38), abril, 2011, pp. 245-264 Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Rio Claro, Brasil

Lauten AD, Graham KG, Ferrini-Mundy J (1994). Student understanding of basic calculus concepts: Interaction with the graphics calculator. J. *Math. Behav*., *13*(2): 225-237.

Nair Sarada Ginja (2010). ‘College Students’ Concept Images of Asymptotes, Limits, and Continuity of Rational Functions’ *Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree Doctor of Philosophy in the Graduate School of The Ohio State*, UniversityCollege of Education and Human Ecology, The Ohio State

Takaci Durdica, Pesic Duska, Tatar Jelena: (2003) : ‘An introduction to the continuity of functions using scientific workplace’ *The teaching of mathematics* Vol.*VI*,2, σελ.105-112

Tall, D., & Vinner, Sh. (1981), ‘Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity’, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151–169.

Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΙΣΟΔΥΝΑΜΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΣΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ Ε’ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Βοτάνης Πασχάλης, Κασάρη Γεωργία, Μακαντάσης Ιωάννης, Τσιρικίδου Γενοβέφα

Εκπ/κοί Α’βάθμιας, MSc «Διδακτική των Μαθηματικών»

pvotanis@gmail.com, gkasari@yahoo.gr, makantasis@gmail.com
veffapapa@gmail.com,

Είναι χαρακτηριστικό ότι στην τάξη των μαθηματικών δίνεται έμφαση στη διαδικαστική γνώση των μαθητών για τα ισοδύναμα κλάσματα και όχι στην εννοιολογική. Για τον λόγο αυτό, η παρούσα εργασία εξετάζει ζητήματα μάθησης και διδασκαλίας της έννοιας των ισοδύναμων κλασμάτων και, βάσει διαφόρων προτάσεων που μελετώνται, καταλήγει στη διαμόρφωση μιας διδακτικής προσέγγισής της με απώτερο σκοπό την εννοιολογική κατανόηση του μαθητή.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια του κλάσματος αποτελεί αναμφίβολα μία μαθηματική έννοια η οποία, αν και την τελευταία εικοσαετία έχει απασχολήσει μεγάλο αριθμό ερευνητών ψυχολόγων και εκπαιδευτικών των μαθηματικών, εξακολουθεί να θέτει ερωτήματα προς διερεύνηση (Σταφυλίδου, 2001). Μία επιμέρους “μεγάλη ιδέα” που ενυπάρχει στη βασική στοχοθεσία της μαθηματικής εκπαίδευσης ως προς τους κλασματικούς αριθμούς αφορά στην ισοδυναμία των κλασμάτων, καθώς συμβάλλουν στην ενίσχυση της εννοιολογικής κατανόησης των κλασμάτων ευρύτερα.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

Από τη στιγμή της γέννησης ενός ατόμου υποστηρίζεται πως η επαφή του με το περιβάλλον το καθιστά ικανό να κατασκευάσει νοητικά σχήματα για καθετί που το περιβάλλει, προκειμένου να μπορέσει να δραστηριοποιηθεί λειτουργικά σε αυτό. Τα νοητικά αυτά σχήματα έχουν πολύ σημαντική θέση στη διδασκαλία των μαθηματικών και ιδιαίτερα των ρητών αριθμών, καθώς η ανάπτυξή τους, εκ μέρους των μαθητών, ενισχύει την εννοιολογική τους κατανόηση.

Σύμφωνα με την Χρυσανθακοπούλου (2012), οι ρητοί αριθμοί εμφανίζονται με τα εξής νοητικά σχήματα: μέρος–όλο, πηλίκο, λόγος, μέτρηση και τελεστής. Η πλήρης κατανόηση, λοιπόν, των ρητών αριθμών απαιτεί την κατανόηση, όχι μόνο κάθε επιμέρους νοητικού σχήματος από τα παραπάνω, αλλά και της μεταξύ τους αλληλεπίδρασης. Πιο συγκεκριμένα, η ικανότητα μετάφραση ενός κλάσματος ως μέρος-όλο εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την ικανότητα μερισμού μιας συνεχούς ποσότητας ή ενός συνόλου διακριτών ποσοτήτων σε ίσα μέρη ή σύνολα (Lesh & Landau, 1983).

Κατά τον Wu (2002), τα ισοδύναμα κλάσματα ορίζονται ως "τα κλάσματα που αντιστοιχούν στην ίδια ποσότητα, αλλά έχουν διαφορετικά ονόματα". Κατ' επέκταση, δύο κλάσματα θεωρούνται ισοδύναμα όταν ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας. Λόγου χάρη, το κλάσμα ⅓ έχει ως κλάση ισοδυναμίας την {1/3, 2/6, 3/9...}, που σημαίνει ότι είναι ανταλλάξιμο με οποιοδήποτε άλλο κλάσμα αυτής της κλάσης, που αποτελείται από άπειρους κλασματικούς αριθμούς (Skemp, 1986).

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΜΑΘΗΣΗΣ

Η εννοιολογική κατανόηση στα κλάσματα απαιτεί κυρίαρχα από τους μαθητές την ανάπτυξη ικανοτήτων πραγματοποίησης συνδέσεων και συγκρίσεων μεταξύ κλασματικών μοντέλων. Ακόμη, ιδιαίτερα σημαντική είναι η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να αναγνωρίζουν ότι ένα κλάσμα αποτελεί μία αναπαράσταση ενός αριθμού με πολλές "παραστάσεις" (Hansen et al., 2015· Wong & Evans, 2007).

Η έννοια της ισοδυναμίας κλασμάτων αποτελεί μία ιδιαίτερα σημαντική και αφηρημένη μαθηματική ιδέα, καθώς η γνώση των μαθητών σχετικά με τους φυσικούς αριθμούς (π.χ. 1+2=2+1) διαφέρει από την αντίστοιχη γνώση για τους κλασματικούς αριθμούς (π.χ. ½=2/4) (Ni, 2001). Μάλιστα, η πολλαπλασιαστική φύση της υπό μελέτη έννοιας θεωρείται ως κύρια πηγή δυσκολίας των μαθητών να εμβαθύνουν σε αυτήν. Στο πλαίσιο αυτό, η Empson (2001) ισχυρίζεται πως οι ποικίλες στρατηγικές που ενδεχομένως συνάπτουν οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με τα ισοδύναμα κλάσματα, όχι μόνο καταδεικνύουν την αναπτυσσόμενη κατανόησή τους για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, αλλά συνάμα συμβάλλουν στη βαθύτερη καλλιέργεια της ικανότητας συσχέτισης και επεξεργασίας βασικών μαθηματικών ιδεών.

Εν συνεχεία, οι Lesh & Landau (1983) αναφέρουν ότι οι αναπαραστάσεις είναι ιδιαίτερα σημαντικές, καθώς βελτιώνουν την κατανόηση και χρήση των νοητικών σχημάτων για τα ισοδύναμα κλάσματα, ενώ παράλληλα οδηγούν τη σκέψη των παιδιών να περάσει από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο. Οι πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης παρέχουν στους μαθητές τη δυνατότητα να πραγματοποιήσουν "μεταφράσεις", προκειμένου οι ιδέες τους να αποκτήσουν νόημα. Έναν καλό τρόπο αναπαράστασης ισοδύναμων κλασμάτων ή της σχέσης μέρος–όλο αποτελεί η αναδίπλωση ενός χαρτιού.

Σε πολλούς μαθητές διαπιστώνεται το φαινόμενο της ακατάλληλης μεταφοράς των χαρακτηριστικών και ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών σε μη φυσικούς αριθμούς (Vamvakoussi, Van Dooren & Verschaffel, 2012). Αυτό σχετίζεται, κατά την Κολέζα (2000), με την κυρίαρχη θέση των φυσικών αριθμών στο περιβάλλον και στις εμπειρίες των μαθητών, εις βάρος των αναπαραστάσεων των ρητών αριθμών. Έτσι, είναι αρκετά δύσκολο για έναν μαθητή να κατανοήσει για παράδειγμα την έκφραση "⅓ του δέντρου".

Επιπλέον, επισημαίνεται ότι πολλοί μαθητές αδυνατούν να κατανοήσουν το κλάσμα ως έναν αριθμό, κυρίως εξαιτίας της μονομερούς αναπαράστασής του ως μέρος ενός όλου στη διδακτική-μαθησιακή διαδικασία (Lamon, 2001). Επακολούθως, εδραιώνεται η αντίληψη ότι αριθμητής και παρονομαστής αναπαριστούν ξεχωριστές οντότητες (μέρος - όλο).

Μία χαρακτηριστική μαθητική παρανόηση που προκύπτει από την προαναφερθείσα αντίληψη, κατά την Hart (1987), αποτελεί η δημιουργία ισοδύναμων κλασμάτων μέσα από την πρόσθεση του ίδιου αριθμού στον αριθμητή και στον παρονομαστή ενός κλάσματος. Ακόμη, άλλοι μαθητές τείνουν να θεωρούν ότι ο πολλαπλασιασμός ενός μόνο όρου του κλάσματος οδηγεί σε ισοδύναμο κλάσμα, ιδίως κατά την εμπλοκή τους σε καταστάσεις αλγοριθμικής επίλυσης προβλημάτων.

Στην έρευνα των Bana et al. (1997) βρέθηκε ότι πολύ μικρό ποσοστό των μαθητών σχολικής ηλικίας (περίπου 25%) είναι ικανό να αναγνωρίσει δύο ισοδύναμα κλάσματα. Αυτό συμβαίνει διότι πολλοί μαθητές επιδίδονται επιτυχώς στην κατασκευή ισοδύναμων κλασμάτων αλγοριθμικά, χωρίς ωστόσο να αντιλαμβάνονται ή να είναι σε θέση να εξηγήσουν το εννοιολογικό υπόβαθρο αυτής της διαδικασίας που εφαρμόζουν.

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Η Lamon (2001) παραθέτει έναν προβληματισμό σχετικά με τη διδασκαλία των ισοδύναμων κλασμάτων και ειδικότερα τον λόγο για τον οποίο δύο κλάσματα όμοιας αξίας χαρακτηρίζονται ισοδύναμα και όχι ίσα. Κατά τους ερευνητές, ο αναστοχασμός τέτοιου τύπου είναι καλό να ενσωματώνεται στη διδασκαλία, μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες και έργα, έτσι ώστε οι μαθητές να πορευθούν προς την εννοιολογική αλλαγή.

Οι εκπαιδευτικοί οφείλουν επιπλέον να αντιληφθούν τη σημασία της ενσωμάτωσης πολλαπλών αναπαραστάσεων (εικόνες, σύμβολα, σχήματα, αντικείμενα κ.ά.) στη διδασκαλία του συνόλου των ρητών αριθμών. Η αξία αυτή έγκειται στο γεγονός ότι μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές στη μετάβαση της σκέψης τους από συγκεκριμένα νοητικά σχήματα σε αφηρημένα, καθώς και να εμβαθύνουν σε κεντρικές μαθηματικές έννοιες (Vamvakousi & Vosniadou, 2007· Χρυσανθακοπούλου, 2012).

Ένα τέτοιο είδος αναπαράστασης αποτελούν τα χειραπτικά υλικά. Αυτά υποστηρίζεται πως καλλιεργούν την ικανότητα των μαθητών να ερμηνεύουν τα ισοδύναμα κλάσματα, να αναπτύσσουν ποικίλους τρόπους επίλυσης προβλημάτων αλλά και μεταγνωστικές στρατηγικές κατά την προσπάθειά τους να υπερβούν τυχόν εννοιολογικά εμπόδια που συναντούν.

Μία άλλη αναπαράσταση που συμβάλλει σε μεγάλο βαθμό στην εννοιολογική κατανόηση της ισοδυναμίας των κλασμάτων είναι η αριθμογραμμή. Συγκεκριμένα, μπορεί να συνδράμει στην κατανόηση σημαντικών ιδιοτήτων των κλασμάτων, όπως για παράδειγμα την ιδέα της πυκνότητας των ρητών αριθμών και της σχέσης τους με τους φυσικούς (Saxe et al., 2007). Λόγου χάρη, η χρήση μιας αριθμογραμμής χωρισμένης σε ίσα μέρη όπου οι μαθητές καλούνται να τοποθετήσουν κλασματικούς αριθμούς (π.χ. 6/8, 3/8) και να τους αντιστοιχίσουν με κλάσματα ίσης αξίας (π.χ. το 12/16) στο ίδιο σημείο της αριθμογραμμής, βοηθάει στη διαπίστωση της ισοδυναμίας δύο κλασμάτων (Fazio & Siegler, 2011).

Συνεχίζοντας, οι Murray et al. (1999) εξαίρουν τα οφέλη της χρήσης αναπαραστάσεων που δημιουργούν οι ίδιοι οι μαθητές κατά τη διδασκαλία, στηριζόμενοι στις γνώσεις και εμπειρίες που κατέχουν από την καθημερινή τους ζωή. Εν τούτοις, οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία περιορίζονται συχνά σε αναπαραστάσεις επιφάνειας, όπως για παράδειγμα πίτσες ή τετράγωνα σχήματα, με συνέπεια να δημιουργείται στους μαθητές η εντύπωση πως το κλάσμα αντιπροσωπεύει μόνο την έκφραση του μέρους ενός όλου.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΕΡΕΥΝΗΘΕΙ

Οι διδακτικές προτάσεις που έχουν ερευνηθεί στηρίζονται στην ανάπτυξη τριών ικανοτήτων για την κατάκτηση μιας μαθηματικής έννοιας. Οι ικανότητες αυτές αφορούν στην αναγνώριση της έννοιας μέσα από ποικιλία αναπαραστάσεών της, στον ευέλικτο χειρισμό της έννοιας ανάμεσα στις ποιοτικά διαφορετικές αναπαραστάσεις της καθώς επίσης και στη μετάφραση της έννοιας από τη μία μορφή αναπαράστασης στην άλλη (Γαγάτσης κ.ά., 2001).

Πολλοί ερευνητές προτείνουν τη διδασκαλία των ισοδύναμων κλασμάτων μέσα από ρεαλιστικές προβληματικές καταστάσεις, στις οποίες ζητείται από τους μαθητές η ερμηνεία με τη βοήθεια αναπαραστάσεων που κατασκευάζουν οι ίδιοι. Ενδεικτικά, η Empson (2001) βρήκε στην έρευνά της ότι τα παιδιά επινοούν ποικίλες στρατηγικές που συμβάλουν στην πλουσιότερη εννοιολογική κατανόηση της ισοδυναμίας των κλασμάτων, μέσα από την αλληλοσύνδεση διαφορετικών μαθηματικών ιδεών, δίνοντάς τους μία προβληματική κατάσταση σχετικά με τον δίκαιο μερισμό 8 τουρτών σε 24 παιδιά.

Μια διαφορετική διδακτική πρόταση για την ισοδυναμία κλασμάτων, σύμφωνα με τη Δημοσθένους (2012), είναι η χρήση του αναπαραστατικού εργαλείου της αριθμογραμμής. Πιο συγκεκριμένα, δόθηκε στους μαθητές μία διπλή αριθμογραμμή, χωρισμένη σε διαφορετικό πλήθος τμημάτων η καθεμία που αντιστοιχούσαν ωστόσο στην ίδια απόσταση. Οι μαθητές κλήθηκαν να αναγνωρίσουν ότι οι αποστάσεις αυτές εκφράζονται με ισοδύναμα κλάσματα. Έτσι, μπόρεσαν να οδηγηθούν στην αναδιοργάνωση της γνώσης τους για τους κλασματικούς αριθμούς και για την ισοδυναμία των κλασμάτων, ξεπερνώντας τυχόν παρανοήσεις ή εννοιολογικά εμπόδια.

Στηριζόμενοι στις αρχές τις Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης, πολλοί ερευνητές προτείνουν τη χρήση ψηφιακών εργαλείων για τη διδασκαλία των ισοδύναμων κλασμάτων. Ειδικότερα, κατά τη Ρ.Μ.Ε., η αξιοποίηση της τεχνολογίας δύναται να συμβάλλει στην ενίσχυση της κατανόησης μαθηματικών εννοιών καθώς επίσης και στην καλλιέργεια μαθηματικών και τεχνολογικών δεξιοτήτων (Κολέζα, 2009). Σε έρευνα των Suh & Heo (2005) βρέθηκε ότι οι μαθητές που χρησιμοποίησαν ψηφιακά εργαλεία στην ισοδυναμία κλασμάτων κατόρθωσαν να πραγματοποιήσουν συνδέσεις μεταξύ γραφικών και συμβολικών αναπαραστάσεων, να πειραματιστούν και να ελέγξουν υποθέσεις μέσω του διπόλου δοκιμής και λάθους, να επικεντρώσουν για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα την προσοχή τους στα έργα που εκτελούσαν και, τέλος, να μοντελοποιήσουν τη φύση της σκέψης τους (Hanset et. al, 2015).

Μία πρόταση αξιοποίησης της τεχνολογίας αποτελεί το "Εργαστήρι των Κλασμάτων" (Fractions Lab) των Hanset et. al (2015). Το συγκεκριμένο πρόγραμμα υιοθετεί ολιστική προσέγγιση, ενθαρρύνει την ενεργό συμμετοχή των μαθητών και δίνει σε αυτούς τη δυνατότητα να έρθουν σε επαφή με ποικίλες κλασματικές αναπαραστάσεις (περιοχές, αριθμογραμμή, σύνολα αντικειμένων, μετρήσεις χωρητικότητας και σύμβολα) ή να ελέγξουν την ισοδυναμία τους. Τα έργα που δίνονται στους μαθητές εδώ αφορούν στην (α) δημιουργία ισοδύναμων κλασμάτων π.χ. του κλάσματος ⅗, (β) εύρεση του μη ισοδύναμου κλάσματος μέσα σε ένα σύνολο κλασμάτων, (γ) δημιουργία ενός κλάσματος ισοδύναμου π.χ. με το ¾ έτσι ώστε να έχει παρονομαστή π.χ. το 12 και (δ) εξήγηση της ορθότητας μίας πρότασης, όπως "2/6=1/12 επειδή 2x6=12".

Ένα επιμέρους εργαλείο που προτείνεται στο σύνολο της έρευνας με σκοπό να υποστηρίξει τους μαθητές στην κατανόηση των ισοδύναμων κλασμάτων είναι το "εργαλείο μερισμού" (partitioning tool). Με αυτό οι μαθητές μπορούν να χωρίσουν τα μέρη μιας αναπαράστασης, να μελετήσουν τις κλασματικές αναπαραστάσεις που προκύπτουν και να ανακαλύψουν μοτίβα μεταξύ του μεταβαλλόμενου κλασματικού συμβόλου. Στα αποτελέσματα της έρευνας, βρέθηκε ότι μερικοί μαθητές που χρησιμοποίησαν αυτό το εργαλείο ήταν σε θέση να αξιοποιήσουν τη διαίσθησή τους και να την αμφισβητήσουν ξεπερνώντας τις παγιωμένες αντιλήψεις τους για τους φυσικούς αριθμούς, χωρίς ωστόσο να καταφεύγουν σε απλούς διαδικαστικούς υπολογισμούς (Hanset et. al, 2015).

Μελετώντας, λοιπόν, εκτενώς διδακτικές προτάσεις που έχουν ερευνηθεί ως προς τα ισοδύναμα κλάσμα, γίνεται αντιληπτό ότι η κατανόησή τους επιτυγχάνεται κατά κύριο λόγο μέσω της κατάκτησης της ίδιας της έννοιας του κλάσματος από τον ίδιο τον μαθητή. Ακόμη, καταλυτικός είναι και ο ρόλος του εκπαιδευτικού ως καθοδηγητή στην ανάπτυξη του μαθηματικού εγγραμματισμού των μαθητών.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ Ε' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Απώτερος σκοπός της διδακτικής προσέγγισης που παρουσιάζεται είναι η εννοιολογική κατανόηση της ισοδυναμίας των κλασμάτων μέσα από πολλαπλές καταστάσεις. Ειδικότερα, επιμέρους στόχος είναι η αναγνώριση και δημιουργία ισοδύναμων κλασμάτων σε διάφορα μοντέλα και αναπαραστατικά μέσα. Ως προς τα προαπαιτούμενα της διδασκαλίας, οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν την έννοια του κλάσματος, να μπορούν να ονομάσουν διάφορα κλάσματα, να συγκρίνουν κλασματικές μονάδες καθώς και να είναι εξοικειωμένοι με τη χρήση της αριθμογραμμής. Οι δραστηριότητες ακολουθούν συγκεκριμένη σειρά, καθώς οι μαθητές μεταβαίνουν από τη μία φάση στην άλλη αφού πρώτα κατακτήσουν τους στόχους της καθεμίας. Έτσι, η προσέγγιση ξεκινά από την κατανόηση της σχέσης ισοδυναμίας ως μία ειδική γνώση, η οποία γενικεύεται και κατανοείται εννοιολογικά με την κατασκευή ισοδύναμων κλασμάτων.

Με τον τρόπο αυτό ο μαθητής καταλήγει στη μεταγνώση μέσα από την ενασχόλησή του με την πυκνότητα των ρητών αριθμών.

Α' φάση (Έναρξη): Δραστηριότητα εκκίνησης με χρήση μοντέλων

Στην Α' φάση της διδασκαλίας γίνεται χρήση χειραπτικού υλικού προκειμένου οι μαθητές να αντιληφθούν ότι υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί τρόποι να αναπαραστήσουν ένα κλάσμα. Για τον σκοπό αυτό δίνεται στους μαθητές ένα φύλλο χαρτί και ζητείται να το διπλώσουν μία φορά στη μέση. Οι μαθητές έτσι αντιλαμβάνονται διαισθητικά ότι τα μέρη του χαρτιού συμπίπτουν και είναι ίσα μεταξύ τους ως κομμάτια του ίδιου χαρτιού. Αυτό αποτελεί μία πρώτη ένδειξη της κατανόησης της σχέσης ισοδυναμίας δύο μεγεθών και κατ' επέκταση των κλασμάτων.

Στην περίπτωση αυτή οι μαθητές σημειώνουν σε καθένα από τα δύο μέρη του χαρτιού το κλάσμα $\frac{1}{2}$. Στη συνέχεια, ζητείται να διπλώσουν το χαρτί άλλη μία φορά στη μέση και με τον ίδιο τρόπο σημειώνεται το κλάσμα $\frac{1}{4}$ σε κάθε κομμάτι που προκύπτει. Απώτερος σκοπός αυτής της φάσης είναι οι μαθητές να αντιληφθούν ότι τα δύο μικρότερα κομμάτια του ίδιου χαρτιού (το $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$) είναι ίσα με ένα μεγαλύτερο κομμάτι, δηλαδή το μισό χαρτί ($\frac{1}{2}$). Ακολουθεί μία ακόμη δίπλωση του χαρτιού στη μέση, από την οποία αντιλαμβάνονται οι μαθητές ότι κάθε κομμάτι που προκύπτει αποτελεί το $\frac{1}{8}$ του χαρτιού. Συγκρίνοντας τα κομμάτια που δημιουργούνται από όλες τις διπλώσεις συνολικά, οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν τις ακόλουθες σχέσεις: $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$.

Β' φάση: Δραστηριότητα ανακάλυψης

Στη Β' φάση γίνεται αρχικά εργασία των μαθητών σε ομάδες, στις οποίες μοιράζεται χειραπτικό υλικό "lego". Συγκεκριμένα, δίνονται σε κάθε ομάδα τουβλάκια 2x1, 2x2, 2x3 και 2x6 και τα μέλη κάθε ομάδας καλούνται να σχηματίσουν μία μονάδα (2x6) με διάφορους τρόπους, συμπληρώνοντας το αντίστοιχο φύλλο εργασίας (1). Η δραστηριότητα αυτή εξυπηρετεί στη διερεύνηση και συσχέτιση κλασματικών μεγεθών μέσα από την ενασχόληση των μαθητών με υλικό με το οποίο είναι εξοικειωμένοι από την καθημερινή τους ζωή. Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με την ομαδοσυνεργατική μάθηση, προσφέρει επιπλέον κίνητρο συμμετοχής στη διαδικασία ανακάλυψης και κατάκτησης της έννοιας της ισοδυναμίας των κλασμάτων.

Στη συνέχεια, οι ομάδες των μαθητών παρουσιάζουν τα ευρήματά τους και ανταλλάσσουν απόψεις σχετικά με τους τρόπους σκέψης τους. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στη φάση αυτή είναι συντονιστικός, προκειμένου οι μαθητές να συμμετέχουν ενεργά σε μαθηματικό διάλογο που απαιτεί διατύπωση και τεκμηρίωση συλλογισμών, αλλά και καθοδηγητικός, έτσι ώστε οι μαθητές να γενικεύσουν και συμπεράνουν πότε δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα. Με αφορμή τον διάλογο αυτόν γίνεται το πέρασμα στην επόμενη δραστηριότητα, που ονομάζεται το κουτί των «κλασμάτων».

Στη συγκεκριμένη δραστηριότητα ζητείται από τους μαθητές να εντοπίσουν, να χρωματίσουν και να σημειώσουν όσα κλάσματα είναι ισοδύναμα με τα κλάσματα ½, ⅓ και ⅕ σε ένα φύλλο εργασίας (2). Σκοπός αυτής της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να είναι ικανοί να αναγνωρίζουν ισοδύναμα κλάσματα, να τα εντοπίζουν και να τα συσχετίζουν με άλλες κλασματικές μονάδες στο ίδιο πλαίσιο αναπαράστασης.

Γ’ φάση: Πρόκληση καταστάσεων γνωστικής σύγκρουσης (“η πλάνη της πίτσας”)

Στη φάση αυτή παρουσιάζεται στους μαθητές η εξής προβληματική κατάσταση: “Η Μαριάννα και ο Χαράλαμπος είχαν δύο πίτσες. Ο Χαράλαμπος έφαγε το ½ της μίας πίτσας και η Μαριάννα έφαγε τα 2/4 της άλλης πίτσας, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο Χαράλαμπος υποστηρίζει ότι έφαγαν και οι δύο την ίδια ποσότητα πίτσας”. Οι μαθητές καλούνται στην περίπτωση αυτή να υποστηρίξουν με επιχειρήματα αν συμφωνούν ή όχι με την άποψη του Χαράλαμπου. Σκοπός σε αυτή τη φάση είναι αφενός η διαπίστωση της εννοιολογικής κατανόησης του κλάσματος από τους μαθητές και αφετέρου η αναγνώριση καταστάσεων στις οποίες δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα ή όχι.

Δ’ φάση: Κατασκευή ισοδύναμων κλασμάτων με χρήση Τ.Π.Ε.

Η Δ’ φάση αποτελείται από τη χρήση τεχνολογιών πληροφορίας στην εκπαίδευση και συγκεκριμένα του λογισμικού που προτείνεται από το CCSSM (Fraction Machine Numerator http://www.tesiboardus.com/activity/Fraction-Machine-Numerator-380/ Denominatorhttp://www.tesiboardus.com/activity/Fraction-Machine-Denominator-379). Η δραστηριότητα προβάλλεται στον διαδραστικό πίνακα και ο εκπαιδευτικός καλεί τους μαθητές να συμπληρώσουν τον αριθμητή ή τον παρονομαστή ενός κλάσματος έτσι ώστε να είναι ισοδύναμο με το δοσμένο κλάσμα. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο μαθητής μπορεί να επιβεβαιώσει εάν η απάντησή του είναι σωστή ή λανθασμένη μέσω της οπτικής απεικόνισης που παρουσιάζεται για κάθε κλάσμα.

Ε’ φάση: Αριθμογραμμή

Στη φάση αυτή δίνεται στους μαθητές φύλλο εργασίας (3) στο οποίο ζητείται να τοποθετήσουν ένα δοσμένο κλάσμα στην αριθμογραμμή και στη συνέχεια να δημιουργήσουν τουλάχιστον ένα ισοδύναμο κλάσμα στην ίδια θέση. Επιπλέον, δίνεται μια κενή αριθμογραμμή στην οποία οι μαθητές καλούνται να τοποθετήσουν ομώνυμα κλάσματα και να δημιουργήσουν όσο το δυνατόν περισσότερα ισοδύναμα κλάσματα ανάμεσά τους. Έτσι, επιχειρείται η κατανόηση της έννοιας της πυκνότητας των ρητών αριθμών και η σύνδεσή της με την κλάση ισοδυναμίας των κλασμάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Γαγάτσης, Α., Ιωάννου, Κ., Σιημητρά- Κωνσταντίνου, Α., & Χριστοδουλίδου, Ο. (2006). Γιατί οι μαθητές δυσκολεύονται στα κλάσματα; Στο Ε. Φτιάκα, Α. Γαγάτσης, Ι. Ηλία, & Μ. Μοδέστου (Εκδ.), *Πρακτικά 9ου Παγκύπριου Συνεδρίου Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου & Κ.Ο.Ε.Ε.* (σσ. 99-110). Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Δημοσθένους, Μ. (2012). *Διερεύνηση του ρόλου των εξωτερικών αναπαραστάσεων στην κατανόηση των ρητών αριθμών στο Δημοτικό σχολείο: Η περίπτωση της αριθμητικής γραμμής* (Μεταπτυχιακή εργασία, Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών "Βασική και Εφαρμοσμένη Γνωσιακή Επιστήμη", Αθήνα, Ελλάδα).

Empson, S. B. (2001). Equal Sharing and the Roots of Fraction Equivalence. *Teaching Children Mathematics*, 7(7), 421-425.

Fazio, L., & Siegler, R. (2011). Fractions are numbers. *In Teaching Fractions* (Vol. 22). Geneva: International Academy of Education-International Bureau of Education.

Hansen, A., Mavrikis, M., Holmes, W., & Geraniou, E. (2015). Designing interactive representations for learning fraction equivalence. In N. Amado, & S. Carreira (Eds.), *Proceedings of the 12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* ICTMT, pp. 395-402. Faro, Portugal: University of Algarve

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών.* Αθήνα: Leader Books.

Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing: from fractions to rational numbers. In A. Cuoco & R. Curcio (Eds.). *The roles of representation in school mathematics*: 2001 NCTM Yearbook (pp. 146-165). Reston, Virginia: NCTM.

Σταφυλίδου, Σ. (2001). *Μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες μάθησης: Η Ανάπτυξη της Έννοιας του Κλάσματος* (Διδακτορική διατριβή, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα, Ελλάδα).

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in a rational numbers interval? Constraints, synthetic models and the effect of the number line. *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction*, 265-282.

Vamvakoussi, X., Dooren, W. V., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(3), 344-355. doi:10.1016/j.jmathb.2012.02.001.

Χρυσανθακοπούλου, Α. (2012). *Ο βαθμός κατανόησης από τους μαθητές της Γ' τάξης Δημοτικού, της έννοιας του κλάσματος ως αριθμού, του συμβολισμού του κλάσματος και των ισοδύναμων κλασμάτων, μετά από διδασκαλία με βάση το σχολικό βιβλίο* (Μεταπτυχιακή εργασία, Τμήμα Επιστημών της Εκπαίδευσης και της Αγωγής στην Προσχολική ηλικία, Πάτρα, Ελλάδα).

Wong, E., & Evans, D. (2007). Students' Conceptual Understanding of Equivalent Fractions. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, pp. 824-833. Freemantle, Western Australia: MERGA.

ΧΩΡΙΚΗ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ: ΣΥΜΜΑΧΟΙ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Γαγάτσης Αθανάσιος*, Γρίδος Παναγιώτης , Σαμαρτζής Πέτρος****

*Αντιπρύτανης Πανεπιστημίου Κύπρου, **Φοιτητές ΠΜΣ Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών ΕΚΠΑ

gagatsis@ucy.ac.cy , p.gridos@hotmail.com , pisah_one@hotmail.com

Η παρούσα έρευνα εξετάζει τη χωρική ικανότητα, τη δημιουργικότητα και τη σχέση των δύο εννοιών με τη μαθηματική απόδειξη. Η έρευνα πραγματοποιείται σε 94 μαθητές Γ΄ πρότυπου γυμνασίου. Τα έργα χωρικής ικανότητας αφορούν στις κατηγορίες «οπτικοποίηση», «σχέσεις εννοιών στο χώρο» και «ευελιξία διεκπεραίωσης». Σε πρόβλημα γεωμετρίας πολλαπλών λύσεων ερευνούμε δύο χαρακτηριστικά της δημιουργικότητας την ευχέρεια και την ευελιξία. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι για να βελτιώσουμε την ικανότητα γεωμετρικής απόδειξης των μαθητών χρειάζεται να έχουμε βελτίωση προς δύο κατευθύνσεις, την ευελιξία λύσεων και την λειτουργική σύλληψη των μαθητών σε σχέση με τα σχήματα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η χωρική αντίληψη είναι ένα θέμα το οποίο απασχολεί τους ερευνητές της μαθηματικής παιδείας. Από τη φύση της η χωρική ικανότητα αποτελεί ένα πολύπλοκο θέμα με διαφορετικές ερμηνείες από κάθε ερευνητή και αποτελεί σημαντικό γνωστικό παράγοντα στη μάθηση της γεωμετρίας (Tso & Liang, 2002). Εκτός της ικανότητας αντίληψης των εννοιών του χώρου, η δημιουργικότητα αποτελεί άλλον ένα σημαντικό άξονα ερευνών, στον οποίο έχει επίσης δοθεί μεγάλη έμφαση και ιδιαίτερα στους τρόπους ανάπτυξής της (Mann, 2006). Η χωρική ικανότητα και η δημιουργικότητα συνδέονται μεταξύ τους αλλά και με διάφορους τομείς της διδασκαλίας και της μάθησης, όπως η καινοτομία (Coxon, 2006). Ωστόσο απουσιάζουν έρευνες που να αφορούν στη σχέση των δύο εννοιών με τη μαθηματική απόδειξη, η οποία κατέχει βασικό ρόλο στην εκπαιδευτική διαδικασία, καθώς οι μαθητές μπορούν να εμπλακούν με βασικές λειτουργίες όπως το να κατέχουν, συγκρίνουν και να συνθέτουν πολλές μαθηματικές ιδέες ταυτόχρονα.

Ερευνητικό πρόβλημα της εργασίας αποτέλεσε το πώς οι μαθητές ανταποκρίνονται σε έργα χωρικής ικανότητας και σε έργα δημιουργικότητας πολλαπλών λύσεων γεωμετρίας και ποια η σχέση των δύο εννοιών με τη γεωμετρική απόδειξη. Τα ερευνητικά ερωτήματα που εξετάστηκαν ήταν τα εξής: (α) Πως ανταποκρίνονται οι μαθητές σε έργα χωρικής ικανότητας και δημιουργικά έργα πολλαπλών λύσεων Γεωμετρίας; και (β) Ποια η σχέση των δύο εννοιών με τη μαθηματική απόδειξη;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Χωρική Ικανότητα

Με τον όρο χωρική αντίληψη ορίζεται η ικανότητα δημιουργίας νοερών εικόνων και ο χειρισμός αυτών των εικόνων (Lean & Clements, 1981). Σύμφωνα με τον Lohman(1996), η χωρική ικανότητα μπορεί να ορισθεί ως η ικανότητα γένεσης, διατήρησης, ανάκλησης και μετασχηματισμού καλώς δομημένων νοητικών εικόνων. Πιο πρόσφατα ο όρος καλύπτει αφ' ενός τις «δυναμικές χωρικές ικανότητες», αφ'- ετέρου την κίνηση του ατόμου σε ένα μεγάλης κλίμακας περιβάλλον, οπότε έχουμε «τις ευρείας κλίμακας περιβαλλοντικές χωρικές ικανότητες» (Hegarty & Waller, 2005).

Η χωρική ικανότητα σχετιζόμενη με τα μαθηματικά, ορίζεται, από τον Smith (1998), ως «η ικανότητα του ατόμου να λύνει προβλήματα, που έχουν κυρίως οπτικό-χωρικό περιεχόμενο, χρησιμοποιώντας τουλάχιστον κάποιο εικονικό ή γεωμετρικό στυλ νοητικών αναπαραστάσεων και / ή δραστηριότητες που σχετίζονται λειτουργικά με το οπτικό ή γεωμετρικό περιεχόμενο των έργων» (Olkun & Knaupp, 1999 στο Γαγάτσης, Καλογύρου & Πετρίδου, 2013). Τα άτομα με υψηλού επιπέδου χωρική αντίληψη είναι καλύτερα στο να μετασχηματίζουν, να ερμηνεύουν και να ταξινομούν Γεωμετρικά σχήματα, μοτίβα και διαγράμματα (English &Warren, 1995). Υπάρχει πληθώρα από τεστ στη χωρική αντίληψη αλλά και μια έντονη σύγχυση αναφορικά με το όνομα και το περιεχόμενό τους. Τα τεστ δεν αναλύονται με συνέπεια σε διακριτούς παράγοντες. Σε κάποιο βαθμό αυτή η σύγχυση είναι μόνο φαινομενική, εξαιτίας της διαφορετικής ονομασίας των τεστ από τον κάθε ερευνητή ή της χρήσης ίδιου ονόματος από τα διάφορα τεστ (Carroll, 1993). Ένα τέτοιο προτεινόμενο μοντέλο για την εύρεση της χωρικής αντίληψης των μαθητών, στηρίζεται στην ανάλυση του Carroll και χωρίζεται σε τρεις παράγοντες πρώτης τάξης, που αντικατοπτρίζουν τρεις επιμέρους ικανότητες: οπτικοποίηση, σχέσεις εννοιών στο χώρο και ευελιξία διεκπεραίωσης.

Δημιουργικότητα

Η δημιουργικότητα είναι ένας όρος που επινοήθηκε πρόσφατα, εμφανίστηκε στην βιβλιογραφία το 1950, αλλά εξακολουθούσε να λείπει από πολλά δημοφιλή περιοδικά μέχρι το 1960 (Piirto, 2004). Ωστόσο, μέχρι το τέλος του 20ου αιώνα, μια δίτομη εγκυκλοπαίδεια δημιουργικότητας από τους Runco & Pritzker, 1999, είχε δημοσιευθεί με συνεισφορά από δεκάδες επιστήμονες από διάφορους τομείς. Πλέον η σημασία της δημιουργικότητας έχει αυξηθεί ραγδαία στην εκπαίδευση και γενικότερα στην κοινωνία (Coxon, 2006). Μέσα στη σχολική τάξη, η δημιουργικότητα θεωρείται ότι μπορεί να βελτιώσει τη συμπεριφορά, τις κοινωνικές δεξιότητες, την αυτοεκτίμηση, τα κίνητρα και τις επιδόσεις (Bolden et al., 2010).

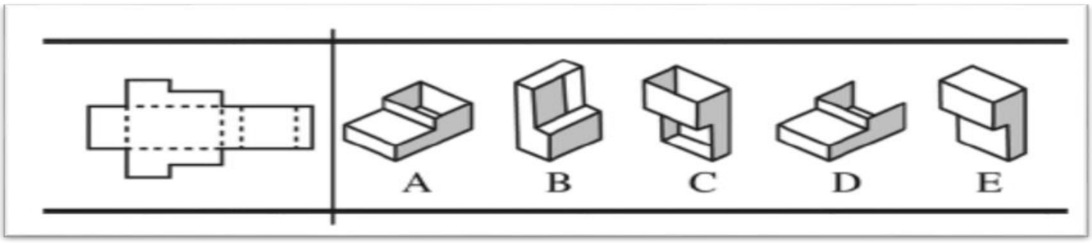
Δεν υπάρχει μοναδικός τρόπος για να ορισθεί ή να προσδιορισθεί η μαθηματική δημιουργικότητα (Leikin, 2009). Ο Torrance (1994) ορίζει τη δημιουργικότητα ως πολυδιάστατη. Ευχέρεια, ευελιξία, πρωτοτυπία και περίτεχνη λύση, είναι όλες πτυχές της δημιουργικότητας. Η ευχέρεια αναφέρεται στη ροή των ιδεών, τον αριθμό των ορθών λύσεων, και στη χρήση βασικών γνώσεων. Η ευελιξία συνδέεται με την εναλλαγή των ιδεών, την προσέγγιση ενός προβλήματος με διαφορετικούς ποιοτικά τρόπους και από διαφορετικές προοπτικές. Η πρωτοτυπία, αφορά στην ικανότητα του ατόμου να προσεγγίζει το πρόβλημα με καινούριο, μοναδικό τρόπο και να βρίσκει αντισυμβατική και μη αναμενόμενη λύση. Η περίτεχνη λύση, αφορά στην ικανότητα του ατόμου να σκέφτεται με σύνθετο τρόπο, να εξελίσσει τη δοσμένη ιδέα συνδυάζοντάς την με άλλες, να προχωρά σε γενικεύσεις, να καταλήγει σε σύνθετες απαντήσεις. Η δημιουργικότητα στη Γεωμετρία μπορεί να προκύψει μέσω προβλημάτων πολλαπλών λύσεων (Leikin, 2012). Τέλος, η έννοια της ευχέρειας και της ευελιξίας φαίνεται να συνδέονται εμφανιζόμενες σαν δίπολο (Leikin et.al, 2009).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΡΕΥΝΑΣ

Το δείγμα της παρούσας έρευνας αποτέλεσαν 94 μαθητές της Γ΄ τάξης Πρότυπου Γυμνασίου. Τα μέσα συλλογής των δεδομένων ήταν ένα ερωτηματολόγιο χωρικής ικανότητας και ένα πρόβλημα γεωμετρίας, τα οποία χορηγήθηκαν στους ίδιους μαθητές σε δύο φάσεις.

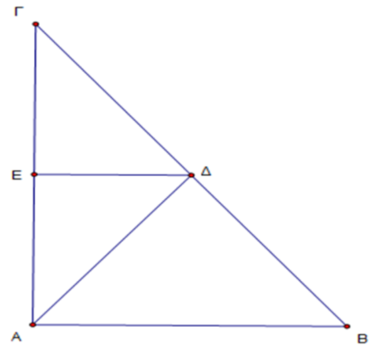
Η **πρώτη φάση** αφορούσε στη χωρική ικανότητα και δόθηκαν 12 λεπτά για την συμπλήρωση του ερωτηματολογίου που περιείχε εννέα έργα. Το ερωτηματολόγιο ήταν δομημένο σύμφωνα με το μοντέλο του Carroll (1993) και διακρίνεται από δύο επίπεδα παραγόντων: Αρχικά, χωρίζονται σε τρεις παράγοντες πρώτης τάξης, που αντικατοπτρίζουν τρεις επιμέρους ικανότητες: οπτικοποίηση(VZ), σχέσεις εννοιών στο χώρο(SP) και ευελιξία διεκπεραίωσης(CF). Στη συνέχεια, οι τρεις αυτοί παράγοντες χωρίζονται επιμέρους σε άλλους τρεις και οι εννέα αυτοί παράγοντες αποτελούν τις μεταβλητές του μοντέλου: για την οπτικοποίηση(VZ) διακρίνουμε [σύνθεση σχήματος(Vco1), δίπλωση σχήματος(Vpl2), ανάπτυγμα σχήματος(Vdi3) (εικόνα 1)], για τις σχέσεις εννοιών στο χώρο(SP) διακρίνουμε [σύγκριση κύβων(Spcom1), περιστροφή καρτών(Spca2), χέρια(Spha3)] και για την ευελιξία διεκπεραίωσης(CF) διακρίνουμε [κρυμμένες φιγούρες(Cfhi1), κρυμμένα μοτίβα(Cfhp2), επικάλυψη σχήματος(Cftr3)].

Στο μέρος αυτό παρουσιάζεται στα αριστερά ένα κομμάτι χαρτόνι το οποίο θα διπλωθεί κατά μήκος των διακεκομμένων γραμμών. Πιο από τα διπλανά στερεά θα σχηματισθεί;



Εικόνα 1: Έργο χωρικής ικανότητας (ανάπτυγμα σχήματος).

Η **δεύτερη φάση** αφορούσε στη δημιουργικότητα των μαθητών σε σχέση με την επίλυση του γεωμετρικού προβλήματος, το οποίο λυνόταν με πολλούς διαφορετικούς τρόπους με τα εργαλεία που διέθεταν οι μαθητές και απαιτούσε υψηλό βαθμό συγκέντρωσης τους. Τα χαρακτηριστικά της δημιουργικότητας, που μετρήθηκαν σύμφωνα με το μοντέλο του Torrance (1966), ήταν η Ευχέρεια (Flu) και η Ευελιξία (Fle). Η Ευχέρεια (Flu) βαθμολογήθηκε με βάση το πλήθος των σωστών λύσεων που έδωσε ο κάθε μαθητής, απάντηση η οποία έπαιρνε 0 όταν ο μαθητής δεν είχε καμία λύση (Geo0), 0,2-1 όταν ο μαθητής έλυνε την άσκηση με έναν τρόπο (Geo1) έως 5^+ τρόπους (Geo5^+). Η Ευελιξία (Fle) βαθμολογήθηκε με βάση τις διαφορετικές ποιοτικά λύσεις που έδωσε ο κάθε μαθητής. Διακρίνουμε 5 κατηγορίες λύσεων και βαθμολογούμε αρχικά με 0/1 αν ο μαθητής έλυσε την άσκηση με τον τρόπο που περιλαμβάνει η κάθε κατηγορία και στην συνέχεια με βάση το πλήθος των διαφορετικών ποιοτικά τρόπων που έδωσε ο κάθε μαθητής, απάντηση που έπαιρνε 0 όταν ο μαθητής δεν είχε λύσει με κανέναν τρόπο την άσκηση, 0,2 όταν ο μαθητής είχε λύση την άσκηση με μία κατηγορία λύσεων έως 1 όταν ο μαθητής έλυνε την άσκηση και με τις 5 ποιοτικά διαφορετικές κατηγορίες λύσεων.

Αν ΑΔ διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^{O}$), ΔΕ∕∕ΑΒ, και Ε μέσο της ΑΓ, να δείξετε με όσους περισσότερους τρόπους μπορείτε ότι $A\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$.


Εικόνα 2: Το Γεωμετρικό πρόβλημα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Αποτελέσματα Περιγραφικής Στατιστικής

Στον πίνακα 1 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της καταγραφής των απαντήσεων των παιδιών στα έργα που αφορούν στη χωρική ικανότητα ανά κατηγορία. Παρατηρούνται υψηλά ποσοστά στην κατηγορία «σχέσεις εννοιών στο χώρο(SP)», μέτριας επιτυχίας ποσοστά στην «οπτικοποίηση(VZ)» και χαμηλά ποσοστά στην κατηγορία «ευελιξία διεκπεραίωσης(CF)». Το μικρότερο ποσοστό επιτυχίας (15%) εμφανίζεται στη έργο «κρυμμένα μοτίβα(Cfhp2)», ενώ αντίστοιχα το μεγαλύτερο ποσοστό (93%) εμφανίζεται στη έργο «περιστροφή καρτών(Spca2)».

Κατηγορία	Υποκατηγορία	Ποσοστό
Οπτικοποίηση (VZ)	Σύνθεση σχήματος(Vco1)	28%
	Δίπλωση σχήματος(Vpl2)	70%
	Ανάπτυγμα σχήματος(Vdi3)	53%
Σχέσεις εννοιών στο χώρο (SP)	Σύγκριση κύβων(Spcom1)	80%
	Περιστροφή καρτών(Spca2)	93%
	Χέρια(Spha3)	70%
Ευελιξία διεκπεραίωσης (CF)	Κρυμμένες φιγούρες(Cfhif1)	41%
	Κρυμμένα μοτίβα(Cfhp2)	15%
	Επικάλυψη σχήματος(Cftr3)	73%

Πίνακας 1: Ποσοστά (%) της επιτυχίας για κάθε κατηγορία έργου χωρικής ικανότητας.

Στον πίνακα 2 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της καταγραφής των απαντήσεων των μαθητών που αφορούν την ευχέρεια των λύσεων. Παρατηρούμε ότι σχεδόν οι μισοί μαθητές(48%) έλυσαν το πρόβλημα με 2 ή 3 τρόπους, ενώ υψηλό είναι και το ποσοστό των μαθητών που έλυσαν με πάνω από 4 τρόπους το πρόβλημα(18%). Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η ευχέρεια(Flu) των μαθητών είναι σε σχετικά υψηλά επίπεδα.

Πλήθος Λύσεων	Ποσοστό
0 Λύσεις(Geo0)	10%
1 Λύσεις(Geo1)	24%
2 Λύσεις(Geo2)	32%
3 Λύσεις(Geo3)	16%
4 Λύσεις(Geo4)	10%
5+ Λύσεις(Geo5+)	8%

Πίνακας 2: Ποσοστά(%) των μαθητών ως προς την ευχέρεια(Flu) των λύσεων.

Στον πίνακα 3 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της καταγραφής των απαντήσεων των μαθητών που αφορούν την ευελιξία των λύσεων. Παρατηρούμε ότι τα αντίστοιχα ποσοστά ευχέρειας και ευελιξίας είναι αρκετά κοντά, όπως αναμέναμε καθώς στις περισσότερες έρευνες οι δύο έννοιες εμφανίζονται σαν δίπολο, με την ευελιξία των λύσεων των μαθητών να κυμαίνεται σε χαμηλότερα επίπεδα.

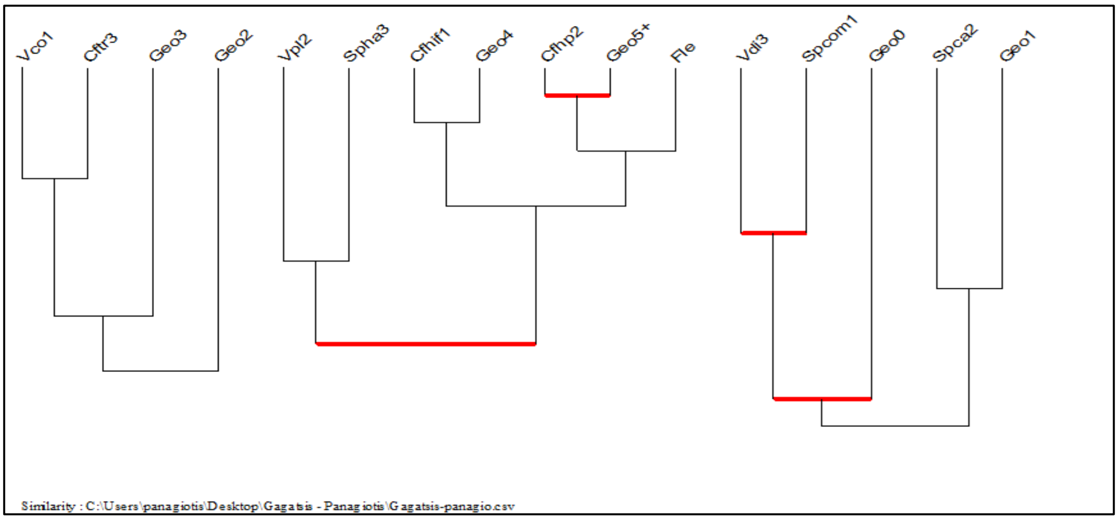
Ευελιξία Λύσεων	Ποσοστό
Fle0 (0)	10%
Fle1 (0,2)	34%
Fle2 (0,4)	32%
Fle3 (0,6)	16%
Fle4 (0,8)	5%
Fle5 (1)	3%

Πίνακας 3 : Ποσοστά(%) των μαθητών ως προς την ευελιξία(Fle) των λύσεων.

Αποτελέσματα των διαγραμμάτων ομοιότητας

Για τον εντοπισμό των σχέσεων μεταξύ της χωρικής ικανότητας και της δημιουργικότητας των μαθητών με την μαθηματική απόδειξη, στα έργα του δοκιμίου πραγματοποιήθηκε η ανάλυση ομοιότητας (Lerman, 1981) με το λογισμικό C.H.I.C. (Classification Hiérarchique, Implicative et Cohésitive), από την οποία προέκυψε το διάγραμμα ομοιότητας.

Στο διάγραμμα ομοιότητας παρατηρούμε τρεις ομάδες. Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει τα έργα χωρικής ικανότητας(Vco1, Cftr3) και τα άτομα που έλυσαν την άσκηση γεωμετρίας με δυο και τρεις τρόπους(Geo2, Geo3), η δεύτερη ομάδα περιλαμβάνει τα έργα χωρικής ικανότητας(Vpl2, Spha3, Cfhif1, Cfhp2), τα άτομα που έλυσαν την άσκηση γεωμετρίας με τέσσερις, πέντε ή παραπάνω από πέντε τρόπους(Geo4,Geo5^{+}) και την ευελιξία(Fle), ενώ η τρίτη ομάδα περιλαμβάνει τα έργα χωρικής ικανότητας(Vdi3, Spcom1, Spca2) και τα άτομα που δεν έλυσαν ή έλυσαν με έναν τρόπο την άσκηση(Geo0, Geo1).



Διάγραμμα ομοιότητας: Περιλαμβάνει τα έργα χωρικής ικανότητας, το πλήθος των λύσεων που έδωσαν οι μαθητές στο γεωμετρικό πρόβλημα και την ολική Ευελιξία.

Στην πρώτη ομάδα παρατηρούμε δύο υποομάδες. Η πρώτη περιλαμβάνει άτομα που έλυσαν το γεωμετρικό πρόβλημα με δύο τρόπους(Geo2) ενώ η δεύτερη περιλαμβάνει άτομα που το έλυσαν με τρεις τρόπους(Geo3) και συνδέεται με δύο έργα χωρικής ικανότητας, αυτά της σύνθεσης σχήματος(Vco1) και επικάλυψης σχήματος(Cftr3).

Η δεύτερη ομάδα κατά την άποψη μας είναι η πιο σημαντική καθώς φαίνεται η σύνδεση της ευχέρειας με την ευελιξία και χωρίζεται σε 2 υποομάδες. Η μεγάλη υποομάδα χωρίζεται με την σειρά της σε υποομάδες. Στην πρώτη υποομάδα περιλαμβάνονται τα έργα χωρικής ικανότητας (Vpl2, Spha3), δηλαδή δίπλωση σχήματος και χέρια, ενώ στην δεύτερη υποομάδα παρεμβαίνουν οι μεταβλητές(Geo4, Geo5^{+}), δηλαδή τα άτομα που έλυσαν το γεωμετρικό πρόβλημα με τέσσερις ή πέντε και πλέον τρόπους, τα έργα χωρικής ικανότητας (Cfhif1, Cfhp2), δηλαδή κρυμμένα μοτίβα και κρυμμένες φιγούρες και η Ευελιξία(Fle). Η δεύτερη αυτή υποομάδα είναι πολύ σημαντική γιατί συμπεραίνουμε ότι οι μαθητές που πετυχαίνουν τέσσερις ή πέντε και πλέον λύσεις έχουν και μεγάλη ευελιξία λύσεων καθώς και υψηλή αντιληπτική ικανότητα και πιο συγκεκριμένα, έχουν υψηλά ποσοστά επιτυχίας στα έργα χωρικής ικανότητας κρυμμένες φιγούρες(Cfhif1) και κρυμμένα μοτίβα(Cfhp2).

Η πρακτική σημασία αυτού του ευρήματος είναι πολύ σημαντική, καθώς συμπεραίνουμε πως για να βελτιώσουμε την ικανότητα μαθηματικής απόδειξης των μαθητών χρειάζεται να έχουμε βελτίωση προς δύο κατευθύνσεις. Η πρώτη αφορά την ευελιξία λύσεων, δηλαδή πρέπει να αυξηθεί η ποικιλία λύσεων και η μετάβαση από την μια λύση στην άλλη. Η δεύτερη κατεύθυνση αφορά την βελτίωση της αντιληπτικής ικανότητας των μαθητών σε σχέση με τα σχήματα, δηλαδή η αντιληπτική ικανότητα διάκρισης ενός γεωμετρικού σχήματος ως ολότητα δεν αρκεί σε καμία περίπτωση. Αντιθέτως, απαιτείται η διάκριση υποσχημάτων εντός ενός σχήματος, δεξιότητα που συνδέεται με τις δύο μεταβλητές: κρυμμένες φιγούρες(Cfhif1) και κρυμμένα μοτίβα(Cfhp2). Μια δεύτερη συσχέτιση αυτής της ισχυρής δεύτερης υποομάδας αφορά την πρώτη υποομάδα [δίπλωση σχήματος(Vpl2) και χέρια(Spha3)] που είναι κλασσικά έργα χωρικής ικανότητας.

Η τρίτη ομάδα περιλαμβάνει δύο υποομάδες. Η πρώτη υποομάδα περιλαμβάνει(Geo1, Spca2), δηλαδή τα άτομα που έλυσαν το γεωμετρικό πρόβλημα με έναν τρόπο και το έργο χωρικής ικανότητας περιστροφή καρτών. Η δεύτερη υποομάδα περιλαμβάνει τα άτομα που δεν έλυσαν καθόλου το γεωμετρικό πρόβλημα και συνδέεται με τα έργα χωρικής ικανότητας(Vdi3, Spcom1), δηλαδή ανάπτυγμα σχήματος και σύγκριση κύβων. Το συμπέρασμα που παίρνουμε από την τρίτη υποομάδα είναι ότι η ικανότητα μαθηματικής απόδειξης απαιτεί δεξιότητες πολύ περισσότερο από απλή αίσθηση του χώρου.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σκοπός της έρευνας μας ήταν να εξετάσουμε την επίδοση των μαθητών σε έργα χωρικής ικανότητας και σε έργα πολλαπλών λύσεων γεωμετρίας και πως αυτή σχετίζεται με την κατασκευή της μαθηματικής απόδειξης. Με βάση την ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας, παρατηρούμε ότι οι μαθητές οι οποίοι εμφάνισαν υψηλά ποσοστά επιτυχίας σε σημαντικά έργα χωρικής ικανότητας («κρυμμένες φιγούρες» και «κρυμμένα μοτίβα»), μπορούν να αντιληφθούν «τις στοιχειώδεις μονάδες» ενός σχήματος και να κατανοήσουν τις μεταξύ τους σχέσεις με αποτέλεσμα να επιλύσουν το πρόβλημα με 4 ή 5 και πλέον λύσεις. Ταυτόχρονα παρατηρούμε ότι οι μαθητές που πέτυχαν μία ή καμία λύση εμφάνισαν ποσοστά επιτυχίας μόνο στα έργα χωρικής ικανότητας περιστροφή καρτών, ανάπτυγμα σχήματος και σύγκριση κύβων, έργα τα οποία προϋποθέτουν απλή αίσθηση του χώρου. Η ικανότητα λοιπόν, να αποδεικνύει κανείς με πολλούς τρόπους απαιτεί πιο σύνθετες δεξιότητες όπως, να μπορούν οι μαθητές να αντιληφθούν τα σχήματα όχι μόνο ως ολότητες, αλλά και ως αποτελούμενα από υποσχήματα (μερεολογική αντίληψη του σχήματος). Κατά τον τρόπο αυτό εστιάζουν σε διαφορετικά σχήματα κάθε φορά, αναγνωρίζουν νέες ιδιότητες και οδηγούνται σε διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι μια αποτελεσματική στρατηγική για τον εκπαιδευτικό, ώστε οι μαθητές όχι μόνο να κατανοήσουν, αλλά και να κατασκευάσουν μαθηματικές αποδείξεις, μπορεί να βασιστεί σε δραστηριότητες που στοχεύουν οι μαθητές να ξεπεράσουν την αντιληπτική αναγνώριση του σχήματος και να οδηγηθούν στην λειτουργική σύλληψη του σχήματος δια μέσου μερεολογικής τροποποίησης του. Επίσης τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας επιβεβαιώνουν τις υπάρχουσες έρευνες όσον αφορά στη σύνδεση της υψηλής χωρικής ικανότητας των μαθητών με την ευχέρεια και ευελιξία στις λύσεις τους, με τις δύο παραμέτρους της δημιουργικότητας να εμφανίζονται σαν δίπολο. Η στενή αυτή σχέση ανάμεσα στη χωρική ικανότητα και τη δημιουργικότητα φαίνεται να επηρεάζει θετικά την κατασκευή της μαθηματικής απόδειξης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bolden, D.S., Harries, A.V. & Newton, D.P. (2010). Pre-service primary teachers' conceptions of creativity in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *73* (2), 143-157.

Carroll, J.B. (1993). Human cognitive abilities: *A survey of factor-analytical studies*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press

Coxon V. S (2006). Innovative Allies: *Spatial and Creative Abilities*.

Γαγάτσης, Α , Καλογήρου, Π & Ανδρούλλα Πετρίδου(2013). Χωρική Ικανότητα και κατανόηση Γεωμετρικού σχήματος. Πρακτικά 15ο συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης.

English, L. D., & Warren, E. A. (1995). General reasoning processes and elementary algebraic understanding: implications for initial instruction. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *17*(4), 1-19.

Hegarty, M. and Waller, D.A (2005). *Individual differences in spatial abilities.* The Cambridge Handbook of Visuospatial Thinking (pp. 121-169).

Lean G, Clements M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129–145), Rotterdam: Sense Publishers.

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2012). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *Journal of Mathematics Behavior, 31, 73-90.*

Lerman, I.C. (1981). *Classification et analyse ordinale des données.* Paris: Dunod.

Lohman, D.F. (1996). Spatial ability and g. In I. Dennis & P. Tapsfield (Eds.), *Human abilities: their nature and measurement* (pp. 97-116). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Mann, E. (2006). Creativity: The Essence of Mathematics. *Journal for the Education of the Gifted, 30*(2), 236-260.

Piirto, J. (2004). *Understanding creativity*. Scottsdale, AZ: Great Potential Press.

Runco, M. & Pritzker, S. (1999). Encyclopedia of Creativity. *Academic press.*

Torrance, E.P. (1994). Creativity: *Just wanting to know*. Pretoria, South Africa: *Benedic books*.

Tso, T., & Liang, Y.N. (2002). The study of interrelationship between spatial abilities and Van Hiele levels of thinking in geometry of eight-grade students. *Journal of Taiwan Normal University*.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΣΕ ΔΙΑΓΩΝΙΣΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Γεωργιάδου-Καμπουρίδη Βαρβάρα, Τσικοπούλου Στάμη

τ.Σχολ.Σύμβουλος Δ.Ε., τ.Σχολ. Σύμβουλος Μαθηματικών

bkabouridis@gmail.com, stsikop@otenet.gr

Η παρούσα εργασία εξετάζει τα είδη των επιτυχημένων λύσεων σε ένα λεκτικό πρόβλημα τεσσάρων πράξεων που οι μαθητές που συμμετείχαν στη δοκιμασία εισαγωγής στα πρότυπα γυμνάσια παρουσίασαν στα γραπτά τους. Στις λύσεις αυτές αναλύουμε τις διαφορετικές στρατηγικές των μαθητών, αναγνωρίζουμε κοινά χαρακτηριστικά και με βάση αυτά τις κατηγοριοποιούμε.

Η κατηγοριοποίηση αυτή μας βοηθά να εξάγουμε κάποια πρώτα συμπεράσματα σχετικά με το είδος της μαθηματικής σκέψης των μαθητών στο συγκεκριμένο πλαίσιο και τον ρόλο που ενδεχομένως η γνώση αυτή θα μπορούσε να παίξει στη διδασκαλία των μαθηματικών στη σχολική τάξη.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Από το 2013 και με το νόμο 3966/2011 (Φ.Ε.Κ. 118 Α΄) οι μαθητές που τελείωναν την έκτη τάξη του δημοτικού και επιθυμούσαν να φοιτήσουν σε ένα από τα πρότυπα-πειραματικά γυμνάσια της χώρας, υποχρεούνταν να δώσουν εξετάσεις σε τρία πεδία: στην κατανόηση κειμένων ελληνικής γλώσσας, στα μαθηματικά και στα φυσικά. Ειδικότερα, στα μαθηματικά ελέγχονταν οι ικανότητες των μαθητών/τριών στην κατανόηση και επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής με απλές αριθμητικές πράξεις, διατυπώνοντας αιτιολογήσεις και μαθηματικούς συλλογισμούς. Από το 2015 οι εξετάσεις διατηρήθηκαν μόνο για τα πέντε πρότυπα γυμνάσια. Η παρούσα εργασία αναφέρεται σε αυτό το πλαίσιο των διαγωνιστικών εξετάσεων και συγκεκριμένα στους τρόπους επίλυσης προβλήματος στα μαθηματικά για μαθητές της έκτης τάξης δημοτικού σχολείου.

Η διαθέσιμη έρευνα αναφέρεται γενικά σε μαθηματικούς διαγωνισμούς, ενώ δεν εντοπίστηκαν έρευνες που να αφορούν τους συγκεκριμένους διαγωνισμούς κατάληψης θέσης (placement test) και ειδικότερα κατά την μετάβαση από τη στοιχειώδη στη μέση εκπαίδευση. Ερευνητές αναλύουν θετικά και αρνητικά αποτελέσματα από συμμετοχές των μαθητών σε μαθηματικούς διαγωνισμούς (Bicknell & Riley, 2012; Davis et al, 2011; Rusczyk, 2012). Σύμφωνα με τους Bicknell & Riley (2012) οι πρωταρχικοί στόχοι των μαθηματικών διαγωνισμών γενικά είναι να αυξήσουν τα κίνητρα, τον ενθουσιασμό και το ενδιαφέρον για τα μαθηματικά και να παρέχουν στα σχολεία και τους γονείς πληροφορίες για τους περισσότερο ικανούς μαθητές.

Πιο συγκεκριμένα, οι Kalman (2002) και Riley & Karnes (1998/1989, 2007), υποστηρίζουν πως οι διαγωνισμοί που απευθύνονται σε μαθητές της στοιχειώδους και μέσης εκπαίδευσης μπορούν να χρησιμεύσουν στην διερεύνηση ζητημάτων που αφορούν στην επίλυση προβλήματος και των εφαρμογών της στην καθημερινότητα.

Στην παρούσα εργασία επιχειρούμε να ανιχνεύσουμε ένα τέτοιο ζήτημα, όπως το είδος της μαθηματικής σκέψης ορισμένων μαθητών που συμμετείχαν σε διαγωνιστικές εξετάσεις για τα πρότυπα γυμνάσια μέσα από τις επιτυχημένες λύσεις που παρουσίασαν στα γραπτά τους σε ένα από τα προβλήματα της δοκιμασίας το σχολικό έτος 2015.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Το πρόβλημα και η επίλυση προβλήματος

Αρκετοί ερευνητές υποστηρίζουν την ανάγκη να προσδιορίζεται η έννοια "πρόβλημα" πριν εξεταστεί η έννοια "επίλυση προβλήματος" (Kilpatrick, 2010; Lester,1983).

Το πρόβλημα έχει περιγραφεί διαφορετικά στην περιοχή της διδακτικής των μαθηματικών. Όπως αναφέρει ο Carson (2007, 3), οι Krulik και Rudnick (1987) προσδιορίζουν το πρόβλημα ως "μια κατάσταση, ποσοτική ή άλλη, που αντιμετωπίζει ένα άτομο ή μια ομάδα ατόμων, και απαιτεί λύση, για την απόκτηση της οποίας το άτομο δεν βλέπει κανένα εμφανές ή προφανές μέσο ή διαδρομή. Ένα πρόβλημα θεωρείται ως τέτοιο μόνο από το άτομο που δεν βλέπει μια προφανή λύση γι αυτό". Με αυτή τη θέση συμφωνεί και ο Schoenfeld (1985) λέγοντας ότι ένα πρόβλημα είναι πάντα σε σχέση με το άτομο. Ο Lester (1983) ορίζει το πρόβλημα ως μια κατάσταση όπου τα άτομα επιθυμούν αλλά αισθάνονται και υποχρεωμένα να βρουν μια λύση ακόμη και αν δεν υπάρχει κάποια διαθέσιμη και προσιτή.

Στη διεθνή βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετοί ορισμοί για την έννοια "επίλυση προβλήματος", αλλά κοινός ορισμός για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων είναι δύσκολο να συμφωνηθεί μεταξύ των ερευνητών. Ορισμένοι ισχυρίζονται ότι οι υπάρχοντες ορισμοί είναι ξεπερασμένοι (Lesh et al, 2006), ενώ άλλοι υπογραμμίζουν την ασάφεια που μπορεί να τους χαρακτηρίζει (Mamona-Downs & Downs, 2005).

Η διαδικασία επίλυσης προβλημάτων περιλαμβάνει πολλαπλές και αντίθετες απόψεις (Schoenfeld, 1992), όμως αρκετοί ερευνητές θεωρούν την ικανότητα επίλυσης προβλήματος ως τον βασικό στόχος της διδασκαλίας των μαθηματικών (Schoenfeld, 2002; Polya, 1945).

Ήδη από τη δεκαετία του 1920, ο Polya ενδιαφέρθηκε για την επίλυση προβλημάτων και την περιέγραψε ως τη διαδικασία που χρησιμοποιείται για την εύρεση λύσης σε ένα πρόβλημα που δεν έχει μια προφανή λύση (Polya, 1945). Ο Polya (1945) διακρίνει τέσσερις φάσεις, τις οποίες καλεί και ευρετικές, για την επιτυχημένη επίλυση προβλήματος: κατανόηση του προβλήματος, δημιουργία ενός σχεδίου, εκτέλεση του σχεδίου και, τέλος, εξέταση της λύσης, τις οποίες εξέλιξε αργότερα ο Schoenfeld (1985: 15). Στα διδακτικά εγχειρίδια του ελληνικού δημοτικού σχολείου τα στάδια επίλυσης κατά Polya και Schoenfeld εμφανίζονται τακτικά χωρίς να είναι πάντα διακριτά.

Επίλυση προβλήματος στο ελληνικό δημοτικό σχολείο

Σύμφωνα με τα ΑΠΣ και ΔΕΠΠΣ (2003) οι άξονες περιεχομένου πάνω στους οποίους δομείται και αναπτύσσεται η διδασκαλία των Μαθηματικών μέχρι σήμερα στο δημοτικό σχολείο είναι επτά. Απ' αυτούς, η 'Επίλυση προβλήματος', οι 'Αριθμοί και πράξεις', οι 'Μετρήσεις' και η 'Γεωμετρία' εισάγονται από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού, η 'Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων' εισάγεται στην Τετάρτη τάξη, ενώ οι 'Λόγοι και αναλογίες' και οι 'Εξισώσεις' εισάγονται στην Έκτη τάξη.

Συνήθως η κατανόηση ενός προβλήματος και η αναζήτηση της λύσης του γίνεται κατ' αρχήν σε διαισθητικό και εμπειρικό επίπεδο και στη συνέχεια επιχειρείται μια αποδεικτική διαδικασία που στηρίζεται σε μια σειρά λογικών ισχυρισμών. Πέρα από το περιεχόμενο του προβλήματος, σημασία έχει και ο τρόπος παρουσίασης των δεδομένων. Ανάλογα με την ηλικία τους, οι μαθητές καλούνται να συλλέγουν και να επεξεργάζονται δεδομένα που δίνονται όχι μόνο μέσα από ένα κείμενο αλλά και μέσα από μια εικόνα, ένα πίνακα ή μια γραφική παράσταση. Καλούνται επίσης να σκεφτούν διάφορες στρατηγικές για τη λύση ενός προβλήματος ή να αιτιολογήσουν την απόρριψη κάποιων άλλων λανθασμένων που εσκεμμένα προτείνονται από τους συγγραφείς. Ενθαρρύνονται οι νοεροί και οι κατ' εκτίμηση υπολογισμοί - που επίσης γίνονται νοερά – σαν πρόβλεψη, αλλά και σαν έλεγχο του αποτελέσματος.

Παράλληλα με τα όσα αναφέρονται στο θεωρητικό πλαίσιο των ΑΠΣ και ΔΕΠΠΣ, στην πράξη και συγκεκριμένα στα διδακτικά πακέτα των έξι τάξεων παρατηρούμε ότι μια σειρά από κεφάλαια περιλαμβάνουν προβλήματα που πρέπει να λυθούν με τη χρήση συγκεκριμένης στρατηγικής ή τεχνικής, ο οποίος αναφέρεται και στον τίτλο του κεφαλαίου, όπως για παράδειγμα "Λύνω προβλήματα με ανάλογα ποσά", "προβλήματα με πολλαπλασιασμό και διαίρεση κλασμάτων". Αυτά τα είδη προβλημάτων μπορούν να θεωρηθούν ως τυπικά προβλήματα για την εισαγωγή και εξάσκηση των μαθητών σε συγκεκριμένους αλγορίθμους ή πράξεις της αριθμητικής που έχουν διδαχθεί στην τάξη. Ωστόσο, στα διδακτικά εγχειρίδια εμφανίζονται και γραπτά λεκτικά προβλήματα που είναι ακατηγοριοποίητα και απαιτούν από τον μαθητή ανάκληση και εφαρμογή διαφόρων διδαγμένων στρατηγικών για την επίλυσή τους. Σύμφωνα με τον Schoenfeld (1992) η επίλυση άγνωστων προβλημάτων προϋποθέτει τη μεταφορά ιδεών από το μεμονωμένο συγκείμενο όπου αποκτήθηκαν σε νέες περιστάσεις. Όταν οι έννοιες έχουν πλέον ενσωματωθεί σε ένα πλούσιο δίκτυο, η μεταφορά τους από ένα συγκείμενο σε ένα άλλο και η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων ενισχύονται σημαντικά.

Για πολλά χρόνια η έρευνα για τη μαθηματική σκέψη των παιδιών βασίζεται συνήθως στην παρατήρηση και κατηγοριοποίηση των λύσεων που δίνουν τα παιδιά σε προβλήματα και προβληματικές καταστάσεις. Οι στρατηγικές που τα παιδιά χρησιμοποιούν για την επίλυση των προβλημάτων λαμβάνονται ως ένδειξη της σκέψης τους. Οι Ell et al (2004) αναφερόμενοι στην έρευνα του Siegler (2000) αλλά και άλλες παρόμοιες έρευνες υποστηρίζουν ότι οι στρατηγικές των παιδιών δεν αντικαθιστούν η μία την άλλη με γραμμικό τρόπο, με εξαφάνιση των λιγότερο εκλεπτυσμένων καθώς αποκτώνται οι νέες. "Αντίθετα, οι στρατηγικές μπορεί να μείνουν ή να εκπέσουν, να αναδυθούν και να συνυπάρξουν μέσα από πρότυπα που χαρακτηρίζουν το κάθε παιδί (ό.π.: 200)."

Στην παρούσα εργασία επιχειρούμε να απαντήσουμε στο ερώτημα: τι είδους λύσεις έδωσαν οι μαθητές στο άγνωστο πρόβλημα που κλήθηκαν να επιλύσουν και πώς αυτές συνδέονται με τις μαθηματικές τους εμπειρίες;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στους μαθητές που ήταν υποψήφιοι δόθηκαν 10 θέματα. Τα οκτώ πρώτα θέματα της δοκιμασίας ήταν κλειστού τύπου ενώ τα δύο τελευταία πλήρους ανάπτυξης. Το πρόβλημα στον πίν. 1 ήταν ένα από τα δύο θέματα πλήρους ανάπτυξης.

<u>Θέμα 10^{ο}</u> (ανάπτυξης) Η κ. Μάρθα έφερε ένα καλάθι με φράουλες για να κεράσει τους μαθητές της τάξης της. Αν δώσει 8 φράουλες σε κάθε μαθητή δεν περισσεύει καμία. Αν δώσει 6 φράουλες σε κάθε μαθητή, τότε περισσεύουν 28 φράουλες. α) Πόσους μαθητές έχει η τάξη; β) Πόσες φράουλες είχε το καλάθι της κ Μάρθας;

Οι ενδεικτικά προτεινόμενες λύσεις για το 10^{o} θέμα, από την επιτροπή θεμάτων της ΔΕΠΠΣ, και η αντίστοιχη μοριοδότηση τους ήταν οι εξής: α΄τρόπος (α΄) 8 − 6 = 2 φράουλες ανά μαθητή λιγότερες (3 μονάδες) (β΄) 28 : 2 = 14 μαθητές (4 μονάδες) (γ΄) 14 · 8 = 112 φράουλες ή 14 · 6 + 28 = 112 φράουλες (3 μονάδες) ή β΄τρόπος (α΄) ΄Εστω x οι μαθητές. Τότε 8x = 6x + 28. ΄Αρα 2x = 28 ή x = 14. (7 μονάδες) (β΄) 14 · 8 = 112 φράουλες. (3 μονάδες)
Οι επιπλέον ενδεικτικές λύσεις που πρότειναν οι συντονιστές του κέντρου διόρθωσης των γραπτών μετά από την προφορική εξέταση και των φ.α. ήταν οι εξής: **γ΄τρόπος πολλαπλάσια του 8: 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96, 112, 120, ..** πολλαπλάσια του 6 +28: 6+28=34 , 12+28=40 , 24+28=46 , ... , 84+28=**112** 112:8=14 μαθητές δ΄ τρόπος Μ.Κ.Δ (6, 8) = 2, 24:2 = 14 μαθητές, 14·8=112 φράουλες (η λύση αυτή προτάθηκε στους διορθωτές ως πιθανή να εμφανιστεί, επειδή δόθηκε από μαθητή φ.α που εξετάσθηκε προφορικά).

Πίνακας 1: Το πρόβλημα και οι προτεινόμενες λύσεις

Τα γραπτά των υποψηφίων μαθητών στις εξετάσεις εισαγωγής για πρότυπα γυμνάσια τον Ιούνιο του 2015, συγκεντρώθηκαν όλα σε ένα εξεταστικό κέντρο όπου και διορθώθηκαν.

Από το σύνολο των γραπτών απαντήσεων των μαθητών φωτογραφήθηκαν 8 διαφορετικές επιτυχημένες λύσεις και οι συνοδευτικές επεξηγήσεις- γραπτές σκέψεις των μαθητών.

Το υλικό αυτό αποτέλεσε τα δεδομένα μας για την παρούσα εργασία.

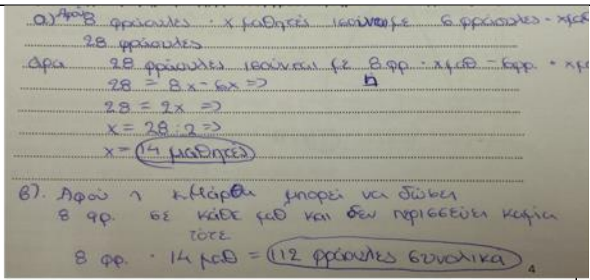
Για την ανάλυση των δεδομένων υιοθετήσαμε τις αρχές της ανάλυσης περιεχομένου λαμβάνοντας υπόψη τα πλεονεκτήματα (οι φωτογραφημένες λύσεις είναι υπαρκτά αντικείμενα μελέτης ανεξάρτητα από το χρόνο συλλογής) και μειονεκτήματα (τα δεδομένα δεν παρήχθησαν για ερευνητικούς σκοπούς) αυτής της μεθόδου (Robson, 2002: 358).

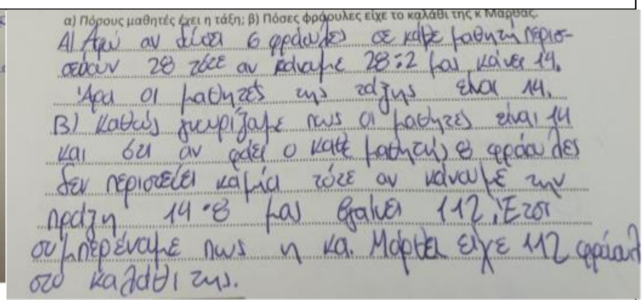
Καταγράψαμε τα χαρακτηριστικά της κάθε λύσης, όπως τα βήματα που ακολουθήθηκαν και τις πράξεις που χρησιμοποιήθηκαν. Συγκρίναμε τα επί μέρους χαρακτηριστικά με τα αντίστοιχα των προτεινόμενων στο αναλυτικό πρόγραμμα και τα διδακτικά εγχειρίδια του δημοτικού, όπως αυτά αποτυπώνονται και στις λύσεις που προτάθηκαν από την επιτροπή του διαγωνισμού. Αντιστοιχίσαμε τις επεξηγήσεις με τις πράξεις για να διαπιστώσουμε τη συνέπεια και εγκυρότητά τους.

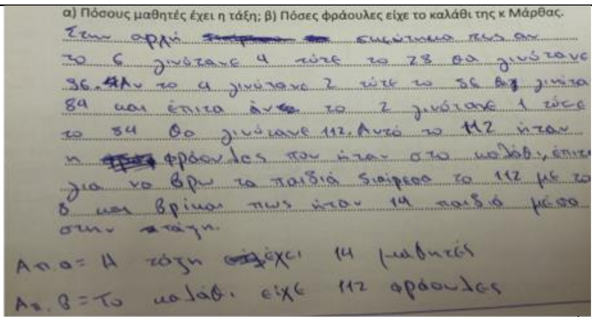
Οι διαδικασίες που περιγράφονται στις παραπάνω παραγράφους πραγματοποιήθηκαν στο φως του θεωρητικού πλαισίου και οδήγησαν στην κατηγοριοποίηση των λύσεων σε τρεις ομάδες, οι οποίες αιτιολογούνται και αναλύονται.

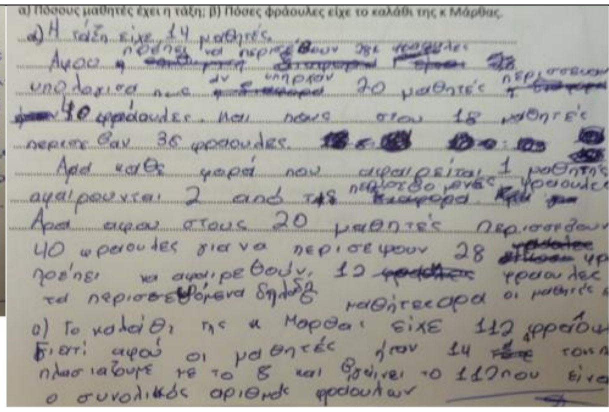
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι λύσεις κατηγοριοποιήθηκαν σε τρεις ομάδες: Η ομάδα 1 περιλαμβάνει τις λύσεις 1Λ, 2Λ που ήταν αναμενόμενες από την επιτροπή του διαγωνισμού. Η ομάδα 2 περιλαμβάνει τις λύσεις 3Λ, 4Λ που στηρίζονται σε προσθετικές και αφαιρετικές διαδικασίες με αναλογικές δομές. Η ομάδα 3 περιλαμβάνει τις λύσεις 5Λ, 6Λ, 7Λ που στηρίζονται σε πολλαπλασιαστικές και αναλογικές δομές. Η λύση 8Λ περιλαμβάνει σωστή εξίσωση χωρίς αιτιολόγηση, λανθασμένη λύση της εξίσωσης και σωστό αποτέλεσμα.

<table>
<tr><td colspan="2">Ομάδα 1 Αναμενόμενες λύσεις</td></tr>
<tr><td>
α) Αφού 8 φράουλες · x μαθητές ισούνται με 6 φράουλες · x + 28 φράουλες
Άρα 28 φράουλες ισούνται με 8 φρ · x μαθ − 6 φρ · x
28 = 8x − 6x =>
28 = 2x =>
x = 28 : 2 =>
x = 14 μαθητές
β) Αφού η κ.Μάρθα μπορεί να δώσει 8 φρ. σε κάθε μαθ και δεν περισσεύει καμία τότε
8 φρ. · 14 μαθ = 112 φράουλες συνολικά

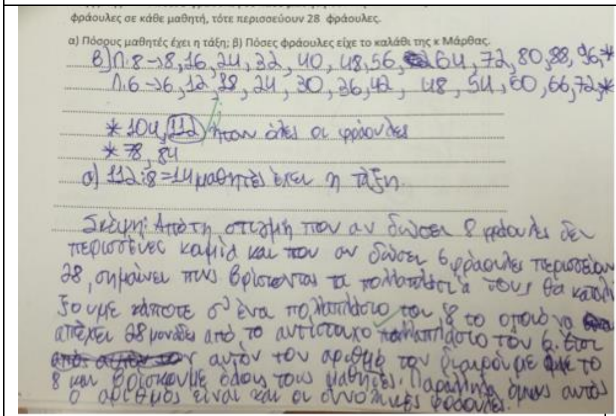
1Λ</td>
<td>
α) Πόσους μαθητές έχει η τάξη; β) Πόσες φράουλες είχε το καλάθι της κ Μάρθας.
Α) Αφού αν δίνει 6 φράουλες σε κάθε μαθητή περισσεύουν 28 τότε αν κάναμε 28:2 και κάνει 14. Άρα οι μαθητές της τάξης είναι 14.
Β) Καθώς γνωρίζαμε πως οι μαθητές είναι 14 και ότι αν δίνει ο κάθε μαθητής 8 φράουλες δεν περισσεύει καμία τότε αν κάναμε την πράξη 14·8 και βγαίνει 112. Έτσι συμπεράναμε πως η κα. Μάρθα είχε 112 φράουλες στο καλάθι της.

2Λ</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ομάδα 2 Προσθετικές και αφαιρετικές διαδικασίες με αναλογικές δομές</td></tr>
<tr><td>
α) Πόσους μαθητές έχει η τάξη; β) Πόσες φράουλες είχε το καλάθι της κ Μάρθας.
Στην αρχή ... το 6 γινόταν 4 τότε το 28 θα γινόταν 36. Αν το 4 γινόταν 2 τότε το 56 ... 84 και έπειτα αν το 2 γινόταν 1 τότε το 84 θα γινόταν 112. Αυτό το 112 ήταν οι φράουλες που ήταν στο καλάθι. Έπειτα για να βρω τα παιδιά διαίρεσα το 112 με το 8 και βρήκα πως ήταν 14 παιδιά μέσα στην τάξη.
Απ. α = Η τάξη έχει 14 μαθητές
Απ. β = Το καλάθι είχε 112 φράουλες

3Λ</td>
<td>
α) Πόσους μαθητές έχει η τάξη; β) Πόσες φράουλες είχε το καλάθι της κ Μάρθας.
α) Η τάξη είχε 14 μαθητές.
...
β) Το καλάθι της κ Μάρθας είχε 112 φράουλες γιατί αφού οι μαθητές ήταν 14 πολλαπλασιάζουμε με το 8 και βγαίνει το 112 που είναι ο συνολικός αριθμός φράουλων

4Λ</td></tr>
</table>

Ομάδα 3 Πολλαπλασιαστικές και αναλογικές δομές



φράουλες σε κάθε μαθητή, τότε περισσεύουν 28 φράουλες.

α) Πόσους μαθητές έχει η τάξη; β) Πόσες φράουλες είχε το καλάθι της κ Μάρθας.

β) Π.8 → 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96 *

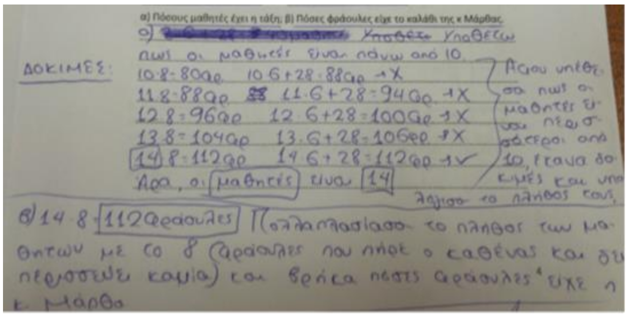
Π.6 → 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72 *

* 104, 112 ήταν όλες οι φράουλες

* 78, 84

α) 112 : 8 = 14 μαθητές έχει η τάξη.

5Λ



α) Πόσους μαθητές έχει η τάξη; β) Πόσες φράουλες είχε το καλάθι της κ Μάρθας.

ΔΟΚΙΜΕΣ:

10·8 = 80 φρ. 10·6+28 = 88 φρ. → X

11·8 = 88 φρ. 11·6+28 = 94 φρ. → X

12·8 = 96 φρ. 12·6+28 = 100 φρ. → X

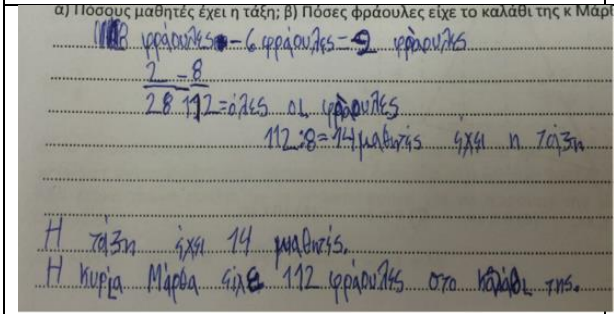
13·8 = 104 φρ. 13·6+28 = 106 φρ. → X

14·8 = 112 φρ. 14·6+28 = 112 φρ. → ✓

Άρα, οι μαθητές είναι 14

β) 14·8 = 112 φράουλες

6Λ



α) Πόσους μαθητές έχει η τάξη; β) Πόσες φράουλες είχε το καλάθι της κ Μάρθ

2 – 8

28 · 112 = όλες οι φράουλες

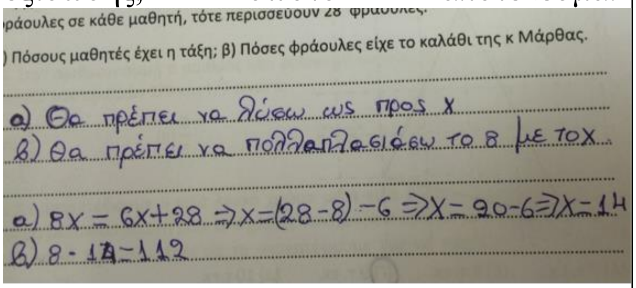
112 : 8 = 14 μαθητές έχει η τάξη

Η τάξη έχει 14 μαθητές.

Η κυρία Μάρθα είχε 112 φράουλες στο καλάθι της.

7Λ

Σωστή εξίσωση, λανθασμένη λύση της εξίσωσης, σωστό αποτέλεσμα.



φράουλες σε κάθε μαθητή, τότε περισσεύουν 28 φράουλες.

α) Πόσους μαθητές έχει η τάξη; β) Πόσες φράουλες είχε το καλάθι της κ Μάρθας.

α) Θα πρέπει να λύσω ως προς x

β) Θα πρέπει να πολλαπλασιάσω το 8 με το x

α) 8x = 6x + 28 ⇒ x = (28 – 8) – 6 ⇒ x = 20 – 6 ⇒ x = 14

β) 8 · 14 = 112

8Λ

Πίνακας 2: Κατηγοριοποίηση των λύσεων των μαθητών

Πιο συγκεκριμένα, στην Ομάδα 1 στην 1Λ ο μαθητής δομεί μία εξίσωση καλώντας x τον άγνωστο αριθμό των μαθητών. Η 2Λ είναι λεκτική περιγραφή των δύο πράξεων που χρησιμοποίησε ο μαθητής για την επίλυση του προβήματος. Στην Ομάδα 2, η 3Λ είναι επίσης λεκτική περιγραφή ενός αλγορίθμου με διαδοχικές μειώσεις του ποσού των μαθητών κατά 2 και αυξήσεις του ποσού των φραουλών κατά 28. Ο μαθητής της 4Λ επεξηγεί λεκτικά την απευθείας απάντηση που δίνει στο πρώτο ερώτημα για τον αριθμό των μαθητών στηριζόμενος στην υπόθεση " Άρα κάθε φορά που αφαιρείται 1 μαθητής αφαιρούνται 2 από τις περισεβόμενες φράουλες." παρότι την εισάγει με συμπερασματικό σύνδεσμο. Στην Ομάδα 3, ο μαθητής της 5Λ αναπτύσσει τα πολλαπλάσια των αριθμών 8 και 6 έως ότου "...θα καταλήξουμε κάποτε σ΄ένα πολλαπλάσιο του 8 το οποίο απέχει 28 μονάδες από το αντίστοιχο πολλαπλάσιο του 6". Ο μαθητής της 6Λ ξεκινά από την υπόθεση "πως οι μαθητές είναι πάνω από 10" και ακολουθώντας έναν πολλαπλασιαστικό αλγόριθμο που ο ίδιος ονομάζει "ΔΟΚΙΜΕΣ" καταλήγει ότι 14. 8 =112 φρ 14. 6 + 28 = 112 φρ. Ο μαθητής της 7Λ χρησιμοποιεί μια αναλογία στους τρεις όρους της οποίας τοποθετεί τα δεδομένα (2, 8, 28) 2/28 = 8/ 112 και με βάση αυτά υπολογίζει τον τέταρτο όρο που είναι ο αριθμός των φραουλών. Ανεξάρτητη από όλες τις άλλες περιπτώσεις, η περίπτωση 8Λ είναι μια σωστά δομημένη εξίσωση που επιλύεται λάθος αλλά οδηγεί σε σωστό αποτέλεσμα.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Κατά την επίλυση της εξίσωσης στη 1Λ ο μαθητής χρησιμοποιεί και το διαζευτικό 'ή' για να συνδέσει τις προτάσεις μεταξύ τους, όπως τις έχει διδαχθεί στη σχολική τάξη και το σύμβολο "συνεπάγεται", το οποίο φαίνεται ότι αποτελεί εξωσχολική εμπειρία. Αρκετοί μαθητές από τους συμμετέχοντες στις εξετάσεις των προτύπων προετοιμάζονται επί μακρόν, καθώς το διαγωνιστικό πλαίσιο είναι πολύ ανταγωνιστικό. Σε ορισμένα από αυτά οι επιτυχόντες είναι ένας στους δέκα συμμετέχοντες.

Οι μαθητές φαίνεται πως δομούν τις λύσεις τους γενικότερα βασιζόμενοι σε μιας μορφής αναλογική σχέση που διαμορφώνεται ανάμεσα στο "2" ως διαφορά των 8- 6 φραουλών και στο "28". Η αναλογική αυτή σχέση αποτελεί εφαλτήριο για την ανάπτυξη είτε προσθετικών και αφαιρετικών διαδικασιών, όπως στην 3Λ: " Στην αρχή σκέφτηκα πως αν το 6 γινότανε 4 τότε το 28 θα γινότανε 56. Αν το 4 γινότανε 2 τότε το 56 θα γινότανε 84 και αν το 2 γινότανε 1τότε το 84 θα γινότανε 112..." είτε πολλαπλασιαστικών διαδικασιών, όπως στην 5Λ: "Από τη στιγμή που αν δώσει 6 φράουλες περισσεύουν 28, σημαίνει πως βρίσκοντας τα πολλαπλάσιά τους θα καταλήξουμε κάποτε σ΄ένα πολλαπλάσιο του 8 το οποίο απέχει 28 μονάδες από το πολλαπλάσιο του 6....".

Η έννοια της αναλογίας και ειδικότερα με συμμεταβαλλόμενα ποσά διδάσκεται στις τελευταίες τάξεις του δημοτικού, καθώς αποτελεί ένα από τα ορόσημα στο τυπικό λειτουργικό στάδιο της ανάπτυξης του Piaget το οποίο αποκτάται γύρω στην εφηβεία (Van de Walle, 2005). Αλλά προκειμένου να καλλιεργηθεί η διαισθητική σκέψη και στοχασμός η έννοια της αναλογίας ως προσέγγιση διατρέχει σχεδόν όλο το αναλυτικό πρόγραμμα του δημοτικού μέσω δραστηριοτήτων και προβλημάτων, όπως για παράδειγμα, εύρεσης διπλάσιου, τριπλάσιου, μισού, τόσο για διακριτά αντικείμενα όσο και για συνεχείς ποσότητες. Οι συγκεκριμένες λύσεις αναδεικνύουν την ικανότητα των μαθητών να συνδυάζουν την αναλογική σκέψη με προσθετικές- αφαιρετικές και πολλαπλασιαστικές δομές και να δημιουργούν στρατηγικές που οδηγούν στο σωστό αποτέλεσμα. Αυτό προϋποθέτει να έχουν υπερνικήσει τις συγκειμενικές και αριθμητικές δυσκολίες που παρουσιάζονται στα προβλήματα για να επιτύχουν αυτόν τον συνδυασμό (Van de Walle, 2005).

Η ποικιλία των στρατηγικών που εμφανίζονται αφορούσε ένα φαινομενικά τετριμμένο πρόβλημα για το οποίο η επιτροπή είχε προβλέψει δύο λύσεις στηριζόμενες στο αναλυτικό πρόγραμμα και τα βιβλία διδασκαλίας του στις τάξεις του δημοτικού. Φάνηκε ότι ακόμη και σε ένα διαγωνιστικό και ανταγωνιστικό στην προκειμένη περίπτωση πλαίσιο, με τη σχετική αγωνία και το άγχος των ορθών επιλογών που θα οδηγήσουν στην επιτυχία και την απόκτηση μιας θέσης, οι μαθητές αποτυπώνουν στα γραπτά τους σύνθετες σκέψεις που παραπέμπουν σε πολύπλοκες στρατηγικές.

Με δεδομένο ότι η επίλυση προβλημάτων υποκινεί την εσωτερίκευση και αναδιοργάνωση των νοητικών σχημάτων των μαθητών, αποτελεί πρόκληση τόσο για τον ερευνητή όσο και για τον εκπαιδευτικό της τάξης που θα ήθελε να δράσει ως ερευνητής, να την χρησιμοποιήσει ως πλαίσιο για να διερευνήσει τη σκέψη των μαθητών όταν επιλέγουν και συνδυάζουν στρατηγικές για να επιλύουν λεκτικά προβλήματα και ενδεχομένως και σε περιορισμένο χρόνο.

Επιπλέον, σε ένα τέτοιο πλαίσιο οι μαθητές θα μπορούν να αναλύσουν τις ιδέες τους και τις στρατηγικές τους για να τις συνειδητοποιούν ώστε να τις συνδέουν με τη μαθηματική γνώση τους, να τις αξιολογούν και να τις τροποποιούν ανάλογα ενισχύοντας παράλληλα την ανάπτυξη και προαγωγή της μαθηματικής δημιουργικότητας τους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΑΠΣ και ΔΕΠΠΣ, Αριθ. 21072α/Γ2/28.2.2003 (ΦΕΚ 303/Β’/2003) Απόφαση του Υπ. Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Bicknell, B., & Riley, T. (2012). The role of competitions in a mathematics programme. *APEX: The New Zealand Journal of Gifted Education*, 17 (1). Ανακτήθηκε στις 12 Ιουνίου 2017 www.giftedchildren.org.nz/apex.

Carson, J. (2007). A Problem With Problem Solving : Teaching Thinking Without Teaching Knowledge. *Mathematics Educator* , 17 (2), 7-14.

Davis, G. A., Rimm, S. B., & Siegle, D. (2011). Education of the gifted and talented: Pearson.

Ell, F., Irwin, K., & McNaughton, S. (2004). Two pathways to multiplicative thinking. In I. Putt, R. Faragher & M. McLean (Eds.), *Mathematics education for the third Millennium, towards 2010*, Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Townsville (pp. 199-206). Sydney: MERGA

Kalman, R. (2002), Challenging Gifted Students: The Math Olympiads, *Understanding Our Gifted*, 14(4), 13- 14.

Kilpatrick, J. (2010). Research on problem solving in mathematics. *School Science and Mathematics*. 78(3), 189-192

Krulik, S., & Rudnick, J. J. (1987). *Problem Solving: A Handbook for Teachers*, Second Edition. Massachusetts: Allyn and Bacon Inc

Lester, F. K.(1983). Trends and Issues in Mathematical Problem Solving Research, In Lesh & Landau, eds. (1983) *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 229–261). New York: Academic Press.

Lesh, R., Hamilton, E., & Kaput, J. (Eds.) (2006). *Models and modeling as foundations for the future of mathematics education.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mamona-Downs, J., & Downs, M. (2005). The identity of problem-solving. *Journal of Mathematical Behavior, 24*, 385-401.

Riley, T. L., & Karnes, F. A. (1998/1999). Competitions: One solution for meeting the needs of New Zealand's gifted students. *APEX The New Zealand Journal of Gifted Education*, 11/12(1), 21-26.

Riley, T. L., & Karnes, F. (2007). Competitions for gifted and talented students: Issues of excellence and equity. In J. Van Tassel-Baska (Ed.), *Serving gifted learners beyond the traditional classroom* (pp. 145-168). Waco, TX: Prufrock Press.

Robson, C. (2002). *Real World Research*. UK: Blackwell Publishing

Rusczyk, R. (2012). Pros and cons of math contests. Ανακτήθηκε στις 10 Ιουνίου 2017 http://www.artofproblemsolving.com/

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. London: Academic Press Inc. (London) Ltd.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334- 370). New York: MacMillan.

Siegler, R. (2000). The rebirth of children’s learning. *Child Development*, 71, 26-35.

Van de Walle, J.A. (2005*). Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια Εξελικτική Διαδικασία* (Επιμ. Τ.Α.τριανταφυλλίδης). Τυπωθήτω-Γιώργος Δαρδανός.

ΝΟΕΡΟΙ ΚΑΙ ΓΡΑΠΤΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΔΙΑΙΡΕΣΗΣ ΑΠΟ ΠΑΙΔΙΑ Ε' ΚΑΙ ΣΤ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Δεσλή Δέσποινα και Κατσίδου Ραφαηλία

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Α.Π.Θ.

ddesli@eled.auth.gr & rafaelakat@hotmail.com

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν να μελετήσει τις επιδόσεις και τις στρατηγικές των παιδιών κατά την εκτέλεση διαιρέσεων. Για το σκοπό αυτό, παρουσιάστηκαν 8 προβλήματα διαίρεσης (μερισμού και μέτρησης) σε παιδιά Ε' και Στ' τάξης τα οποία τυχαία κατανεμήθηκαν σε δύο ομάδες ως προς την επιλογή του τρόπου υπολογισμού: στη συνθήκη επιλογής οι συμμετέχοντες μπορούσαν να επιλέξουν ανάμεσα σε νοερούς και γραπτούς υπολογισμούς, ενώ στη συνθήκη μη επιλογής έπρεπε να εκτελέσουν τις πράξεις αποκλειστικά νοερά. Τα μισά προβλήματα ευνοούσαν περισσότερο τη χρήση νοερών υπολογισμών, ενώ τα άλλα μισά λιγότερο. Δεν εντοπίστηκαν διαφορές στις επιδόσεις των παιδιών ως προς την ηλικία, ενώ όσα παιδιά εκτέλεσαν τους υπολογισμούς νοερά είχαν χαμηλότερη επίδοση από τα παιδιά που είχαν στη διάθεσή τους χαρτί και μολύβι. Τέλος, τα 2/3 των συμμετεχόντων κατέφυγαν στον τυποποιημένο αλγόριθμο, ενώ η χρήση εναλλακτικών τρόπων νοερών υπολογισμών ήταν περιορισμένη.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ικανότητα των παιδιών να υπολογίζουν νοερά, παράγοντας ακριβείς απαντήσεις χωρίς τη χρήση εξωτερικών μέσων υπολογισμού ή γραφής (Reys, 1984), αποτελεί έναν από τους στόχους των σύγχρονων προγραμμάτων σπουδών για τα μαθηματικά του δημοτικού σχολείου τόσο στην Ελλάδα όσο και στο εξωτερικό. Η αναγνώριση αυτής της ικανότητας τα τελευταία χρόνια έχει επισημανθεί με αναφορές κυρίως στη συχνή και απαραίτητη χρήση τους από παιδιά και ενήλικες στην καθημερινή ζωή (Northcote & McIntosh, 1999), στη σύνδεσή τους με την καλύτερη και βαθύτερη κατανόηση της αίσθησης του αριθμού (McIntosh, 2004) αλλά και στη συμβολή τους στην κατανόηση και την ανάπτυξη των γραπτών υπολογισμών (Thompson, 1999). Σε αντίθεση με τους γραπτούς υπολογισμούς όπου τα παιδιά ακολουθούν συγκεκριμένα βήματα στην εκτέλεση της διαδικασίας χωρίς απαραίτητα να γνωρίζουν τι κάνουν, οι νοεροί υπολογισμοί τούς εμπλέκουν περισσότερο ενεργά: επειδή βασίζονται στη χρήση γνωστών αριθμητικών γεγονότων και των ιδιοτήτων του αριθμητικού συστήματος, απαιτούν εννοιολογική κατανόηση από τον λύτη (Mclellan, 2001. Fuson et al., 1997), προκειμένου να επιλέξει -ανάμεσα στις στρατηγικές- την περισσότερο κατάλληλη. Για αυτούς τους λόγους προτείνεται η έγκαιρη διδασκαλία τους (Λεμονίδης, 2013. Rogers, 2009), πριν από την εισαγωγή των παιδιών στους γραπτούς τυπικούς αλγόριθμους.

Αν και στη βιβλιογραφία καταγράφονται πολλές και διαφορετικές στρατηγικές νοερών υπολογισμών, κυρίως σε προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης, ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι τα παιδιά σπάνια καταφεύγουν σε αυτές όταν λύνουν προβλήματα (Heirdsfield, 2003). Για παράδειγμα, πολλά παιδιά εξακολουθούν να μετρούν με τα δάχτυλα, ενώ θα μπορούσαν να ανακαλέσουν από τη μνήμη τους το αποτέλεσμα, ή χρησιμοποιούν μία νοερή απεικόνιση του γραπτού αλγόριθμου. Μάλιστα, συχνά φαίνεται ότι οι διδακτικές παρεμβάσεις δεν αλλάζουν εύκολα αυτή τη συμπεριφορά των παιδιών (Λεμονίδης, 2013). Σε αυτό συντελεί η εμμονή στην αξία των γραπτών αλγορίθμων από τους εκπαιδευτικούς οι οποίοι συχνά αφιερώνουν σε αυτούς πολύ χρόνο διδασκαλίας, παραβλέποντας τους νοερούς υπολογισμούς των παιδιών (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2007). Ως αποτέλεσμα αυτού συχνά εμφανίζεται η προτίμηση των παιδιών σε γραπτούς -σε σχέση με τους νοερούς- υπολογισμούς. Όπως διαπίστωσαν, για παράδειγμα, οι Hickendorff, van Putten, Verhelst και Heiser (2010), μόλις το 20% των παιδιών ηλικίας από 10 έως 14 χρόνων (κυρίως αγόρια) καταφεύγουν σε νοερούς υπολογισμούς διαίρεσης, ιδιαίτερα στις εύκολες διαιρέσεις.

Η ικανότητα των παιδιών σε επιτυχείς νοερούς υπολογισμούς διαιρέσεων είναι γενικά πολύ χαμηλή. Αποτελέσματα της έρευνας του Λεμονίδη (2013) δείχνουν ότι, ακόμα και σε απλές διαιρέσεις (π.χ., 30:10), το ποσοστό επιτυχίας σε μαθητές Γ’ τάξης έφτανε το 66%, ενώ διαιρέσεις διψήφιου με διψήφιο (π.χ., 450:15) επιλύονταν σωστά μόνο από τα μισά παιδιά στην Δ’ τάξη. Οι Heirdsfield, Cooper, Mulligan και Irons (1999), σε μία διαχρονική έρευνά τους σε παιδιά που αρχικά φοιτούσαν στη Δ’ τάξη, βρήκαν ότι σε απλά πολλαπλασιαστικά προβλήματα (π.χ., 3x5, 25:5) τα παιδιά πριν από τη διδασκαλία του τυπικού αλγόριθμου κατέφευγαν σε στρατηγικές αρίθμησης, ενώ μετά τη διδασκαλία εφάρμοζαν περισσότερο στρατηγικές ανάκλησης γνωστών γινομένων και γραπτού τυπικού αλγόριθμου.

Η χρήση της ανάκλησης ως στρατηγικής έχει επισημανθεί κυρίως σε απλές προσθέσεις, αφαιρέσεις και πολλαπλασιασμούς και λιγότερο σε διαιρέσεις (Campbell & Xue, 2001). Είναι πολύ πιθανόν, όπως προτείνουν οι Robinson et al. (2006), αυτό να ισχύει στα προβλήματα διαίρεσης γιατί η στρατηγική του πολλαπλασιασμού (π.χ., 25:5, ;x5=25) είναι περισσότερο κυρίαρχη και ακριβής. Επιπρόσθετα, το μέγεθος των αριθμών της πράξης της διαίρεσης επηρεάζει την επιτυχία των παιδιών

(Robinson et al., 2006): οι διαιρέσεις με μικρούς αριθμούς ευνοούν περισσότερο τους επιτυχείς νοερούς υπολογισμούς σε σχέση με αυτές με μεγάλους αριθμούς.

Παρόλο που πληθώρα ερευνητών επισημαίνουν τη σημασία των νοερών υπολογισμών, πολύ περιορισμένη είναι η έρευνα αναφορικά με τους νοερούς υπολογισμούς στη διαίρεση. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να μελετήσει τόσο τις επιδόσεις όσο και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν τα παιδιά κατά την επίλυση προβλημάτων διαίρεσης, σε συνθήκες επιλογής ανάμεσα σε γραπτούς και νοερούς υπολογισμούς.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες. Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 66 μαθητές/τριες της Ε' τάξης (μ.ο. ηλικίας: 10 χρόνια και 10 μήνες) και 56 μαθητές/τριες της Στ' τάξης (μ.ο. ηλικίας: 11 χρόνια και 9 μήνες) που φοιτούσαν σε δημόσια δημοτικά σχολεία της Θεσσαλονίκης και κάλυπταν διαφορετικά κοινωνικοοικονομικά επίπεδα. Η επιλογή τους έγινε με τη μέθοδο της τυχαίας δειγματοληψίας.

Σχεδιασμός – Εργαλείο μέτρησης. Για το σκοπό της έρευνας σχεδιάστηκαν και παρουσιάστηκαν σε όλους τους συμμετέχοντες 8 προβλήματα διαίρεσης. Τα προβλήματα αυτά βασίστηκαν και επέκτειναν τη δουλειά των Hickendorff et al. (2010) και αφορούσαν οικείες καταστάσεις της καθημερινής ζωής των παιδιών. Τα πρώτα τέσσερα προβλήματα απαιτούσαν *μικρή γνωστική προσπάθεια* και ευνοούσαν τη χρήση νοερών υπολογισμών: οι διαιρέσεις ήταν τέλειες και πάντα ο διαιρετέος αποτελούσε δύναμη του 10 (π.χ., 560:7, 120:4). Στα υπόλοιπα τέσσερα προβλήματα απαιτούνταν *μεγαλύτερη γνωστική προσπάθεια* και, ως εκ τούτου, ήταν δύσκολο να υπολογιστούν νοερά: υπήρχαν ατελείς διαιρέσεις ή διαιρέσεις όπου ο διαιρέτης και ο διαιρετέος ήταν δεκαδικοί αριθμοί ή ο διαιρέτης ήταν διψήφιος (π.χ., 120:15, 159:6). Σε κάθε κατηγορία γνωστικής απαίτησης τα μισά προβλήματα αφορούσαν διαιρέσεις μερισμού και τα άλλα μισά προβλήματα αφορούσαν διαιρέσεις μέτρησης. Η σειρά παρουσίασης των προβλημάτων διαφοροποιούνταν στους συμμετέχοντες, προκειμένου να αποφευχθεί η πιθανότητα η σειρά παρουσίασης να επηρεάσει την επίδοσή τους.

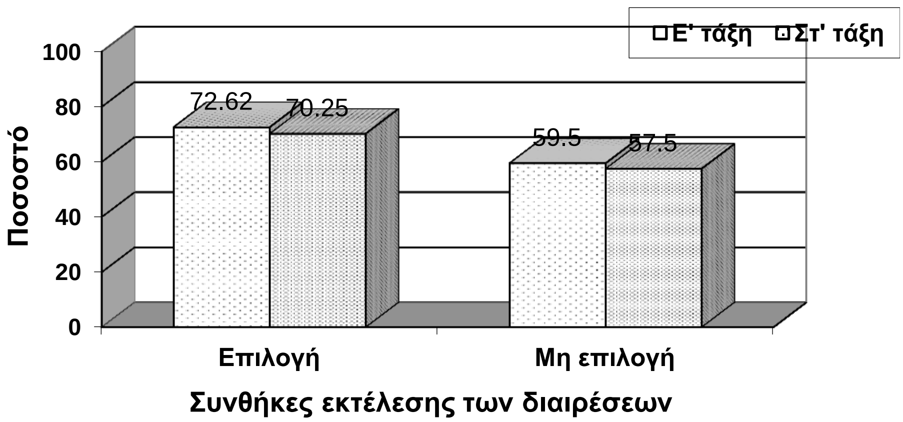
Τα παιδιά σε κάθε ηλικιακή ομάδα τυχαία κατανεμήθηκαν ισάριθμα σε δύο ομάδες ως προς τη συνθήκη του τρόπου εκτέλεσης των διαιρέσεων: στη *συνθήκη επιλογής*, οι συμμετέχοντες είχαν στη διάθεσή τους χαρτί και μολύβι και μπορούσαν να εκτελέσουν τις πράξεις είτε πραγματοποιώντας νοερούς είτε γραπτούς υπολογισμούς, ενώ στη *συνθήκη μη επιλογής* έπρεπε να εκτελέσουν τις πράξεις αποκλειστικά νοερά. Οι συμμετέχοντες, τέλος, καλούνταν να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους. Ο δείκτης αξιοπιστίας cronbach's alpha εκτιμήθηκε στο 0.818.

Διαδικασία. Τα παιδιά εξετάστηκαν ατομικά σε ήσυχο χώρο του σχολείου τους. Η συμμετοχή τους ήταν εθελοντική και ανώνυμη. Η διαδικασία διήρκεσε περίπου 20 λεπτά.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

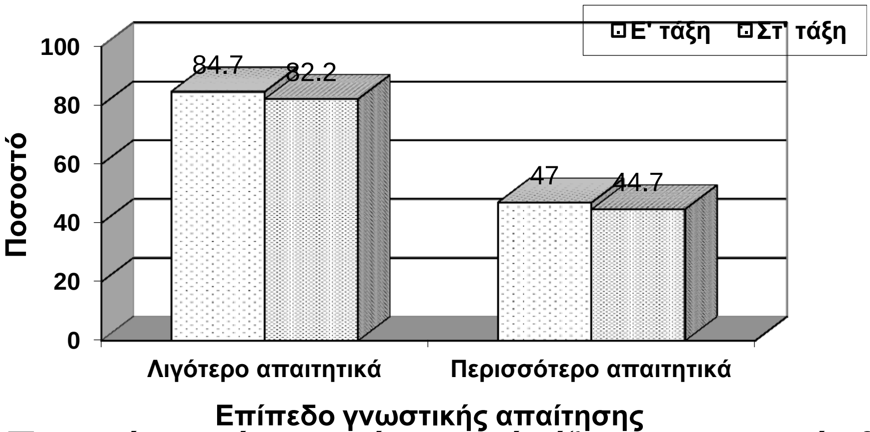
α. Γενική επίδοση. Τα παιδιά παρουσίασαν καλή επίδοση στο σύνολο των πράξεων διαίρεσης, με ποσοστό επιτυχίας κοντά στο 65%. Δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ούτε στην επίδοση ως προς την ηλικία ανάμεσα στους μαθητές/τριες της Ε' και της Στ' τάξης ($t=,388$, $df=120$, $p=.699$) ούτε στην επίδοση ως προς το φύλο ανάμεσα στα αγόρια και τα κορίτσια ($t=,973$, $df=120$, $p=.335$).

Οι επιδόσεις των παιδιών επηρεάστηκαν από την ομάδα στην οποία κατανεμήθηκαν: στο σύνολό τους όσα παιδιά είχαν στη διάθεσή τους χαρτί και μολύβι και μπορούσαν να επιλέξουν ανάμεσα σε νοερούς και γραπτούς υπολογισμούς (συνθήκη επιλογής) παρουσίασαν στατιστικά σημαντικά καλύτερες επιδόσεις (71,5%) σε σχέση με τα παιδιά που έπρεπε να κάνουν υποχρεωτικά τους υπολογισμούς νοερά (συνθήκη μη επιλογής, 58,5%) ($t=-2,955$, $df=120$, $p<.01$). Αυτές οι διαφορές επιβεβαιώθηκαν και για κάθε ηλικιακή ομάδα ξεχωριστά ($t=-2,183$, $df=64$, $p<.05$ και $t=-1,943$, $df=54$, $p<.05$, για την Ε' και την Στ' τάξη, αντίστοιχα). Τα στοιχεία αυτά παρουσιάζονται αναλυτικά στο Σχήμα 1 που ακολουθεί.

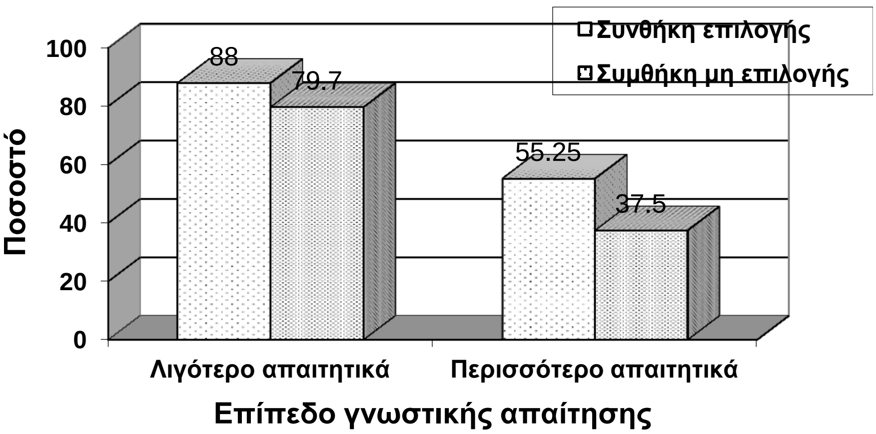


Σχήμα 1: Ποσοστό σωστών απαντήσεων ανά τάξη ως προς τη συνθήκη επιλογής του τρόπου εκτέλεσης των διαιρέσεων

Το επίπεδο γνωστικής απαίτησης των προβλημάτων επηρέασε τους συμμετέχοντες (βλ. Σχήματα 2 και 3) οι οποίοι παρουσίασαν στατιστικά σημαντικά καλύτερη επίδοση στα προβλήματα που ήταν λιγότερο γνωστικά απαιτητικά σε σύγκριση με τα αντίστοιχα που ήταν περισσότερο γνωστικά απαιτητικά ($t=15,801$, $df=121$, $p<.001$), εύρημα που ίσχυε και για τις δύο ηλικιακές ομάδες (t=12,358, df=65, p<.001 και t=9,950, df=55, p<.001, για τα παιδιά της Ε' και της Στ' τάξης, αντίστοιχα) καθώς επίσης και για τις ομάδες που χωρίστηκαν ως προς τη συνθήκη εκτέλεσης των διαιρέσεων (t=9,387, df=57, p<.001 και t=13,215, df=63, p<.001, για τα παιδιά στη συνθήκη επιλογής και στη συνθήκη μη επιλογής, αντίστοιχα). Τέλος, σημειώθηκαν στατιστικά σημαντικά καλύτερες επιδόσεις στις διαιρέσεις μερισμού (77%) σε σχέση με τις διαιρέσεις μέτρησης (52,5%) (t=10,030, df=121, p<.001).



Σχήμα 2: Ποσοστό σωστών απαντήσεων ανά τάξη ως προς το επίπεδο γνωστικής απαίτησης των προβλημάτων

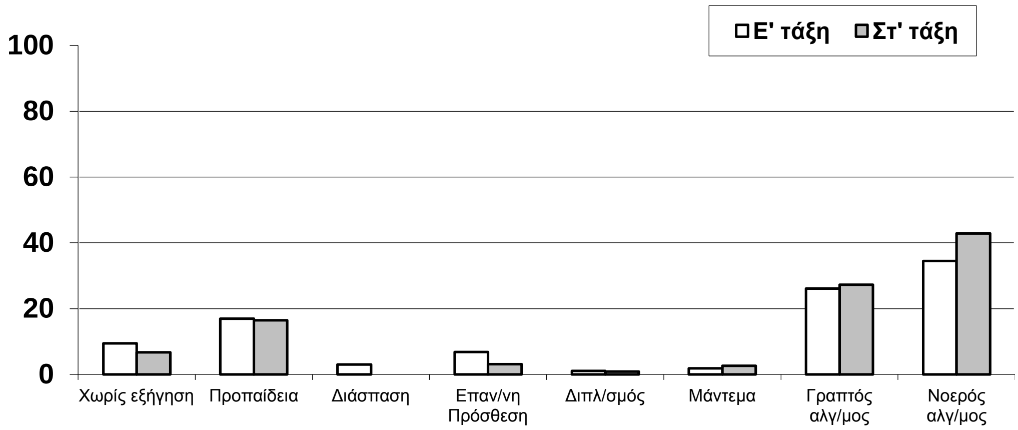


Σχήμα 3: Ποσοστό σωστών απαντήσεων ανά συνθήκη εκτέλεσης των διαιρέσεων ως προς το επίπεδο γνωστικής απαίτησης των προβλημάτων

β. Στρατηγικές των παιδιών. Οι επεξηγήσεις των συμμετεχόντων που απάντησαν στα προβλήματα, ανεξάρτητα από το αν ήταν σωστές ή λανθασμένες, αναδείκνυαν τις στρατηγικές που ακολούθησαν. Ταξινομήθηκαν στις εξής επτά κατηγορίες: *1) «Χωρίς Εξήγηση»* (απαντήσεις στις οποίες δεν δόθηκαν επεξηγήσεις ή ήταν του τύπου 'έτσι είναι'), *2) «Χρήση Προπαίδειας»* (ανάκληση γνωστών γινομένων), *3) «Διάσπαση»* (διάσπαση του διαιρετέου σε μικρότερους αριθμούς και ανάκληση γινομένων), 4) «*Επαναλαμβανόμενη Πρόσθεση*» (‘χτίσιμο’ του διαιρετέου με συνεχείς προσθέσεις), 5) «*Διπλασιασμός*» (υποδιπλασιασμός του διαιρετέου ή διπλασιασμός του διαιρέτη), 6) «*Μάντεμα και Δοκιμές*» (συνεχείς δοκιμές κοντινών αριθμών) και 7) «*Αλγόριθμος*» (χρήση του τυποποιημένου αλγόριθμου γραπτά ή νοερά).

Οι στρατηγικές που έδειχναν εφαρμογή του αλγόριθμου (γραπτά και νοερά) παρουσιάστηκαν πιο συχνά (περίπου 68%) για το σύνολο των συμμετεχόντων (βλ. Σχήμα 4). Ωστόσο, η συχνότητα χρήσης των στρατηγικών επηρεάστηκε από την ομάδα στην οποία οι συμμετέχοντες κατανεμήθηκαν. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1, στην ομάδα όπου μπορούσαν να επιλέξουν ανάμεσα σε γραπτούς και νοερούς υπολογισμούς, περισσότεροι από τους μισούς συμμετέχοντες -και από τις δύο τάξεις- επέλεξαν το γραπτό αλγόριθμο (μ.ο=4,49), ενώ αρκετοί ήταν όσοι εκτέλεσαν τον τυποποιημένο αλγόριθμο νοερά (μ.ο=1,38), με τους μαθητές της Στ’ τάξης να τον χρησιμοποιούν στατιστικά σημαντικά περισσότερο σε σχέση με τους μαθητές της Ε’ τάξης ($t=-2,214$, $df=56$, $p<.05$). Στην ομάδα όπου οι συμμετέχοντες δεν είχαν την επιλογή των γραπτών υπολογισμών (βλ. Πίνακα 2), η εφαρμογή του αλγόριθμου νοερά κυριάρχησε σε σχέση με τις άλλες στρατηγικές, χωρίς στατιστικά σημαντικές διαφοροποιήσεις ανάμεσα στις δύο ηλικιακές ομάδες. Ωστόσο, σε αυτή την ομάδα τα παιδιά εμφάνισαν μεγαλύτερη χρήση εναλλακτικών νοερών στρατηγικών, όπως τη χρήση της προπαίδειας και την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση (από τα παιδιά της Στ’ τάξης και της Ε’ τάξης, αντίστοιχα). Οι στρατηγικές αυτές ευνοήθηκαν περισσότερο στα προβλήματα όπου οι αριθμοί μπορούσαν να ανακληθούν από τη μνήμη ή να διασπαστούν σε μικρότερους αριθμούς.

Εξετάζοντας τις συσχετίσεις ανάμεσα στη χρήση των στρατηγικών και την επίδοση όλων των παιδιών, βρέθηκε ότι, τόσο στα λιγότερο όσο και στα περισσότερο γνωστικά απαιτητικά προβλήματα, η στρατηγική της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης εμφανίζεται με επιτυχείς απαντήσεις ($p<.01$ και $p<.05$, αντίστοιχα). Επιπρόσθετα, στην ομάδα των αποκλειστικά νοερών υπολογισμών, υψηλή θετική συσχέτιση υπήρχε ανάμεσα στην εκτέλεση του αλγόριθμου νοερά και τις επιτυχείς απαντήσεις μόνο για τα λιγότερο



Σχήμα 4: Κατανομή συχνότητας της χρήσης των στρατηγικών ως προς την τάξη

Στρατηγική	Μ.Ο. χρήσης (mx=8)		
	Ε΄τάξη	Στ' τάξη	Σύνολο
1. Χωρίς εξήγηση	,19 (3.97)	,23 (4.30)	,21 (.40)
2. Προπαίδεια	1,88 (1.56)	,85 (1.43)	1,41* (1.57)
3. Διάσπαση	,31 (.59)	-	,17* (.46)
4. Επαν/νη πρόσθεση	,31 (.69)	,15 (.36)	,24 (.57)
5. Διπλασ/μός	,06 (.24)	,08 (.27)	,07 (.25)
6. Μάντεμα	,06 (.24)	-	,03 (.18)
7. Γραπτός Αλγόριθμος	4,31 (2.70)	4,69 (1.85)	4,49 (2.34)
Νοερός Αλγόριθμος	,88 (1.75)	2,00 (2.11)	1,38* (1.99)

**Στατιστική σημαντικότητα στο p<.05*

Πίνακας 1: Μέσοι όροι (και τυπικές αποκλίσεις) της χρήσης των στρατηγικών των παιδιών της *συνθήκης επιλογής* ως προς την τάξη

Στρατηγική	Μ.Ο. χρήσης (mx=8)		
	Ε΄τάξη	Στ' τάξη	Σύνολο
1. Χωρίς εξήγηση	1,29 (2.19)	,80 (1.34)	1,06 (1.85)
2. Προπαίδεια	,88 (1.25)	1,73 (2.08)	1,28* (1.73)
3. Διάσπαση	,18 (.387)	-	,09* (.29)
4. Επαν/νη πρόσθεση	,76 (1.07)	,33 (.60)	,56* (.90)
5. Διπλασ/μός	,12 (.47)	,07 (.25)	,09 (.38)
6. Μάντεμα	,24 (.43)	,40 (.49)	,32 (.46)
7. Νοερός Αλγόριθμος	4,53 (2.33)	4,67 (2.56)	4,60 (2.42)

* *Στατιστική σημαντικότητα στο p<.05*

Πίνακας 2: Μέσοι όροι (και τυπικές αποκλίσεις) της χρήσης των στρατηγικών των παιδιών της *συνθήκης μη επιλογής* ως προς την τάξη

γνωστικά απαιτητικά προβλήματα (Pearson's r=.361, p<.01). Αντίθετα, στην ομάδα επιλογής, η εκτέλεση του τυποποιημένου αλγόριθμου γραπτά οδηγούσε τα παιδιά σε λανθασμένες απαντήσεις, είτε έλυναν λιγότερο είτε περισσότερο γνωστικά απαιτητικά προβλήματα (Pearson's r=-.316, p<.05 και r=-.306, p<.05, αντίστοιχα), ενώ βρέθηκε υψηλή θετική συσχέτιση ανάμεσα στη χρήση του αλγόριθμου νοερά και τα ποσοστά επιτυχίας μόνο στα δύσκολα προβλήματα (Pearson's r=.298, p<.01).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Δύο κύρια ευρήματα αναδεικνύονται από την παρούσα έρευνα. Πρώτον, τα παιδιά της Ε' και της Στ' τάξης φάνηκε να διαθέτουν νοερές στρατηγικές διαίρεσης σε ικανοποιητικό βαθμό. Ωστόσο, όταν τις χρησιμοποιούσαν, είχαν χαμηλότερη επίδοση από τα παιδιά που εκτελούσαν τους υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι. Το εύρημα αυτό συμφωνεί με τη διαπίστωση των Hickendorff et al. (2010) ότι οι γραπτοί υπολογισμοί οδηγούν τους μαθητές σε περισσότερο ακριβή αποτελέσματα σε σχέση με τους νοερούς.

Δεύτερον, έντονη ήταν η επιρροή του τυποποιημένου αλγόριθμου στο είδος των υπολογισμών αλλά και στις στρατηγικές των παιδιών που συμμετείχαν στην παρούσα έρευνα. Συγκεκριμένα, όταν είχαν τη δυνατότητα να επιλέξουν ανάμεσα σε γραπτούς και νοερούς υπολογισμούς διαίρεσης, προέβαιναν στην πλειοψηφία τους στη χρήση των γραπτών υπολογισμών, και συγκεκριμένα στην εφαρμογή του τυποποιημένου αλγόριθμου. Αυτό τους οδηγούσε συχνά σε λάθη, συστηματικά τις περισσότερες φορές, κατά την εκτέλεση της διαδικασίας τόσο στις εύκολες όσο και στις δύσκολες διαιρέσεις. Η ύπαρξη λαθών στις γραπτές διαιρέσεις ενισχύει την άποψη αρκετών ερευνητών (π.χ. Thompson, 1999. Mclellan, 2001) οι οποίοι υποστηρίζουν ότι η εκτέλεση του γραπτού αλγόριθμου δεν αποτελεί ένδειξη εννοιολογικής κατανόησης. Επιπρόσθετα, βρέθηκε ότι τα παιδιά της Στ’ τάξης, στην ομάδα επιλογής, χρησιμοποίησαν περισσότερο τον τυποποιημένο αλγόριθμο νοερά σε σχέση με τα παιδιά της Ε’ τάξης, αναδεικνύοντας έτσι την επιμονή τους στη χρήση του αλγόριθμου.

Τα παιδιά από τα οποία ζητήθηκε να εκτελέσουν τους υπολογισμούς αποκλειστικά νοερά παρουσίασαν ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό επιτυχίας (κοντά στο 60%). Ωστόσο, από τις νοερές στρατηγικές που χρησιμοποίησαν, η στρατηγική με τη μεγαλύτερη συχνότητα είναι αυτή που αντανακλά τη χρήση του γραπτού αλγόριθμου, γεγονός που δείχνει αδυναμία των παιδιών να εκτελέσουν ευέλικτα νοερούς υπολογισμούς χρησιμοποιώντας άλλες στρατηγικές. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το εύρημα ότι η χρήση του αλγόριθμου νοερά οδηγούσε σε σωστό αριθμητικό αποτέλεσμα στις εύκολες διαιρέσεις, αλλά στις πιο δύσκολες τα παιδιά κινούνταν περισσότερο σε εναλλακτικές νοερές στρατηγικές (π.χ., ανάκληση, επαναλαμβανόμενη πρόσθεση). Αυτή η τάση των παιδιών είχε επισημανθεί και στην έρευνα των Heirdsfield et al. (1999).

Η παρούσα εργασία υποστηρίζει την έγκαιρη ένταξη των νοερών υπολογισμών στο δημοτικό σχολείο, δίνοντας ευκαιρίες στα παιδιά από νωρίς να αναπτύξουν τις προσωπικές αυθόρμητες νοερές στρατηγικές τους πριν από τη διδασκαλία των γραπτών πράξεων (Λεμονίδης, 2013), καθώς συνδέονται με την εννοιολογική κατανόηση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Campbell, J.I.D., & Xue, Q. (2001). Cognitive arithmetic across cultures. *Journal of Experimental Psychology: General*, *130*(2), 299-315.

Fuson, K.C., Wearne, D., Hiebert, J., Murray, H., Human, P., Oliver, A., Carpenter, T., & Fennema, E. (1997). Children’s conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(2), 130-162.

Heirdsfield, A.M. (2003). “Spontaneous” mental computations strategies. In N.A. Paterman, B. Dougherty, & J. Zilloux (Eds.), *Proceedings of* *the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.55-62). Honolulu, USA.

Heirdsfield, A.M., Cooper, T.J., Mulligan, J., & Irons, C.J. (1999). Children’s mental multiplication and division strategies. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp.89-96). Israel.

Hickendorff, M., van Putten, C.M., Verhelst, N.D., & Heiser, W.J. (2010). Individual differences in strategy use on division problems: Mental versus written computation. *Journal of Educational Psychology, 102*(2),438-452.

Λεμονίδης, Χ. (2013). *Μαθηματικά της φύσης και της ζωής: νοεροί υπολογισμοί*. Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

McIntosh, A. (2004). Where we are today. In A. McIntosh & L. Sparrow (Eds.), *Beyond written computation* (pp.3-14). Perth: MASTEC.

Mclellan, E. (2001). Mental calculation: Its place in the development of numeracy. *Westminster Studies in Education, 24*(2), 145-154.

Northcote, M., & McIntosh, A. (1999). What mathematics do adults really do in everyday life? *Australian Primary Mathematics Classroom, 4*(1), 19-21.

Reys, R.E. (1984). Mental computation and estimation: Past, present and future. *Elementary School Journal, 84*(5), 546-557.

Robinson, K.M., Arbuthnott, K.D., Rose, D., McCarron, M.C., Globa, C.A., & Phonexay, X.D. (2006). Stability and change in children’s division strategies. *Journal of Experimental Child Psychology, 93*, 224-238.

Rogers, A. (2009). Mental computation in the primary classroom. *MAV Annual Conference* (pp. 190-199).

Thompson, I. (1999). Written methods of calculation. In I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (pp.169-183). Buckingham: Open University Press.

Verschaffel, L. Greer, B., De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557-628). Charlotte,NC: NCTM.

ΕΠΙΔΟΣΗ ΚΑΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΤΩΝ ΠΑΙΔΙΩΝ ΣΕ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΦΟΡΟΥΝ ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΕΜΒΑΔΟΥ

Δεσλή Δέσποινα και Μυρόβαλη Βασιλική

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Α.Π.Θ.

ddesli@eled.auth.gr & vasiliki24my@gmail.com

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν να μελετήσει τις επιδόσεις και τις στρατηγικές των παιδιών κατά την εκτίμηση μέτρησης εμβαδού. Για το σκοπό αυτό, παρουσιάστηκαν τρία έργα σε παιδιά Ε' και Στ' τάξης από τα οποία ζητήθηκε να: α) συγκρίνουν δύο τυπικά σχήματα (Έργο 1) ή δύο μη τυπικά σχήματα (Έργο 2) ως προς το εμβαδόν τους και να εκτιμήσουν το μεγαλύτερο και β) να σχεδιάσουν και να υποδείξουν μία επιφάνεια συγκεκριμένου εμβαδού (Έργο 3). Αν και οι συμμετέχοντες παρουσίασαν περιορισμένη ικανότητα εκτίμησης επιφανειών δύο σχημάτων, είχαν περισσότερο επιτυχείς εκτιμήσεις στα μη τυπικά σχήματα, στα μη ισοεμβαδικά σχήματα και σε αυτά με μικρές επιφάνειες. Τέλος, μεγάλη ήταν η επίδραση του τύπου εύρεσης του εμβαδού στις στρατηγικές εκτίμησης επιφάνειας των παιδιών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πολύ συχνά στην καθημερινή ζωή πραγματοποιούμε νοερά εκτιμήσεις για να καταλήξουμε γρήγορα και κατά προσέγγιση στο αποτέλεσμα ενός πολύπλοκου υπολογισμού που είναι απαραίτητος για την επίλυση πρακτικών ζητημάτων. Για παράδειγμα, συχνά προβαίνουμε σε εκτιμήσεις ποσότητας (π.χ., πόσα περίπου παιδιά είναι σε μία τάξη), αριθμητικού υπολογισμού (π.χ., το κόστος μίας πιθανής αγοράς) ή μέτρησης (π.χ., το ύψος ενός κτηρίου). Τέτοιες περιστάσεις εκτιμήσεων αποτελούν τους τρεις κύριους τύπους εκτίμησης (Hogan & Brezinski, 2003), από τους οποίους η εκτίμηση μέτρησης (ή μέτρηση κατ'εκτίμηση), η οποία συμβαίνει όταν απουσιάζουν συγκεκριμένα όργανα μέτρησης (Bright, 1976, στο Sowder, 1992), έχει συγκεντρώσει το ενδιαφέρον λιγότερων ερευνητών. Η ποικιλία του περιεχομένου των χαρακτηριστικών που επισημαίνονται ως εκτίμηση μέτρησης (π.χ., μήκος, εμβαδόν, βάρος, όγκος/χωρητικότητα) η οποία προσδίδει μεγάλη ετερογένεια στο περιεχόμενό της (Hogan & Brezinski, 2003) αλλά και η εξάρτησή της από τα αντικείμενα που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση (Joram, Subrahmanyam & Gelman, 1998) είναι κάποιες από τις ιδιαιτερότητες της εκτίμησης μέτρησης οι οποίες ενδεχομένως εξηγούν την περιορισμένη ερευνητική ενασχόληση με αυτή. Η παρούσα εργασία εστιάζει στις εκτιμήσεις μέτρησης και, συγκεκριμένα, στην εκτίμηση μέτρησης του εμβαδού επιφανειών.

Από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού τα παιδιά αναπτύσσουν τις εννοιολογικές βάσεις για τη μέτρηση διάφορων χαρακτηριστικών με κύρια προτεραιότητα την ανάπτυξη των γραμμικών μετρήσεων (Smith, van den Heuvel-Panhuizen, & Tempo, 2011) και την εστίαση στους ακριβείς υπολογισμούς. Μια συχνή πρακτική είναι να χρησιμοποιούνται αρχικά μη καθιερωμένες ή άτυπες μονάδες μέτρησης (π.χ., πατημασιές, καλαμάκια), οι οποίες οδηγούν τα παιδιά σε διαφορετικές απαντήσεις και, κατά συνέπεια, δημιουργούν την ανάγκη για μια κοινά αποδεκτή μονάδα μέτρησης, δηλαδή, την τυπική μονάδα μέτρησης (π.χ., εκατοστό). Η χρήση των άτυπων μονάδων μέτρησης, ωστόσο, έχει επικριθεί από τους Clements και Sarama (2009) οι οποίοι θεωρούν ότι οι πολλές διαφορετικές μονάδες, όταν χρησιμοποιούνται στη μέτρηση, ενδέχεται να μπερδεύουν τα παιδιά. Παρόλα αυτά, τα παιδιά προβαίνουν σε καλύτερες εκτιμήσεις όταν αυτές εκφράζονται με άτυπες παρά με τυπικές μονάδες μέτρησης (Δεσλή & Γιακουμή, 2015. Jones, Gardner, Taylor, Forrester, & Andre, 2012). Επιπρόσθετα, συχνά τα παιδιά που έχουν μάθει να χρησιμοποιούν στις μετρήσεις τους σημεία αναφοράς για τις σημαντικότερες μονάδες μέτρησης έχουν πολύ καλή επίδοση στις εκτιμήσεις (Joram, Gabriele, Bertheau, Gelman, & Subrahmanyam, 2005) και προωθείται η πολλαπλασιαστική ικανότητά τους (van de Walle, Lovin, Karp, & Bay-Williams, 2017). Για παράδειγμα, εύκολα κάποιος μπορεί να πει πως το πλάτος ενός κήπου είναι το μισό του μήκους ενός γηπέδου, δηλαδή, περίπου 50 μέτρα. Πολύ σημαντικό ρόλο στις επιτυχείς εκτιμήσεις διαδραματίζει το μέγεθος της μονάδας μέτρησης (Towers & Hunter, 2010).

Η μέτρηση εμβαδού συστηματικά διδάσκεται στο δημοτικό σχολείο, κυρίως μέσα από συνδέσεις με την εκμάθηση του πολλαπλασιασμού, χωρίς απαραίτητα να επιτυγχάνεται η κατανόηση της έννοιας του εμβαδού: ευρήματα δείχνουν ότι 10-χρονοι και 13-χρονοι μαθητές δεν κατανοούν εντελώς την έννοια του εμβαδού (Blume, Galindo, & Walcott, 2007), ενώ συχνά την συγχέουν με την έννοια της περιμέτρου, ιδιαίτερα όταν οι δύο αυτές έννοιες διδάσκονται την ίδια χρονική περίοδο (Sarama, Clements, Parmar, & Garrison, 2011). Επίσης, δυσκολεύονται να επικαλύψουν ένα σχήμα και συχνά χρησιμοποιούν ολόκληρη σειρά με επιμέρους στοιχεία ως ενιαία μονάδα μέτρησης που την επαναλαμβάνουν πολλαπλασιαστικά ή προσθετικά (Mulligan, Prescott, Mitchelmore, & Outhred, 2005), με αποτέλεσμα να αδυνατούν να εκφράσουν το εμβαδόν του σχήματος. Αισιόδοξο, όμως, είναι το γεγονός ότι μικρά παιδιά, ηλικίας 4-5 ετών, είναι ικανά να συγκρίνουν άμεσα τα εμβαδά δύο σχημάτων (Clements & Stephan, 2004), κυρίως με τη χρήση εκτιμήσεων. Στην έρευνα των Βαϊτσίδη και Σκουμπουρδή (2015), ωστόσο, η σύγκριση του μεγέθους δύο επιφανειών μέσω εκτίμησης και μέτρησης δεν αποτέλεσε αυθόρμητη διαδικασία για τα παιδιά Δ’ τάξης, αφού μόνο δύο από τα 15 παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα έδωσαν επιτυχείς εκτιμήσεις. Τα βοηθητικά μέσα μάλιστα που επέλεξαν να χρησιμοποιήσουν είτε δεν ήταν λειτουργικά για τη μέτρηση του εμβαδού είτε δεν χρησιμοποιήθηκαν με τον κατάλληλο τρόπο.

Παρόλο που πληθώρα ερευνητών επισημαίνουν τη σημασία των εκτιμήσεων, πολύ περιορισμένη είναι η έρευνα αναφορικά με τις εκτιμήσεις στις μετρήσεις μεγεθών. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να εξετάσει την ικανότητα των παιδιών στην εκτίμηση μέτρησης εμβαδού με τη χρήση τυπικών και άτυπων μονάδων μέτρησης καθώς και τις στρατηγικές στις οποίες στηρίζονται.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες. Στην έρευνα συμμετείχαν συνολικά 80 μαθητές/τριες (38 κορίτσια και 42 αγόρια), ισομερώς προερχόμενοι από την Ε’ τάξη (μ.ο. ηλικίας: 10 χρόνια και 8 μήνες) και την Στ’ τάξη (μ.ο. ηλικίας: 11 χρόνια και 8 μήνες). Φοιτούσαν σε δημόσια δημοτικά σχολεία της Θεσσαλονίκης, κάλυπταν διαφορετικά κοινωνικοοικονομικά επίπεδα και δεν είχαν δεχθεί εξειδικευμένη διδασκαλία στην εκτίμηση μέτρησης εμβαδού. Η επιλογή τους έγινε με τη μέθοδο της τυχαίας δειγματοληψίας.

Σχεδιασμός – Εργαλείο μέτρησης. Για το σκοπό της έρευνας σχεδιάστηκαν και παρουσιάστηκαν σε όλους τους συμμετέχοντες τρία Έργα (συνολικά 10 δοκιμασίες). Στα δύο πρώτα έργα, οι συμμετέχοντες έπρεπε να συγκρίνουν δύο τυπικά σχήματα (Έργο 1-*"Σύγκριση τυπικών σχημάτων")* ή δύο μη τυπικά σχήματα (Έργο 2-"*Σύγκριση μη τυπικών σχημάτων*") ως προς το εμβαδόν τους και να εκτιμήσουν το μεγαλύτερο. Οι μισές δοκιμασίες που παρουσιάζονταν στους συμμετέχοντες αφορούσαν μεγάλες επιφάνειες (π.χ., με εμβαδόν μεγαλύτερο από 20 τ.εκ.) και οι άλλες μισές αφορούσαν μικρές επιφάνειες (π.χ., με εμβαδόν μικρότερο από 18 τ.εκ.). Σε κάθε έργο από τα Έργα 1 και 2, οι μισές δοκιμασίες αφορούσαν σε ισοεμβαδικά σχήματα και οι άλλες μισές σε μη ισοεμβαδικά σχήματα. Σε καμία περίπτωση τα σχήματα δεν είχαν ίδια περίμετρο. Τέλος, το Έργο 3-"*Επιλογή επιφάνειας*" ζητούσε από τους συμμετέχοντες να σχεδιάσουν και να υποδείξουν μία επιφάνεια συγκεκριμένου εμβαδού[1].

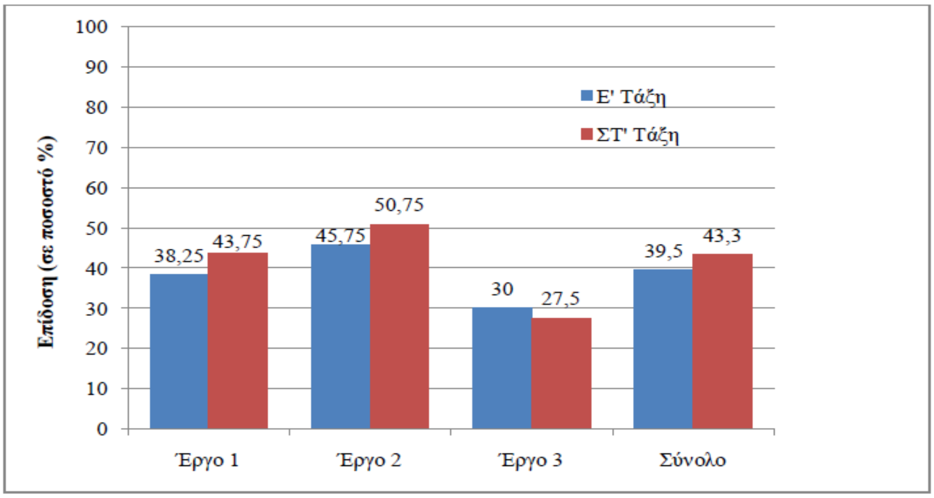
Προκειμένου να εξεταστεί αν η ύπαρξη σεναρίου επηρεάζει τις εκτιμήσεις των παιδιών, αυτά κατανεμήθηκαν τυχαία σε δύο ομάδες, ανάλογα με την ύπαρξη ή όχι σεναρίου[2] στα δύο πρώτα έργα. Συγκεκριμένα, στην Ομάδα Α το Έργο 1 παρουσιάστηκε χωρίς σενάριο, το Έργο 2 με σενάριο και στο Έργο 3 από τα παιδιά ζητήθηκε να σχεδιάσουν μία μικρή επιφάνεια και να υποδείξουν μία μεγάλη. Στην Ομάδα Β ακολουθήθηκε ακριβώς αντίθεση παρουσίαση των έργων. Τα σενάρια επιλέχθηκαν ώστε να ανταποκρίνονται σε οικείες καταστάσεις των παιδιών.

Στα Έργα 1 και 2, μετά την εκτίμηση για την επιλογή του μεγαλύτερου από τα δύο κάθε φορά δοσμένα σχήματα, ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να επιβεβαιώσουν την απάντησή τους χρησιμοποιώντας ορισμένα μέσα - εργαλεία. Τα μέσα αυτά ήταν διαθέσιμα σε όλους τους συμμετέχοντες και διακρίνονται σε: α) Τυπικά μέσα: τετραγωνικό εκατοστό σε χαρτόνι, χάρακας, λωρίδες χαρτιού με διαστάσεις 1εκ. Χ 10εκ., 1εκ. Χ 5εκ. και β) Άτυπα μέσα: Μολύβι, σβήστρα, ψαλίδι, στυλό. Τέλος, οι συμμετέχοντες, καλούνταν να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους, ανεξάρτητα από το αν αυτές οδήγησαν σε περισσότερο ή λιγότερο επιτυχείς εκτιμήσεις. Ο δείκτης αξιοπιστίας cronbach’s alpha βρέθηκε στο 0.906.

Διαδικασία. Τα παιδιά εξετάστηκαν ατομικά σε μία ήσυχη αίθουσα του σχολείου τους. Η συμμετοχή τους στην έρευνα ήταν ανώνυμη και προαιρετική. Η διαδικασία διήρκεσε περίπου 20 λεπτά.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

α. Γενική επίδοση. Η γενική επίδοση των παιδιών ήταν φτωχή, με ποσοστά επιτυχίας κοντά στο 40% και το 43% για τους μαθητές/τριες της Ε’ και της Στ’ τάξης, αντίστοιχα. Μάλιστα, η διαφορά αυτή στην επίδοση μεταξύ των δύο ηλικιακών ομάδων (βλ. Σχήμα 1) δεν βρέθηκε να είναι στατιστικά σημαντική ούτε στο σύνολο των έργων (t=-1,191, df=78, p=.237) ούτε και για κάθε έργο ξεχωριστά (t=-1,452, df=78, p=.151, t=-1,425, df=78, p=.158 και t=.314, df=78, p=.754, για τα Έργα 1, 2 και 3, αντίστοιχα). Δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ούτε στην επίδοση ως προς το φύλο ανάμεσα στα αγόρια και τα κορίτσια (t=1,564, df=78, p=.122) ούτε στην επίδοση ως προς την ομάδα αναφορικά με την παρουσία σεναρίου (t=-3,084, df=78, p=.082).

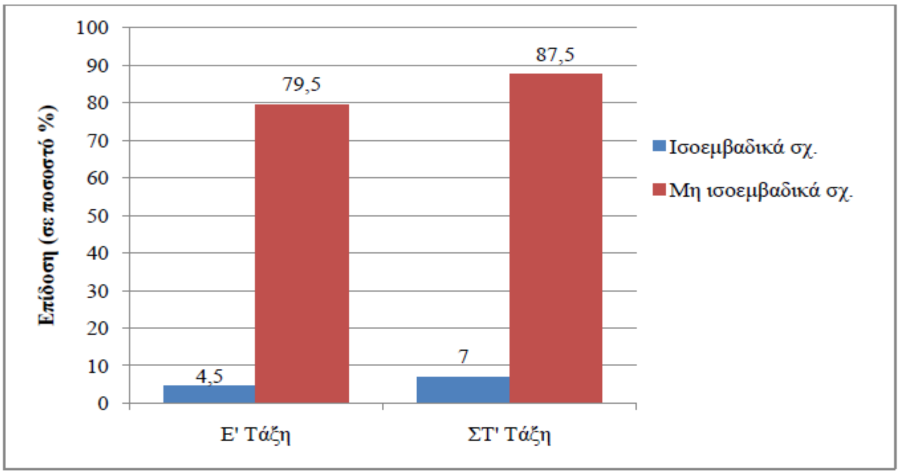


Σχήμα 1: Ποσοστό σωστών εκτιμήσεων των παιδιών στα τρία Έργα ως προς την τάξη

Στατιστικά σημαντικές διαφορές υπάρχουν στο ποσοστό των επιτυχών εκτιμήσεων στις δοκιμασίες που αφορούν μικρές και μεγάλες επιφάνειες ($t= 3{,}802$, $df=79$, $p<.001$): όλα τα παιδιά παρουσίασαν στατιστικά σημαντικά μεγαλύτερη επιτυχία στις δοκιμασίες που αφορούσαν εκτιμήσεις μικρών επιφανειών παρά μεγάλων (45,8% και 37%, αντίστοιχα). Τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώθηκαν και όταν η ίδια ανάλυση πραγματοποιήθηκε ξεχωριστά για τα παιδιά της Ε' τάξης ($t=2{,}761$, $df=39$, $p<.01$) και για τα παιδιά της ΣΤ' τάξης ($t=2{,}816$, $df=39$, $p<.01$).

Τα παιδιά στο σύνολό τους είχαν στατιστικά σημαντικά μεγαλύτερη επιτυχία στις δοκιμασίες που αφορούσαν μη ισοεμβαδικά σχήματα (83,5%) σε σχέση με αυτές που αφορούσαν ισοεμβαδικά σχήματα (5,75%) ($t=-26{,}684$, $df=79$, $p<.001$). Οι διαφορές αυτές (βλ. Σχήμα 2) επιβεβαιώθηκαν και για κάθε ηλικιακή ομάδα ξεχωριστά ($t=-17{,}470$, $df=39$, $p<.001$ και $t=-20{,}403$, $df=39$, $p<.001$ για τα παιδιά της Ε' και της Στ' τάξης, αντίστοιχα).

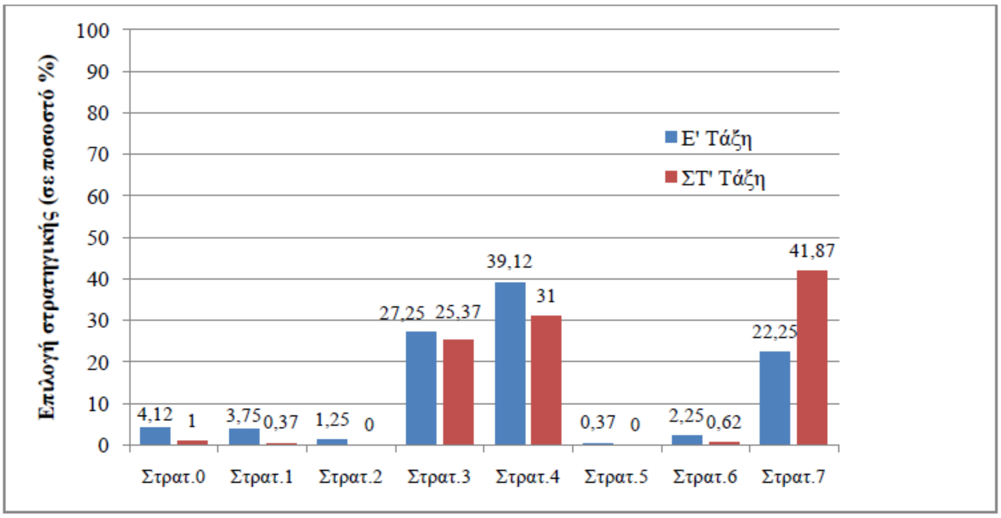
Οι δοκιμασίες που αφορούσαν τη σύγκριση επιφάνειας ανάμεσα σε δύο μη τυπικά σχήματα (48,25%) ευνόησαν στατιστικά σημαντικά περισσότερες επιτυχείς εκτιμήσεις σε σχέση με τις αντίστοιχες ανάμεσα σε δύο τυπικά σχήματα (41%) ($t=-3{,}220$, $df=79$, $p<.01$), εύρημα που ίσχυε και για τις δύο ηλικιακές ομάδες ($t=-2{,}504$, $df=39$, $p<.05$ και $t=-2{,}054$, $df=39$, $p<.05$, για τα παιδιά της Ε' και της Στ' τάξης, αντίστοιχα) καθώς επίσης και για τις ομάδες που χωρίστηκαν ως προς την παρουσία σεναρίου ($t=-1{,}921$, $df=39$, $p<.05$ και $t=-2{,}762$, $df=39$, $p<.01$, για τα παιδιά στην Ομάδα Α και την Ομάδα Β, αντίστοιχα).



Σχήμα 2: Ποσοστό σωστών εκτιμήσεων των παιδιών στις δοκιμασίες με ισοεμβαδικά και μη ισοεμβαδικά σχήματα ως προς την τάξη

β. Στρατηγικές των παιδιών. Ο τρόπος με τον οποίο οι συμμετέχοντες χειρίστηκαν τα μέσα που είχαν στη διάθεσή τους καθώς και οι αιτιολογήσεις που πρόσφεραν μετά την εκτίμηση για τη σύγκριση των επιφανειών αναδείκνυαν τις στρατηγικές που ακολούθησαν. Οι στρατηγικές αυτές ταξινομήθηκαν στις εξής κατηγορίες: *0) «Χωρίς μέσο-χωρίς εξήγηση»* (απαντήσεις στις οποίες δεν δόθηκαν επεξηγήσεις ή ήταν του τύπου 'έτσι είναι'), 1*) «Σβήστρα/μολύβι (ή άλλο αντικείμενο): εφαρμογή σε πλευρές»* (εφαρμογή του αντικειμένου σε όλες τις πλευρές των δύο σχημάτων), 2*) «Λωρίδα 1x10 εκ. (ή 1x5 εκ.): εφαρμογή σε πλευρές»* (εφαρμογή της λωρίδας σε όλες τις πλευρές των δύο σχημάτων), *3) «Χάρακας: μέτρηση και σύγκριση»* (χρήση χάρακα, μέτρηση και σύγκριση δύο ή περισσότερων πλευρών), 4) *«Χάρακας: εύρεση περιμέτρου»* (χρήση χάρακα, μέτρηση και εύρεση περιμέτρου), 5) *«Τετραγωνικό εκατοστό: εφαρμογή σε πλευρές»* (χρήση τετραγωνικού εκατοστού και εφαρμογή σε πλευρές), 6) *«Τετραγωνικό εκατοστό: εφαρμογή σε εσωτερικό σχήματος»* (χρήση τετραγωνικού εκατοστού και εφαρμογή σε πλευρές) και 7) *«Χάρακας: εύρεση εμβαδού»* (χρήση χάρακα, μέτρηση, εφαρμογή του τύπου του εμβαδού και εύρεση εμβαδού).

Οι περισσότερες απαντήσεις των παιδιών έδειχναν χρήση του χάρακα προκειμένου είτε να μετρήσουν τις πλευρές των σχημάτων και να βρουν την περίμετρό τους (στρατηγική 4: 35%) ή το εμβαδόν τους (στρατηγική 7: 32%) είτε να μετρήσουν μία ή περισσότερες πλευρές των σχημάτων και συγκρίνοντας τις πλευρές αυτές να επιλέξουν το σχήμα με το μεγαλύτερο εμβαδόν (στρατηγική 3: 26,5%). Η συχνότητα χρήσης των στρατηγικών δεν επηρεάστηκε από την τάξη (βλ. Σχήμα 3): τόσο τα παιδιά της Ε' όσο και αυτά της Στ' τάξης χρησιμοποίησαν με παρόμοια συχνότητα τις στρατηγικές. Εξαίρεση αποτελεί η στρατηγική 7 που έδειχνε εφαρμογή του τύπου του εμβαδού, η οποία ακολουθήθηκε στατιστικά σημαντικά περισσότερο από τους μεγαλύτερους μαθητές (41,87%) σε σχέση με τους μικρότερους (22,25%).



Σχήμα 3: Συχνότητα χρήσης των στρατηγικών ως προς την τάξη

Εξετάζοντας τις συσχετίσεις ανάμεσα στη χρήση των στρατηγικών και το ποσοστό επιτυχίας των παιδιών, βρέθηκε ότι μόνο η στρατηγική 7 της εύρεσης εμβαδού εμφανίζεται με επιτυχείς εκτιμήσεις (Pearson's r=,255, p<.05): όσο περισσότερο χρησιμοποιούσαν τη στρατηγική αυτή τόσο περισσότερο οδηγούνταν σε καλές εκτιμήσεις μέτρησης εμβαδού. Η χρήση καμίας άλλης στρατηγικής δεν βρέθηκε να συσχετίζεται με επιτυχία στις εκτιμήσεις.

γ. *Χρήση χάρακα στη σχεδίαση επιφανειών*. Όταν ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να σχεδιάσουν μία επιφάνεια ορισμένου εμβαδού (Έργο 3), το 78% των παιδιών της Ε' τάξης και το 80% των παιδιών της ΣΤ' τάξης χρησιμοποίησαν κάποιο μέσο. Από όσους χρησιμοποίησαν μέσα για το σχεδιασμό της επιφάνειας, όλοι χρησιμοποίησαν τον χάρακα με αποτέλεσμα να μην χρησιμοποιηθεί κανένα άλλο μέσο σχεδιασμού. Η χρήση του μέσου αυτού στο Έργο 3 δεν βρέθηκε να διαφέρει στατιστικά σημαντικά ούτε ως προς την τάξη (t=-,270, df=78, p=.788) ούτε ως προς την ομάδα (t=1,934, df=78, p=.057). Το φύλο, ωστόσο, επηρέασε τη χρήση του μέσου (χάρακα) για το σχεδιασμό της συγκεκριμένης επιφάνειας (t=2,274, df=78, p<.05), καθώς τα κορίτσια (89%) βρέθηκε να χρησιμοποιούν τον χάρακα πιο συχνά σε σχέση με τα αγόρια (69%).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η παρούσα εργασία αναδεικνύει τρία κύρια ευρήματα. Πρώτον, τα παιδιά της Ε' και της Στ' τάξης, αν και τυπικά περισσότερο εξοικειωμένα με τη διδασκαλία της έννοια του εμβαδού λόγω της σχολικής τους εμπειρίας, φάνηκε να διαθέτουν περιορισμένη ικανότητα εκτίμησης μέτρησης εμβαδού. Το εύρημα αυτό συμφωνεί με τη διαπίστωση των Βαϊτσίδη και Σκουμπουρδή (2015) για δυσκολία των παιδιών να συγκρίνουν το μέγεθος δύο επιφανειών μέσω εκτίμησης.

Δεύτερον, η γενική επίδοση των συμμετεχόντων στις εκτιμήσεις φαίνεται να επηρεάστηκε από το αν αυτές αφορούσαν ισοεμβαδικά ή μη ισοεμβαδικά σχήματα καθώς και τυπικά ή μη τυπικά σχήματα. Συγκεκριμένα, πολύ καλές εκτιμήσεις εμβαδού πραγματοποίησαν στις δοκιμασίες με μη ισοεμβαδικά σχήματα (83,5%), πιθανότατα λόγω της περιορισμένης εξοικείωσής τους με τη σύγκριση επιφανειών και ειδικότερα τη σύγκριση ίσων επιφανειών, καθώς δεν είναι πολλές οι δραστηριότητες σύγκρισης επιφανειών στα σχολικά εγχειρίδια. Περισσότερες επιτυχείς εκτιμήσεις παρουσίασαν, επίσης, οι συμμετέχοντες στις δοκιμασίες με μη τυπικά σχήματα σε σχέση με αυτές που αφορούσαν τυπικά σχήματα. Αυτό ενδεχομένως οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές στην καθημερινή τους ζωή έρχονται πιο συχνά σε επαφή με μη τυπικά σχήματα και, ως εκ τούτου, οι εκτιμήσεις που πραγματοποιούν για αυτές τις επιφάνειες είναι περισσότερο επιτυχείς. Τέλος, οι εκτιμήσεις τους κατά τη σύγκριση επιφανειών δεν επηρεάστηκε από την ύπαρξη σεναρίου, εύρημα που δεν επιβεβαιώνει τα αποτελέσματα των Harris και Ilma (2011) οι οποίοι είχαν βρει πως το σενάριο ευνοούσες τις καλές επιδόσεις των παιδιών τρίτης τάξης στη μέτρηση επιφανειών.

Εξετάζοντας τα μέσα που χρησιμοποίησαν οι συμμετέχοντες για τον έλεγχο των εκτιμήσεών τους, βρέθηκε ότι το μέσο που χρησιμοποίησαν περισσότερο ήταν ο χάρακας, με τη χρήση των μη τυπικών μονάδων μέτρησης να είναι πολύ περιορισμένη. Αυτή η τάση των παιδιών είχε επισημανθεί και στην έρευνα των Βαϊτσίδη και Σκουμπουρδή (2015).

Τρίτον, αν και αρκετά παιδιά που συμμετείχαν στην παρούσα έρευνα βασίστηκαν σε σημεία αναφοράς για τις εκτιμήσεις τους, γεγονός που επιβεβαιώνει προηγούμενα ερευνητικά αποτελέσματα (Joram et al., 2005. Δεσλή & Γιακουμή, 2015), έντονη ήταν η επιρροή του τυποποιημένου αλγόριθμου εύρεσης του εμβαδού στις στρατηγικές τους. Συγκεκριμένα, στην πλειοψηφία τους, κυρίως τα παιδιά της Στ’ τάξης, εφάρμοζαν τον τύπο του εμβαδού, ο οποίος συχνά οδηγούσε σε λάθη είτε στην εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων που εμπλέκονταν είτε σε λάθη εφαρμογής του ίδιου του τύπου. Για τα μη τυπικά σχήματα, ιδιαίτερα, τα παιδιά που εφάρμοσαν τη στρατηγική αυτή πρώτα χώριζαν τα μη τυπικά σχήματα σε επιμέρους τυπικά σχήματα και στη συνέχεια έβρισκαν τα επιμέρους εμβαδά από τον τύπο και τα άθροιζαν. Συχνά, επίσης, αφού μετρούσαν τις πλευρές, πρόσθεταν αυτά τα μήκη και έβρισκαν την περίμετρο αντί για το εμβαδόν, εύρημα που έχει επισημανθεί στη βιβλιογραφία (Sarama et al., 2011). Η ύπαρξη λαθών ενισχύει την άποψη αρκετών ερευνητών (π.χ. Jones et al., 2012) που υποστηρίζουν ότι η 'τυφλή' χρήση και εφαρμογή ενός τύπου δεν αποτελεί ένδειξη εννοιολογικής κατανόησης. Σε κάθε περίπτωση, λίγες ήταν οι στρατηγικές των παιδιών που αφορούσαν εκτιμήσεις επιφάνειας και όχι ακριβείς μετρήσεις.

Τέλος, ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι για τα παιδιά ήταν πιο δύσκολο να σχεδιάσουν ή να υποδείξουν μία επιφάνεια συγκεκριμένου εμβαδού από το να συγκρίνουν δύο επιφάνειες. Αν και χρησιμοποίησαν αποκλειστικά τον χάρακα για τον σχεδιασμό επιφανειών, οι εκτιμήσεις τους δεν ήταν ιδιαίτερα επιτυχείς, γεγονός που αξίζει να εξεταστεί περαιτέρω. Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας αναδεικνύουν την ανάγκη περαιτέρω αναζήτησης του τρόπου με τον οποίο τα παιδιά πραγματοποιούν εκτιμήσεις στις μετρήσεις και αντιλαμβάνονται την εκτίμηση ως μέρος της διαδικασίας υπολογισμών (Jones et al., 2012) που τους επιτρέπει να αναπτύξουν τις προσωπικές αυθόρμητες στρατηγικές τους πριν από την εστίαση στις ακριβείς μετρήσεις.

Σημειώσεις

1. Για τον έλεγχο της επίδοσης των συμμετεχόντων στο Έργο 3 χρησιμοποιήθηκε ένα ελαστικό κριτήριο, σύμφωνα με το οποίο θεωρήθηκαν επιτυχείς οι εκτιμήσεις που είχαν ποσοστιαία απόκλιση κατά 30% από το αποτέλεσμα της ακριβούς μέτρησης (π.χ., για μία επιφάνεια εμβαδού 10 τ.εκ. θεωρήθηκαν σωστές οι απαντήσεις όσων υποδείκνυαν επιφάνεια με εμβαδόν από 7 τ.εκ. έως 13 τ.εκ.).
2. Ως σενάριο νοείται ένα ρεαλιστικό ή μη ρεαλιστικό πλαίσιο με σκοπό την εξοικείωση των μαθητών με διάφορες μαθηματικές έννοιες (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Βαϊτσίδη, Γ., & Σκουμπουρδή, Χ. (2015). Σύγκριση επιφανειών μέσω εκτίμησης και μέτρησης με χρήση 'βοηθητικών μέσων'. Στο Δ. Δεσλή, Μ. Τζεκάκη, & Ι. Παπαδόπουλος (Επιμ.), *Πρακτικά 6ου Πανελλήνιου Συνέδριου της Εν.Ε.Δι.Μ.* (σελ. 369-378). Α.Π.Θ.: Θεσσαλονίκη.

Blume, G., Galindo, E., & Walcott, C. (2007). Performance in measurement and geometry from the viewpoint of Principles and Standards for School Mathematics. In P. Kloosterman & F. Lester (Eds.), *Results and interpretations of the 2003 mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress* (pp. 95-138). Reston, VA: NCTM.

Clements, D.H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York, NY: Routledge.

Clements, D.H., & Stephan, M. (2004). Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. In D. Clements, & J. Sarama (Eds.), *Engaging young* *children in mathematics: Standards in early childhood mathematics education* (pp. 105-148). Mahwah, NJ: LEA.

Δεσλή, Δ., & Γιακουμή, Μ. (2015). Εκτίμηση μήκους με τυπικές και άτυπες μονάδες μέτρησης: Επιδόσεις και στρατηγικές των παιδιών. Στο Δ. Δεσλή, Μ. Τζεκάκη, & Ι. Παπαδόπουλος (Επιμ.), *Πρακτικά 6ου Πανελλήνιου Συνέδριου της Εν.Ε.Δι.Μ.* (σελ. 429-438). Α.Π.Θ.: Θεσσαλονίκη.

Harris, D., Ilma, R. (2011). The role of context in third graders' learning of area measurement. *Journal of Mathematics Education, 2*(1), 55-66.

Hogan, T. & Brezinski, K. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities? *Mathematical Thinking and Learning, 5*(4), 259-281.

Jones, M.G., Gardner, G.E., Taylor, A.R., Forrester, J.H., & Andre, T. (2012). Students' accuracy of measurement estimation: context, units, and logical thinking. *School Science and Mathematics, 112*(3), 171–178.

Joram, E., Gabriele, A.J., Bertheau, M., Gelman, R., & Subrahmanyam, K. (2005). Children's use of the reference point strategy for measurement estimation. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(1), 4-23.

Joram, E., Subrahmanyam, K., & Gelman, R. (1998). Measurement estimation: Learning to map the route from number to quantity and back. *Review of Educational Research, 68*(4), 413-449.

Mulligan, J.T., Prescott, A., Mitchelmore, M.C., & Outhred, L. (2005). Taking a closer look at young children's images of area measurement. *Australian Primary Mathematics Classroom, 10*(2), 4-8.

Sarama, J., Clements, D.H., Parmar, R., & Garrison, R. (2011). Geometry. In F. Fennell (Ed.), *Achieving fluency: Special education and mathematics* (pp. 163-196). NCTM.

Smith, J.P., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Tempo, A.R. (2011). Learning, teaching, and using measurement: introduction to the issue. *ZDM Mathematics Education, 43*(5), 617-620.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371–389). New York: Macmillan Publishing Company.

Towers, J., & Hunter, K. (2010). An ecological reading of mathematical language in a Grade 3 classroom: a case of learning and teaching measurement estimation. *The Journal of Mathematical Behavior, 29* (1), 25-40.

van de Walle, J.A., Lovin, L.H., Karp, K.S., & Bay-Williams, J.M. (2017). *Μαθηματικά από το Νηπιαγωγείο ως το Γυμνάσιο: Διδασκαλία με επίκεντρο το παιδί και την ανάπτυξή του*. Αθήνα: Gutenberg.

ΜΟΝΤΕΛΟ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗΣ ΤΩΝ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ζαχαρίας Ιωάννης και Πιττάλης Μάριος

Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

izacharias@acg.edu, m.pittalis@ucy.ac.cy

Σε αυτή την ερευνητική εργασία ελέγξαμε εμπειρικά ένα θεωρητικό μοντέλο περιγραφής της δομής της αλγεβρικής σκέψης μαθητών Γ΄ γυμνασίου. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι το μοντέλο αλγεβρικής σκέψης της Kieran (2007) αποτελεί ένα κατάλληλο εργαλείο περιγραφής της αλγεβρικής σκέψης στο γυμνάσιο με βάση το οποίο η αλγεβρική σκέψη αποτελεί σύνθεση τριών παραγόντων: μετασχηματιστική ικανότητα, γενικευμένη αριθμητική, και μετα-άλγεβρα. Επιπρόσθετα, τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι ο παράγοντας μετασχηματιστική ικανότητα προβλέπει τη γενικευμένη αριθμητική και η τελευταία προβλέπει την ικανότητα μετα-άλγεβρας, υποδηλώντας μια ιεραρχική σχέση μεταξύ των τριών παραγόντων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σημαντικός αριθμός ερευνητικών εργασιών έχουν εξετάσει το είδος των αλγεβρικών δραστηριοτήτων στην εκπαίδευση (Carraher, Martinez & Schliemann, 2008· Drijvers, Goddijn, & Kindt, 2011· Kaput, 2000). Παρόλα αυτά στο πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης δεν έχει διευκρινιστεί η έννοια της αλγεβρικής σκέψης στο γυμνάσιο με τέτοιο τρόπο, ώστε να αποτελέσει αναπόσπαστο κομμάτι τις διδασκαλίας και της μάθησης των μαθητών. Το έγγραφο των επιπέδων του National Council of Teachers of Mathematics (2000) διαχωρίζει τις δραστηριότητες της σχολικής άλγεβρας σε κατηγορίες, δίνοντας έμφαση στην ικανότητα γενίκευσης, τη διερεύνηση μοτίβων, σχέσεων, συναρτήσεων, την αναπαράσταση σχέσεων με τη χρήση συμβόλων και την ανάλυση της μεταβολής σε διαφορετικά πλαίσια. Επιπρόσθετα, είναι ευρέως αποδεκτός ο διαχωρισμός μεταξύ της αλγεβρικής σκέψης σε σχέση με το τι διδάσκεται στα σχολείο ως άλγεβρα. Η αλγεβρική σκέψη θεωρείται ότι μπορεί να κατακτηθεί από όλους τους μαθητές και αξιολογείται ως ζωτικής σημασίας για τις ανάγκες της κοινωνίας και της εργασίας (Mason, Graham & Johnston-Wilder, 2005). Ο όρος αλγεβρική σκέψη αναφέρεται πλέον σε ένα ευρύτερο εννοιολογικό πλαίσιο που ξεφεύγει από την απλή καταγραφή συγκεκριμένων έργων. Για αυτό τα τελευταία χρόνια δίνεται ιδιαίτερη σημασία στην ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης σε όλο το φάσμα της εκπαίδευσης παρά στην απλή διδασκαλία εννοιών σε θεματικές ενότητες άλγεβρας στο γυμνάσιο και στο λύκειο (NCTM, 2000).

Ο σκοπός της εργασίας ήταν ο εμπειρικός έλεγχος ενός θεωρητικού μοντέλου που συνδυάζει υφιστάμενα θεωρητικά πλαίσια για την περιγραφή της δομής της αλγεβρικής σκέψης μαθητών γυμνασίου, έχοντας ως στόχο τη διασαφήνιση της έννοιας και την περιγραφή των σχέσεων μεταξύ των συνιστωσών της αλγεβρικής σκέψης.

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Άλγεβρα θεωρείται η μελέτη των μαθηματικών συμβόλων και των κανόνων για το χειρισμό των συμβόλων αυτών (Herstein, 1964). Μία πιο ακριβής προσπάθεια ορισμού είναι το ότι η άλγεβρα είναι ο τρόπος να εκφράζουμε γενικεύσεις για τους αριθμούς, τις ποσότητες, τις σχέσεις και τις συναρτήσεις (Watson, 2009). Ο Usiskin (1988) συμπληρώνει ότι άλγεβρα είναι και η μελέτη των δομών αλλά και ένα σύνολο διαδικασιών για την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων. Ο Howe (2005) ορίζει την άλγεβρα σε σχέση με τη μορφή εργασίας σε μαθηματικά προβλήματα όπως η εργασία με μεταβλητές, η αναπαράσταση και μοντελοποίηση καταστάσεων, ο χειρισμός και οι μετατροπές εκφράσεων και εξισώσεων και η ανάδειξη των αλγεβρικών δομών σε αριθμητικές παραστάσεις.

Σύμφωνα με το έγγραφο των επιπέδων του NCTM – National Council of Teachers of Mathematics (2000), η σχολική άλγεβρα μπορεί να αναλυθεί θεματικά σε τέσσερις κατηγορίες: συναρτήσεις και σχέσεις, μοντελοποίηση, δομή, γλώσσα και αναπαράσταση. Ένας άλλος ορισμός που φαίνεται να συγκεντρώνει τις πιθανές προσεγγίσεις της έννοιας της άλγεβρας είναι αυτός που αναπτύχθηκε από τους Mason και Johnston-Wilder (2005), ο οποίος ορίζει την άλγεβρα σύμφωνα με την εκτιμώμενη συμπεριφορά των μαθητών. Ένας μαθητής που ασχολείται με αλγεβρικές δραστηριότητες, μπορεί να εκφράζει γενικευμένες προτάσεις και κατανοεί την έννοια της γενίκευσης, να χρησιμοποιεί με άνεση τα σύμβολα, είτε όταν χρησιμοποιούνται ως άγνωστοι είτε ως απροσδιόριστες ποσότητες σε εξισώσεις ή ανισότητες, να κατανοεί τις αλγεβρικές δομές, τους κανόνες τις αριθμητικής και τους κανόνες χειρισμού αλγεβρικών εκφράσεων.

Η Kieran (2004, 2007) κατηγοριοποίησε την σχολική άλγεβρα με κριτήριο το είδος των δραστηριοτήτων στις οποίες εμπλέκονται οι μαθητές: (α) Δραστηριότητες γενίκευσης, (β) δραστηριότητες μετατροπής που ακολουθούν συγκεκριμένους κανόνες, και (γ) μετα-αλγεβρικές δραστηριότητες (meta-level activities), δηλαδή μαθηματικές δραστηριότητες που στηρίζονται στην αλγεβρική σκέψη και περιλαμβάνουν γενικευμένες μαθηματικές μεθόδους, όπως επίλυση προβλημάτων, μοντελοποίηση, διατύπωση εικασιών, αιτιολόγηση, και απόδειξη.

Ο Kaput (2008) ανίχνευσε πέντε διαφορετικές αλληλοσχετιζόμενες μορφές αλγεβρικής συλλογιστικής που δημιουργούν ένα σύνθετο ενιαίο σύνολο. Υπάρχει πλούσια εννοιολογική αλληλεπίδραση μεταξύ των πέντε μορφών αλγεβρικής συλλογιστικής: (α) Γενίκευση και τυποποίηση μοτίβων, (β) άλγεβρα ως συντακτικά καθοδηγούμενος χειρισμός φορμαλισμών, (γ) μελέτη των δομών που προκύπτουν από τους υπολογισμούς και τις σχέσεις, (δ) μελέτη συναρτήσεων, σχέσεων και συμμεταβολής και (ε) μοντελοποίηση.

Η ΠΑΡΟΥΣΑ ΕΡΓΑΣΙΑ

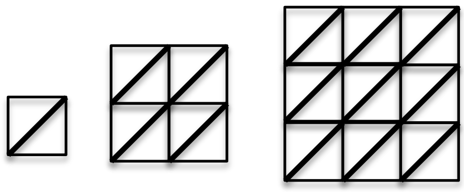
Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν να εξετάσει τις διαστάσεις της αλγεβρικής σκέψης μαθητών του γυμνασίου. Συγκεκριμένα ο στόχος της εργασίας ήταν (α) να προτείνει ένα θεωρητικό μοντέλο που περιγράφει τις διαστάσεις της αλγεβρικής σκέψης μαθητών γυμνασίου με βάση τις προσεγγίσεις των Kaput (2008) και Kieran (2004), (β) να εξετάσει την εγκυρότητα του μοντέλου, χρησιμοποιώντας εμπειρικά δεδομένα και (γ) να διερευνήσει τις σχέσεις μεταξύ των διαστάσεων της αλγεβρικής σκέψης.

Προτεινόμενο Μοντέλο Αλγεβρικής σκέψης

Μετά από μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας υποθέσαμε ότι οι ιδέες των Kaput (2008) και Kieran (2007) για τη σκέψη μαθητών που εργάζονται με αλγεβρικές δραστηριότητες και για τα είδη των δραστηριοτήτων αυτών, είναι ικανές να συνθέσουν ένα μοντέλο αλγεβρικής σκέψης. Υποθέσαμε ότι η αλγεβρική σκέψη μαθητών γυμνασίου αποτελεί σύνθεση των πιο κάτω ικανοτήτων: (α) Γενικευμένη αριθμητική, (β) συναρτησιακή σκέψη, (γ) μετασχηματιστική ικανότητα και (δ) μοντελοποίηση, μετα-άλγεβρα, αποδείξεις. Η παράμετρος της γενικευμένης αριθμητικής αποτελεί κοινή διάσταση των Kieran (2004) και Kaput (2008), η συναρτησιακή σκέψη εμφανίζεται ως αυτόνομη διάσταση στο μοντέλο του Kaput ενώ στο μοντέλο της Kieran αποτελεί στοιχείο των μετα-αλγεβρικών δραστηριοτήτων, η μετασχηματιστική διάσταση αποτελεί σύνθεση των δραστηριοτήτων μετατροπής της Kieran και των φορμαλισμών που υπάρχουν στο μοντέλο του Kaput. Τέλος, η διάσταση της μοντελοποίησης και μετα-άλγεβρας χρησιμοποιεί στοιχεία και από τα δύο μοντέλα. Η διάσταση της γενικευμένης αριθμητικής αναφέρεται στη χρήση της αριθμητικής ως πεδίο έκφρασης για την εξαγωγή γενικεύσεων για τη δομή των αριθμών, των πράξεων και των ισοτήτων. Η διάσταση της συναρτησιακής σκέψης αναφέρεται στην ικανότητα χειρισμού των σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων και μεταβλητών καθώς και στην έννοια της συμμεταβολής. Η διάσταση της μετασχηματιστικής ικανότητας αναφέρεται στο χειρισμό των αλγεβρικών δομών και συμβόλων. Τέλος, η διάσταση της μοντελοποίησης και της μετα-άλγεβρας νοηματοδοτεί τη χρήση αλγεβρικών δομών για την επίλυση προβλημάτων, τη χρήση μοντέλων αναπαράστασης σχέσεων και την αξιοποίηση αλγεβρικών δομών για ανώτερες μαθηματικές διαδικασίες, όπως στην απόδειξη.

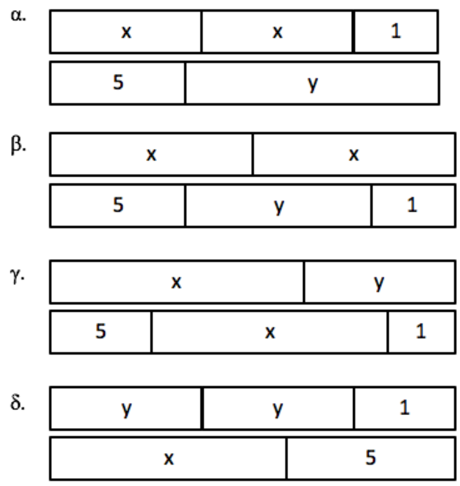
Εργαλεία μέτρησης

Τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν για τη μέτρηση της διάστασης της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών, σύμφωνα με το μοντέλο που προτείνουμε, αναπτύχθηκαν με βάση προηγούμενες ερευνητικές εργασίες. Για τη μέτρηση του παράγοντα «Γενικευμένη αριθμητική» χρησιμοποιήθηκαν τρία είδη έργων: (α) Ιδιότητες αριθμών και πράξεων, (β) Δομή αριθμητικών αντικειμένων, (γ) Ισότητα – ανισότητα (Blanton, Stephens, Knuth, Gardiner, Isler & Kim, 2015). Για παράδειγμα, για τις ιδιότητες αριθμών και πράξεων ζητήθηκε σε ένα έργο από τους μαθητές να υπολογίσουν το αποτέλεσμα της πράξης $-1245 \cdot 15 + 245 \cdot 15$, ενώ για τη δομή αριθμητικών αντικειμένων ζητήθηκε να βρουν το υπόλοιπο της διαίρεσης του αθροίσματος $946 + 950 + 952 + 960$ διά 950. Για τη μέτρηση του παράγοντα «Συναρτησιακή σκέψη» χρησιμοποιήθηκαν τρία είδη έργων (Δείτε Πίνακα 1): (α) Υπολογισμός απομακρυσμένου όρου ή γενικού όρου σε μοτίβο (δείτε παράδειγμα 1 στον Πίνακα 1), (β) αναγνώριση σχέσης μεταξύ μεταβλητών (δείτε παράδειγμα 2 στον Πίνακα 1), (γ) Αναγνώριση σχέσης σε γράφημα (αντιστοίχιση λεκτικής κατάστασης με γραφική παράσταση).

Είδος έργου	Παράδειγμα
Μοτίβα	Να παρατηρήσετε την παρακάτω σειρά σχημάτων.  Πόσα τριγωνάκια έχει το 10^{O} κατά σειρά σχήμα;
Αναγνώριση σχέσης μεταξύ μεταβλητών	Ο Γιώργος εργάζεται σε μία ασφαλιστική εταιρία για ασφάλειες αυτοκινήτου. Ο μισθός του είναι 50€ την εβδομάδα και παίρνει και 20€ για κάθε ασφάλεια που πουλάει. (α) Πόσα είναι τα χρήματα που κερδίζει ο Γιώργος κάθε εβδομάδα; (β) Αν σε μία εβδομάδα έβγαλε 190€ πόσες ασφάλειες είχε πουλήσει;

Πίνακας 1: Έργα μέτρησης του παράγοντα «Συναρτησιακή σκέψη»

Για τη μέτρηση του παράγοντα «Μετασχηματιστική ικανότητα» χρησιμοποιήθηκαν τρία είδη έργων: (α) Αριθμητικοί μετασχηματισμοί (έργα που απαιτούσαν διαδικασίες όπως πρόσθεση ετερώνυμων σύνθετων κλασμάτων), (β) αλγεβρικοί μετασχηματισμοί, π.χ. να απλοποιήσουν την παράσταση $B = (\alpha - 2\beta)(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + \beta(\beta + \alpha)$, και (γ) επίλυση κλασματικών εξισώσεων. Για τη μέτρηση του παράγοντα «Μοντελοποίηση, μετα-άλγεβρα, αποδείξεις» (δείτε Πίνακα 2) χρησιμοποιήθηκαν δύο είδη έργων: (α) μοντελοποίηση, (β) μετα-άλγεβρα, απόδειξη (Kieran, 2004).

Είδος έργου	Παράδειγμα
Μοντελοποίηση	Το διπλάσιο ενός αριθμού μειωμένο κατά 1 είναι ίσο με ένα άλλο αριθμό αυξημένο κατά 5. Ποιο από τα παρακάτω μοντέλα αναπαριστά την πρόταση αυτή; 
Μετα-άλγεβρα, αποδείξεις	Να αποδείξετε ότι το γινόμενο ενός άρτιου με έναν περιττό αριθμό είναι άρτιος αριθμός.

Πίνακας 2: Έργα μέτρησης του παράγοντα «Μοντελοποίηση, μετα-άλγεβρα, αποδείξεις»

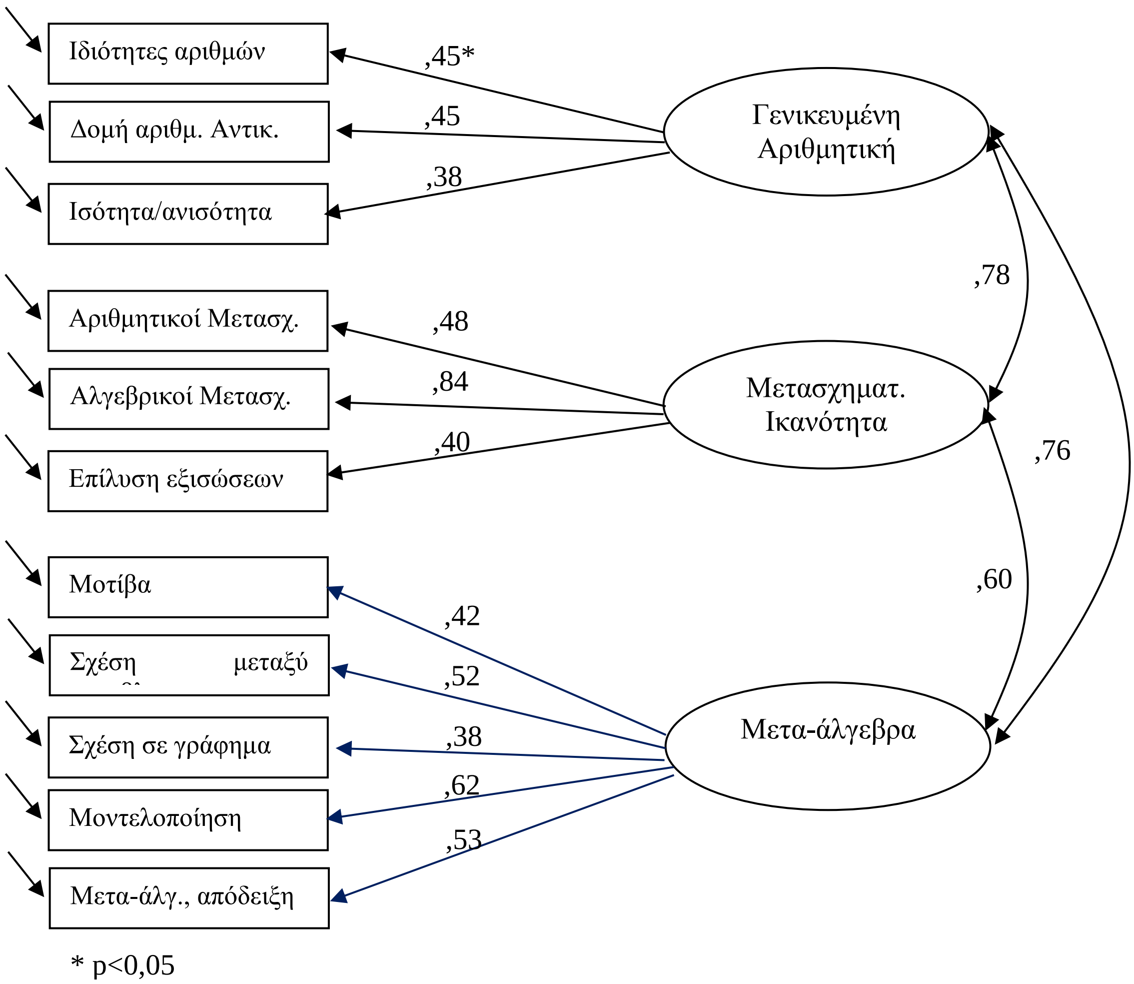
Συμμετέχοντες, Διαδικασία και Ανάλυση Δεδομένων

Στην έρευνα συμμετείχαν 114 μαθητές Γ΄ γυμνασίου από ένα ιδιωτικό σχολείο της Αθήνας στο οποίο εργάζεται ο ένας ερευνητής. Τα έργα διαχωρίστηκαν σε δύο μέρη ώστε για κάθε μέρος να αρκεί μία διδακτική ώρα – 40 λεπτά. Κάθε μέρος περιείχε έργα από όλα τα είδη και δεν υπήρχε κριτήριο ταξινόμησης. Τα έργα δόθηκαν στους μαθητές δύο εβδομάδες πριν τις διακοπές του Πάσχα, ένα κάθε εβδομάδα.

Για την εξέταση της εγκυρότητας του προτεινόμενου μοντέλου χρησιμοποιήθηκε επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση. Η χρήση της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης κρίθηκε κατάλληλη για το λόγο ότι θέλαμε να επιβεβαιώσουμε την εγκυρότητα ενός μοντέλου που αναπτύχθηκε με βάση προηγούμενες ερευνητικές εργασίες και τη σχετική βιβλιογραφία. Για τη διεξαγωγή των αναλύσεων χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό MPLUS (Muthén & Muthén, 2007). Για την επιβεβαίωση των μοντέλων χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθοι τρεις δείκτες: (α) Ο λόγος x^2/df (< 2), ο δείκτης Comparative Fit Index, CFI, (> 0,9) και (γ) ο δείκτης Root Mean-Square Error of Approximation, RMSEA, (< 0,08).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

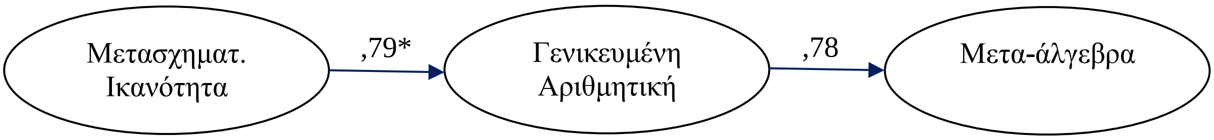
Η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση που χρησιμοποιήθηκε είχε ως σκοπό να εξετάσει την εγκυρότητα εννοιολογικής κατασκευής του μοντέλου. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι οι δείκτες προσαρμογής δεν ήταν ικανοποιητικοί, για να υποστηρίξουν τη δομή του προτεινόμενου μοντέλου (χ^2/df>2, CFI<,95, και RMSEA=,08). Εξετάζοντας τα αποτελέσματα της ανάλυσης διαπιστώθηκε ότι ο βαθμός συσχέτισης μεταξύ των παραγόντων συναρτησιακή σκέψη και μετα-άλγεβρα, μοντελοποίηση, αποδείξεις ήταν ιδιαίτερα υψηλός, για αυτό αποφασίσαμε να εξετάσουμε την εγκυρότητα ενός εναλλακτικού μοντέλου με βάση το οποίο η ικανότητα των μαθητών στα έργα συναρτησιακής σκέψης, μετα-άλγεβρας, μοντελοποίησης και απόδειξης σχηματίζουν έναν ενιαίο παράγοντα. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι οι δείκτες προσαρμογής του εναλλακτικού μοντέλου ήταν εξαιρετικοί (χ^2/df=1,07, CFI=,97, και RMSEA=,03), επιβεβαιώνοντας την προσαρμογή του εναλλακτικού μοντέλου στα εμπειρικά δεδομένα της έρευνας. Συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η αλγεβρική σκέψη μαθητών γυμνασίου αποτελεί σύνθεση τριών διακριτών, αλλά αλληλοσχετιζόμενων παραγόντων που αναφέρονται στη (α) γενικευμένη αριθμητική, (β) στη μετασχηματιστική ικανότητα και (γ) στη μετα-άλγεβρα που εμπεριέχει τη συναρτησιακή σκέψη, τη μοντελοποίηση και την απόδειξη. Η τυποποιημένη λύση του μοντέλου έδειξε ότι όλες οι φορτίσεις ήταν στατιστικά σημαντικές και στην πλειοψηφία τους ήταν ικανοποιητικές και κυμάνθηκαν από 0,38 έως 0,84 (δείτε Διάγραμμα 1). Επιπρόσθετα, τα αποτελέσματα της ανάλυσης έδειξαν ότι κάθε είδος έργου φόρτιζε επαρκώς σε έναν μόνο από τους παράγοντες πρώτης τάξης, επιβεβαιώνοντας με αυτόν τον τρόπο την υπόθεση ότι οι τρεις παράγοντες πρώτης τάξης αναπαριστούν τρεις διακριτές ικανότητες όσον αφορά την αλγεβρική σκέψη.



Διάγραμμα 1: Οι Παράγοντες της Αλγεβρικής Σκέψης

Οι συσχετίσεις μεταξύ των τριών παραγόντων ήταν υψηλές, καταδεικνύοντας ότι οι τρεις διαστάσεις της αλγεβρικής σκέψης σχετίζονται μεταξύ τους. Συγκεκριμένα η συσχέτιση μεταξύ του παράγοντα της μετασχηματιστικής ικανότητας και της γενικευμένης αριθμητικής ήταν 0,78 (p<0.05), η συσχέτιση μεταξύ της μετασχηματιστικής ικανότητας και του παράγοντα της μετα-άλγεβρας ήταν 0,60 (p<0.05) και τέλος η συσχέτιση μεταξύ γενικευμένης αριθμητικής και μετα-άλγεβρας ήταν 0,78 (p<0.05).

Για να διερευνήσουμε τις σχέσεις μεταξύ των παραγόντων της αλγεβρικής σκέψης εξετάσαμε διαδοχικά τον βαθμό προσαρμογής προς τα δεδομένα της έρευνας γραμμικών δομικών μοντέλων με τα οποία υποθέσαμε ότι υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ των τριών παραγόντων. Το μοντέλο που είχε τους υψηλότερους δείκτες προσαρμογής (χ^2/df=1,04, CFI=,98, and RMSEA=,02) έδειξε ότι ο παράγοντας μετασχηματιστική ικανότητα αποτελεί παράγοντα πρόβλεψης του παράγοντα γενικευμένη αριθμητική και ο τελευταίος αποτελεί παράγοντα πρόβλεψης του παράγοντα μετα-άλγεβρα (δείτε Διάγραμμα 2). Ο συντελεστής παλινδρόμησης της μετασχηματιστικής ικανότητας στη γενικευμένη αριθμητική ήταν 0,79 (p<0.05) και ο αντίστοιχος συντελεστής παλινδρόμησης της γενικευμένης αριθμητικής στη μετα-άλγεβρα ήταν 0,78 (p<0.05).



* p<0,05

Διάγραμμα 2: Γραμμική Σχέση μεταξύ Παραγόντων Αλγεβρικής Σκέψης

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η συνεισφορά της παρούσας εργασίας εδράζεται κυρίως στην εμπειρική επιβεβαίωση ενός μοντέλου περιγραφής της δομής της αλγεβρικής σκέψης μαθητών Γ΄ γυμνασίου. Τα αποτελέσματα της εργασίας έδειξαν ότι η αρχική μας υπόθεση αναφορικά με τις διαστάσεις της αλγεβρικής σκέψης δεν επιβεβαιώθηκε, αλλά τα δεδομένα της έρευνας υποστήριξαν ένα εναλλακτικό μοντέλο περιγραφής της αλγεβρικής σκέψης μαθητών Γ΄ γυμνασίου που εδράζεται κυρίως στο μοντέλο της Kieran (2007). Επομένως, με βάση τα αποτελέσματα της εργασίας μπορεί να λεχθεί ότι το μοντέλο περιγραφής αλγεβρικής σκέψης της Kieran (2007) αποτελεί ένα έγκυρο εργαλείο ανάλυσης της αλγεβρικής σκέψης των μαθητών Γ΄ γυμνασίου. Το καινοτόμο στοιχείο της εργασίας ως προς το μοντέλο της Kieran (2007), πέρα από την εμπειρική επιβεβαίωσή του, στηρίζεται στο γεγονός ότι νοηματοδοτεί με ξεκάθαρο τρόπο τις υπο-παραμέτρους των τριών παραγόντων και αναδεικνύει το ρόλο της μοντελοποίησης (Kaput, 2008) ως θεμελιώδους στοιχείου του παράγοντα μετα-άλγεβρα. Επιπρόσθετα, στον παράγοντα μετα-άλγεβρα περιλαμβάνονται οι τρεις μορφές συναρτησιακής σκέψης (μοτίβα, σχέσεις μεταξύ μεταβλητών, σχέσεις σε διαγράμματα), όπως προτείνονται, επίσης, από τον Kaput (2008). Συμπερασματικά μπορεί να λεχθεί ότι με βάση τα αποτελέσματα της εργασίας, λόγω των υψηλών συσχετίσεων μεταξύ των διαφορετικών παραμέτρων της αλγεβρικής σκέψης, το μοντέλο των τριών διαστάσεων της Kieran (2007) μπορεί να περιγράψει πιο αναλυτικά τη δομή της αλγεβρικής σκέψης μαθητών γυμνασίου, χρησιμοποιώντας, επιμέρους στοιχεία από το μοντέλο του Kaput (2008). Επιπλέον, τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας έδειξαν ότι υπάρχει μια ιεραρχική σχέση μεταξύ των τριών παραγόντων της αλγεβρικής σκέψης. Ο παράγοντας «μετασχηματιστική ικανότητα» που αναφέρεται στο χειρισμό των αριθμητικών και αλγεβρικών συμβόλων προβλέπει σε σημαντικό βαθμό την επίδοση των μαθητών στον παράγοντα γενικευμένη αριθμητική που αναφέρεται στην ικανότητα γενίκευσης αριθμητικών και αλγεβρικών δομών. Επιπρόσθετα, ο παράγοντας γενικευμένη αριθμητική επηρεάζει άμεσα την επίδοση των μαθητών στον παράγοντα μετα-άλγεβρα που εμπεριέχει την συναρτησιακή σκέψη, την ικανότητα μοντελοποίησης καθώς και τη χρήση αλγεβρικών δομών για σκοπούς απόδειξης και συλλογισμού. Η ιεραρχική αυτή σχέση μεταξύ των τριών παραγόντων υποδηλώνει μια πιθανή τροχιά μάθησης στηριζόμενη στο σκεπτικό ότι η μετασχηματιστική ικανότητα και η ικανότητα χειρισμού της αλγεβρικής γλώσσας αποτελούν βασική προϋπόθεση ώστε οι μαθητές να επιτύχουν τη χρήση των αλγεβρικών δομών για σκοπούς γενίκευσης και εξαγωγής συμπερασμάτων και τέλος ακολουθεί ο παράγοντας της μετα-άλγεβρας που εμπεριέχει πιο δύσκολες ικανότητες όπως η συναρτησιακή σκέψη, η επίλυση προβλημάτων που εμπεριέχουν σχέσεις μεταξύ μεταβλητών, η χρήση μοντέλων για αναπαράσταση προβλημάτων και σχέσεων καθώς και η λειτουργία της απόδειξης.

Το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε σε αυτή την εργασία μπορεί να προσφέρει στους εκπαιδευτικούς και στους ερευνητές ένα μέσο για να εξετάσουν την πολύπλοκη φύση της αλγεβρικής σκέψης μαθητών γυμνασίου. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να χρησιμοποιήσουν το μοντέλο, για να συμπεριλάβουν στη διδασκαλία τους δραστηριότητες που μπορούν να συμβάλουν στην ανάπτυξη των επιμέρους διαστάσεων της αλγεβρικής σκέψης και κατ' επέκταση στην ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης. Από την πλευρά των ερευνητών, το μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αφετηρία για περαιτέρω μελέτη της δομής της αλγεβρικής σκέψης και εν δυνάμει τροχιών μάθησης, με βάση τις οποίες θα μπορούν να σχεδιαστούν προγράμματα διδασκαλίας που θα λαμβάνουν υπόψη τις προϋποθέσεις ανάπτυξης των παραμέτρων της αλγεβρικής σκέψης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J. S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 39-87.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, *40*(1), 3-22.

Drijvers, P., Goddijn, A., & Kindt, M. (2011). Algebra education: exploring topics and themes. In *Secondary algebra education* (pp. 5-26). Sense Publishers.

Herstein, I. N. (1964). Topics in Algebra. 1964. *Blaisdell, Menlo Park, CA.*

Howe, R. (2005). *Comments on NAEP algebra problems*. Available online:www.brookings.edu/~/media/Events/2005/9/14algebraicreasoning/Howe_Pres entation.PDF

Kaput, J. J. (2000). *Teaching and Learning a New Algebra with Understanding*.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning. *Algebra in the early grades*, 5-17.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2007). What do students struggle with when first introduced to algebra symbols. *Algebra Research Brief*.

Mason, J. G. A. & Johnston-Wilder, S.(2005) Developing Thinking in Algebra. *London, UK: The Open University*.

Muthén L. K, & Muthén, B. O (1998-2007). *Mplus user's guide* (5th ed.). Los Angeles: Authors.

National Council of Teachers of Mathematics (2000).*Principles and standards for school mathematics*. Reston: Va, NCTM.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The ideas of algebra, K-12, 8*, 19.

Watson, A. (2009). *Key understandings in mathematics learning, Paper 6: Algebraic Reasoning*. London: Nuffield Foundation. Available online at:http://www.nuffieldfoundation.org/key-understandings-mathematics-learning

Η ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΟΥ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΩΣ ΜΕΣΟ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΝΕΩΝ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΩΝ ΜΑΘΗΣΗΣ ΥΠΟ ΤΟ ΠΡΙΣΜΑ ΤΗΣ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΗΣ ΘΕΩΡΗΣΗΣ

Ζήση Μηλίτσα, Μαυρομμάτης Γιώργος, Κωνσταντίνου Γιάννης

Μεταπτυχιακοί φοιτητές της Διδακτικής των Μαθηματικών

militsa_zi@hotmail.com gmaurommatis@gmail.com
gianniskon2112@gmail.com

Στο παρόν άρθρο διερευνάται η σχέση της επαγγελματικής ανάπτυξης του/της εκπαιδευτικού με την διαμόρφωση νέων περιβαλλόντων μάθησης σύμφωνα με την κοινωνικοπολιτισμική θεώρηση. Η μέθοδος που ακολουθήθηκε είναι αφηγηματική, μέσα από ημιδομημένες συνεντεύξεις σε τρείς εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Τα αποτελέσματα της έρευνας φανερώνουν τόσο μια άμεση σχέση από τους παράγοντες της επαγγελματικής ανάπτυξης στα ποιοτικά χαρακτηριστικά των νέων περιβαλλόντων μάθησης, όσο και μια έμμεση αντιστροφή της σχέσης ως τρόπο αλλαγής των παραδοσιακών πρακτικών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Με ποιους τρόπους μπορεί ο εκπαιδευτικός να εξελιχθεί; Η απάντηση σ' αυτό το ερώτημα είναι στο μικροσκόπιο των ερευνητών τα τελευταία χρόνια. Όπως επισημαίνουν οι Watson και Mason (2007) τα προγράμματα που αποσκοπούν στην ενημέρωση των εκπαιδευτικών για την έρευνα είναι διαδεδομένα σ' όλο τον κόσμο.

Τί συμβαίνει όμως όταν ο εκπαιδευτικός εξελίσσεται επαγγελματικά; Πώς αναπροσαρμόζει τις πρακτικές του και πώς διαμορφώνει νέα περιβάλλοντα μάθησης και διδασκαλίας; Τα παραπάνω ερωτήματα ήταν το έναυσμα για την παρούσα μελέτη στην οποία πραγματοποιήσαμε ανάλυση περιεχομένου στις αφηγήσεις τριών εκπαιδευτικών. Σύμφωνα με την Kaasila (2007) η αφηγηματική, είναι η κατάλληλη για την μελέτη μας μέθοδος, καθώς πέρα από την εστίαση στο περιεχόμενο των εμπειριών δίνεται έμφαση και στην δομή του λόγου κάνοντας εμφανέστερη μετατόπιση-αλλαγή (teacher change) του εκπαιδευτικού, όπως την καθορίζει ο Lerman (2001).

Η επαγγελματική ανάπτυξη του εκπαιδευτικού εξαρτάται σύμφωνα με την Potari (2013) από: [1 εμπειρία] *«την αλληλεπίδραση με τους μαθητές στην τάξη (Chapman και Heater, 2010), [2 συνεργασία] την συνεργασία με* *άλλους καθηγητές (Krainer 2003; Potari και συν., 2010) [3 επιμόρφωση] και την συμμετοχή σε επιμορφωτικά προγράμματα (Ponte, 2012)».* Στο άρθρο μας μελετάμε την σχέση των παραπάνω πρακτικών, που οδηγούν στην ανάπτυξη του εκπαιδευτικού, με την διαμόρφωση νέων περιβαλλόντων μάθησης.

Το ερευνητικό μας ερώτημα αφορά το πως αυτή η σχέση γίνεται ορατή μέσα από τα ποιοτικά χαρακτηριστικά που ορίζουν μια αναμορφωμένη τάξη.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Το θεωρητικό πλαίσιο το οποίο ενημερώνει την έρευνά μας προέρχεται από το πεδίο των κοινωνικοπολιτισμικών θεωριών (Lerman, 2000). Οι κοινωνικοπολιτισμικές προοπτικές για την μάθηση και την ανάπτυξη αυξήθηκαν από το έργο του Vygotsky στις αρχές του 20ου αιώνα. Πιθανόν κανένας θεωρητικός δεν επηρέασε την θεωρία της κοινωνικής μάθησης και την κονστρουκτιβιστική θεωρία περισσότερο από τον Vygotsky (1978). Αυτός μίλησε για την κοινωνική, πολιτισμική και ιστορική επιρροή στην ατομική ανάπτυξη (Daniels, 2016). Όλα όσα θεωρούμε ως γνωστικά (cognition) είναι πλαισιοθετημένα (situated) σε συγκεκριμένες κοινωνικές, πολιτισμικές και ιστορικές συνθήκες. Τα σημεία και τα σύμβολα ενός πολιτισμού και κυρίως η γλώσσα και ο Λόγος είναι τα κλειδιά για την ερμηνεία των σύνθετων ανθρώπινων συμπεριφορών (Prickel, 1998). Στο έργο του Thinking and speech δείχνει πως η σκέψη είναι μια πολιτισμικά διαμεσολαβητική κοινωνική διαδικασία της επικοινωνίας. Όλες οι ανώτερες νοητικές λειτουργίες προκύπτουν ως μορφές συνεργατικής δραστηριότητας και συμπεριφοράς (Daniels, 2016).

Οι κοινωνικοπολιτισμικές θεωρίες προέκυψαν σαν μια εναλλακτική στην διχοτόμηση του κοινωνικού από το ατομικό (Planas και Gorgorió, 2004). Μέσω των μεσολαβητικών εργαλείων των μαθηματικών συμβόλων, οι μαθητές είναι σε θέση να συμμετέχουν στον Λόγο μέσα στην τάξη (participation model), και η συμμετοχή συμβάλλει στην κοινωνικοποίηση (socialization) στις μαθηματικές πρακτικές. Άλλα σημαντικά μεσολαβητικά εργαλεία είναι οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των συμμαθητών (interactions among peers) και μερικές συνιστώσες του Λόγου (norms, values) (Planas και Gorgorió, 2004). Έτσι η τάξη είναι μια κουλτούρα με κοινά μοντέλα για την ερμηνεία των κανόνων(norms), ενεργειών(actions) και προσδοκιών που έχουν ανακατασκευαστεί από τον Λόγο μέσω των κοινωνικών πρακτικών (Forman και McCormick, 1995) (Planas και Gorgorió, 2004).

Κατά την Forman (2003), η κοινωνικοπολιτισμική κατεύθυνση της έρευνας στην εκπαίδευση εκπαιδευτικών αναπτύσσεται μέσα από δύο προοπτικές, του *λόγου* και της *πρακτικής*. Η προοπτική του λόγου εστιάζει στην δυναμική της επικοινωνίας των μαθηματικών στο περιβάλλον της τάξης, δίνοντας την δυνατότητα αναγνώρισης των μετατοπίσεων μέσα από σημεία του λόγου των εκπαιδευτικών. Η πρακτική συνδέει τις δομές δραστηριότητας της τάξης με την μάθηση και την ταυτότητα. Η πλαισιοθέτηση και οι κοινότητες πρακτικής χαρακτηρίζουν την προοπτική αυτή, αναδεικνύοντας την σημασία του πλαισίου σε σχέση με το πώς αναπτύσσονται οι εκπαιδευτικοί ως τέτοιοι και πως διαμορφώνουν τις ταυτότητες τους (Goos, 2008).

Μέσα από αυτή την διττή προοπτική της κοινωνικοπολιτισμικής σκοπιάς η Forman (2003) σκιαγραφεί τα ποιοτικά χαρακτηριστικά που συνθέτουν την εφαρμογή της σε μια αναμορφωμένη τάξη. Βασικό στοιχείο αυτής αποτελεί το περιβάλλον της δραστηριότητας για την μάθηση των μαθηματικών, δηλαδή η έμφαση των εκπαιδευτικών στην «κατανόηση της μαθηματικής γνώσης που τα παιδιά φέρουν μαζί τους εντός του σχολείου από τις εξωσχολικές πρακτικές καθώς και τα κίνητρα, τις πεποιθήσεις, τις αξίες, τι νόρμες και τους στόχους που αναπτύσσονται ως αποτέλεσμα των πρακτικών αυτών» (Forman, 2003). Προς αυτή την κατεύθυνση συνηγορεί και η έρευνα των Nunez και συν. (1993) για τα μαθηματικά του δρόμου (street mathematics), όπου συμπεραίνει ότι όλες οι μαθηματικές δραστηριότητες είναι εξαρτώμενες του πλαισίου σε κάποιο βαθμό, καθώς και ότι οι στόχοι ανέρχονται ως αποτέλεσμα ενός πολύπλοκου συστήματος επιρροών από το πολιτισμικό πλαίσιο, το κοινωνικό πλαίσιο και τις ίδιες τις προτεραιότητες των παιδιών (Forman, 2003). Γενικεύοντας το σχήμα του Cole (Daniels, 2016), στόχος είναι η ενθάρρυνση των μαθητών προς την κατεύθυνση της ανάπτυξης της περιέργειας και της εφευρετικότητας ώστε η μεσολάβηση είτε μέσω ομότιμων είτε μέσω εκπαιδευτικών να οδηγήσει στην κατανόηση των μαθηματικών νοημάτων και ταυτόχρονα να θέση την βάση της μεσολάβησης των «κειμένων» (texts) ως τελικό στόχο. Δεδομένης της έρευνας της Forman (1996), η οποία παρατηρεί ότι «οι στόχοι, οι στάσεις και οι πεποιθήσεις των μαθητών διαφέρουν ως συνάρτηση του περιβάλλοντος δραστηριότητας, της μαθηματικής πρακτικής», σε συνδυασμό με τη γενίκευση του σχήματος του Cole, καθίσταται σαφής η σημασία της επικοινωνίας. «Χωρίς να δώσουμε ιδιαίτερη προσοχή στην επικοινωνία, υπάρχει δυσκολία στην κατανόηση των μηχανισμών μέσω των οποίων η δραστηριότητα επηρεάζει και επηρεάζεται από την μάθηση. Με άλλα λόγια, χρειάζεται να εξετάσουμε προσεκτικά το λόγο (discourse) για να γνωρίζουμε πως οι στόχοι αναδύονται δια μέσω της κοινωνικής δραστηριότητας. Αλλιώς, μπορεί να οδηγηθούμε στην πεποίθηση ότι τα επιφανειακά φυσικά ή κοινωνικά χαρακτηριστικά των περιβαλλόντων δραστηριότητας καθορίζουν την μάθηση των μαθητών» (Forman, 2003).

Ένα ακόμα βασικό σημείο της κοινωνικοπολιτισμικής οπτικής σε σχέση με την επικοινωνία είναι ο ρόλος του εκπαιδευτικού ως ενορχηστρωτής της συζήτησης ένας ρόλος όμως που αλλάζει καθώς αυτός περιορίζει την ομιλία του και καθώς οι μαθητές αρχίζουν να διατυπώνουν δηλώσεις σχετικά με τα αντικείμενα που πρέπει να θεωρηθούν ως ευρύτερα αποδεκτά μέσα στις εκπαιδευτικές ή επιστημονικές κοινότητες.

Ως συμβολικά αντικείμενα στα μαθηματικά μπορεί να θεωρηθούν από τις εξισώσεις, τις συναρτήσεις και τους χειρισμούς τους έως και γεωμετρικά σχήματα, γραφήματα, αποδείξεις, ενώ μπορεί να διατυπώνονται σε προφορική ή σε γραπτή γλώσσα. Η Forman (2003) διατυπώνει ότι υπάρχουν τουλάχιστον δυο συσχετιζόμενες διαστάσεις της χρήσης συμβόλου και είναι κρίσιμες εάν ο μαθητής πρόκειται να μάθει να χρησιμοποιεί τα μαθηματικά σύμβολα με τρόπους που έχει νόημα. Η πρώτη διάσταση της χρήσης συμβόλου είναι η ιδιοποίηση του μαθηματικού επιχειρήματος, ενώ η δεύτερη είναι η ικανότητα να δημιουργεί και να τροποποιεί τα μαθηματικά σύμβολα.

Η επαγγελματική εξέλιξη των εκπαιδευτικών γίνεται μέσω των αλληλεπιδράσεων τους με τους μαθητές (Chapman και Heater, 2010) (Potari, 2013), καθώς οι Λόγοι μέσα στην τάξη είναι ικανοί να οδηγήσουν σε βαθιές αλλαγές στην συμπεριφορά (Chapman 2009) (Sakonidis και Potari, 2014). Σύμφωνα με τον Φουκώ οι Λόγοι δρουν παραγωγικά συγκροτώντας οντότητες και σχέσεις, καθορίζοντας τις δυνατότητες και τα όρια μιας υπόστασης με σημασία. Ο εκπαιδευτικός συμμετέχει σε διάφορες κοινότητες πρακτικής (communities of practice) οι οποίες πλαισιώνουν την ταυτότητά του ως εκπαιδευτικό και επιδρούν στην διδασκαλία και στην μάθηση (Wenger, 1998). O Gee (2001) διαχωρίζει την ταυτότητα, ανάλογα με τα φυσικά και τα κοινωνικά χαρακτηριστικά σε φυσική-ταυτότητα (nature-identity), θεσμική-ταυτότητα (institution-identity),ταυτότητα-λόγου (discourse-identity) και σχεσιακή-ταυτότητα (affinity-identity) και η αναγνώριση γίνεται με βάση τον Λόγο στον οποίο κάποιος συμμετέχει (Potari, 2013). Έτσι η ταυτότητα χτίζεται μέσω επικοινωνιακών πρακτικών στις οποίες συμμετέχει (Sfard και Prusak, 2005).

Σύμφωνα με την κοινωνική θεωρία μάθησης του Wenger (1998), η μάθηση επιτυγχάνεται ως συμμετοχή στον κοινωνικό κόσμο και έτσι ορίζει τέσσερα συστατικά της: το νόημα, την πρακτική, την κοινότητα και την ταυτότητα.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το περιεχόμενο της μελέτης

Ζούμε σε ένα κόσμο αφηγήσεων. Η αφήγηση δεν είναι μια απλή περιγραφή γεγονότων αλλά είναι επίσης συσχετισμός γεγονότων, η οργάνωσή τους σε πλοκή ώστε να έχουν νόημα για τον αφηγητή αλλά και για τον ακροατή. Η ταυτότητα του χαρακτήρα δίνει ταυτότητα στην ιστορία της αφήγησης όχι το ανάποδο (Kaasila, 2007).

Γιατί είναι σημαντική η αφήγηση στην παρούσα μελέτη; Οι εκπαιδευτικές μελέτες είναι συνδεδεμένες δομές εμπειρίας και αυτή η περιγραφή κάνει την αφήγηση να είναι ο κατάλληλος τρόπος αναπαράστασης και κατανόησης αυτών των δομών και των συσχετισμών τους. Η αφήγηση, μας αφήνει ανοιχτό το πεδίο ώστε να ειπωθούν οι εμπειρίες του αφηγητή χωρίς περιορισμούς αλλά με κατευθύνσεις στο περιεχόμενο της αφήγησης, στον λόγο που αρθρώνει ο αφηγητής αλλά και στην γλώσσα που χρησιμοποιεί. Η αφηγηματική θεωρήθηκε η κατάλληλη μέθοδος αφού στόχος ήταν, μέσω του θεωρητικού πλαισίου να απαντηθεί το ερευνητικό ερώτημα, το οποίο εστιάζει στην σχέση των παραγόντων επαγγελματικής ανάπτυξης με τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της αναμορφωμένης τάξης.

Οι συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες είναι 3 εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας δημόσιας εκπαίδευσης, οι οποίοι ως κοινό χαρακτηριστικό έχουν ότι είναι Μαθηματικοί με μεταπτυχιακό δίπλωμα στην διδακτική και μεθοδολογία των μαθηματικών. Βασικό κριτήριο για την επιλογή των τριών αυτών εκπαιδευτικών ήταν ότι γνωρίζαμε πως συνδύαζαν τους τρεις παράγοντες επαγγελματικής ανάπτυξης κάτι που θεωρούμε αναγκαίο για την μελέτη της σχέσης των παραγόντων αυτών, με τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της αναμορφωμένης τάξης. Οι εκπαιδευτικοί έχουν 27, 17 και 20 χρόνια στην Ιδιωτική και Δημόσια Εκπαίδευση επίσης οι δυο είναι και υποψήφιοι διδάκτορες στην Διδακτική των Μαθηματικών.

Συλλογή και ανάλυση δεδομένων

Η μελέτη των εκπαιδευτικών έγινε σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο παρατηρήσαμε την διδασκαλία τους στην τάξη, όπου κρατήσαμε σημειώσεις πεδίου και ηχογραφήσαμε τις διδασκαλίες. Στο δεύτερο στάδιο έγιναν ημιδομημένες συνεντεύξεις με τους εκπαιδευτικούς, οι οποίες ηχογραφήθηκαν και απομαγνητοφωνήθηκαν. Οι συνεντεύξεις ήταν μία για τον κάθε εκπαιδευτικό με ερωτήσεις ανοικτού τύπου συνολικής διάρκειας 3,5 ωρών. Η ανάλυση των δεδομένων έγινε προσεκτικά με το πρόγραμμα «Atlas.ti 8» χρησιμοποιώντας ανάλυση περιεχομένου. Η διεξοδική ανάλυση σε συνδυασμό με το θεωρητικό πλαίσιο έσπασε τα δεδομένα σε αναλυτικές μονάδες από τις οποίες προέκυψαν τα ποιοτικά χαρακτηριστικά (κώδικες 4-8).

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Για την ανάλυση των δεδομένων και σύμφωνα με το θεωρητικό μας πλαίσιο το σχήμα ανάλυσης στηρίζεται σε δύο άξονες: τους παράγοντες επαγγελματικής ανάπτυξης και τα ποιοτικά χαρακτηριστικά μιας αναμορφωμένης τάξης με σκοπό να διερευνήσουμε την σχέση των παραπάνω.

Παράγοντες επαγγελματικής ανάπτυξης
1 Εμπειρία
2 Συνεργασία
3 Επιμόρφωση
Ποιοτικά χαρακτηριστικά
4 Ενορχήστρωση
5 Επικοινωνία
6 Δομές δραστηριότητας
7 Περιβάλλον
8 Συμβολική έκφραση

Η σχέση αυτή γίνεται ορατή από τις αφηγήσεις των εκπαιδευτικών όπου προκύπτουν οι συνδέσεις των δύο κατηγοριών.

Η ανάλυση τεκμηριώνεται μέσα από ενδεικτικά παραδείγματα της αφήγησης των εκπαιδευτικών όπου ρητά ή άρρητα γίνεται εμφανής η σύνδεση των παραγόντων ανάπτυξης με τα ποιοτικά χαρακτηριστικά αντικατοπτρίζοντας την συνειδητή μετάβαση σε νέα περιβάλλοντα μάθησης. Οι κώδικες που αποτελούν τους παράγοντες επαγγελματικής ανάπτυξης χρησιμοποιούνται σύμφωνα με τον τρόπο που ορίστηκαν παραπάνω. Τα ποιοτικά χαρακτηριστικά, κώδικες 4-8, που συνθέτουν το πλαίσιο ενός νέου περιβάλλοντος μάθησης ορίζονται παρακάτω, αποτελούν όμως και μια σύνοψη του θεωρητικού πλαισίου ως άξονες της αναμορφωμένης τάξης κατά τα πρότυπα της Forman (2003).

Με τον κώδικα επικοινωνία, εννοείται η μαθηματική επικοινωνία ως η κεντρική δραστηριότητα στην κοινότητα της τάξης μέσω της επιχειρηματολογίας και κατ’ αντιστοιχία με τις μαθηματικές κοινότητες. Δηλαδή, η προσπάθεια να πείσουν τα μέλη της κάποια άλλα για την εγκυρότητα μιας ιδέας ή ενός ισχυρισμού. Η εστίαση των επιχειρημάτων αυτών είναι να δημιουργήσουν μια συμφωνία σχετικά με τα συμβολικά αντικείμενα που διαπραγματεύεται το κοινό της τάξης ενώ παράλληλα στοχεύουν στην μύηση του μαθηματικού λόγου. Τα επιχειρήματα αυτά μπορεί να περιλαμβάνουν από αυστηρά μαθηματικές διατυπώσεις μέχρι διαισθητικές κινήσεις και χειρονομίες για την περιγραφή των συμβολικών αντικειμένων. Ο εκπαιδευτικός 1 περιγράφει την ανάγκη και την σημασία ανάπτυξης της μαθηματικής επικοινωνίας, όπως αυτή προκύπτει ως συνειδητή επιλογή πρακτικής μέσα από την επαγγελματική του ανάπτυξη:

> «Ως κεντρικά χαρακτηριστικά, μέσα στον διάλογο θα έλεγα και την προσπάθεια που κάνω πάντα οι μαθητές μου ναααα ... να μιλάνε μαθηματικά δεν εννοώ αυστηρά εννοώ ρε παιδί μου... λες κάτι εξήγησέ το τί εννοείς πως το σκέφτηκες γιατί συμβαίνει δώσε ένα επιχείρημα (…)τώρα αυτά λες πότε διαμορφώθηκαν και από τι παράγοντες διαμορφώθηκαν;(…) ας πούμε τις εμπειρίες που είχα από το Master και από την εεεεε .... και από το Πιλοτικό ΠΣ.»

Αντίστοιχα ο εκπαιδευτικός 2 διατυπώνει κάτι παρόμοιο ύστερα από ερώτηση σχετικά με τις πρακτικές που άλλαξαν:

> «Κοίταξε προσπαθώ να τους αφιερώνω περισσότερο χρόνο, το ένα είναι σίγουρα αυτό… Το ότι προσπαθώ είτε είναι σωστή είτε είναι λανθασμένη μια απάντηση πάντα να υπάρχει μια εξήγηση στο γιατί είναι έτσι..»

Με τον κώδικα περιβάλλον εννοείται το περιβάλλον δραστηριότητας για την μάθηση των μαθηματικών το οποίο, σύμφωνα και με την κοινωνικοπολιτισμική θεωρία, προτάσσει ότι οι εκπαιδευτικοί χρειάζεται να κατανοούν την μαθηματική γνώση που τα παιδιά φέρουν μαζί τους εντός του σχολείου από τις εξωσχολικές πρακτικές, καθώς και τα κίνητρα, τις πεποιθήσεις, τις αξίες, τις νόρμες και τους στόχους που αναπτύσσονται ως αποτέλεσμα των πρακτικών αυτών. Σύμφωνα και με το θεωρητικό πλαίσιο υποδηλώνεται ότι οι εκπαιδευτικοί πρέπει να δίνουν ιδιαίτερη προσοχή στο τι οι μαθητές πραγματικά κάνουν/πράττουν κατά την διάρκεια επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων και όχι να υποθέτουν ότι μια συγκεκριμένη εργασία θα προκαλέσει ένα συγκεκριμένο σύνολο στρατηγικών επίλυσης προβλήματος. Έτσι, το περιβάλλον δραστηριότητας γίνεται κατανοητό μέσα από τρεις προοπτικές: την σχέση πρακτικής και ακαδημαϊκής γνώσης των παιδιών, τους αναδυόμενους στόχους ως στοιχείο επιρροής της δραστηριότητάς τους και την αλληλεπίδραση εκπαιδευτικών, μαθητών και γονέων. Υπό το πρίσμα αυτό ο εκπαιδευτικός 1 αναφέρει σε σχέση με τις μεταβολές της πρακτικής του, που προέκυψαν από την επιμόρφωση, ότι:

> «Ένα τρίτο χαρακτηριστικό είναι ότι συχνά όσο μπορώ προσπαθώ ναααα να υπάρχουν αναφορές να υπάρχουν συνδέσεις με καταστάσεις που όσο είναι δυνατόν να είναι οικείες, προκλητικές στα παιδιά. Εννοώ εκτός μαθηματικών...»

ενώ ο εκπαιδευτικός 3 αναφέρει σε σχέση με την εμπειρία του ότι:

> «Άμα τους αντιμετωπίζεις έτσι (τους γονείς) θα πάρεις και ένα πολύ καλό δείγμα για τους ίδιους για να μπορείς το χρησιμοποιήσεις μετά στην τάξη, μπορεί να σου πουν κάτι ή να καταλάβεις κάτι που να δεις...τσ...ότι ίσως καλύτερα σε αυτό το παιδί να μην το κάνω αυτό το αστείο την ώρα του μαθήματος (…)».

Με βάση τα δεδομένα της ανάλυσης όπως αυτά διατυπώνονται μέσα από τις αφηγήσεις των εκπαιδευτικών καθίσταται σαφής μια σχέση ανάμεσα στους παράγοντες της επαγγελματικής ανάπτυξης και τα ποιοτικά χαρακτηριστικά των νέων περιβαλλόντων μάθησης. Η εμπειρία ως προϊόν αλληλεπίδρασης στο πεδίο της σχολικής τάξης, η συνεργασία ως προϊόν αλληλεπίδρασης μεταξύ εκπαιδευτικών και ερευνητών, καθώς και η επιμόρφωση μέσα από μεταπτυχιακά προγράμματα , σε συνάρτηση και τα τρία με την συνειδητότητα του εκπαιδευτικού, συμβάλουν στην αναμόρφωση των παραδοσιακών πρακτικών προς μια κοινωνικό-πολιτισμική κατεύθυνση. Η σημασία—του περιβάλλοντος μέσα στο οποίο αναπτύσσεται η δραστηριότητα, της δομής της δραστηριότητας ως μέσο και τρόπο για την εμπλοκή των μαθητών, της μαθηματικής επικοινωνίας ως δραστηριότητα για την ανάπτυξη επιχειρηματολογίας, της ενορχήστρωσης ως διεργασία για την χειραφέτηση του μαθητή, και τέλος των συμβολικών αντικειμένων, δηλαδή των αντικειμένων που κωδικοποιούν και περιγράφουν τον μαθηματικό κόσμο—που δίνουν οι εκπαιδευτικοί ως συνειδητή επιλογή φαίνεται πως κάθε φορά αποτελούσε το “δίδαγμα μιας ιστορίας” ή την μεταφορά ενός βιώματος.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Συμπερασματικά και συνοψίζοντας τα ευρήματα της έρευνας βάσει του δείγματος, παρατηρούμε ότι ο αναστοχασμός της εμπειρίας σε συνδυασμό με τα επιμορφωτικά προγράμματα καθώς και τις ομάδες εργασίες εκπαιδευτικών και ερευνητών φαίνεται να παρουσιάζουν στοιχεία μετατόπισης από τις παραδοσιακές πρακτικές, σε πρακτικές που συμφωνούν με την κοινωνικοπολιτισμική οπτική της μάθησης και της γνώσης. Τα παραπάνω ευρήματα αποκαλύπτουν την σχέση που διερευνήθηκε ως ερευνητικό ερώτημα της εργασίας μας. Δηλαδή, το πώς η σχέση των παραγόντων επαγγελματικής ανάπτυξης με την μετάβαση σε νέες πρακτικές για την αναμόρφωση των παραδοσιακών μαθηματικών τάξεων, γίνεται ορατή υπό το πρίσμα της κοινωνικό-πολιτισμικής προοπτικής.

Στην κατεύθυνση αυτή το θεωρητικό πλαίσιο έρχεται να επικυρώσει τα παραπάνω ως φακός ερμηνείας και οπτικής. Συγκεκριμένα και όσον αφορά την επιτυχή επαγγελματική ανάπτυξη η θεωρία μάθησης του

Wenger (1998) τονίζει την σημασία του αναστοχασμού (συνειδητότητας) του εκπαιδευτικού, σχετικά με την μάθηση καθώς και ότι αυτή επιτυγχάνεται ως συμμετοχή στον κοινωνικό κόσμο.

Μεταφέροντας το θεωρητικό αυτό σχήμα στην πραγματικότητα της τάξης η Forman (2003) προσδιορίζει τους κύριους άξονες εστίασης για την αναμόρφωση των παραδοσιακών πρακτικών στους εξής: Περιβάλλον δραστηριότητας, δομή δραστηριότητας, μαθηματική επικοινωνία, ενορχήστρωση και συμβολικά αντικείμενα. Η σημασία των αξόνων αυτών, όπως την απέδωσαν οι εκπαιδευτικοί στις αφηγήσεις τους, ως συνέπεια της επαγγελματικής τους ανάπτυξης καταδεικνύει και τεκμηριώνει την συμβολή της έρευνας και την υποστήριξη που τους παρέχει για την αναμόρφωση των μαθηματικών τάξεων τους αλλά και για τον εμπλουτισμό των πρακτικών τους. Ένα σημαντικό σημείο στο οποίο πρέπει να σταθούμε σχετικά με τα ευρήματα της έρευνας είναι ο ιδιαίτερος χαρακτήρας των εκπαιδευτικών που επιλέχτηκαν, αφού πρόκειται για εκπαιδευτικούς οι οποίοι φέρουν όλα τα χαρακτηριστικά της επαγγελματικής ανάπτυξης, όπως αυτή ορίστηκε παραπάνω. Αυτό κατά συνέπεια μας υποδεικνύει αφενός ένα περιορισμό για την όποια γενίκευση των συμπερασμάτων και αφετέρου τεκμηριώνει μια σχέση όσων αφορά την μετατόπιση από την παραδοσιακή τάξη σε μια αναμορφωμένη ως συνάρτηση της επαγγελματικής ανάπτυξης, όταν συμπεριλαμβάνονται και οι τρεις παράγοντες.

Με βάση τα παραπάνω τα αποτελέσματα της ανάλυσης φανερώνουν τόσο μια άμεση σχέση από τους παράγοντες της επαγγελματικής ανάπτυξης στα ποιοτικά χαρακτηριστικά των περιβαλλόντων μάθησης, όσο και μια έμμεση αντιστροφή της σχέσης ως τρόπο αλλαγής των παραδοσιακών πρακτικών. Με άλλα λόγια στην μια κατεύθυνση η επαγγελματική ανάπτυξη του εκπαιδευτικού, όταν αυτή συμπεριλαμβάνει το σύνολο των παραγόντων, φαίνεται να οδηγεί σε πρακτικές που συμφωνούν με την κοινωνικό-πολιτισμική οπτική και την αναμορφωμένη τάξη, ενώ αντίστροφα η επαγγελματική ανάπτυξη εμφανίζεται ως προϋπόθεση (βάση του δείγματος της έρευνας) για την μετατόπιση των παραδοσιακών τάξεων σε αναμορφωμένες. Το τελευταίο είναι και το κομβικό σημείο στο οποίο καθίσταται ουσιώδης και σημαντική η συμβολή της έρευνας ως το πεδίο υποστήριξης των εκπαιδευτικών για την μετατόπιση των παραδοσιακών πρακτικών σε νέες, σύμφωνα με τα πρότυπα της κοινωνικοπολιτισμικής προοπτικής.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Chapman, O., & Heater, B. (2010). Understanding change through a high school mathematics teacher's journey to inquiry-based teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(6), 445-458.

Daniels, H. (2016). *Vygotsky and pedagogy*. Routledge, 30-68

Forman, E. A. (2003). A sociocultural approach to mathematics reform: Speaking, inscribing, and doing mathematics within communities of practice. *A research companion to principles and standards for school mathematics*, 333-352.

Gee, J. P. (2000). Chapter 3: Identity as an analytic lens for research in education. *Review of research in education*, *25*(1), 99-125.

Goos, M. (2008). Sociocultural Perspectives on the Learning and Development of Mathematics Teachers and Teacher-Educator-Researchers. *Lecture presented at ICME-11, Monterrey, Mexico*.

Kaasila, R. (2007). Using narrative inquiry for investigating the becoming of a mathematics teacher. *ZDM*, *39*(3), 205-213.

Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning*, 19-44.

Lerman, S. (2001). A review of research perspectives on mathematics teacher education. In *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 33-52). Springer Netherlands.

Planas, N., & Gorgorió, N. (2004). Are different students expected to learn norms differently in the mathematics classroom? *Mathematics Education Research Journal*, *16*(1), 19-40.

Potari, D. (2013). The relationship of theory and practice in mathematics teacher professional development: an activity theory perspective. *ZDM*, *45*(4), 507-519.

Prickel, D. (1998). The influence of new and emerging theories on teaching practices. *Retrieved November*, *30*, 2005.

Sakonidis, C., & Potari, D. (2014). Mathematics teacher educators'/researchers' collaboration with teachers as a context for professional learning. *ZDM*, *46*(2), 293-304.

Sfard, A., & Prusak, A. (2005). Telling identities: In search of an analytic tool for investigating learning as a culturally shaped activity. *Educational researcher*, *34*(4), 14-22.

Vygotsky, L. S. (1980). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard university press.

Watson, A., & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: A review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 205-215.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*. Cambridge university press.

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΟ ΓΝΩΣΙΟΛΟΓΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΤΟΙΜΟΤΗΤΑ ΠΑΡΑΘΕΣΗΣ ΠΟΙΟΤΙΚΩΝ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Θεοδοσίου Θεοδόσης [1], Φιλίππου Φίλιππος [2], Έλληνας Αντρέας [3], Άππιου Νικηφόρου Μαρίνα [4]

[1,4]Ευρωπαϊκό Πανεπιστήμιο Κύπρου, [2]Deloitte Cyprus, [3]KPMG Cyprus

[1]ttheodosiou@academy.ac.cy, [2]filippoufilippos1@gmail.com, [3]andreasellinas@hotmail.com, [4]m.nikiforou@euc.ac.cy

Σκοπός αυτής της έρευνας είναι να εξεταστεί ο ρόλος του γενικότερου γνωσιολογικού υποβάθρου των εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, αλλά και της ειδικής γνώσης περιεχομένου στη στατιστική (document literacy – γνώση ανάλυσης δεδομένων, graph comprehension – κατανόηση γραφημάτων, διεξαγωγή έρευνας), σε σχέση με την ικανότητα σχεδιασμού αναλυτικών δραστηριοτήτων στατιστικής, βασιζόμενες στα τρία επίπεδα εμβάθυνσης της στατιστικής (μετάφραση, ερμηνεία, προέκταση). Η έρευνα είναι ποιοτική με 2 εκπαιδευτικούς κλασικού και 2 θετικού υποβάθρου, και τα έργα που δίνονται απαιτούν είτε ανάλυση στατιστικού περιεχομένου είτε παράθεση προτεινόμενων δραστηριοτήτων για την τάξη. Οι συγκρίσεις και τα συμπεράσματα που προκύπτουν είναι με βάση τις δύο προαναφερθείσες κατηγοριοποιήσεις.

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΥ – ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στο πεδίο της στατιστικής, υπάρχουν πολλαπλά επίπεδα ανάλυσης των στατιστικών δεδομένων είτε αυτά βρίσκονται σε γραφήματα είτε όχι. Οι εκπαιδευτικοί μέσα από τη διδασκαλία της στατιστικής είναι υποχρεωμένοι να επιτύχουν για τους μαθητές τους όσο υψηλότερο επίπεδο ανάλυσης γίνεται. Για να επιτευχθεί αυτό, χρειάζονται και οι ίδιοι κάποιες γνώσεις περιεχομένου στατιστικής για να σχεδιάζουν πιο αναλυτικές δραστηριότητες. Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να εξεταστεί το κατά πόσον η κατοχή από τους εκπαιδευτικούς των τριών παραγόντων/πτυχών περιεχομένου της στατιστικής (γνώση ανάλυσης δεδομένων, κατανόηση γραφημάτων, διεξαγωγή έρευνας), σε συνάρτηση με το γνωσιολογικό τους υπόβαθρο παίζουν τον ίδιο ρόλο για την ανάπτυξη αναλυτικότερων πρακτικών στη διδασκαλία της στατιστικής.

Ειδικότεροι στόχοι/ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας

- Πώς επηρεάζει η απόκτηση των τριών πιο πάνω πτυχών από τους εκπαιδευτικούς, στη διατύπωση ερωτημάτων στα τρία επίπεδα στατιστικών αναλύσεων;
- Πώς επηρεάζουν τα δεδομένα μιας δραστηριότητας στατιστικής ανάλυσης τις ερωτήσεις που μπορεί να σκεφτεί και να διατυπώσει ένας εκπαιδευτικός;
- Πώς επιλέγουν οι ίδιοι οι εκπαιδευτικοί να διδάξουν τον σχεδιασμό και την ανάλυση των γραφικών παραστάσεων;

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα της Κύπρου, η Στατιστική μαζί με τις πιθανότητες, αποτελούν τον πέμπτο τομέα μελέτης των σχολικών Μαθηματικών (ΥΑΠ, ΥΠΠΑΙΔ, Αναλυτικό πρόγραμμα Μαθηματικών, 2010). Οι Zawojewski & Shaughnessy (2000) διαχώρισαν τη γνώση του εκπαιδευτικού για την στατιστική στην κοινή μαθηματική, στην οποία διαβάζονται τα διάφορα διαγράμματα με ακρίβεια, και στην εξειδικευμένη μαθηματική.

Όσον αφορά την κατανόηση στατιστικών δεδομένων, φαίνεται από προηγούμενες έρευνες ότι υπάρχει κάποια συσχέτιση με την κατανόηση των γραφημάτων (Jolliffe, 1991; Kosslyn, 1994; Friel et al., 2001), στην ανάλυση των οποίων αναφέρονται τριών ειδών εξελίξιμες δράσεις ανάλυσης: τη μετάφραση, η οποία περιορίζεται μόνο στην περιγραφή της δομής των διαγραμμάτων, την ερμηνεία, όπου γίνεται αναδιάταξη των στοιχείων ανάλογα με τη σημαντικότητά τους και εντοπίζονται σχέσεις μεταξύ τους, και την προέκταση, κατά την οποία φαίνεται η ικανότητα για προβλέψεις και συνέπειες μέσα από τη μελέτη των στατιστικών δεδομένων. Από την άλλη, οι Murray et al. (1997), δημιούργησαν το γενικότερο πλαίσιο της «γνώσης ανάλυσης δεδομένων» αναφερόμενοι «στις γνώσεις και τις δεξιότητες που χρειάζονται για την κατανόηση και χρήση πληροφοριών σε διάφορες μορφές, περιλαμβανομένου των διαγραμμάτων».

Πέραν από τους διάφορους τρόπους ανάλυσης των δεδομένων ως ικανότητα εκπαιδευτικού είτε ως κατανόηση είτε ως διδασκαλία, οι Heaton & Mickelson (2002) προέταξαν τη θέση ότι «είναι σημαντικό οι εκπαιδευόμενοι εκπαιδευτικοί να έχουν εμπειρίες με τη διεξαγωγή ερευνών πρώτα ως μαθητές και μετά ως εκπαιδευτικοί», έχοντας μία εμπεριστατομένη άποψη και γνώση σχετικά με το πώς αναπτύσσονται και ερμηνεύονται οι έρευνες.

Θέτοντας ως βάση τη θεωρία του Shullman (1986) για τα είδη γνώσης τα οποία πρέπει να κατέχει ένας εκπαιδευτικός για να είναι σε θέση να διδάξει (γνώση περιεχομένου, γνώση αναλυτικού προγράμματος και παιδαγωγική γνώση περιεχομένου), οι τρεις πιο πάνω κατηγορίες κατανόησης της στατιστικής (κατανόηση γραφημάτων, γνώση ανάλυσης δεδομένων, διεξαγωγή έρευνας) επικεντρώνονται στον τομέα της «γνώσης περιεχομένου» που πρέπει να έχει ένας εκπαιδευτικός για όσον αφορά στατιστικά θέματα (Ball et al, 2008). Σημαντική παρατήρηση είναι ότι συνήθως οι κατηγορίες «γνώση ανάλυσης δεδομένων» και «κατανόησης γραφημάτων» αντιμετωπίζονται ως μία, θεωρώντας τη δεύτερη ως υποσύνολο της πρώτης (βλ. ορισμό στον Murray et al., 1997).

Με μία πιο γραμμική προσέγγιση, θα εξεταστεί, με βάση την κατηγοριοποίηση της γνώσης της Ball et al. (2008), τη σχέση της «γνώσης περιεχομένου» με τη «γνώση για διδασκαλία». Σύμφωνα με τους Greasser et al. (1996), «η παράθεση ερωτήσεων είναι μία θεμελιώδης συνιστώσα της γνώσης», συνεπώς και της αποτελεσματικής διδασκαλίας.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στα πλαίσια αυτής της έρευνας ήταν αναγκαίο να μελετηθεί εις βάθος ο τρόπος σκέψης των εκπαιδευτικών, τόσο ως προς τη διατύπωση ερωτημάτων και δραστηριοτήτων, αλλά και να καθοριστεί το γνωσιολογικό τους υπόβαθρο όσον αφορά τη στατιστική. Έτσι έγινε ποιοτική έρευνα, ούτως ώστε οι εκπαιδευτικοί να μπορούν να εκφραστούν κάνοντας συνδέσεις των γνώσεών τους με προτεινόμενες δραστηριότητες, τις οποίες τους ζητήθηκε να παραθέσουν. Επίσης παρατηρήθηκαν οι αντιδράσεις τους και η ευελιξία τους σε διαφορετικού τύπου δραστηριότητες. Το δείγμα αποτελούσαν 4 εκπαιδευτικοί που διδάσκουν Μαθηματικά σε Ε’ και Στ’ τάξεις δημοτικών σχολείων της Κύπρου (2 με κλασικό υπόβαθρο και 2 με θετικό υπόβαθρο).

Ως εργαλείο συλλογής δεδομένων χρησιμοποιήθηκε ημιδομημένη συνέντευξη στην οποία δόθηκαν 4 σενάρια στατιστικών προβλημάτων (2 βασιζόμενα στη «γνώση ανάλυσης δεδομένων»– για να διασφαλιστεί η διαφορετικότητα στα δεδομένα που χρειάζεται να αναλυθούν στατιστικά από τους εκπαιδευτικούς, 1 βασιζόμενο στην «κατανόηση γραφημάτων» και 1 βασιζόμενο στη διεξαγωγή έρευνας), στα οποία εντοπίζεται ο βαθμός ικανότητας ανάλυσης δεδομένων, και το σκεπτικό παράθεσης δραστηριοτήτων για μαθητές.

Μέτρηση και ανάλυση στοιχείων: Οι διάφορες πληροφορίες που συνελέχθησαν, ομαδοποιήθηκαν σε είδη απαντήσεων με βάση τα τρία είδη δράσεων στην κατανόηση στατιστικών δεδομένων (μετάφραση, ερμηνεία, προέκταση), και αντιπαραθετειμένα με τα υπόβαθρα των εκπαιδευτικών, και τις προτεινόμενες ερωτήσεις/δραστηριότητες. Με βάση τις πιο πάνω συσχετίσεις, οι οποίες οργανώθηκαν σε πινακίδια κατηγοριοποίησης απαντήσεων, εξήχθησαν γενικές και ειδικές παρατηρήσεις.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ – ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Σύμφωνα με τις απαντήσεις των τεσσάρων εκπαιδευτικών στις συνεντεύξεις που διεξήχθησαν υπήρξαν κάποιες κοινές απόψεις μεταξύ τους, αλλά και αρκετές διαφορετικές απόψεις ή/και στοιχεία που εντόπισαν στα διάφορα έργα. Οι ερωτήσεις, στα πλαίσια της ημιδομημένης συνέντευξης, είχαν τη δυνατότητα να εντοπίσουν τον βαθμό ανάλυσης των δεδομένων κάθε έργου είτε από κανονική ανάλυση των δεδομένων είτε από παράθεση δραστηριοτήτων που οδηγούσαν σε επεξεργασία των δεδομένων. Τα αποτελέσματα σε κάθε έργο ξεχωριστά είναι τα ακόλουθα:

Σενάριο 1: «Βαθμοί διαγνωστικού δοκιμίου» (γν. Ανάλυσης δεδομένων)

Σε μία Στ’ τάξη των είκοσι ατόμων διεξήχθη διαγώνισμα στη Γλώσσα όπου οι μαθητές πήραν την ακόλουθη βαθμολογία:

15, 15, 18, 11, 15, 16, 19, 17, 16, 20, 14, 10, 16, 15, 09, 12, 12, 13, 19, 20

Επίπ. Στ. Ανάλ.	**Εκ. 1 (Κλ. Υπ.)**	**Εκ. 2 (Κλ. Υπ.)**	**Εκ. 3 (Θετ. Υπ.)**	**Εκ. 4 (Θετ. Υπ.)**
Μετάφραση	Δημιουργία Ραβδογράματος Ομαδοποίηση δεδομένων	Δημ. και των 3 βασικών διαγρ.	Δημ. Ραβδογράμ. Ομαδοποίηση δεδομένων	Δημ. Ραβδογράμ. Σειροθέτηση
Ερμηνεία	Μέσος όρος	Μέσος Όρος	Μέσος όρος Συχνότητα Καν. Κατανομή	Μέσος όρος Εύρος Επικρ. Τιμή
Προέκταση			Γιατί οι τιμές πάνω της βάσης είναι παραπάνω;	Ήταν δύσκολο το διαγώνισμα;

Σενάριο 1: «Βαθμοί διαγνωστικού δοκιμίου»

Στο Σενάριο 1 παρατηρήθηκε η ικανότητα των εκπαιδευτικών με θετικό υπόβαθρο να εντοπίζουν περισσότερους στατιστικούς συσχετισμούς στα δεδομένα του έργου (η ομαδοποίηση προτείνεται από τους δύο εκπαιδευτικούς για βαθμολογίες πάνω και κάτω της βάσης του 10), καθώς και να κτίζουν δραστηριότητες προέκτασης με βάση αυτούς τους συσχετισμούς ενώ οι εκπαιδευτικοί με κλασικό υπόβαθρο έμειναν στις βασικές στατιστικές αναλύσεις. Όμως και οι 4 γενικά εκπαιδευτικοί είχαν την ίδια γενικότερη αντίληψη για τα δεδομένα, λέγοντας ότι θα έκαναν μετάφραση σε ραβδόγραμμα.

Σενάριο 2: «Τέρματα ποδοσφαιριστή» (γν. Ανάλυσης δεδομένων)

Ο Παναγιωτόπουλος είναι ποδοσφαιριστής σε ομάδα πρώτης κατηγορίας σε θέση επιθετικού. Σε κάθε αγώνα τις πρώτες δέκα εβδομάδες έβαλε τα ακόλουθα γκολ.

1^{η}	2^{η}	3^{η}	4^{η}	5^{η}	6^{η}	7^{η}	8^{η}	9^{η}	10^{η}
1	1	0	3	2	0	3	1	3	1

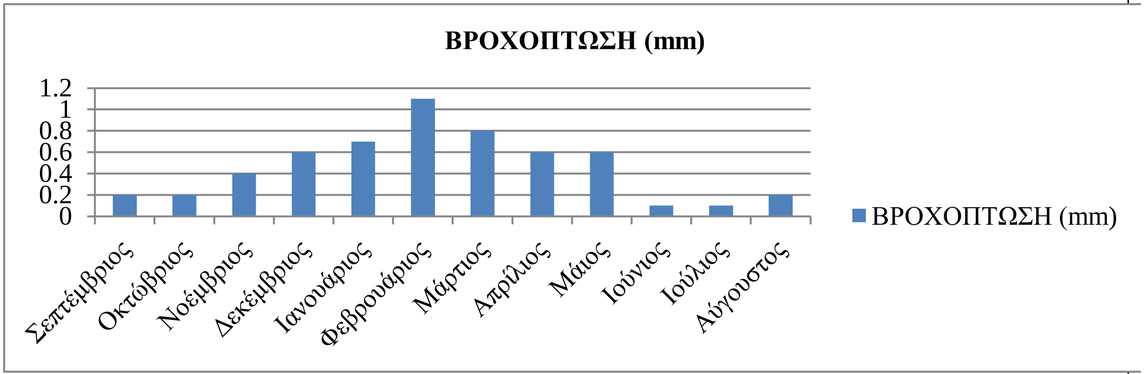
Επίπ. Στ. Ανάλ.	**Εκ. 1 (Κλ. Υπ.)**	**Εκ. 2 (Κλ. Υπ.)**	**Εκ. 3 (Θετ. Υπ.)**	**Εκ. 4 (Θετ. Υπ.)**
Μετάφραση	Δημ. Ιστογράμ.	Δημ. Ιστογράμ.	Δημ. Ιστογράμ.	Δημ. Ραβδογράμ.
Ερμηνεία	Μέσος όρος	Μέσος Όρος	Μέσος όρος	Μέσος όρος Επικρ. Τιμή
Προέκταση	Είναι καλός ή κακός παίκτης;	Γενικά συμπεράσματα για τον παίκτη	Ερμηνεία απόδοσης στο 1^{o} και το 2^{o} μισό του πρωταθλήμ.	

Σενάριο 2: «Τέρματα ποδοσφαιριστή»

Στο Σενάριο 2 παρατηρήθηκε και από τους 4 εκπαιδευτικούς περιορισμένη ανάλυση των δεδομένων (μόνον ο Μ.Ο. στους 3), ενώ σε αντίθεση με το Σενάριο 1, στη διαδικασία της προέκτασης μπαίνουν και οι εκπαιδευτικοί με κλασικό υπόβαθρο. Αυτό ίσως να οφείλεται στο είδος του προβλήματος το οποίο να υποβοηθά για προβλέψεις ή το γεγονός ότι προστέθηκε και ο παράγοντας χρόνος. Επίσης κοινό σημείο των 3 είναι η μετάφραση των δεδομένων σε ιστόγραμμα (διαφοροποιώντας το Σενάριο 1 από το Σενάριο 2), ενώ ο τελευταίος επιλέγει το ραβδόγραμμα γιατί όπως είπε *«δίνω σημασία στο πλήθος των τερμάτων και όχι στις αυξομειώσεις από τον ένα αγώνα στον άλλο»*.

Σενάριο 3: «Βροχόπτωση το 2012» (κατανόηση γραφημάτων)

ΠΙΝΑΚΑΣ ΒΡΟΧΟΠΤΩΣΗΣ ΓΙΑ ΤΟ 2012



Επίπ. Στ. Ανάλ.	Εκ. 1 (Κλ. Υπ.)	Εκ. 2 (Κλ. Υπ.)	Εκ. 3 (Θετ. Υπ.)	Εκ. 4 (Θετ. Υπ.)
Μετάφραση	Ανάλ. Δομ. στοιχ. της παράστασης Ομαδοποί ηση δεδομένων	Ανάλ. Πορείας βροχόπτωσης Ομαδοποίηση δεδομένων	Ομαδοποίηση δεδομένων	Δημ. Πίνακα Ομαδοποίηση δεδομένων
Ερμηνεία	Μέσος όρος Σύγκριση τιμών	Μέσος Όρος	Μέσος όρος Εύρος	Μέσος όρος Εύρος
Προέκταση	Πρόβλεψη συνέχειας	Γενικά συμπεράσματα	Πού μπορεί να βρίσκεται ο χώρος;	Πού μπορεί να βρίσκεται ο χώρος;

Σενάριο 3: «Βροχόπτωση το 2012»

Στο Σενάριο 3, το ενδιαφέρον είναι ότι οι εκπαιδευτικοί με κλασικό υπόβαθρο έδωσαν εξαιρετική σημασία στην ανάλυση των δομικών στοιχείων της παράστασης, ενώ ο Εκ. 4 θεώρησε απαραίτητη δραστηριότητα να δημιουργήσουν οι μαθητές πίνακα συχνοτήτων, γιατί όπως είπε *«οι γραφικές παραστάσεις δίνουν απλά μια γενική εντύπωση των δεδομένων που αναπαριστούν»*. Καθώς και οι 4 εκπαιδευτικοί προέβησαν στις ίδιες διαδικασίες συσχέτισης δεδομένων, οδηγήθηκαν και οι 4 σε διατύπωση δραστηριοτήτων προέκτασης, με τους Εκ. 3 και 4 να χρησιμοποιούν διαθεματικά γνώσεις γεωγραφίας για να βοηθηθούν στα συμπεράσματα με βάση την ερώτηση που διετύπωσαν.

Παρατηρώντας συγκριτικά τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών στα 3 πρώτα σενάρια, το υπόβαθρο των εκπαιδευτικών διαφοροποίησε τις απαντήσεις τους κυρίως στο επίπεδο της ερμηνείας, αφού οι εκπαιδευτικοί με θετικό υπόβαθρο μπορούσαν με βάση τις γνώσεις τους να εντοπίσουν δυνατότητες περαιτέρω στατιστικών αναλύσεων [π.χ. κανονική κατανομή - έστω κι αν δεν πληρούνται τα κριτήρια (δεν πληρούνται και στο σενάριο 1), συχνότητα]. Οι αναφορές τους για ομαδοποίηση δεδομένων προτείνεται από τους εκπαιδευτικούς για να βρεθεί η μέση βροχόπτωση ανά εποχή/τριμηνία.

<table>
<tr><td colspan="5">Σενάριο 4: «Διεξαγωγή έρευνας»
Η Ελένη είναι εκπαιδευτικός δημοτικού σχολείου και διδάσκει τα μαθηματικά στις δύο τετάρτες τάξεις του σχολείου της. Εν τω μεταξύ στο σχολείο της έχει ετοιμαστεί εργαστήριο πληροφορικής με διαδραστικό πίνακα. Σκέφτεται αν αξίζει τον κόπο να το χρησιμοποιήσει για να επιφέρει καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα στους μαθητές της ή όχι. Περιέγραψε πολύ γενικά μία μελέτη πεδίου που μπορεί να κάνει η Ελένη για να ελέγξει το ερώτημά της.</td></tr>
<tr><td>Στοιχεία</td><td>Εκ. 1 (Κλ. Υπ.)</td><td>Εκ. 2 (Κλ. Υπ.)</td><td>Εκ. 3 (Θετ. Υπ.)</td><td>Εκ. 4 (Θετ. Υπ.)</td></tr>
<tr><td>Ετοιμότητα/Γνώση για έρευνες</td><td>Όχι</td><td>Ναι</td><td>Όχι</td><td>Ναι</td></tr>
<tr><td>Ιδέα για έρευνα</td><td>Παρεμβατικό πρόγραμμα στην ίδια τάξη</td><td>Δύο διαφορ. δείγματα (ομάδα πειράματος -ελέγχου)</td><td>Παρεμβατικό πρόγραμμα στην ίδια τάξη</td><td>Δύο διαφορ. δείγματα (ομάδα πειράματος -ελέγχου)</td></tr>
</table>

Σενάριο 4: «Διεξαγωγή έρευνας»

Στο Σενάριο 4, το οποίο σε αντίθεση με τα προηγούμενα τρία δε ζητούσε διατύπωση ερωτήσεων αλλά τρόπους με τους οποίους θα μπορούσε να διεξαχθεί μία έρευνα, αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί οι οποίοι δεν γνώριζαν από έρευνες έδωσαν την ίδια απάντηση ενώ οι δύο οι οποίοι γνώριζαν, πάλιν την ίδια απάντηση. Ίσως αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι Εκ. 1 και 3 δεν ήξεραν πώς να αξιοποιήσουν τις «δύο τάξεις» που τους έδινε το σενάριο, ενώ οι Εκ. 2 και 3 εξήγησαν ότι τα διαφορετικά δείγματα καθιστούν την έρευνα «πρακτικότερη», καθώς και το ότι λαμβάνουν περισσότερους παράγοντες υπ’ όψιν όπως το *«να μην* *επηρεαστεί η πορεία των μαθημάτων»* ή *«η συντομία της ερευνητικής διαδικασίας»*.

Στην ερώτηση *«Θεωρείς ότι η παρουσία των σχεδιαγραμμάτων ως αναπαράσταση πρέπει να υπάρχει εξ αρχής ως σημείο αναφοράς ή πρέπει να προκύπτει μέσα από ανάγκη της γραφικής αναπαράστασης δεδομένων;»*, οι Εκ. 1, 2 και 3 είπαν ότι είναι προτιμότερο να ξεκινά η διδασκαλία της στατιστικής μέσα από τη γραφική παράσταση, δίνοντας και οι τρεις την άποψη ότι είναι ευκολότερο να πάρεις μία γενική άποψη για τα δεδομένα, αλλά και να αντλήσεις ευκολότερα στοιχεία, ενώ ο Εκ. 4 θεωρεί ότι μέσω του πίνακα ο μαθητής μπορεί να αντλήσει περισσότερα στοιχεία *«επειδή υπάρχει αντιστοιχία του κάθε δεδομένου με το κάθε υποκείμενο του δείγματος»*, θέτοντας έτσι την ανάγκη για σχηματισμό των γραφικών παραστάσεων. Επίσης, και οι τέσσερεις εκπαιδευτικοί εξέφρασαν την άποψη ότι η διδασκαλία ανάλυσης των γραφικών αναπαραστάσεων πρέπει να προηγείται της διαδικασίας σχεδιασμού, ίσως επηρεαζόμενοι από τις διδακτικές πρακτικές που ακολουθούνται στο δημοτικό σχολείο.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η πιο πάνω ποιοτική έρευνα μελέτησε τον τρόπο με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης αναλύουν δεδομένα και πληροφορίες στα πλαίσια της στατιστικής και πώς αυτά επηρεάζουν τις δραστηριότητες τις οποίες παραθέτουν στα πλαίσια του μαθήματος της στατιστικής.

Μέσα από τις συνεντεύξεις φάνηκε η αναγκαιότητα της ικανότητας ανάλυσης των εκπαιδευτικών, στα πλαίσια της «γνώσης ανάλυσης δεδομένων» και «κατανόησης γραφημάτων», διαφόρων σεναρίων στατιστικής, για να μπορούν να αντεπεξέλθουν στη δημιουργία δραστηριοτήτων στατιστικής στο δημοτικό σχολείο. Όσον αφορά όμως τον τρίτο τομέα, δηλαδή αυτόν της διεξαγωγή έρευνας, έδειξε ότι η κατάρτηση των 4 εκπαιδευτικών σε αυτόν τον τομέα δεν έπαιξε και τόσο σημαντικό ρόλο στην παράθεση δραστηριοτήτων, τουλάχιστον στο δημοτικό σχολείο, αφού ο εκπαιδευτικός με κλασικό υπόβαθρο που είχε επαφή με ερευνητικές διαδικασίες, είχε λιγότερο εξειδικευμένες απαντήσεις και δραστηριότητες από τον εκπαιδευτικό με θετικό υπόβαθρο ο οποίος δεν είχε επαφή με έρευνες. Έτσι η γνώση για τη διεξαγωγή έρευνας φαινόταν να παίζει ρόλο μόνο σε σενάρια τα οποία είχαν να κάνουν απλά με διεξαγωγή έρευνας και όχι με περαιτέρω στατιστική ανάλυση, στα απλά επίπεδα του δημοτικού σχολείου. Ίσως αυτό να παίζει ρόλο στο ότι στο δημοτικό σχολείο η βάση στατιστικής να είναι οι αναλύσεις διαγραμμάτων και από εκεί να εξελίσσονται όλες οι υπόλοιπες δραστηριότητες στατιστικής (βλ. ΥΑΠ, ΥΠΠΑΙΔ, Αναλυτικό πρόγραμμα Μαθηματικών, 2010).

Όσον αφορά τον ρόλο τον οποίο παίζει ένα σενάριο στην ποσότητα και στη διατύπωση ερωτήσεων και δραστηριοτήτων στους μαθητές, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι διαφορετικού τύπου σενάρια, οδηγούσαν τους 4 εκπαιδευτικούς σε διαφορετικού είδους ερωτήσεις, οι οποίες αναπτύσσονται κυρίως στο στάδιο της μετάφρασης, και εν συνεχεία στο στάδιο της ερμηνείας και της προέκτασης. Ακόμη, ρόλο παίζει και η οικειότητα που έχουν οι εκπαιδευτικοί δημοτικής εκπαίδευσης με κάποια σενάρια στατιστικής τα οποία εμφανίζονται συχνότερα στις προτάσεις διδασκαλίας που έχουν (βλ. Σενάριο 1).

Εκτός όμως από το είδος του σεναρίου, ρόλο στην παράθεση δραστηριοτήτων στατιστικής παίζει και ο τρόπος παρουσίασης των δεδομένων. Εάν λοιπόν γίνεται μόνο μία απλή παράθεση δεδομένων ή τα δεδομένα υπάρχουν κατακεχωρημένα σε γραφική παράσταση, αυτό μπορεί να διαφοροποιήσει τις δραστηριότητες που δίνονται από τους εκπαιδευτικούς, κυρίως στα επίπεδα της μετάφρασης και της προέκτασης. Οι 3 εκπαιδευτικοί όπως φάνηκε βρίσκουν πιο οικείο το να ασχολούνται με δραστηριότητες στατιστικής οι οποίες να έχουν βάση μία γραφική παράσταση, η οποία «αντιμετωπίζει» τα δεδομένα ως «ολότητα», ενώ μόνο ο καταρτισμένος εκπαιδευτικός σε έρευνες, με θετικό υπόβαθρο θεωρεί ελλειματικό το διάγραμμα σε σχέση με την παράθεση δεδομένων σε πίνακα, τον οποίο μπορεί να χειριστεί όπως ο ίδιος θέλει. Ίσως να επηρεάζονται και από τον τρόπο δόμησης της ύλης της στατιστικής στα βιβλία του δημοτικού σχολείου όπου οι γραφικές αναπαραστάσεις είναι αναφαίρετο κομμάτι της αναπαράστασης δεδομένων. Γι’ αυτό και δηλώνουν ότι η διδασκαλία της στατιστικής πρέπει να αρχίζει από τις γραφικές παραστάσεις.

Εκείνο που δείχνει το περισσότερο ενδιαφέρον είναι ότι το θεωρητικό και γνωσιολογικό υπόβαθρο των 4 εκπαιδευτικών, δεν τους περιορίζει στο να θέσουν ερωτήσεις και δραστηριότητες υψηλότερου συλλογιστικού επιπέδου (βλ. δραστηριότητες προέκτασης). Φυσικά και η μετάφραση θεωρείται απαραίτητη για την ερμηνεία και η ερμηνεία με τη σειρά της απαραίτητη για την προέκταση, όμως φάνηκε ότι δεν προαπαιτούνταν η πλήρης εννοιολογική και γνωσιολογική κατάρτιση του ενός επιπέδου για να μπορέσει να περάσει ένας εκπαιδευτικός στο επόμενο. Σε εκείνο το οποίο έπαιξε ρόλο το υπόβαθρο, είναι το βάθος, η εξειδίκευση, και τα πιο συγκεκριμένα ερωτήματα που έδιναν οι εκπαιδευτικοί με θετικό υπόβαθρο, στα διάφορα επίπεδα.

Η πιο πάνω έρευνα μελέτησε ποιοτικά τέσσερεις διαφορετικές περιπτώσεις εκπαιδευτικών. Στο μέλλον θα ήταν καλό να γίνουν και ποσοτικές έρευνες για να επιβεβαιωθούν η να διαψευσθούν τα πιο πάνω αποτελέσματα. Επίσης, ο λόγος στον οποίο να περιορίστηκε η «γνώση για διεξαγωγή έρευνας», είναι ίσως ο περιορισμός του δείγματος σε εκπαιδευτικούς δημοτικής εκπαίδευσης οι οποίοι να σκέφτονται με βάση τις ήδη υπάρχουσες δραστηριότητες στατιστικής που συναντούν στο δημοτικό σχολείο. Άρα για να φανεί και πώς επηρεάζει η γνώση για έρευνες, θα ήταν καλό να επεκταθεί η έρευνα και σε καθηγητές μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Τέλος, προτείνεται να μελετηθεί και το πώς λειτουργούν οι εκπαιδευτικοί κατά τη διάρκεια της ενεργούς διδασκαλίας, στην παράθεση δραστηριοτήτων στατιστικής διαφορετικού επιπέδου ανάλυσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών (2010). *Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων*. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου.

Ball, D. L., Thames, M. H., Phelps, G., (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher* Education, 59, 389-407.

Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*, 124-158.

Graesser, A.C., Swamer, S. S., Baggett, W.B., & Sell, M. A. (1996). New models of deep comprehension. In B.K. Britton & A.C. Graesser (Eds.). *Models of understanding text* (pp. 1-32). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Heaton, R., Mickelson, W. T., (2002). The learning and teaching of statistical investigation in teaching and teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 35-59.

Jollife, F. R. (1991). Assessment of the understanding of statistical concepts. In D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the third international conference on teaching statistics* (Vol. 1. p. 461-466). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Kosslyn, S. M. (1994). *Elements of graph design*. New York: W. H. Freeman.

Murray, T. S., Kirsch, I. S., & Jenkins, L. B. (1997). *Adult literacy in OECD countries: A technical report for the first international adult* *literacy survey*. Washington. DC: National Center of Education Statistics, U.S. Government Printing Office.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15(2)*, 4-14.

Zawojewski, J. S., & Shaughnessy, J. S. (2000). Data and chance. In E.A. Silver & P.A. Kenney (Eds.), *Results from the seventh mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress* (pp. 235-268). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥ ΕΠΙΜΟΡΦΩΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΜΙΚΤΗΣ ΜΑΘΗΣΗΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Καββαδία Αθανασία και Χατζηαχιλλέως Στέλλα

3ο Γυμνάσιο Κέρκυρας, Πανεπιστήμιο Λευκωσίας

atkavvadia@yahoo.gr, sepgps@gmail.com

Ο συνδυασμός παραδοσιακών και διαδικτυακών πρακτικών επιμόρφωσης οδήγησε σε ένα νέο πλαίσιο επιμόρφωσης αυτού με τη βοήθεια του μοντέλου μικτής μάθησης. Η παρούσα έρευνα μελετά ένα τέτοιο πρόγραμμα. Συγκεκριμένα εστιάζεται στη μελέτη της επιρροής που ασκήθηκε από το μοντέλο μικτής μάθησης στους εκπαιδευτικούς που παρακολούθησαν το πρόγραμμα επιμόρφωσης, ώστε να εφαρμοσθεί στην εκπαιδευτική πρακτική. Από την έρευνα διαπιστώθηκε η θετική επίδραση του συγκεκριμένου μοντέλου στη διδασκαλία των Μαθηματικών, αρκεί να υπάρχει διαρκής ενημέρωση και κατάρτιση των εκπαιδευτικών σε θέματα που άπτονται της λειτουργίας του συγκεκριμένου μοντέλου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια, παγκοσμίως αλλά και στην Ελλάδα, οι τεχνολογικές εξελίξεις και οι κοινωνικοοικονομικές μεταβολές έχουν επηρεάσει και το χώρο της εκπαίδευσης (Βρασίδας, Ζεμπύλας, & Πέτρου, 2005). Ειδικότερα, η διδακτική αξιοποίηση νέων Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στη σχολική πρακτική, αποβλέποντας στην επικαιροποίηση και αναβάθμιση της ποιότητας της παρεχόμενης εκπαίδευσης, αποτελεί σημαντική προτεραιότητα των κρατών παγκοσμίως (UNESCO, 2004). Στο νέο πλαίσιο που διαμορφώνεται στο χώρο της εκπαίδευσης η στάση του εκπαιδευτικού απέναντι στις νέες τεχνολογίες και στον τρόπο διδασκαλίας αποτελεί βασικό κριτήριο για την πορεία της εκπαιδευτικής διαδικασίας (Voogt, 2010).

Συγκεκριμένα, στα πλαίσια των σεμιναρίων ενδοϋπηρεσιακής επιμόρφωσης που παρέχονται στην Ελλάδα για τους εν ενεργεία εκπαιδευτικούς, δίνεται έμφαση στην παροχή κατάλληλης αρχικής εκπαίδευσης των διδασκόντων, καθώς και στην εφαρμογή διαδικασιών που στοχεύουν στην ένταξη των ΤΠΕ στην εκπαιδευτική πράξη (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2010). Για το λόγο αυτό το Υπουργείο Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων έχει εντάξει το πρόγραμμα «Επιμόρφωση Β Επιπέδου στις ΤΠΕ» τόσο για τους εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας, όσο και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Μάλιστα, από το 2013, για το σχεδιασμό και την υλοποίηση τέτοιων προγραμμάτων υιοθετήθηκαν μέθοδοι οι οποίες προσεγγίζουν τη μάθηση με έναν πιο ευέλικτο τρόπο. Συγκεκριμένα, ακολουθήθηκε το μοντέλο μικτής μάθησης το οποίο συνδυάζει τα πλεονεκτήματα σύγχρονων και ασύγχρονων περιβαλλόντων μάθησης με την παραδοσιακή δια ζώσης διδασκαλία και επιπλέον χαρακτηρίζεται και από χωροχρονική ευελιξία (Caetano & Marcal, 2010).

Βασικός σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να μελετηθούν οι στάσεις των επιμορφούμενων εκπαιδευτικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με τη χρησιμότητα της Επιμόρφωσης Β Επιπέδου στη διδακτική των Μαθηματικών, έχοντας παρακολουθήσει πρόγραμμα επιμόρφωσης δομημένο με το μοντέλο της μικτής μάθησης.

Ως συνέπεια, τέθηκαν ερευνητικά ερωτήματα που αφορούσαν τους στόχους της επιμόρφωσης, το βαθμό αξιοποίησης του μοντέλου μικτής μάθησης στη διδακτική πρακτική, την επίδραση των ατομικών γνωρισμάτων των επιμορφούμενων στις αντιλήψεις τους για τη διαδικτυακή επιμόρφωση και μάθηση και τα χρησιμότερα κατ' αυτούς χαρακτηριστικά του μοντέλου προς όφελος των μαθητών κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Μαθηματικά και Νέες Τεχνολογίες

Στο χώρο της σύγχρονης εκπαίδευσης, μεγάλη πλειοψηφία των ευρωπαϊκών χωρών έχει αναθεωρήσει τα προγράμματα σπουδών στο μάθημα των Μαθηματικών αποβλέποντας στην προσαρμογή στις νέες κοινωνικές και τεχνολογικές απαιτήσεις της εποχής μας (NCTM, 2000). Ο εκσυγχρονισμός αυτός εστιάζει στην ανάπτυξη γνώσεων και δεξιοτήτων από πλευράς των μαθητών και όχι μόνο του θεωρητικού περιεχομένου (Ζαχαριάδης, Πόταρη, & Στουραΐτης, 2011). Η προσέγγιση αυτή σκοπό έχει τόσο την κατανόηση των Μαθηματικών εννοιών, όσο και την εφαρμογή τους στον πραγματικό κόσμο (Eurydice, 2011).

Ειδικότερα, δίνεται έμφαση στην ενεργητική μάθηση, στις ομαδοσυνεργατικές διαδικασίες, στην άμεση ανατροφοδότηση κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας και στην αυτόνομη μάθηση (Bonk, Olson, Wisher, & Orvis, 2002). Ο καθηγητής, με τη βοήθεια κατάλληλων ερωτήσεων και μιας σωστά δομημένης δραστηριότητας, προτρέπει τους μαθητές στον πειραματισμό, στη συζήτηση, στον προβληματισμό σε αντίθεση με την παραδοσιακή τάξη των Μαθηματικών, όπου οι μαθητές καλούνται να επιλύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα αμέσως μετά την επίδειξη της τεχνικής της λύσης ενός προβλήματος ή μιας μαθηματικής απόδειξης. Ως συνέπεια, ο εκπαιδευτικός γίνεται συνερευνητής και ο μαθητής αναλαμβάνει ενεργητικό ρόλο.

Απόρροια αυτών είναι η αναδιάρθρωση των διδακτικών πρακτικών και των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών, οπότε κρίνεται απαραίτητη η επιμόρφωση και κατάρτιση των καθηγητών Μαθηματικών, ώστε να είναι σε θέση με ευελιξία να μπορούν να οργανώνουν εκπαιδευτικές πρακτικές χρησιμοποιώντας εργαλεία τεχνολογίας και να τις προσαρμόζουν στις ανάγκες των μαθητών. Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί οφείλουν να παρέχουν στους εκπαιδευόμενους κίνητρα για να οικοδομήσουν μαθηματικές έννοιες, τόσο για την ενίσχυση της απόδοσής τους, όσο και για την επιλογή πιθανής σταδιοδρομίας, γεγονός που απαιτεί υψηλά μαθηματικά επίπεδα γνώσης (Eurydice, 2011).

Επιμόρφωση και Μικτό Μοντέλο Επιμόρφωσης Β Επιπέδου στις ΤΠΕ για τους καθηγητές Μαθηματικών

Μέσα από τη βιβλιογραφική επισκόπηση θεμάτων σχετικών με τους τομείς της εκπαίδευσης και της κατάρτισης τονίζεται ο ζωτικός τους ρόλος με στόχο την αντιμετώπιση σημερινών και μελλοντικών κοινωνικοοικονομικών, δημογραφικών, περιβαλλοντικών και τεχνολογικών προκλήσεων που αντιμετωπίζουν οι ευρωπαίοι πολίτες (Υπουργείο Παιδείας, 2016). Επιπλέον, επισημαίνεται η σύνδεση της επαγγελματικής εξέλιξης του εκπαιδευτικού προσωπικού με τη διασφάλιση υψηλής ποιότητας διδασκαλίας, γεγονός που μπορεί να αποτελέσει κίνητρο στις επαγγελματικές τους επιλογές. Ως εκ τούτου, προκύπτει πως η δυνατότητα πρόσβασης των εν ενεργεία εκπαιδευτικών σε προγράμματα εμπλουτισμού των επαγγελματικών προσόντων και δεξιοτήτων τους, σε όλη τη διάρκεια της επαγγελματικής τους πορείας, αποτελεί βασικό στοιχείο τόσο της επιστημονικής κοινότητας, όσο και των φορέων των συναφών με το αντικείμενο της επιμόρφωσης (Ευρωπαϊκή Επιτροπή, 2016).

Στο πλαίσιο αυτό, επίσης, υλοποιήθηκαν προτάσεις του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου Ελλάδος για την εφαρμογή ευέλικτων μοντέλων επιμόρφωσης, εξ αποστάσεως, συγχρονικής και ασύγχρονης εκπαίδευσης, καθώς και η χρήση ενεργητικών και συμμετοχικών μεθόδων επιμόρφωσης, σύμφωνων με τις αρχές και τις πρακτικές της εκπαίδευσης ενηλίκων. Ειδικά για τους εκπαιδευτικούς που υπηρετούν σε σχολεία απομακρυσμένων γεωγραφικά περιοχών ή σε ολιγοθέσια σχολεία η ένταξη περιβαλλόντων εξ αποστάσεως εκπαίδευσης τους δίνει τη δυνατότητα διαρκούς ενημέρωσης και επιμόρφωσης (Holmes, Polhemus, & Jennings, 2005). Παράλληλα, η έλλειψη ελεύθερου χρόνου εξαιτίας του σχολικού προγράμματος, εφόσον τα προγράμματα επιμόρφωσης γίνονται εκτός ωραρίου, και η μετακίνηση που απαιτείται σε κάποιες περιοχές, καθιστούν επιβεβλημένη την εφαρμογή προγραμμάτων εξ αποστάσεως επιμόρφωσης. Συγκεκριμένα, στη χώρα μας μετά την εφαρμογή πιλοτικών προγραμμάτων με το μοντέλο μικτής μάθησης, το 2014 υλοποιήθηκε το πρώτο πρόγραμμα Επιμόρφωσης Β Επιπέδου ΤΠΕ με το εν λόγω μοντέλο στο χώρο της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για όλες τις ειδικότητες, από εξειδικευμένους επιμορφωτές. Το πρόγραμμα είχε διάρκεια 24 εβδομάδων και περιλάμβανε συνεδρίες δια ζώσης και σύγχρονες εξ αποστάσεως και ασύγχρονες δράσεις, αξιοποιώντας σύγχρονα περιβάλλοντα μάθησης. Συμμετείχαν από 8 έως 12 εκπαιδευτικοί διαφόρων κλάδων.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Δείγμα: Το ενδιαφέρον της συγκεκριμένης έρευνας επικεντρώνεται στη μελέτη του τρόπου σκέψης και των κινήτρων μιας μικρής ομάδας ατόμων αποτελούμενη από καθηγητές Μαθηματικών του νομού Κερκύρας, που επιμορφώθηκαν στο διάστημα Μάρτιος – Νοέμβριος 2014 για πρώτη φορά, με το μοντέλο μικτής μάθησης για το Β επίπεδο ΤΠΕ. Για την επιλογή του δείγματος ακολουθήθηκε η διαδικασία της επιλεκτικής δειγματοληψίας (Παπαναστασίου & Παπαναστασίου, 2014). Από τα δώδεκα άτομα που επιμορφώθηκαν στην έρευνα έλαβαν μέρος οκτώ δίνοντας ατομική συνέντευξη. Στο δείγμα των οκτώ ατόμων ισάριθμοι ήταν οι άνδρες και οι γυναίκες.

Ερευνητική διαδικασία: Λόγω του ότι δεν επιδιώκεται η γενίκευση των αποτελεσμάτων, αλλά η σε βάθος διερεύνηση των απόψεων των επιμορφούμενων εκπαιδευτικών, η έρευνα προσεγγίσθηκε ποιοτικά και μάλιστα ως μελέτη περίπτωσης. Ως εργαλείο συλλογής δεδομένων αξιοποιήθηκε η ημιδομημένη συνέντευξη, εφόσον η έρευνα εστιάζει στο νόημα που έχουν οι προς διερεύνηση καταστάσεις και ζητούνται προσωπικές αφηγήσεις/εμπειρίες των υποκειμένων. Το πρωτόκολλο της συνέντευξης περιλάμβανε ερωτήσεις ανοικτού και κλειστού τύπου.

Τα υποκείμενα της έρευνας ενημερώθηκαν τηλεφωνικά για το σκοπό αυτής, την πορεία της συνέντευξης και τη διασφάλιση ανωνυμίας και εχεμύθειας. Μετά τη συγκατάθεση των υποκειμένων ορίσθηκε ο χρόνος και ο τόπος διεξαγωγής της συνέντευξης. Η διαδικασία συλλογής ερευνητικών δεδομένων ολοκληρώθηκε με τις ατομικές συνεντεύξεις, διάρκειας περίπου μιας ώρας και την καταγραφή του κειμένου της συνέντευξης σε πραγματικό χρόνο. Η έρευνα διεξήχθη την περίοδο Νοέμβριος 2016– Ιανουάριος 2017.

Εγκυρότητα-Αξιοπιστία: Ως προς την ενίσχυση της εγκυρότητας της έρευνας εφαρμόσθηκαν τρεις πρακτικές. Αυτή της επικύρωσης από τους συμμετέχοντες (Creswell, 2014), ο έλεγχος από άλλους ερευνητές και η εγκυρότητα περιεχομένου (Παπαναστασίου & Παπαναστασίου, 2014).

Σχετικά με την έννοια της αξιοπιστίας θεωρήθηκε απαραίτητη η καταγραφή της ερευνητικής πορείας. Με τον τρόπο αυτό υπήρχε συγκέντρωση στο στόχο και συστηματικός έλεγχος της ποιότητας των δεδομένων, τα οποία θα έδιναν αξία στην ανάλυση και ερμηνεία των δεδομένων (Bell, 2007). Ωστόσο, για να ενισχυθεί η ποιότητα των δεδομένων δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στη σύνταξη του πρωτοκόλλου της συνέντευξης. Οι ερωτήσεις της συνέντευξης διατυπώθηκαν με τρόπο σαφή και το θέμα τους ήταν σύμφωνο με το αντικείμενο της έρευνας, με συνέπεια οι απαντήσεις να είναι έγκυρες (Creswell, 2014).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Για την ανάλυση των δεδομένων εφαρμόσθηκε η μέθοδος της θεματικής ανάλυσης κατά την οποία τα δεδομένα, τα οποία προκύπτουν από την κατανόηση του περιεχομένου των συνεντεύξεων, οργανώνονται και περιγράφονται λεπτομερώς (Braun & Clarke, 2006). Ακολούθως, εντοπίσθηκαν εκείνα τα σημεία που απαντούν στα ερευνητικά ερωτήματα. Τελευταίο στάδιο της διαδικασίας ήταν η τμηματοποίηση του ποιοτικού υλικού, δηλαδή, ο χωρισμός σε ενότητες βάσει των ερευνητικών ερωτημάτων, καθώς και ο ορισμός θεματικών περιοχών (Ιωσηφίδης, 2008). Συνεπώς, η ανάλυση και ερμηνεία των ποιοτικών δεδομένων αναπτύχθηκε σε πέντε θεματικούς άξονες.

1ος άξονας: Δημογραφικά χαρακτηριστικά συμμετεχόντων. Τα άτομα που συμμετείχαν στην έρευνα διέθεταν εκπαιδευτική εμπειρία ως μόνιμοι εκπαιδευτικοί σε δημόσια σχολεία. Επίσης, διέθεταν υψηλό ακαδημαϊκό επίπεδο και πέρα από αυτό που δίνει το βασικό πτυχίο τους, ως κάτοχοι μεταπτυχιακού ή διδακτορικού τίτλου.

2ος άξονας: Αντιλήψεις εκπαιδευτικών για τα οφέλη της διαδικτυακής επιμόρφωσης. Αρχικά αναζητήθηκαν οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τα οφέλη της διαδικτυακής επιμόρφωσης. Επισημάνθηκε το χαμηλό οικονομικό κόστος που χαρακτηρίζει αυτή τη μορφή επιμόρφωσης και η παροχή ισότιμης συμμετοχής στη γνώση ειδικά για άτομα που βρίσκονται σε νησιωτικές ή γεωγραφικά απομακρυσμένες περιοχές, συντελώντας στην επαγγελματική τους ανάπτυξη. Το τελευταίο στοιχείο καταφαίνεται στη δήλωση: «Εισπράττεις προσωπική καλλιέργεια, γνώσεις στην τεχνολογία, βοήθεια σε θέματα διδακτικής…».

Στη συνέχεια αναπτύχθηκαν οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τα οφέλη της διαδικτυακής μάθησης, τόσο για αυτούς, όσο και για τους εκπαιδευόμενους. Χαρακτηριστικά αναφέρεται ότι η μάθηση μπορεί να επιτευχθεί σε λιγότερο χρόνο, λόγω του δυναμικού περιεχομένου του μαθήματος. Επίσης, ο εκπαιδευόμενος δουλεύει με το δικό του ρυθμό, στο δικό του χώρο και χρόνο. Στο σημείο αυτό επισημαίνεται ότι αποτελεί συντελεστή επιτυχίας η προσωπική ευθύνη του εκπαιδευτικού στο σχεδιασμό ενός τέτοιου μαθήματος.

3ος άξονας: Απόψεις εκπαιδευτικών σχετικά με το βαθμό επίτευξης των στόχων της επιμόρφωσης Β επιπέδου στις ΤΠΕ. Οι απόψεις όλων των συμμετεχόντων συγκλίνουν στην αντίληψη ότι ο συνδυασμός της κατά πρόσωπο και της διαδικτυακής διδασκαλίας στάθηκε ικανός να πετύχει τους στόχους του προγράμματος επιμόρφωσης. Οι εκπαιδευτικοί αναγνώρισαν ότι μέσα από το πρόγραμμα εξοικειώθηκαν με τις νέες τεχνολογίες, γνώρισαν λογισμικά κατάλληλα για τη διδασκαλία του μαθήματος των Μαθηματικών και έμαθαν να σχεδιάζουν ένα ολοκληρωμένο μάθημα με την υποστήριξη των νέων τεχνολογιών. Τέλος, εισηγήθηκαν μια πιο στοχευμένη επιλογή λογισμικών κατά τη διάρκεια της επιμόρφωσης, ώστε το συγκεκριμένο πρόγραμμα να μη γίνεται κουραστικό λόγω της μικρής του διάρκειας.

4ος άξονας: Απόψεις εκπαιδευτικών σχετικά με τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα του μοντέλου μικτής μάθησης στην εκπαιδευτική διαδικασία. Η διαδικτυακή συνιστώσα του μοντέλου μικτής μάθησης επισημάνθηκε ότι προάγει τη συνεργασία μεταξύ εκπαιδευτικών και εκπαιδευομένων, οπότε «…η δυνατότητα μάθησης συνεχίζεται και στο σπίτι και δεν σταματάει στο σχολείο…», όπως χαρακτηριστικά αναφέρεται σε συνέντευξη. Ακόμα, δημιουργεί συνθήκες συμμετοχής σε αυθεντικές δραστηριότητες με τη χρήση τεχνολογίας και οι οποίες έχουν πολλαπλά οφέλη, εφόσον χαρακτηρίζονται από σωστό εκπαιδευτικό σχεδιασμό. Στην περίπτωση αυτή εξοικονομείται διδακτικός χρόνος και οι μαθητές διαχωρίζουν τη χρήση του υπολογιστή από μέσο διασκέδασης σε εκπαιδευτικό μέσο.

Για τη διδασκαλία του μαθήματος των Μαθηματικών η αξιοποίηση της τεχνολογίας και ειδικά η χρήσης λογισμικών, συμβάλλει στη μεταφορά δύσκολων μαθηματικών εννοιών, στην οπτικοποίηση καταστάσεων, στην προσομοίωση. Έτσι, προκαλείται το ενδιαφέρον των περισσότερων μαθητών, προάγεται ο πειραματισμός, η ανακάλυψη, η κριτική σκέψη, η εμπλοκή σε ομαδοσυνεργατικά περιβάλλοντα, εξασφαλίζοντας αυτονομία στη μάθηση. Ενδεικτικά σε συνέντευξη επισημαίνεται ότι «Δίνεται η δυνατότητα πειραματισμού με το αρχείο λογισμικού και το φύλλο εργασίας που θα δίνεται στο μαθητή και έτσι θα καταλαβαίνει καλύτερα τις νέες έννοιες που διδάσκεται..».

Ωστόσο, η διαδικασία οργάνωσης ενός μαθήματος με το μοντέλο αυτό είναι χρονοβόρα και απαιτητική διαδικασία και ως προς το σχεδιασμό, αλλά και ως προς την εκτέλεση. Συνεπώς, παρουσιάζεται η ανάγκη συνεχούς ενημέρωσης και υποστήριξης από ειδικούς (Βαγγελάτος, Κομνηνός & Φώσκολος, 2011). Επιπρόσθετα, επισημάνθηκε η έλλειψη υλικοτεχνικής υποδομής στα σχολεία, όπως είναι ένας χώρος με ηλεκτρονικούς υπολογιστές, tablets ή προτζέκτορα διαθέσιμο για όλα τα γνωστικά αντικείμενα και όχι μόνο για το μάθημα της πληροφορικής. Απαραίτητη κρίνεται και η παρουσία τεχνικού προσωπικού για την αντιμετώπιση τεχνικών προβλημάτων, προκειμένου ο εκπαιδευτικός να ασχολείται με το γνωστικό του αντικείμενο και να μην αφιερώνει χρόνο και σε τέτοιου είδους θέματα.

5ος άξονας: Αξιοποίηση του μοντέλου μικτής μάθησης στη διδασκαλία. Οι επιμορφούμενοι συμφώνησαν ότι αξιοποιώντας το μοντέλο μικτής μάθησης στην εκπαιδευτική διαδικασία σχεδιάζουν δραστηριότητες προσαρμοσμένες στις ανάγκες του κάθε μαθητή (Diaz & Entonado, 2009). Αποτέλεσμα αυτού είναι η προσφορά αποτελεσματικής, αποδοτικής και ευέλικτης μάθησης (Graham & Stein, 2014). Χαρακτηριστικά σε συνέντευξη δηλώνεται ότι: «…το πολυτροπικό περιβάλλον του υπολογιστή κάνει το μάθημα πιο ελκυστικό για τους μαθητές. Απομακρύνει τον εκπαιδευτικό από το δασκαλοκεντρικό ρόλο…».

Επίσης, αναφορά γίνεται και στο υψηλό ηλικιακό επίπεδο των μόνιμων εκπαιδευτικών στη χώρα μας, παράγοντας που δικαιολογεί την έλλειψη γνώσης σε θέματα τεχνολογίας κατά τη διάρκεια των βασικών σπουδών τους. Το γεγονός αυτό μπορεί να αποτελέσει εμπόδιο στο να πειστούν οι εν υπηρεσία εκπαιδευτικοί για τον υποστηρικτικό ρόλο των νέων τεχνολογιών στην παιδαγωγική διαδικασία, σε σύγκριση με νεότερους συναδέλφους, ενώ πιθανώς να παρεμποδίζει τη συμμετοχή τους σε εκπαιδευτικές καινοτομίες, όπως είναι η παιδαγωγική αξιοποίηση του μοντέλου μικτής μάθησης. Η συγκεκριμένη άποψη των επιμορφούμενων συγκλίνει με αυτή των Βαγγελάτου, Κομνηνού & Φώσκολου (2011), όπως παρουσιάσθηκε σε άρθρο τους με θέμα την ένταξη και χρήση των ΤΠΕ στην εκπαιδευτική διαδικασία.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Βασική επιδίωξη της παρούσας έρευνας ήταν η ανάδειξη του βαθμού στον οποίο το πρόγραμμα Επιμόρφωσης Β Επιπέδου στις ΤΠΕ για τους καθηγητές Μαθηματικών με το μικτό μοντέλο μάθησης επηρέασε τον τρόπο διδασκαλίας των επιμορφούμενων καθηγητών, προκειμένου να χρησιμοποιήσουν το νέο μοντέλο στη διδακτική πράξη. Μελετώντας τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας διαφαίνεται η ανάγκη διαρκούς ενημέρωσης και κατάρτισης των εκπαιδευτικών σε θέματα εκπαιδευτικού σχεδιασμού και οργάνωσης μαθήματος (Holmes, et. al., 2005), αλλά και τεχνολογίας, όπως χρήση λογισμικών (Σταθοπούλου & Τσίτσος, 2011). Επίσης, αναδείχθηκε ότι η παιδαγωγική αξιοποίηση του μοντέλου μικτής μάθησης συμβάλλει στην επαγγελματική χειραφέτηση των εκπαιδευτικών, καθώς και στη δημιουργία κλίματος συνεργασίας μεταξύ τους (Λιακοπούλου & Παπαναούμ, 2014). Παράλληλα, με το μοντέλο αυτό καλύπτονται οι ανάγκες επιμόρφωσης και κατάρτισης καθηγητών σε απομακρυσμένες γεωγραφικά περιοχές με ένα διαφορετικό τρόπο προσέγγισης της γνώσης, στον τόπο διαμονής και εργασίας τους. Ταυτόχρονα, παρέχεται ευελιξία ως προς τη διαχείριση χώρου–χρόνου και προσαρμογή στις απαιτήσεις των εκπαιδευτικών.

Τέλος, οι εκπαιδευτικοί ήταν σύμφωνοι ότι με την εφαρμογή των ΤΠΕ στη διδασκαλία των Μαθηματικών η γνώση προσεγγίζεται ποιοτικά, συντελώντας στην οικοδόμηση μαθηματικών εννοιών (Μικρόπουλος, 2010) και παράλληλα ενδυναμώνεται και η αυτοπεποίθηση των μαθητών. Επιπλέον, ενισχύεται η συνεργασία μεταξύ μαθητών και εκπαιδευτικών για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, τόσο στο χώρο του σχολείου, όσο και εκτός αυτού (Hohenwarter, Hohenwarter, Kreis, & Lavicza, 2008), οπότε εμφανίζεται μεγαλύτερο ενδιαφέρον για το μάθημα των Μαθηματικών και σημειώνονται καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα σε γνώσεις και δεξιότητες μέσω αυθεντικών μαθησιακών περιβαλλόντων (Singer & Stoicescu, 2011).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bell, J. (2007). *Πώς να Συντάξετε μια Επιστημονική Εργασία: Οδηγός Ερευνητικής Μεθοδολογίας.* (Ε. Πανάγος, Μεταφρ.) Αθήνα: Μεταίχμιο.

Bonk, C. J., Olson, T.M., Wisher, R. A., & Orvis, K. L. (2002). Learning From Focus Groups: An Examination of Blended Learning. *Journal of Distance Education, Vol.17,* No.3, σσ. 97-118.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). *Using thematic analysis in psychology. Qualitative Research in Psychology, 3*(2), σσ.77-101. ISSN 1478-0887.

Caetano, A., & Marcal, J. (2010). Corporate blended learning in Portugal: Current status and future directions. *European Journal of Open, Distance and E-Learning.*

Creswell, W. J. (2014). *Research Design: Qualitative, Quantitative and Mixed Methods Approaches* (4nd Ed.). Thousand Oaks, California: SAGE Publications, Inc.

Diaz, A. L., & Entonado, F., B. (2009). Are the functions of teachers in e-Learning and face-to-face learning environments really different? *Journal of Educational Technology and Society* (12), σσ. 331-343.

Eurydice. (2011). *Mathematica education in Europe: common challenges and national policies*. (E. Commission, Επιμ.)

Graham, C. R., & Stein, J. (2014). *Essentials for Blended Learning: A Standards - Based Guide.* New York: Routledge.

Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y., & Lavicza, Z. (2008). Teaching and Learning Calculus with Free Dynamic Mathematics Software GeoGebra. *TSG16: Research and Development in the Teaching and Learning of Calculus ICME11. Monterrey, Mexico 2008*.

Holmes, A., Polhemus, L., & Jennings, S. (2005). CATIE: A blended approach to situated professional development, *Journal of Educational Computing Research, 32*(4), σσ. 381-394

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Singer, F. M., & Stoicescu, D. (2011, February 22). Using blended learning as a tool to strengthen teaching competences. *Procedia Computer Science* 3, pp. 1527-1531.

UNESCO. (2004). *Information and Communication Technologies in Secondary Education.* Position Paper. Moscow: UNESCO.

Voogt, J. (2010). Teacher Factors Associated with Innovative Curriculum Goals and Pedagogical Practices: Differences between Extensive and Non-Extensive ICT-Using Science Teachers, *Journal of Computer Assisted Learning*, *26*(6), pp. 453-464.

Βαγγελάτος, Α., Κομνηνός, Θ., & Φώσκολος, Φ. (2011). Εισαγωγή Τ.Π.Ε. στα σχολεία: Ο παράγοντας «Εκπαιδευτικός». Στο Χ.Θ. Παναγιωτακόπουλος (Επιμ.), *2o Πανελλήνιο Συνέδριο: Ένταξη και Χρήση των ΤΠΕ στην Εκπαιδευτική Διαδικασία, ΣΣ.95-103. Πάτρα*: Εργαστήριο Η/Υ και εκπαιδευτικής τεχνολογίας (ΕΗΥΕΤ).

Βρασίδας, Χ., Ζεμπύλας, Μ. & Πέτρου, Α. (2005).Σύγχρονα παιδαγωγικά μοντέλα και ο ρόλος της εκπαιδευτικής τεχνολογίας. Στο Σ. Ρετάλης (Επιμ.), *Οι Προηγμένες Τεχνολογίες Διαδικτύου στην Υπηρεσία της Μάθησης* (σσ.35-58). Αθήνα: Καστανιώτη.

Ευρωπαϊκή Επιτροπή. (2016, Σεπτέμβριος 27). *Σχέδιο Δράσης για την Εκπαίδευση Ενηλίκων: Ποτέ δεν είναι αργά για μάθηση*. Ανάκτηση από EUR-Lex:http://eur-lex.europa.eu/legal-content/EL/TXT/PDF/?uri=CELEX:52007DC0558&rid=5

Ζαχαριάδης, Θ., Πόταρη, Δ., & Στουραΐτης, Κ. (2011, Νοέμβριος). *Επιμορφωτικό υλικό για τους καθηγητές μαθηματικών Γυμνασίου*. Αθήνα. Ανάκτηση Ιανουάριος 27, 2017, από http://digitalschool.minedu.gov.gr/info/newps/Μαθηματικά/Επιμορφωτικό%20Υλικό%20Μαθηματικών.pdf/

Ιωσηφίδης, Ι. (2008). *Ποιοτικές Μέθοδοι Έρευνας στις Κοινωνικές Επιστήμες*. Αθήνα: Κριτική.

Λιακοπούλου, Μ., & Παπαναούμ, Ζ. (επιμ.) (2014). *Υποστηρίζοντας την Επαγγελματική Ανάπτυξη των Εκπαιδευτικών: Εγχειρίδιο Επιμόρφωσης*. Θεσσαλονίκη: Υ.ΠΑΙ.Θ.

Μικρόπουλος, Τ. Α. (2010). *Ο Υπολογιστής ως Γνωστικό Εργαλείο*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (2010). *Μείζον Πρόγραμμα Επιμόρφωσης 2010-2013. Η συμβολή της διερεύνησης επιμορφωτικών αναγκών στην επιμόρφωση των εκπαιδευτικών- Συγκριτική Ερμηνεία Αποτελεσμάτων.* Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Παπαναστασίου, Ε. Κ., & Παπαναστασίου, Κ. (2014). *Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας* (Β'εκδ.). Λευκωσία: Printco.

Σταθοπούλου, Χ. & Τσίτσος, Β. (2011). Χρήση λογισμικών στη δημιουργία κινουμένων σχεδίων για τη διδασκαλία των μαθηματικών: Δυνατότητες και περιορισμοί. Στο Δ. Χασάπη (Επιμ), *Πρακτικά 9ου Διήμερο διαλόγου για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, 15-16 Απριλίου,* σσ. 301-325. Αθήνα: Πανεπιστήμιο Αθηνών-Τ.Ε.Α.Π.Η.

Υπουργείο Παιδείας. (2016, Μάϊος 27). *Εθνικός Διάλογος για την Παιδεία.* Ανάκτηση Οκτώβριος 29, 2016, από Επιτροπή Εθνικού και Κοινωνικού Διαλόγου για την Παιδεία-Πορίσματα: http://dialogos.minedu.gov.gr/wp-content/uploads/2016/04/PORISMATA_DIALOGOU_2016.pdf

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΔΙΑΚΡΙΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Καϊμάκη Σμαράγδα, Τζεκάκη Μαριάννα

Δασκάλα, Μεταπτυχιακό Διδακτικής των Μαθηματικών, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

smkaimaki@yahoo.gr, tzekaki@auth.gr

Στην εργασία αυτή ερευνώνται τα χαρακτηριστικά που εμφανίζουν μαθητές με διακρίσεις σε διαγωνισμούς μαθηματικών κατά τη μετάφραση προβλημάτων «εκτός ρουτίνας» ή «ανοιχτού τύπου» και γίνεται σύνδεση των χαρακτηριστικών αυτών με εκείνα των ικανών λυτών προβλημάτων. Πρόκειται για έρευνα στην οποία συμμετείχαν 15 μαθητές της Στ' τάξης δημοτικού με διάκριση σε κάποιο διαγωνισμό μαθηματικών, οι οποίοι αξιολογήθηκαν στην επίλυση τριών προβλημάτων. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι αν και οι μαθητές καταφέρνουν να λύσουν τέτοιου είδους προβλήματα, στην ουσία λίγοι από αυτούς εμφανίζουν χαρακτηριστικά ικανού λύτη στο στάδιο αυτό.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Συχνά αυτοί που εμφανίζουν υψηλές επιδόσεις στα μαθηματικά θεωρούνται και ικανοί στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Ένας όμως μαθητής με υψηλές σχολικές επιδόσεις και διακρίσεις δεν είναι απαραίτητα ένας «ικανός» μαθητής, αλλά μπορεί απλά να διαθέτει ορισμένα χαρακτηριστικά που τον κάνουν να ξεχωρίζει στο σχολείο Krutetskii (1976). Με βάση αυτό το δεδομένο σχεδιάστηκε η παρούσα έρευνα, ώστε να αναδείξει τα χαρακτηριστικά που παρουσιάζουν παιδιά με διακρίσεις σε διαγωνισμούς μαθηματικών, όταν μεταφράζουν ένα πρόβλημα σε σύγκριση με τα χαρακτηριστικά όσων θεωρούνται ικανοί λύτες.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η επίλυση προβλήματος γίνεται σε στάδια και οι ικανοί λύτες προβλημάτων διαφοροποιούνται σε κάθε στάδιο από τους υπόλοιπους μαθητές. Σύμφωνα με τον Polya (1998) τα στάδια της επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος είναι τέσσερα. Κατά το πρώτο στάδιο γίνεται η κατανόηση του προβλήματος. Ο λύτης αρχικά καλείται να εντοπίσει το ζητούμενο, τα δεδομένα και τη συνθήκη του προβλήματος, η οποία πρέπει να αξιολογηθεί για το αν είναι επαρκής ώστε να οδηγήσει στο ζητούμενο. Στο στάδιο αυτό μπορεί να βοηθήσει η κατασκευή κάποιου σχήματος. Σύμφωνα με τον Schoenfeld (1985) τα στάδια είναι τρία και πρώτο είναι το στάδιο της ανάλυσης, όπου ο λύτης αξιοποιεί τους πόρους του, δηλαδή τα μαθηματικά νοήματα, τους αλγόριθμους και τα γεγονότα τα οποία θα δώσουν νόημα στο πρόβλημα, με σκοπό να κατατάξει το πρόβλημα που καλείται να λύσει σε κάποια κατηγορία. Ο Polya (1998) αναφέρει τη δημιουργία συσχετισμών με άλλα προβλήματα στο δεύτερο στάδιο. Οι Garofalo και Lester (1985) ορίζουν επίσης τέσσερα στάδια επίλυσης. Αρχικά είναι το στάδιο του προσανατολισμού, κατά το οποίο ο λύτης προσεγγίζει και καταλαβαίνει το πρόβλημα, χρησιμοποιώντας στρατηγικές κατανόησης, αναλύοντας τη συνθήκη και τις πληροφορίες του προβλήματος, αναγνωρίζοντας αν πρόκειται για οικεία κατάσταση και αξιολογώντας το επίπεδο δυσκολίας του.

Αν και παιδιά ποικίλλων επιδόσεων μπορούν να προσεγγίσουν διαφόρων ειδών προβλήματα, οι ικανοί λύτες εστιάζουν βαθύτερα στη δομή του προβλήματος (Klavir & Gorodetsky, 2009 όπ. αναφ. Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi, & Christou, 2011). Εντοπίζουν όχι μόνο τα δεδομένα που τους ενδιαφέρουν ξεχωρίζοντας τις περιττές πληροφορίες, αλλά και τις σχέσεις μεταξύ τους (Krutetskii, 1976). Αντίθετα οι «κακοί λύτες» απλά επιλέγουν τον τρόπο λύσης τους με βάση τις λέξεις-κλειδιά (Kramarski, Mevarech & Arami, 2002). Οι πετυχημένοι λύτες μπορούν να συσχετίσουν το πρόβλημα που πρέπει να λύσουν με προβλήματα με παρόμοια δομή και να ανακαλέσουν τρόπους λύσης που χρησιμοποίησαν στο παρελθόν (Krutetskii, 1976). Διατηρούν στη μνήμη τους για καιρό τα προβλήματα τα οποία λύνουν και προσεγγίζουν νέα προβλήματα σύμφωνα με τις ομοιότητες που εντοπίζουν (Krutetskii, 1976).

Η ικανότητα του λύτη να αναπαριστά τις χωρικές σχέσεις μεταξύ αντικειμένων και υποθετικών χωρικών μεταμορφώσεων αντί να δημιουργεί «ζωντανές» και λεπτομερείς απεικονίσεις φαίνεται επίσης να συνδέεται με την επιτυχία στην επίλυση (Hegarty & Kozhevnikov, 1999). Από τον Krutetskii (1969, όπ. αναφ. Presmeg, 1986) γνωρίζουμε πως ο ικανός μαθητής χρησιμοποιεί γενικευμένα σχήματα στα οποία τα εξειδικευμένα δεδομένα παίζουν μικρό ρόλο. Τέτοιου είδους σχήματα μπορεί να είναι για παράδειγμα γραφήματα που δείχνουν απευθείας τη μαθηματική σχέση (Presmeg, 1986). Ωστόσο η έρευνα του Presmeg (1986) έδειξε πως οι μαθητές που θεωρούνταν ξεχωριστοί λόγω των επιδόσεών τους δεν είναι «οπτικοί» τύποι και προτιμούν να λύνουν τα μαθηματικά προβλήματα χωρίς να δημιουργούν κάποια εικόνα (Presmeg, 1986). Δηλαδή δεν είναι απαραίτητη η χρήση σχημάτων από κάποιον για να είναι ικανός λύτης, ωστόσο κάποιος ο οποίος θεωρείται ικανός λύτης χρησιμοποιεί σχήματα πιο αφηρημένα και γενικά που έχουν έναν συμβολικό χαρακτήρα. Αυτό σημαίνει πως οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται λειτουργούν περισσότερο ως μέθοδοι καταγραφής ή ως μέθοδοι σκέψης (Κολέζα, 2009).

Αν και μετά από τις θέσεις αυτές πραγματοποιήθηκαν πολλές έρευνες, ο προσδιορισμός του ικανού λύτη δεν άλλαξε σημαντικά στις βιβλιογραφικές αναφορές. Συνοψίζοντας, λοιπόν, οι ικανοί λύτες, στη φάση της κατανόησης του προβλήματος που αντιμετωπίζουν, εμφανίζουν τα εξής βασικά χαρακτηριστικά: εντοπίζουν δεδομένα και ζητούμενα αποκλείοντας τις περιττές πληροφορίες, κάποιες φορές χρησιμοποιούν γενικά σχέδια ή διαγράμματα για να αποκωδικοποιήσουν και συνδέουν το πρόβλημα με προβλήματα που έχουν συναντήσει στο παρελθόν.

ΕΡΕΥΝΑ

Η έρευνα που παρουσιάζεται αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης μελέτης που είχε στόχο να διερευνήσει τα χαρακτηριστικά των παιδιών με διακρίσεις στη διάρκεια επίλυσης προβλημάτων «εκτός ρουτίνας» σε σύγκριση με τα χαρακτηριστικά των ικανών λυτών. Το τμήμα που παρουσιάζεται αφορά τη διαχείριση της πρώτης φάσης επίλυσης προβλήματος, δηλαδή την κατανόησή του.

Ερευνητικά Ερωτήματα

Οι μαθητές με διακρίσεις:

- Χρησιμοποιούν σχέδια ή διαγράμματα στη μετάφραση του προβλήματος;
- Εντοπίζουν περιττές πληροφορίες στην εκφώνηση;
- Δημιουργούν συνδέσεις με άλλα προβλήματα;

Ικανοί Λύτες

Με βάση τα χαρακτηριστικά που έχουν αναδειχθεί από τις έρευνες ορίζεται η έννοια του ικανού λύτη. Ικανός λύτης θεωρείται αυτός που μπορεί να λύνει με επιτυχία προβλήματα «εκτός ρουτίνας» και ανοιχτού τύπου (Leikin & Kloss, 2011). Ακολουθεί τα τέσσερα στάδια επίλυσης προβλήματος, όπως έχουν επισημανθεί από Polya (1998) και σε κάθε στάδιο εμφανίζει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Κατά το πρώτο στάδιο διαβάζει το πρόβλημα και το μεταφράζει σε δεδομένα και ζητούμενα, διαχωρίζει τις περιττές πληροφορίες και δεν χάνεται σε ασαφείς δομές (Borovik & Gardiner, 2007). Συνθέτει απευθείας τις μαθηματικές σχέσεις μεταξύ των δεδομένων (Krutetski, 1976). Αν το κρίνει απαραίτητο, δημιουργεί κάποιο σχέδιο ή διάγραμμα (Polya, 1998). Συσχετίζει το πρόβλημα με άλλα προβλήματα που έχει λύσει στο παρελθόν (Silver, 1979). Κατηγοριοποιεί τα προβλήματα κι έτσι οδηγείται στην επιλογή των κατάλληλων πράξεων (Krutetski, 1976).

Μέθοδος

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε τον Μάρτιο και τον Απρίλιο του 2017 και ήταν ποιοτική. Πραγματοποιήθηκαν κλινικές συνεντεύξεις (Zazkis& Hazzan, 1998) με τη μέθοδο της φωναχτής σκέψης (Charters, 2003). Ο λόγος που επιλέχθηκε η μέθοδος αυτή είναι ότι αποτελεί το καταλληλότερο μέσο για αναγνώριση και περιγραφή μιας διαδικασίας (Zazkis& Hazzan, 1998). Αφού δομήθηκε κατάλληλα το εργαλείο, σε συνεννόηση με γονείς διακριθέντων παιδιών, κλείστηκαν ραντεβού για τις συνεντεύξεις. Οι συνεντεύξεις έγιναν στα σπίτια των συμμετεχόντων, οι οποίοι εκεί έλαβαν το εργαλείο και κλήθηκαν να απαντήσουν λέγοντας δυνατά τη σκέψη τους.

Δείγμα

Το δείγμα της έρευνας (Πίνακας 1) αποτελούνταν από 15 μαθητές της Στ’ τάξης δημοτικού που τον προηγούμενο χρόνο κατάφεραν τουλάχιστον μια διάκριση σε διαγωνισμό μαθηματικών. Οι διακρίσεις πραγματοποιήθηκαν στον διαγωνισμό «Μικρός Ευκλείδης» της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας και τον διαγωνισμό «Καγκουρό». Από το σύνολο των παιδιών 1 αγόρι και 2 κορίτσια είχαν από 2 διακρίσεις, 2^{ο} βραβείο στην ΕΜΕ και διάκριση στον διαγωνισμό «Καγκουρό».

Μαθητές	**1^{ο} βρ. ΕΜΕ**	**2ο βρ. ΕΜΕ**	**3ο βρ. ΕΜΕ**	**Έπαινος ΕΜΕ**	**Καγκουρό**
Αγόρια	1	3	1	6	
Κορίτσια		3			3

Πίνακας 1: Διακρίσεις στους διαγωνισμούς

Από το σύνολο των παιδιών, τα 13 δήλωσαν ότι ασχολούνται με τα μαθηματικά και εκτός σχολείου, ενώ τα 8 ότι παρακολουθούν συστηματικά μαθήματα προετοιμασίας για τον διαγωνισμό της ΕΜΕ.

Εργαλείο

Για την υλοποίηση της μελέτης δημιουργήθηκαν τρία προβλήματα και ένα φύλλο παρατήρησης. Για το πρώτο πρόβλημα αξιοποιήθηκε ένα έργο από τη μελέτη της Κοντογιάννη (2014) για την ανάδειξη παιδιών με ικανότητα στην επίλυση προβλημάτων. Αφορούσε τον υπολογισμό των τιμών κάποιων αντικειμένων αφού πρώτα αναδειχθούν οι μαθηματικές σχέσεις που περιγράφονται στο πρόβλημα. Στο αρχικά προτεινόμενο πρόβλημα προστέθηκε μια περιττή πληροφορία και κατά συνέπεια το πρόβλημα αυτό παρουσιάζει ελλιπή δομή. Τα συνήθη προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην τάξη αποφεύγουν οποιαδήποτε τέτοια παρουσίαση και με την έννοια αυτή δεν είναι ένα πρόβλημα ρουτίνας. Ως προς τη λύση του μπορεί να θεωρηθεί κλειστό, καθώς υπάρχουν πολλοί τρόποι λύσης αλλά είναι συγκεκριμένοι και οδηγούν σε ένα και μοναδικό σωστό αποτέλεσμα. Στόχος του συγκεκριμένου έργου είναι να διερευνήσει κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να διακρίνουν την περιττή πληροφορία από την εκφώνηση και να εντοπίσουν μαθηματικές σχέσεις. Προσφέρεται επίσης και για την εμφάνιση ευελιξίας στην επιλογή τρόπων λύσης.

Το δεύτερο πρόβλημα αφορά την εύρεση αριθμού στην αριθμομηχανή με βάση κάποιους περιορισμούς στα πλήκτρα που θα χρησιμοποιηθούν. Το πρόβλημα αυτό επίσης χρησιμοποιήθηκε στην ίδια έρευνα με το προηγούμενο. Ανήκει στην κατηγορία των προβλημάτων πρόκλησης για τον λύτη, δηλαδή σύμφωνα με Leikin (2007, όπ. αναφ. Κοντογιάννη, 2014) με δυσκολίες που αποτελούν κίνητρο και μπορεί ο λύτης να τις ξεπεράσει οπότε με την έννοια αυτή δεν αποτελεί ένα συνηθισμένο πρόβλημα (Κοντογιάννη, 2014). Το πρόβλημα είναι καλώς δομημένο, καθώς στην εκφώνηση προσφέρονται όλα τα απαιτούμενα δεδομένα, αλλά θεωρείται ανοιχτό ως προς τη λύση, καθώς υπάρχουν πολλοί σωστοί τρόποι λύσης. Στόχος της χρήσης του είναι να διερευνηθεί αν οι μαθητές μπορούν να ανακαλύψουν αριθμητικές σχέσεις και να προτείνουν πρωτότυπες, οικονομικές λύσεις τεκμηριώνοντας τις επιλογές τους. Απαραίτητο είναι να έχουν κατανοήσει σε βάθος την αξία θέσης ψηφίου, τις τέσσερις πράξεις και τα κριτήρια διαιρετότητας.

Τέλος το τρίτο πρόβλημα ανήκει επίσης στην κατηγορία των προβλημάτων πρόκλησης όπου σε ένα καμβά με εννέα σημεία ο μαθητής καλείται να δημιουργήσει σχήματα 2 τετραγωνικών εκατοστών. Το πρόβλημα δεν ανήκει στα συνηθισμένα προβλήματα. Σχεδιάστηκε αρχικά για έρευνα σχετικά με την ανάδειξη δημιουργικών μαθητών και συγκεκριμένα για το χαρακτηριστικό της πρωτοτυπίας των λύσεων σε ένα πρόβλημα (Haylock, 1997), έχει σαφή δομή, χωρίς ελλιπή δεδομένα, αλλά θεωρείται ανοιχτό, ως προς τη λύση του, καθώς υπάρχουν πολλοί σωστοί τρόποι αντιμετώπισής του. Στόχος είναι η ανάδειξη της χωρικής ικανότητας του των μαθητών, της ευελιξίας, της δυνατότητας να προτείνουν ποιοτικές λύσεις. Προϋπόθεση για τη λύση του είναι η γνώση της έννοιας του εμβαδού.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

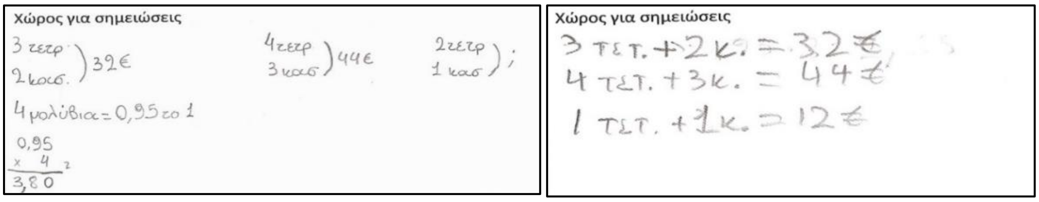
Παίρνοντας το φύλλο εργασίας με τα προβλήματα τα παιδιά ξεκίνησαν όλα με το πρώτο πρόβλημα, έλυσαν τα προβλήματα με τη σειρά που δόθηκαν και λειτούργησαν με τον τρόπο που καταγράφεται στον Πίνακα 2.

Αντιδράσεις Μαθητών	**1ο Πρ.**	**2ο Πρ.**	**3ο Πρ.**
Διαβάζει προσεκτικά το πρόβλημα	14	12	10
Εντοπίζει δεδομένα και ζητούμενα	14	14	14
Διαχωρίζει τις περιττές πληροφορίες	5	-	-
Καταγράφει τις πληροφορίες	7	1	3
Δημιουργεί σχέδιο	2	0	10
Δημιουργεί διάγραμμα	0	0	0
Το πρόβλημα είναι οικείο	6	2	1
Ανακαλεί τρόπο λύσης από αντίστοιχο πρόβλημα	3	0	1

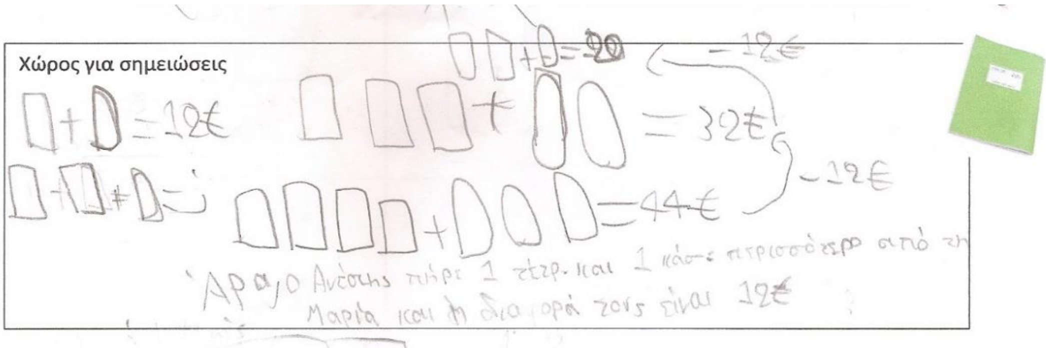
Πίνακας 2: Χαρακτηριστικά Μαθητών

Οι αντιδράσεις των μαθητών ποικίλλουν. Όλοι οι μαθητές έλυσαν και τα τρία προβλήματα, ωστόσο ο τρόπος που τα προσέγγισαν ήταν διαφορετικός. Οι περισσότεροι διάβασαν το πρόβλημα προκειμένου να εντοπίσουν δεδομένα και ζητούμενα, ωστόσο σε ορισμένες περιπτώσεις αυτό δεν έγινε με επιτυχία, αφού αργότερα κάποιοι μαθητές από αυτούς βρήκαν λανθασμένο τρόπο λύσης ή παραβίασαν τη συνθήκη του προβλήματος. Η περιττή πληροφορία από το πρώτο πρόβλημα έγινε αντιληπτή μόνο από 5 παιδιά. Λίγοι σημείωσαν τις απαραίτητες πληροφορίες και ελάχιστοι δημιούργησαν κάποιο σχέδιο για το πρώτο πρόβλημα, η πλειοψηφία όμως για το τρίτο. Η δημιουργία συνδέσεων επίσης παρατηρήθηκε σε πολύ λίγες περιπτώσεις.

Το στάδιο της μετάφρασης δεν ήταν το ίδιο σημαντικό για όλα τα προβλήματα. Ξεκινώντας με το πρώτο πρόβλημα τα παιδιά στο σύνολό τους επένδυσαν αρκετό χρόνο στο στάδιο αυτό, σε αντίθεση με το δεύτερο και τρίτο πρόβλημα. Ξεκίνησαν διαβάζοντας πολύ προσεκτικά και πολλές φορές το πρόβλημα, ώστε να το κατανοήσουν και να εντοπίσουν τις σχέσεις μεταξύ των δεδομένων. Φάνηκε να απουσιάζει κάποια στρατηγική κατανόησης. Οι περισσότεροι μαθητές διάβαζαν ξανά και ξανά την εκφώνηση, μένοντας απόλυτα συγκεντρωμένοι. Στην πραγματικότητα επέμεναν να παρατηρούν συγκεκριμένα σημεία, στα οποία είχαν εντοπίσει τις απαραίτητες πληροφορίες. Πολλά παιδιά προχώρησαν στο επόμενο στάδιο νομίζοντας ότι είχαν καταλάβει το πρόβλημα, όμως φάνηκε πως δεν το είχαν αποκωδικοποιήσει με επιτυχία και έτσι προχωρούσαν σε λανθασμένο σχεδιασμό. Οι περισσότεροι απλά υπογράμμισαν στην εκφώνηση δεδομένα και ζητούμενα και λίγοι κατέγραψαν τα δεδομένα με τη μορφή που φαίνεται στην εικόνα 1.



Εικόνα 1: Καταγραφή δεδομένων



Εικόνα 2: Σχέδιο μαθητή

Μόνο 2 μαθητές δημιούργησαν σχέδιο προκειμένου να αποκωδικοποιήσουν το πρόβλημα, γιατί, όπως δήλωσαν, αυτό τους βοηθάει. Ο ένας μάλιστα είπε: «Ας δουν οι δάσκαλοι αυτή την έρευνα, για να καταλάβουν επιτέλους τι μας βοηθάει και να μας το δείχνουν στην τάξη».

Αντίθετα στο δεύτερο πρόβλημα το πρώτο στάδιο δεν ήταν τόσο σημαντικό για τα παιδιά. Επένδυσαν λίγο χρόνο στην ανάγνωσή του και την ανάδειξη της συνθήκης, καθώς η εκφώνηση ήταν σύντομη και ξεκάθαρη. Ωστόσο στη συνέχεια φάνηκε πως υπήρχαν κάποιες παρανοήσεις. Οι μαθητές αισθάνθηκαν ότι δεν χρειαζόταν να καταγράψουν τις πληροφορίες, υπήρχαν μόνο ελάχιστοι που τις υπογράμμισαν. Δεν επιστράτευσαν κάποια στρατηγική κατανόησης, αλλά πέρασαν άμεσα στο δεύτερο στάδιο της κατάστρωσης σχεδίου. Το τρίτο πρόβλημα προσέλκυσε τα παιδιά τα οποία ξεκίνησαν προσπαθώντας να το μεταφράσουν, με πρώτο βήμα την προσεκτική ανάγνωσή του. Γενικά το στάδιο αυτό δεν διήρκησε πολλή ώρα, καθώς το πρόβλημα αποτελούνταν από μια σύντομη εκφώνηση και η συνθήκη αποτυπωνόταν ξεκάθαρα. Η έννοια του εμβαδού, που απαιτούνταν, ήταν οικεία στους μαθητές, ωστόσο αρκετοί προβληματίστηκαν με τη λέξη σχήμα, καθώς σκέφτηκαν μόνο τα γεωμετρικά σχήματα. Λίγοι απλά υπογράμμισαν τις πληροφορίες που ξεχώρισαν και αρκετοί προχώρησαν στον σχεδιασμό ενός δοκιμαστικού σχήματος. Κάποιοι άλλοι μετέφρασαν τη συνθήκη με βάση τους μαθηματικούς τύπους, δηλαδή «Εμβαδόν σημαίνει βάση επί ύψος, άρα το γινόμενο αυτό πρέπει να είναι 2». Γενικότερα το πιο δημοφιλές που παρατηρήθηκε στα τρία προβλήματα και αφορούσε στην κατανόηση προβλήματος ήταν η υπογράμμιση πληροφοριών στην εκφώνηση, χωρίς αυτό να αποδεικνύεται καθοριστικό και χρήσιμο για την κατανόηση.

Τα παιδιά δεν ήταν συνηθισμένα στην επίλυση προβλήματος με περιττές πληροφορίες στην εκφώνηση. Έτσι, δεν κατάλαβαν όλα τα παιδιά ότι υπήρχε κάτι περιττό στην εκφώνηση. Περιττή πληροφορία υπήρχε μόνο στο πρώτο πρόβλημα. Όλα τα παιδιά υπολόγισαν αυτό που ήταν «άχρηστο» για τη λύση του προβλήματος. Κάποιοι δεν κατάλαβαν ότι είναι περιττό. Αυτά τα παιδιά πρότειναν στη συνέχεια και λανθασμένους τρόπους λύσης. Ωστόσο το πιο εντυπωσιακό ήταν ότι κάποια παιδιά που αντιλήφθηκαν ότι υπήρχε μια άχρηστη πληροφορία, αφιέρωσαν χρόνο στον υπολογισμό της. Μάλιστα υπήρχαν δηλώσεις όπως «Αυτό δεν χρειάζεται, αλλά θα το υπολογίσω.» ή «Ας το έχω κι αυτό εδώ να υπάρχει.». Σε σχέση με τα ζητούμενα του προβλήματος, ο υπολογισμός του περιττού ήταν κάτι απλό, γρήγορο κι εύκολο, οπότε έχοντας τα παιδιά στο μυαλό τους ότι αποκλείεται να μη χρησιμοποιηθεί κάπου, ήταν το πρώτο που υπολόγισαν και το άφησαν στην άκρη. Στα επόμενα προβλήματα δεν αξιολόγησαν τις πληροφορίες ως προς τη χρησιμότητά τους, ούτε έδειξαν κάποια «καχυποψία» απέναντι στις εκφωνήσεις.

Η δημιουργία συνδέσεων δεν φάνηκε να αποτελεί ανάγκη ή στρατηγική των μαθητών προκειμένου να κατανοήσουν ένα πρόβλημα, καθώς κανείς δεν αναφέρθηκε από μόνος του σε κάποιο οικείο πρόβλημα, παρά μόνο όταν τέθηκε η ερώτηση για το αν το πρόβλημα τους θυμίζει κάτι. Ωστόσο υπήρξαν κάποιοι που αναγνώρισαν ομοιότητες με προβλήματα που είχαν λύσει στο παρελθόν, χωρίς αυτό να τους βοηθήσει στην επίλυση. Υπήρχαν παιδιά που δήλωσαν ότι το πρώτο πρόβλημα είναι οικείο και ανακάλεσαν τον τρόπο λύσης που είχαν χρησιμοποιήσει σε παρόμοιο πρόβλημα. Να σημειωθεί ότι τα 8 παιδιά του δείγματος που συμμετέχουν σε μαθήματα προετοιμασίας για τον διαγωνισμό της Ε.Μ.Ε., είχαν λύσει στο μάθημα το πρόβλημα αυτό, αλλά χωρίς περιττή πληροφορία, άρα ήταν επιβεβαιωμένα οικείο για αυτούς. Ωστόσο δεν αναγνώρισαν όλοι ότι πρόκειται για το ίδιο πρόβλημα. Για την ακρίβεια μόνο 2 παιδιά ανέφεραν ότι έλυσαν το πρόβλημα αυτό στα μαθήματα προετοιμασίας, οι 4 είπαν απλά ότι τους θύμισε κάτι και οι υπόλοιποι το αντιμετώπισαν σαν ένα εντελώς νέο πρόβλημα. Εντυπωσιακή ήταν η αντιμετώπιση μιας μαθήτριας, η οποία εντόπισε πως πρόκειται για το ίδιο πρόβλημα, αλλά είπε πως ποτέ δεν χρησιμοποιεί την ίδια στρατηγική, αλλά κάθε φορά προτιμά να επινοεί κάτι καινούργιο χωρίς να μπορεί να εξηγήσει αν αυτό της προσφέρει τη σιγουριά ότι δεν θα ξεχάσει κάτι από τη διαδικασία ή αν της φαίνεται πιο δημιουργικό. Το δεύτερο πρόβλημα φάνηκε οικείο μόνο σε έναν μαθητή, στον οποίο θύμισε προβλήματα με χαλασμένη αριθμομηχανή που είχε λύσει παλαιότερα. Ωστόσο δεν ανακάλεσε τον τρόπο λύσης που είχε χρησιμοποιήσει στα προβλήματα αυτά. Το τρίτο πρόβλημα ήταν οικείο μόνο σε ένα παιδί το οποίο και υποστήριξε ότι θα το λύσει όπως είχε λύσει το πρόβλημα που είχε συναντήσει παλαιότερα. Στην ουσία όμως φάνηκε να σχεδιάζει εκείνη την ώρα νέο τρόπο λύσης και όχι να ανακαλεί κάποιον.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ- ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Γενικότερα, αναφορικά με τη χρήση σχεδίων ή διαγραμμάτων στην πρώτη φάση επίλυση προβλήματος, τα στοιχεία που παραθέσαμε υποδεικνύουν ότι οι μαθητές προσπαθούν να κατανοήσουν τα προβλήματα στο μυαλό τους, εντοπίζοντας και εστιάζοντας στις μαθηματικές σχέσεις και τη συνθήκη, χωρίς να καταγράφουν κάτι. Δεν φάνηκε να είναι εξοικειωμένοι με τη διαδικασία της εξεικόνισης ενός προβλήματος, αλλά να προτιμούν μια σύντομη καταγραφή πληροφοριών. Τα ελάχιστα σχέδια που χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθητές ήταν σχήματα αφηρημένα και ποιοτικά, όπως αυτά των ικανών λυτών (Van Garderen, 2006). Συνεπώς οι μαθητές με διακρίσεις δεν επιλέγουν να χρησιμοποιούν σχέδια ή διαγράμματα για να κατανοήσουν ένα πρόβλημα.

Κάτι το οποίο επίσης ήταν ξένο σε αυτά τα παιδιά, ήταν η ύπαρξη περιττής πληροφορίας στην εκφώνηση του προβλήματος, γι’ αυτό και δεν κατάφεραν άμεσα να την ξεχωρίσουν. Συνεπώς το χαρακτηριστικό που παρατήρησαν ο Krutetskii (1976) και ο Silver (1979) εντοπίζεται σε μικρό ποσοστό μαθητών. Ακόμα κι αυτοί που την εντόπισαν, τελικά δεν την παρέλειψαν τελείως, αφού είναι τόσο πειθαρχημένοι να χρησιμοποιούν όλα τα στοιχεία που δίνονται σε ένα πρόβλημα που κάτι τέτοιο θα ξεπερνούσε αυτά που έχουν μάθει ως τώρα. Εξαιτίας αυτής της αρχής, πολλοί παγιδεύτηκαν σε αυτό το περιττό δεδομένο και οδηγήθηκαν σε λάθος τρόπο λύσης. Οπότε οι μαθητές με διακρίσεις διαχωρίζουν τις περιττές πληροφορίες στην εκφώνηση ενός προβλήματος, αλλά τελικά δεν τις εξαιρούν από τη λύση.

Τέλος, η δημιουργία συνδέσεων με άλλα προβλήματα που εντόπισαν ο Krutetskii (1976) και ο Silver (1979), επίσης δεν εντοπίστηκε. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο ότι τα προβλήματα δεν ήταν συνηθισμένα και άρα είναι πολύ πιθανό να μην είχαν συναντήσει αντίστοιχα στο παρελθόν. Τα στοιχεία υποδεικνύουν ότι και οι μαθητές με διακρίσεις αντιμετωπίζουν κάθε πρόβλημα ως νέο και δεν συνηθίζουν να κάνουν συνδέσεις.

Με μια αυστηρή ματιά τα περισσότερα παιδιά με διακρίσεις δεν λειτουργούν ως ικανοί λύτες, όταν προσπαθούν να αποκωδικοποιήσουν ένα πρόβλημα. Ωστόσο κάτι τέτοιο μπορεί απλά να οφείλεται στον τρόπο που έχουν διδαχθεί να χρησιμοποιούν για την αποκωδικοποίηση και τις νόρμες που επικρατούν στην τάξη των μαθηματικών. Τα ευρήματα αυτά εγείρουν πολλά ερωτήματα για τον τρόπο που έχουν διδαχθεί οι μαθητές αυτοί να διαχειρίζονται μαθηματικά προβλήματα και θα έπρεπε να μας προβληματίσουν σχετικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών, ειδικά αν λάβουμε υπόψη ότι στην έρευνα έλαβαν μέρος μαθητές με αξιώσεις.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Borovik, A, & Gardiner, T. (2007). *Mathematical abilities and mathematical skills*. The University of Manchester. Retrieved from http://eprints.ma.man.ac.uk/839/01/covered/MIMS_ep2007_109.pdf

Charters, E. (2003). The use of think-aloud methods in qualitative research an introduction to think-aloud methods. *Brock Education Journal*, *12*(2).

Garofalo, J., & Lester Jr, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for research in mathematics education*, 163-176.

Haylock, D. (1997). Recognizing mathematical creativity in schoolchildren. *ZDM*, *29*(3), 68-74.

Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual–spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of educational psychology*, *91*(4), 684.

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2011, January) ON THE COMPARISON BETWEEN MATHEMATICALLY GIFTED AND NON-GIFTED STUDENTS'CREATIVE ABILITY.

Κολέζα, Ε. (2009). Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών. *Αθήνα, εκδ Τόπος*.

Κοντογιάννη, Κ. Ν., & Kontoyianni, K. N. (2014). Unraveling mathematical giftedness: characteristics, cognitive processes and identification.

Kramarski, B., Mevarech, Z. R., & Arami, M. (2002). The effects of metacognitive instruction on solving mathematical authentic tasks. *Educational studies in mathematics*, *49*(2), 225-250.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. (J. Kilpatrick & I. Wirszup, Eds.) (J. Teller, Trans.). Chicago: University of Chicago. (Original work published 1968)

Leikin, R., & Kloss, Y. (2011). Mathematical creativity of 8th and 10th grade students. CERME7 Proceedings, 1084-1093.

A., C. (2012). Being good at maths. *Journal of research*, *1*(3), 246-277.

Presmeg, N. C. (1986). Visualisation and mathematical giftedness. Educational studies in mathematics, 17(3), 297-311.

A., C. (2012). Being good at maths. *Journal of research*, *1*(3), 246-277.

Silver, E. A. (1979). Student perceptions of relatedness among mathematical verbal problems. *Journal for research in mathematics education*, 195-210.

Van Garderen, D. (2006). Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities. *Journal of learning disabilities*, *39*(6), 496-506.

Zazkis, R., & Hazzan, O. (1998). Interviewing in mathematics education research: Choosing the questions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(4), 429-439.

Η ΠΡΟΚΑΤΑΛΗΨΗ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΩΣ ΔΙΑΙΣΘΗΤΙΚΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ: ΜΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ

Κούρτη Στυλιανή Κυριακή[1], Τριανταφυλλάκος Ανδρέας[1], Χρήστου Κωνσταντίνος Π.[2]

[1]Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, [2]Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

stellakour@gmail.com, triandreas@windowslive.com, kchristou@uowm.gr

Στην παρούσα εργασία μελετάται η επίδραση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού (δηλαδή της τάσης να χρησιμοποιείται γνώση των φυσικών αριθμών στους ρητούς) σε διαφορετικά πεδία κατανόησης των ρητών αριθμών αλλά και στη βεβαιότητα με την οποία εμφανίζονται οι απαντήσεις τους. Τα αποτελέσματα της έρευνας σε μαθητές Α΄ Λυκείου έδειξαν πως η προκατάληψη του φυσικού αριθμού ευθύνεται για συστηματικά χαμηλότερες επιδόσεις στα έργα που συγκρούονταν με τις διαισθητικές τους πεποιθήσεις για τον αριθμό σε σχέση με τα έργα που ήταν συμβατά με αυτές. Επιπλέον, υψηλότερα επίπεδα βεβαιότητας εμφάνιζαν οι απαντήσεις που είναι συμβατές με τις διαισθητικές τους πεποιθήσεις.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Έρευνα στη γνωστική-αναπτυξιακή ψυχολογία και στη μαθηματική εκπαίδευση επανειλημμένως έχει δείξει ότι μία από τις κύριες πηγές δυσκολίας στην κατανόηση των ρητών αριθμών είναι η ακατάλληλη εφαρμογή ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών στους ρητούς (Vamvakoussi, Van Dooren & Verschaffel, 2012). Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές συχνά εφαρμόζουν στους ρητούς αριθμούς ιδιότητες από μια αρχική εννοιολόγηση για τον αριθμό που έχει κατασκευαστεί ήδη από τα πρώτα χρόνια της ζωής τους μέσα από την εμπειρία της απαρίθμησης με την αδιάσπαστη μονάδα. Αυτή η τάση αποκαλείται προκατάληψη των φυσικών αριθμών (Ni & Zhou, 2005) και ευθύνεται για λάθη και παρανοήσεις με τους ρητούς αριθμούς, αφού η προηγούμενη γνώση και εμπειρία σχετικά με τους φυσικούς αριθμούς δεν μπορεί να υποστηρίξει πάντα τη μάθηση των ρητών (βλ. Ni & Zhou, 2005˙ Vamvakoussi, 2015).

Για παράδειγμα, όσον αφορά τη διάταξη των ρητών αριθμών, συχνά οι μαθητές θεωρούν ότι οι *μακρύτεροι* δεκαδικοί είναι μεγαλύτεροι, το οποίο μπορεί να είναι σωστό σε κάποιες περιπτώσεις (π.χ. 2,15>2,1) αλλά λάθος σε άλλες περιπτώσεις (π.χ., 2,12>2,2) (Resnick κ.ά., 1989). Αντίστοιχα, στη σύγκριση κλασμάτων, οι μαθητές εμφανίζουν την τάση να θεωρούν ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμητής και ο παρονομαστής ενός κλάσματος, τόσο μεγαλύτερο είναι το κλάσμα (Moss, 2005· Resnick κ.ά., 1989· Vamvakoussi κ.ά., 2012). Μια άλλη έκφανση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού αφορά την κατανόηση της δομής των ρητών και πιο συγκεκριμένα την τάση των μαθητών να θεωρούν ότι οι ρητοί αριθμοί είναι διακριτοί, κι έτσι κάθε αριθμός έχει έναν επόμενο κι έναν προηγούμενο αριθμό, ενώ δεν υπάρχει κανένας αριθμός ανάμεσα σε δύο ψευδοδιαδοχικούς ρητούς αριθμούς, όπως π.χ., ανάμεσα στο 0,5 και το 0,6 (Vamvakoussi κ.ά., 2012).

Όσον αφορά τις αριθμητικές πράξεις, επηρεασμένοι από την προκατάληψη του φυσικού αριθμού, οι μαθητές εμφανίζουν την πεποίθηση ότι ο πολλαπλασιασμός παράγει πάντα έναν αριθμό μεγαλύτερο (ενώ η διαίρεση παράγει πάντα έναν μικρότερο αριθμό) από τους αρχικούς όρους των πράξεων, καθώς επίσης ότι η πρόσθεση πάντα μεγαλώνει ενώ η αφαίρεση πάντα μικραίνει τους αρχικούς όρους (Christou, 2015· Fischbein κ.ά., 1985· Vamvakoussi κ.ά., 2012).

Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού, ως ένας συλλογισμός που οδηγεί σε λανθασμένες απαντήσεις στους ρητούς, επειδή βασίζεται στην ασύμβατη γνώση των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών, αποτελεί ένα είδος διαισθητικού συλλογισμού, όπως αυτός περιγράφεται και στο έργο του Fischbein (βλ. Fischbein κ.ά., 1985). Σύμφωνα με τον Fischbein, που ήταν από τους πρωτοπόρους που περιέγραψαν τις διαισθητικές πεποιθήσεις των μαθητών για μαθηματικές έννοιες, οι διαισθήσεις βασίζονται σε περίπλοκες δομές γνώσης που σχηματίζονται εντός κι εκτός της σχολικής αίθουσας και εμφανίζονται ως αυτονόητα αληθείς, αυταπόδεικτες και αναμφισβήτητες κι έτσι συνοδεύονται από υψηλή βεβαιότητα. Οι διαισθήσεις αυτές είναι συχνά τόσο ισχυρές που δεν είναι εύκολο να εξαλειφθούν από τη συστηματική διδασκαλία, κι έτσι κάποιες φορές συνυπάρχουν με τις σωστές μαθηματικές ιδέες, σε όλη τη διάρκεια της ζωής ενός ατόμου (βλ. Vamvakoussi, 2015). Ο διαισθητικός χαρακτήρας της προκατάληψης του φυσικού αριθμού αναδεικνύεται όχι μόνο στις λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών σε συγκεκριμένες ερωτήσεις, αλλά και στον χρόνο απόκρισης που διαφοροποιείται όταν ένα έργο είναι συμβατό με τις διαισθητικές πεποιθήσεις σε σχέση με όταν είναι μη-συμβατό (Vamvakoussi, 2015). Μελέτες, για παράδειγμα, που μέτρησαν τον χρόνο απόκρισης πέραν από την ορθότητα των απαντήσεων, έδειξαν ότι περισσότερος χρόνος απαιτείται για ορθές απαντήσεις στα έργα εκείνα που είναι μη-συμβατά απ' ότι στα έργα που είναι συμβατά με τις διαισθητικές πεποιθήσεις για τους αριθμούς. Αυτό το εύρημα έχει ερμηνευτεί από την πρόσθετη δυσκολία που ενέχει η αναστολή των αυτόματων διαισθητικών απαντήσεων που θα έδιναν ένα λανθασμένο αποτέλεσμα (Vamvakoussi κ.ά., 2012˙ Van Hoof, Lijnen, Verschaffel, & Van Dooren, 2013).

Στη βάση των παραπάνω θα αναμένονταν ότι βαθιά ριζωμένες πεποιθήσεις για τον αριθμό, όπως η προκατάληψη του φυσικού αριθμού, θα επιδρούν όχι μόνο στις απαντήσεις που θα έδιναν οι μαθητές σε συγκεκριμένα έργα, αλλά και στη βεβαιότητα με την οποία θα έδιναν τη συγκεκριμένη απάντηση. Σε μια πρόσφατη μελέτη τους οι Durkin και Rittle-Johnson (2015) ζήτησαν από τους μαθητές να δηλώσουν τη βεβαιότητα των απαντήσεων που έδωσαν σε ένα ερωτηματολόγιο με ερωτήσεις που αφορούν την κατανόηση των ρητών αριθμών. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα λάθη των μαθητών που οφείλονται σε παρανοήσεις και βαθιά ριζωμένες διαισθητικές πεποιθήσεις συνοδεύονταν από υψηλή βεβαιότητα και αυτά τα λάθη ήταν τα πιο δύσκολα να διορθωθούν μετά από μία διδακτική παρέμβαση που εστίαζε στα λάθη που οφείλονται σε παρανοήσεις όπως η προκατάληψη του φυσικού αριθμού.

Η παρούσα μελέτη

Στην παρούσα μελέτη στόχος είναι να εξεταστεί η επίδραση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού στα διαφορετικά πεδία της γνώσης των ρητών αριθμών σε συνδυασμό με τη βεβαιότητα/αβεβαιότητα με την οποία συνοδεύονται οι απαντήσεις των μαθητών σε αυτές τις ερωτήσεις.

Η επίδραση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού εξετάστηκε με ερωτήσεις συμβατές ή μη-συμβατές με τις διαισθητικές πεποιθήσεις για τους αριθμούς, που βασίζονται σε προηγούμενες μελέτες (βλ. Vamvakousi κ.ά., 2012). Συμβατά έργα αποτελούν τα ερωτήματα εκείνα που είναι συνεπή με τις διαισθητικές πεποιθήσεις των μαθητών για τους αριθμούς και που, όπως είπαμε παραπάνω, οφείλονται στην αρχική γνώση για τον αριθμό όπως αυτή έχει αρχικά οργανωθεί γύρω από την έννοια του φυσικού αριθμού. Αντίστοιχα, μη-συμβατά έργα είναι τα έργα που διαψεύδουν αυτές τις πεποιθήσεις για τον αριθμό. Οι διαισθητικές πεποιθήσεις των μαθητών οδηγούν σε σωστές απαντήσεις στα συμβατά (με αυτές) έργα. Αντίθετα, στα μη-συμβατά έργα οι διαισθητικές πεποιθήσεις οδηγούν σε λανθασμένες απαντήσεις. Το δεύτερο ερώτημα θα εξεταστεί με χρήση ερωτήσεων για τη βεβαιότητα στις απαντήσεις που δίνονται από τους μαθητές. Σύμφωνα με τα παραπάνω θα υποθέταμε ότι οι μαθητές θα εμφάνιζαν:

α) υψηλότερες επιδόσεις στα έργα που είναι συμβατά σε σχέση με τα έργα που είναι μη-συμβατά με τις διαισθητικές πεποιθήσεις τους.

β) υψηλότερα επίπεδα βεβαιότητας στις απαντήσεις που είναι συνεπείς με τις διαισθήσεις τους. Πιο συγκεκριμένα, θα αναμένονταν υψηλότερα επίπεδα βεβαιότητας στις σωστές απαντήσεις στα συμβατά έργα σε σχέση με τις σωστές απαντήσεις στα μη-συμβατά έργα καθώς και υψηλότερα επίπεδα βεβαιότητας στις λανθασμένες απαντήσεις στα μη-συμβατά έργα σε σχέση με τις λανθασμένες απαντήσεις στα συμβατά έργα.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες

Στην μελέτη συμμετείχαν 72 μαθητές/τριες· 30 δήλωσαν αγόρια, 40 δήλωσαν κορίτσια και 2 δεν δήλωσαν φύλο. Οι μαθητές φοιτούσαν στη Α’ Λυκείου και ανήκαν στην ηλικιακή κλίμακα των 15-16 ετών.

Υλικά

Για τη διεξαγωγή της έρευνας διαμορφώθηκε ένα ερωτηματολόγιο, με πρότυπο εκείνο της έρευνας των Vamvakoussi κ.ά. (2012) που δόθηκε σε Βέλγους φοιτητές, ηλικίας 18 έως 28 ετών. Κάθε μαθητής του δείγματος απάντησε σε επτά ομάδες έργων που αφορούσαν διαφορετικές πτυχές της κατανόησης των ρητών αριθμών [1: σύγκριση κλασμάτων Ι (με κοινό αριθμητή ή παρονομαστή), 2: σύγκριση κλασμάτων ΙΙ (με το ένα από τα δύο κλάσματα να έχει πολύ μεγάλους όρους), 3: σύγκριση δεκαδικών αριθμών, 4: αριθμητικές πράξεις πρόσθεσης/αφαίρεσης, 5: αριθμητικές πράξεις πολλαπλασιασμού/διαίρεσης, 6: πυκνότητα δεκαδικών αριθμών, 7: πυκνότητα κλασμάτων]. Κάθε ομάδα περιείχε οκτώ έργα, τέσσερα συμβατά και τέσσερα μη-συμβατά με τις διαισθητικές πεποιθήσεις των μαθητών, όπως αναλύθηκαν παραπάνω. Τα συμβατά και μη-συμβατά έργα δόθηκαν είτε μέσω σωστών, είτε μέσω λανθασμένων δηλώσεων, τις οποίες οι μαθητές έπρεπε να αξιολογήσουν ως σωστές ή λάθος, π.χ. 3/7<4/7 (Σωστό/Συμβατό)· *το 12-8z είναι πάντα μεγαλύτερο από το 12* (Λάθος/Συμβατό)· 3,479<3,6 (Σωστό/Μη-Συμβατό)· *ανάμεσα στο 31/54 και το 38/54 υπάρχουν λιγότεροι από 4.000 αριθμοί* (Λάθος/Μη-Συμβατό). Οι ερωτήσεις δόθηκαν με τυχαία σειρά.

Μία επιπλέον προσθήκη στο ερωτηματολόγιο της παρούσας μελέτης σε σχέση με την προηγούμενη στην οποία βασίστηκε ήταν εκείνη της μέτρησης των επιπέδων βεβαιότητας σε κάθε απάντηση, με τη χρήση της κλίμακας Likert. Έτσι, κάθε ερώτηση/έργο παρουσίαζε στους μαθητές μια δήλωση αξιολόγησης, (π.χ. «9/6<5/6, Σωστό ή Λάθος;»), και μία δήλωση βεβαιότητας στην απάντηση: «Πόσο σίγουροι είστε για την απάντησή σας; Καθόλου □ , Μέτρια □, Πολύ □».

Διαδικασία

Η συμπλήρωση των ερωτηματολογίων πραγματοποιήθηκε στη σχολική τάξη, αφού δοθήκαν οδηγίες συμπλήρωσης στους μαθητές. Δεν δόθηκε συγκεκριμένο χρονικό όριο στους μαθητές για τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου κι έτσι μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν ολόκληρη τη διδακτική ώρα που ήταν επαρκής χρόνος.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών βαθμολογήθηκαν με 0 ενώ οι σωστές με 1. Η αξιοπιστία του συνόλου του ερωτηματολογίου ήταν πολύ υψηλή (Cronbach's Alpha= 0,975). Για τον έλεγχο της πρώτης υπόθεσης, που αφορά στις επιδόσεις των μαθητών ως προς το είδος των έργων (συμβατά/μη-συμβατά) τα δεδομένα αναλύθηκαν τόσο στο σύνολο των έργων, όσο και ανά ομάδα έργων, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο GEE (Generalized Estimating Equations) η οποία είναι κατάλληλη για το συγκεκριμένο είδος δεδομένων (επαναλαμβανόμενες μετρήσεις για κάθε άτομο). Η ανάλυση της επίδοσης στο σύνολο των έργων έδειξε ότι δεν υπάρχουν στατιστικώς σημαντικές διαφορές που να οφείλονται στο φύλο (Wald $\chi^2(1)=1,388$, $p=0,239$), αλλά υπάρχει στατιστικώς σημαντική διαφορά που οφείλεται στο είδος του έργου. Πιο συγκεκριμένα, η ανάλυση έδειξε στατιστικώς σημαντικά χαμηλότερες επιδόσεις στα μη-συμβατά έργα σε σχέση με τα έργα που ήταν συμβατά με τις διαισθητικές πεποιθήσεις των μαθητών [Wald $\chi^2(1)=61,841$, $p<0,001$, $Exp(B)=0,302<1$ (όπου B ο παράγοντας μη-συμβατών έργων)], που ερμηνεύεται ως επίδραση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού στις απαντήσεις των μαθητών.

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται οι επιδόσεις των μαθητών ανά ομάδα έργου για τα συμβατά και μη-συμβατά έργα. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1, οι μαθητές έχουν υψηλές επιδόσεις στη σύγκριση κλασμάτων και δεκαδικών (ομάδες 1, 2, 3), αλλά στις άλλες κατηγορίες έργων απαντούν σωστά στα έργα που είναι συμβατά με τις διαισθητικές τους πεποιθήσεις για τον αριθμό αλλά κάνουν λάθη στα έργα που ανατρέπουν αυτές τις πεποιθήσεις. Οι επιδόσεις των μαθητών στα έργα που αφορούν πράξεις με ρητούς και κατανόηση της δομής του συνόλου των ρητών (ομάδες 4, 5, 6 και 7) είναι στατιστικώς σημαντικά χαμηλότερες στα έργα που είναι μη-συμβατά με τις πεποιθήσεις τους σε σχέση με αυτά που είναι συμβατά με τις διαισθητικές τους πεποιθήσεις.

Ομάδα	Σωστές απαντήσεις				Congruency Wald
	Συμβατά		Μη-Συμβατά		
	%	N	%	N	
1: Σύγκριση κλασμάτων Ι	95,14	274	92,24	265	1,729 ^{ns}
2: Σύγκριση κλασμάτων ΙΙ	88,19	253	84,03	242	2,531^{ns}
3: Σύγκριση δεκαδικών	93,40	269	93,75	270	0,399 ^{ns}
4: Πρόσθεση/Αφαίρεση	95,14	274	77,43	223	21,163***
5: Πολ/σμός / Διαίρεση	96,53	278	67,71	195	33,165***
6: Πυκνότητα δεκαδικών	95,49	275	78,82	227	20,897***
7: Πυκνότητα κλασμάτων	94,79	272	74,31	214	22,941***
$^{***}p < 0{,}001$					

Πίνακας 1: Ποσοστά σωστών απαντήσεων στα συμβατά και μη-συμβατά έργα, για κάθε ομάδα ερωτήσεων.

Για τον έλεγχο της δεύτερης υπόθεσης που αφορά στα επίπεδα βεβαιότητας των απαντήσεων των μαθητών δημιουργήθηκε ο Πίνακας 2 που παρουσιάζει το ποσοστό βεβαιότητας των σωστών και των λανθασμένων απαντήσεων των μαθητών στα συμβατά και στα μη-συμβατά έργα.

	Σωστές απαντήσεις		Λανθασμένες απαντήσεις	
	Συμβατά	Μη-συμβατά	Συμβατά	Μη-συμβατά
Χαμηλή βεβαιότητα	1,4%	2,3%	9,9%	13,5%
Μέτρια βεβαιότητα	16,4%	17%	55,4%	42%
Υψηλή βεβαιότητα	82,2%	80,7%	34,7%	44,5%

Πίνακας 2: Ποσοστά βεβαιότητας των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων ανά είδος έργου.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 2, οι μαθητές εμφάνισαν συνολικά υψηλότερα επίπεδα βεβαιότητας στις σωστές τους απαντήσεις παρά στις λανθασμένες. Τα επίπεδα βεβαιότητας των μαθητών στις σωστές απαντήσεις στα συμβατά έργα ήταν ελαφρώς υψηλότερα από τις σωστές απαντήσεις στα μη-συμβατά έργα, χωρίς όμως αυτή η διαφορά να είναι στατιστικώς σημαντική ($\chi^2(2)=3{,}856$, $p=0{,}145$). Όσον αφορά τα επίπεδα βεβαιότητας των μαθητών στις λάθος απαντήσεις στα μη-συμβατά έργα, αυτά εμφανίστηκαν στατιστικώς σημαντικά υψηλότερα σε σχέση με τα αντίστοιχα των λανθασμένων απαντήσεων στα συμβατά έργα ($\chi^2(2)=6{,}558$, $p=0{,}038$).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην παρούσα εργασία μελετήσαμε την επίδραση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού στην κατανόηση των ρητών αριθμών και στον τρόπο που αυτή επιδρά στη βεβαιότητα με την οποία απαντούν οι μαθητές στις ερωτήσεις. Σχεδιάστηκαν έργα συμβατά και μη-συμβατά με τις διαισθητικές πεποιθήσεις των μαθητών για τους ρητούς αριθμούς, οι οποίες βασίζονται σε μια αρχική εννοιολόγηση των μαθητών για τον αριθμό που έχει κατασκευαστεί ήδη από την προσχολική ηλικία και έχει τα χαρακτηριστικά της μαθηματικής έννοιας του φυσικού αριθμού (Ni & Zhou, 2005· Vamvakousi, 2015). Με βάση προηγούμενες μελέτες στο πεδίο θα αναμένονταν ότι η προκατάληψη του φυσικού αριθμού, δηλαδή η τάση των μαθητών να χρησιμοποιούν την αρχική τους γνώση για τους φυσικούς αριθμούς στην κατανόηση των ρητών, θα επιδρούσε στο να κάνουν λάθη στα έργα όπου συγκρούονται με τις διαισθητικές τους πεποιθήσεις για τους αριθμούς που βασίζονται στη γνώση των φυσικών αριθμών (Christou, 2015· Vamvakousi, 2015). Επίσης, αναμένονταν υψηλά επίπεδα βεβαιότητας στις απαντήσεις εκείνες που είναι συμβατές με τις διαισθητικές πεποιθήσεις των μαθητών, δηλαδή επηρεάζονται από την προκατάληψη του φυσικού αριθμού.

Όσον αφορά στις μαθηματικές επιδόσεις των μαθητών, τα αποτελέσματα υποστήριξαν σε μεγάλο βαθμό τη βασική μας υπόθεση, ότι η προκατάληψη του φυσικού αριθμού θα επιδρά στην κατανόηση των ρητών αριθμών ακόμη και στην Α’ Λυκείου. Πιο συγκεκριμένα, στις ομάδες έργων που αφορούν τις πράξεις και την κατανόηση της πυκνής δομής των ρητών αριθμών, οι μαθητές είχαν στατιστικώς σημαντικά χαμηλότερες επιδόσεις στα έργα που ήταν μη-συμβατά με τις διαισθητικές τους πεποιθήσεις σε σχέση με τις επιδόσεις τους στα έργα που ήταν συμβατά με τις διαισθήσεις τους. Με άλλα λόγια, η προκατάληψη του φυσικού αριθμού επηρέαζε τους μαθητές να θεωρούν ότι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνουν τους αρχικούς όρους της πράξης ενώ η αφαίρεση και η διαίρεση τους μικραίνουν, όπως επίσης ότι οι ρητοί αριθμοί είναι διακριτοί κι έτσι κάθε αριθμός έχει έναν επόμενο κι έναν προηγούμενο αριθμό, ενώ δεν υπάρχει κανένας αριθμός ανάμεσα σε δύο ψευτοδιαδοχικούς ρητούς αριθμούς (π.χ., ανάμεσα στο 0,5 και το 0,6). Τα ευρήματα αυτά έρχονται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα άλλων ερευνών του πεδίου (βλ. Christou, 2015· Vamvakoussi κ.ά., 2012). Οι επιδόσεις αυτές δείχνουν μια βαθιά εννοιολογική προκατάληψη που φαίνεται να είναι βασισμένη στις διαισθήσεις που βασίζονται στην καθημερινή εμπειρία με τους φυσικούς αριθμούς (Vamvakousi κ.ά., 2012). Από την άλλη μεριά, τα έργα των υπόλοιπων ομάδων, όπως η σύγκριση κλασμάτων και δεκαδικών, δεν έδειξαν, όπως αναμένονταν, στατιστικώς σημαντική διαφορά ανάμεσα στα συμβατά και στα μη-συμβατά με τις διαισθητικές πεποιθήσεις των μαθητών. Τα έργα αυτά είναι λιγότερο εκτεθειμένα σε διαισθητικές πεποιθήσεις, τουλάχιστον σε αυτή την ηλικία, ίσως επειδή μπορούν να αντιμετωπιστούν με διαδικαστική γνώση και χρήση πολλών διαφορετικών στρατηγικών υπολογισμού της αξίας τους. Παρόλα αυτά περισσότερη έρευνα είναι απαραίτητη για την ερμηνεία αυτού του φαινομένου.

Τα ευρήματα από τις ερωτήσεις που εξέτασαν το βαθμό βεβαιότητας των μαθητών στις απαντήσεις που έδωσαν έδειξαν ότι η προκατάληψη του φυσικού αριθμού επιδρά τόσο στους μαθητές που δίνουν λανθασμένες απαντήσεις στα ειδικά σχεδιασμένα έργα, όσο και σε αυτούς που απαντούν σωστά. Συγκεκριμένα, η υπόθεση της μελέτης που αφορά τη βεβαιότητα που δείχνουν οι μαθητές στις απαντήσεις τους, υποστηρίχθηκε, καθώς οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών στα μη-συμβατά έργα εμφάνισαν στατιστικώς σημαντικά υψηλότερη βεβαιότητα σε σχέση με τις λανθασμένες απαντήσεις στα συμβατά με τις πεποιθήσεις των μαθητών έργα. Στην ίδια κατεύθυνση κινείται το εύρημα ότι οι σωστές απαντήσεις των μαθητών στα μη-συμβατά με τις πεποιθήσεις τους έργα εμφάνισαν χαμηλότερη βεβαιότητα σε σχέση με τις σωστές απαντήσεις στα συμβατά, αν και οι διαφορές αυτές δεν ήταν στατιστικά σημαντικές. Τα αποτελέσματα αυτά είναι σύμφωνα με άλλες έρευνες που εξέτασαν παραπλήσια ζητήματα, όπου παρατηρήθηκε ότι η διαισθητική γνώση των μαθητών, που τους εμφανίζεται αυταπόδειχτη και αναμφισβήτητη, επιδρά στο να αισθάνονται βέβαιοι για τις απαντήσεις που δίνουν χρησιμοποιώντας τη γνώση τους αυτή, είτε όταν απαντούν σωστά είτε λανθασμένα (Durkin & Rittle-Johnson, 2015· Merenluoto & Lehtinen, 2004).

Όταν η προηγούμενη γνώση είναι σχετικώς ολοκληρωμένη, ακριβής και προσβάσιμη, τότε είναι ευεργετική για τη μάθηση (Cordova, κ.ά., 2014). Ωστόσο η προηγούμενη γνώση του μαθητή μπορεί και να αποτελέσει εμπόδιο, όταν έρχεται σε αντίθεση με τη νέα πληροφορία (Vosniadou, Vamvakousi & Skopeliti, 2008). Η μάθηση του ρητού φαίνεται να αποτελεί παράδειγμα μάθησης όπου η προϋπάρχουσα γνώση του φυσικού αριθμού μπορεί και να σταθεί εμπόδιο, καθώς οι ιδιότητες των φυσικών είναι συχνά ασύμβατες με τις ιδιότητες των ρητών· έτσι η γνώση των φυσικών δεν μπορεί να υποστηρίξει πάντα την μάθηση των ρητών (Vosniadou κ.ά., 2008). Για το λόγο αυτό η κατανόηση της έννοιας του ρητού αριθμού είναι δύσκολη, επίπονη και συχνά εμφανίζονται λάθη και παρανοήσεις. Ένα ζήτημα που εγείρεται λοιπόν, τόσο από παιδαγωγική όσο και από ερευνητική σκοπιά, είναι το ότι δεν αρκεί να εντοπίσουμε φαινόμενα όπως η προκατάληψη του φυσικού αριθμού, αλλά είναι αναγκαίο να βρούμε τρόπους ώστε να βοηθήσουμε τους μαθητές να τα διαχειριστούν.

Σε αυτή την κατεύθυνση, η μελέτη της βεβαιότητας των μαθητών είναι εξίσου σημαντική με εκείνη της επίδοσής τους, καθώς οι μαθητές που έχουν υψηλή βεβαιότητα σχετικά με την ακρίβεια της προηγούμενης γνώσης τους, είναι πιο αφοσιωμένοι σε αυτή τη γνώση, και ως εκ τούτου πιο ανθεκτικοί στην αντίσταση να αποδεχθούν νέες ιδέες που είναι αντιφατικές με τις αρχικές τους (Cordova κ.ά., 2014). Αυτή η αντίσταση μπορεί να οδηγήσει σε μεγάλες δυσκολίες κατάκτησης της γνώσης των ρητών αριθμών, επειδή η γνώση των ρητών συγκρούεται με αυτή των φυσικών. Στη βάση αυτή, το μέτριο επίπεδο βεβαιότητας που εμφάνισαν οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών του δείγματος αποτελεί ένα αισιόδοξο στοιχείο επειδή τα λάθη με χαμηλά επίπεδα βεβαιότητας είναι πιθανόν πιο εύκολο να διορθωθούν σε σχέση με τα λάθη που εμφανίζουν υψηλά επίπεδα βεβαιότητας (Durkin & Rittle-Johnson, 2015). Επιπλέον, οι ίδιες οι ερωτήσεις για τη βεβαιότητα στις απαντήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν και ως εκπαιδευτικό εργαλείο στα χέρια του εκπαιδευτικού γιατί μπορούν να ενισχύσουν την μεταγνωστική επίγνωση των μαθητών, κάτι που έχει προταθεί ως τρόπος διδασκαλίας που ενδείκνυται σε περιπτώσεις μάθησης με εννοιολογική αλλαγή, επειδή οι μαθητές δεν είναι συνειδητά ενήμεροι ότι διαθέτουν διαισθητικές πεποιθήσεις και προκαταλήψεις όπως η προκατάληψη του φυσικού αριθμού (Vosniadou κ.ά., 2008).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Christou, K. P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM*, *47*(5), 747-758.

Cordova, J. R., Sinatra, G. M., Jones, S. H., Taasoobshirazi, G., & Lombardi, D. (2014). Confidence in prior knowledge, self-efficacy, interest and prior knowledge: Influences on conceptual change. *Contemporary Educational Psychology, 39*(2), 164-174.

Durkin, K., & Rittle-Johnson, B. (2015). Diagnosing misconceptions: Revealing changing decimal fraction knowledge. *Learning and Instruction 37*, pp. 21-29.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving problems in multiplication and division. *Journal of Research in Mathematics Education*, *16*, 3-17.

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2004). Number concept and conceptual change: towards a systemic model of the processes of change. *Learning and Instruction 14*, 519-534.

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: new approaches to teaching the rational-number system. In S. Donovan & J. D. Bransford (Eds.), *How students learn: History, mathematics, and science in the classroom* (pp. 309–349). Washington, DC: National Academy Press.

Ni, Y., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27-52.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: the case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*, 8–27.

Vamvakoussi, X. (2015). The development of rational number knowledge: Old topic, new insights. *Learning and Instruction, 37*, 50-55.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 344-355.

Van Hoof, J., Lijnen, T., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2013). Are secondary school students still hampered by the natural number bias? A reaction time study on fraction comparison tasks. *Research in Mathematics Education*, *15*(2), 154-164.

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, E. (2008). The framework theory approach to conceptual change. In S. Vosniadou (Ed.), *Handbook of research on conceptual change* (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

ΓΝΩΣΗ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ ΚΑΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ ΤΩΝ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΩΝ ΔΑΣΚΑΛΩΝ ΣΤΟΥΣ ΡΗΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

Λεμονίδης Χαράλαμπος, Ουζουνίδου Κατερίνα

ΠΤΔΕ Φλώρινας Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

xlemon@uowm.gr, katerinauz94@gmail.com

Οι ρητοί αριθμοί αποτελούν ένα από τα πιο σημαντικά αντικείμενα στη διδασκαλία των Μαθηματικών στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση στα οποία μαθητές και εκπαιδευτικοί συναντούν δυσκολίες. Σκοπός της έρευνας αυτής είναι η μελέτη της σχέσης Γνώσης Περιεχομένου (ΓΠ) και της Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου (ΠΓΠ) υποψηφίων δασκάλων στους ρητούς αριθμούς. Το δείγμα της έρευνας αποτελούν 45 φοιτητές Παιδαγωγικού Τμήματος οι οποίοι εξετάστηκαν με ημι-δομημένες συνεντεύξεις. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η σχέση και συνάφεια της ΓΠ και της ΠΓΠ των υποψηφίων δασκάλων εξαρτάται από τις ερωτήσεις που τέθηκαν.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι ρητοί αριθμοί αποτελούν ένα από τα σημαντικά περιεχόμενα των μαθηματικών στο τέλος της πρωτοβάθμιας και την αρχή της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, επειδή υποστηρίζουν την ανάπτυξη της αναλογικής σκέψης και των περιεχομένων της Άλγεβρας και των Πιθανοτήτων (Lamon, 1999).

Έρευνες σε παγκόσμιο επίπεδο έχουν δείξει ό,τι, η κατανόηση και εφαρμογή στη διδασκαλία των ρητών αριθμών είναι δύσκολη για πολλούς εκπαιδευτικούς (π.χ. Lemonidis, Tsakiridou, & Meliopoulou, 2017; Ma, 1999) αλλά και για τους μαθητές η μάθησή τους είναι περιορισμένη και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν πολλαπλές (π.χ. Lemonidis, Kaiafa, 2014; Stafylidou & Vosniadou, 2004).

Για τη διδασκαλία αυτού του απαιτητικού αντικειμένου, οι υποψήφιοι δάσκαλοι πρέπει να έχουν επαρκή ΓΠ και ΠΓΠ. Ωστόσο, προηγούμενες έρευνες έδειξαν ότι οι ΓΠ και ΠΓΠ των μελλοντικών δασκάλων είναι ανεπαρκείς (π.χ. Depaepe et al., 2015; Tirosh, 2000; Turnuklu & Yesildere, 2007). Στην εργασία αυτή κύριος στόχος είναι να διερευνηθούν και συγκριθούν μεταξύ τους οι ΓΠ και ΠΓΠ των μελλοντικών δασκάλων στους ρητούς αριθμούς. Από όσο ξέρουμε, δεν έχει πραγματοποιηθεί κάποια τέτοια έρευνα Ελλάδα. Επίσης στην έρευνα αυτή θα μελετηθεί διεξοδικά η συνάφεια της ΠΓ με τη ΠΓΠ σε σχέση με τις ερωτήσεις που τέθηκαν ενώ στις διεθνείς έρευνες βγαίνει το γενικό συμπέρασμα ότι υπάρχει συνάφεια μεταξύ ΓΠ και ΠΓΠ. Στη συνέχεια, θα παρουσιαστούν οι σημαντικότερες προηγούμενες έρευνες σε μελλοντικούς εκπαιδευτικούς σχετικά με την ΓΠ και ΠΓΠ στους ρητούς αριθμούς και μετά θα εξηγηθεί η μεθοδολογία της έρευνας. Ακολούθως, θα παρουσιαστούν τα βασικά αποτελέσματα και θα συζητηθούν στα συμπεράσματα.

Γνώση περιεχομένου και παιδαγωγική γνώση περιεχομένου των εκπαιδευτικών στους ρητούς αριθμούς

Εδώ και αρκετά χρόνια υπάρχει ενδιαφέρον της έρευνας σχετικά με τη γνώση των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία. Η αρχική εργασία του Shulman (1986, 1987) παρέχει ένα εννοιολογικό πλαίσιο καθώς και μια αναλυτική διάκριση μεταξύ των διαφορετικών ειδών γνώσεων που απαιτούνται για μια αποτελεσματική διδασκαλία. Ο Shulman (1987) όρισε επτά διαφορετικές κατηγορίες γνώσης των εκπαιδευτικών, τρεις από τις οποίες είναι η γνώση περιεχομένου, η γνώση του προγράμματος σπουδών και η παιδαγωγική γνώση περιεχομένου, οι οποίες περιλαμβάνουν τις διαστάσεις του περιεχομένου της γνώσης των εκπαιδευτικών. Κατά τη διάρκεια των τελευταίων δύο δεκαετιών, η έρευνα σχετικά με τη γνώση των εκπαιδευτικών επικεντρώθηκε σε δύο επικαλυπτόμενες και αλληλεξαρτώμενες περιοχές: παιδαγωγική γνώση περιεχομένου (ΠΓΠ) και γνώση περιεχομένου (ΓΠ) (e.g. Ball et al., 2008; Depaepe et al., 2015; Kleickmann et al. 2013; Senk et al. 2012). Για μια επισκόπηση των ερευνών που σχετίζονται με τη ΓΠ και την ΠΓΠ των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά βλέπε Depaepe et al. (2015).

Στην έρευνα αυτή εξετάζονται οι γνώσεις των μελλοντικών δασκάλων σε δύο βασικές περιοχές, της *γνώσης περιεχομένου* (ΓΠ) και της *παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου* (ΠΓΠ).

Οι Depaepe et all., (2015) διεξήγαγαν μια συγκριτική έρευνα μεταξύ της ΓΠ και ΠΓΠ 158 Βέλγων υποψήφιων εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας και 34 δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής έδειξαν ότι οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί εμφάνισαν κενά στην ΓΠ και ΠΓΠ. Η πιθανότητα να λύσουν σωστά ένα αντικείμενο ΓΠ ήταν μεγαλύτερη από το να λύσουν ένα αντικείμενο ΠΓΠ. Δηλαδή το να ήταν ικανός κάποιος να απαντήσει σε μία ΓΠ ερώτηση δεν του έδινε απαραίτητα την δυνατότητα να λύσει μία ΠΓΠ. Η ΓΠ και η ΠΓΠ των εκπαιδευτικών σχετίζονται θετικά. Τέλος η ΓΠ και, κυρίως, η ΠΓΠ είναι σημαντικοί και καθοριστικοί παράγοντες της ποιότητας της διδασκαλίας και, κατά συνέπεια, της προόδου των μαθητών (σελ. 84).

Στην έρευνα αυτή θα εξετάσουμε πιο διεξοδικά τη σχέση και τη συνάφεια της ΓΠ με την ΠΓΠ για κάθε ερώτηση.

Τα ερωτήματα της έρευνας

Κύριος στόχος, της παρούσας έρευνας, είναι η διερεύνηση της σχέσης της ΓΠ και ΠΓΠ υποψηφίων εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στους ρητούς αριθμούς. Συγκεκριμένα, τα ερευνητικά ερωτήματα που τίθενται είναι τα εξής:

- Ποια η Γνώση Περιεχομένου και η Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου των υποψηφίων δασκάλων στους ρητούς αριθμούς;
- Η σχέση μεταξύ της Γνώσης Περιεχομένου και Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου επηρεάζεται από το είδος των ερωτήσεων;

Σύμφωνα με προηγούμενες έρευνες (Depaepe et all., 2015; Tirosh, 2000; Turnuklu & Yelsidere, 2007) είναι αναμενόμενο οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί να έχουν κενά και περιορισμένη ΓΠ και ΠΓΠ στους ρητούς αριθμούς (ερώτημα 1 και 2). Τέλος, μελετώντας τα αποτελέσματα παρόμοιων ερευνών υποθέτουμε ότι υπάρχει μια θετική συσχέτιση μεταξύ των ΓΠ και ΠΓΠ των δασκάλων.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν 45 υποψήφιοι εκπαιδευτικοί 12 (26,7%) ήταν άντρες και 33 (73,3%) γυναίκες της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης οι οποίοι βρίσκονταν στο 4^{ο} έτος των σπουδών τους στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Φλώρινας του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας. Οι φοιτητές είχαν ολοκληρώσει το μεγαλύτερο φάσμα της εκπαίδευσης τους ως υποψήφιοι δάσκαλοι. Το δείγμα της έρευνας επιλέχθηκε με τη μέθοδο της απλής τυχαίας δειγματοληψίας.

Διαδικασία

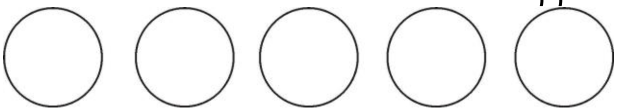
Για τη συλλογή των δεδομένων δημιουργήθηκε ένα πρωτόκολλο για τη μέτρηση της συμπεριφοράς των υποψηφίων δασκάλων στη ΓΠ και ΠΓΠ των ρητών αριθμών. Οι φοιτητές εξετάστηκαν με ατομικές ημι-δομημένες συνεντεύξεις σε 5 έργα που αφορούσαν τη ΓΠ και την ΠΓΠ στους ρητούς αριθμούς. Στους συμμετέχοντες δόθηκε ο κατάλληλος χρόνος για να σκεφτούν και να απαντήσουν στις ερωτήσεις. Οι συνεντεύξεις μαγνητοφωνήθηκαν και στη συνέχεια απομαγνητοφωνήθηκαν για να αναλύθηκαν σε συνδυασμό με τις απαραίτητες σημειώσεις που συγκεντρώθηκαν κατά την διάρκεια των συνεντεύξεων.

Έργα

Προτάθηκαν 5 έργα όπου σε κάθε έργο το πρώτο ερώτημα αναφέρονταν στη ΓΠ του φοιτητή και το δεύτερο ερώτημα στην ΠΓΠ η οποία εστίαζε στην ίδια μαθηματική έννοια ή πράξη. Τα πέντε προτεινόμενα έργα είναι τα παρακάτω:

1α. Βρείτε ένα κλάσμα μεταξύ του 7/8 και του 1.
1β. Στην παραπάνω ερώτηση ένας μαθητής απάντησε : «Δεν υπάρχει αριθμός μεταξύ του 7/8 και του 1 γιατί μετά το 7/8 ακολουθεί το 8/8 που είναι ίσο με 1.»
Αξιολογήστε την απάντηση του μαθητή και αιτιολογήστε την.

2α. Σκιάστε το ¼ των κύκλων που βρίσκονται παρακάτω.



2β. Παρακάτω βρίσκονται ζωγραφισμένες οι απαντήσεις των μαθητών στο πρόβλημα : «Σημείωσε το 1/3 των σοκολατών»

Απάντηση 1

Απάντηση 2

Απάντηση 3

Αξιολογήστε κάθε απάντηση των μαθητών και αιτιολογήστε τις.

3α.Ταξινομήστε τους παρακάτω αριθμούς από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο: 0,33 0,8 0,242 0,4 0,71
3β.Σε έναν μαθητή δόθηκε η παρακάτω άσκηση:
Ταξινομήστε τους παρακάτω αριθμούς από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο: 0,53 0,7 0,475 0,12 0,3
Ο μαθητής έλυσε με τον παρακάτω τρόπο: 0,3 0,7 0,12 0,53 0,475
Αξιολογήστε αν η λύση του μαθητή είναι σωστή και αιτιολογήστε την.

4α. Η Κορίνα έχει ένα κορδόνι με μήκος 3/4 του μέτρου. Θέλει να το χωρίσει σε κομμάτια που το κάθε ένα να έχει μήκος 1/8 του μέτρου. Σε πόσα κομμάτια θα το χωρίσει;
4β. Ένας μαθητής έλυσε το πρόβλημα με τον παρακάτω τρόπο:

3/4 : 1/8= 4/3 x 1/8 =
Αξιολογήστε αν η πράξη του μαθητή είναι σωστή και αιτιολογήστε την.

5α. Ο Κώστας αγόρασε ¾ του κιλού μοσχαρίσιο κρέας. Χρησιμοποίησε το 1/3 του κρέατος για να φτιάξει γιουβαρλάκια. Πόσα κιλά μοσχαρίσιο κρέας χρησιμοποίησε για τα γιουβαρλάκια;
5β. Ένας μαθητής έλυσε το πρόβλημα με τον παρακάτω τρόπο: 3/4-1/3 =
Αξιολογήστε αν η πράξη του μαθητή είναι σωστή και αιτιολογήστε την.
Η πρώτη ερώτηση ΓΠ πυκνότητας (1α) του πρώτου έργου είναι από την έρευνα των Post, Harel, Behr, & Lesh (1988). Τα έργα 2, 3 και 5 με τις ερωτήσεις ΓΠ και τις τρεις αντίστοιχες ΠΓΠ είναι από την έρευνα των Depaepe et al. (2015).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Παρακάτω στον πίνακα 1 παρουσιάζονται τα ποσοστά επιτυχίας των πέντε έργων στη ΓΠ και στην ΠΓΠ. Σε κάθε έργο η πρώτη στήλη δείχνει το ποσοστό επιτυχίας της ΓΠ (π.χ. 1α) και η δεύτερη της ΠΓΠ (π.χ. 1β).

1α ΓΠ	**1β** ΠΓΠ	**2α** ΓΠ	**2β** ΠΓΠ	**3α** ΓΠ	**3β** ΠΓΠ	**4α** ΓΠ	**4β** ΠΓΠ	**5α** ΓΠ	**5β** ΠΓΠ
21 46,7%	34 75,6%	31 68,9%	20 44,4%	32 71,1%	40 88,9%	35 77,8%	28 62,2%	23 51,1%	15 33,3%

Πίνακας 1. Ποσοστά επιτυχίας στη ΓΠ και στην ΠΓΠ για κάθε ένα από τα πέντε έργα.

Παρατηρούμε στον πίνακα 1 ότι στα έργα 2, 4 και 5 το ποσοστό επιτυχίας είναι μεγαλύτερο στη ΓΠ από την ΠΓΠ και αντίστροφα στα έργα 1 και 3 το ποσοστό επιτυχίας στην ΠΓΠ είναι μεγαλύτερο από ότι στη ΓΠ.

Πιο αναλυτικά η συμπεριφορές των φοιτητών σε κάθε ένα από τα πέντε έργα παρουσιάζεται παρακάτω.

Έργο1. Στην ερώτηση ΓΠ, το ποσοστό της επιτυχίας περιορίστηκε κάτω από τους μισούς φοιτητές, καθώς μόνο 21 φοιτητές (46,7%) μπόρεσαν να βρουν κάποιο κλάσμα μεταξύ του 7/8 και του 1. Σημαντικό ποσοστό των φοιτητών 14 (31,1%), απάντησαν ότι δεν υπάρχει κλάσμα μεταξύ του 7/8 και του 1, ενώ 10 φοιτητές (22,2%) απάντησαν ότι υπάρχουν κλάσματα αλλά δεν μπόρεσαν να βρουν κάποιο.

Ωστόσο, το ποσοστό των σωστών απαντήσεων στην ερώτηση ΠΓΠ που αφορά τον λανθασμένο ισχυρισμό ενός μαθητή, είναι μεγαλύτερο, αφού 34 (75,6%) φοιτητές αξιολόγησαν σωστά την απάντηση του μαθητή και μπόρεσαν να ερμηνεύσουν τη σκέψη του. Παρατηρούμε ότι λιγότεροι φοιτητές βρίσκουν ένα κλάσμα μεταξύ του 7/8 και του 1 από ότι αυτούς που ερμηνεύουν το λάθος, ενδεχομένως αυτό να οφείλεται στη γνώση της πυκνότητας των ρητών αλλά στην αδυναμία εύρεσης συγκεκριμένου ρητού.

11 φοιτητές από τους 14 που έκαναν λάθος στο πρώτο σκέλος (ΓΠ), απάντησαν λάθος ότι ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός. Σχετικά με τις ερμηνείες που δόθηκαν για τη παρανόηση του μαθητή στην ερώτηση ΠΓΠ, δύο ήταν οι βασικές κατηγορίες αυτών: πρώτον ότι ο μαθητής σκέφτεται με βάση τους ακέραιους ή φυσικούς αριθμούς (24,4%) και δεύτερον ότι ο μαθητής σκέφτεται ότι μετά το 7 ακολουθεί το 8 άρα το ίδιο ισχύει και στα κλάσματα 7/8 και 8/8 που ισούται με 1 (22,2%).

Αν εφαρμόσουμε το τεστ χ^2 και το τεστ McNemar βρίσκουμε ότι οι δύο ερωτήσεις συσχετίζονται μεταξύ τους και για τους φοιτητές είναι στατιστικά πιο εύκολη η ερώτηση ΠΓΠ από ότι η ερώτηση ΓΠ ($\chi2 =12,73$, df=1, $p<0,001$).

Έργο2. Στην ερώτηση ΓΠ (αναπαράσταση κλάσματος) δόθηκαν στους φοιτητές 5 ίσοι κύκλοι και ζητήθηκε να αναπαραστήσουν το 1/4 των κύκλων με σκίαση. Στην ερώτηση ΠΓΠ, δόθηκε μια εικόνα με τις απαντήσεις τριών μαθητών στην ερώτηση «Σημειώστε το 1/3 των σοκολατών» και ζητήθηκε από τους φοιτητές να αξιολογήσουν κάθε απάντηση και να την ερμηνεύσουν.

31 (68,9%) φοιτητές μπόρεσαν να σκιάσουν με επιτυχία το ζητούμενο κλάσμα και να απαντήσουν σωστά στην ερώτηση ΓΠ. 7 (15,6%) φοιτητές δεν απάντησαν καθόλου ενώ άλλοι τόσοι (15,6%) αναπαράστησαν το 1/4 με λάθος τρόπος (π.χ. σκιάζοντας έναν ολόκληρο κύκλο και άλλο μισό).

Στην ερώτηση ΠΓΠ, 20 (44,4%) φοιτητές ερμήνευσαν σωστά όλες ή τις περισσότερες απαντήσεις των μαθητών. 8 (17,8%) φοιτητές αξιολόγησαν λάθος τις απαντήσεις των μαθητών και 17 (37,8%) φοιτητές, παρόλο που αξιολόγησαν σωστά τις απαντήσεις, έδωσαν λάθος ή περιορισμένες ερμηνείες για τις παρανοήσεις στη θεώρηση του όλου.

Εφαρμόζοντας το τεστ χ^2 και το τεστ McNemar βρίσκουμε ότι οι δύο ερωτήσεις συσχετίζονται μεταξύ τους και για τους φοιτητές είναι στατιστικά πιο εύκολη η ερώτηση ΓΠ από ότι η ερώτηση ΠΓΠ ($\chi2 =7,48$, df=1, $p=0,007$).

Έργο3. Εδώ στην ερώτηση ΓΠ ζητήθηκε να ταξινομηθούν οι δεκαδικοί αριθμοί 0,33 0,8 0,242 0,4 και 0,71 από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο. Η ερώτηση ΠΓΠ, αφορά την αξιολόγηση και την ερμηνεία της ταξινόμησης δεκαδικών αριθμών από ένα μαθητή ο οποίος κλήθηκε να ταξινομήσει τους αριθμούς 0,53 0,7 0,475 0,12 0,3 και τους ταξινόμησε με τον ακόλουθο τρόπο: 0,3< 0,7< 0,12 <0,53< 0,475.

32 (71,1%) φοιτητές ταξινόμησαν με σωστή σειρά τους δεκαδικούς αριθμούς, ενώ στην ερώτηση της ΠΓΠ το ποσοστό επιτυχίας αυξήθηκε (88,9%) καθώς 40 φοιτητές αξιολόγησαν και ερμήνευσαν σωστά την απάντηση του μαθητή.

Εφαρμόζοντας το τεστ χ^2 και το τεστ McNemar βρίσκουμε ότι οι δύο ερωτήσεις δεν συσχετίζονται μεταξύ τους και δεν υπάρχει διαφορά δυσκολίας στατιστικά σημαντική μεταξύ των ερωτήσεων ΓΠ και ΠΓΠ (χ^2=1,5, df=1, p=0,092).

Έργο4. Στην ερώτηση ΓΠ ζητήθηκε από τους φοιτητές να λύσουν ένα πρόβλημα με διαίρεση κλασμάτων, στο οποίο οι 35 (77,8%) μπόρεσαν να απαντήσουν με επιτυχία.

Στην ερώτηση ΠΓΠ δόθηκε στους φοιτητές η λύση ενός μαθητή για το παραπάνω πρόβλημα την οποία έπρεπε να αξιολογήσουν και να ερμηνεύσουν. Η λύση του μαθητή ήταν η εξής : «3/4 : 1/8= 4/3x 1/8=…». 28 (62,2%) φοιτητές μπόρεσαν να εντοπίσουν το λάθος στη λύση του μαθητή και να την ερμηνεύσουν σωστά. 8 (17,8%) από αυτούς ισχυρίστηκαν ότι η πράξη είναι σωστή, ενώ 9 (20,0%) δεν απάντησαν καθώς πιθανά να μην γνώριζαν την διαδικασία του αλγόριθμου.

Με την εφαρμογή του τεστ χ^2 και του τεστ McNemar βρίσκουμε ότι οι δύο ερωτήσεις δεν συσχετίζονται μεταξύ τους και δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά δυσκολίας μεταξύ των ερωτήσεων ΓΠ και ΠΓΠ (χ^2=2,7, df=1, p=0,118).

Έργο5. Η ερώτηση ΓΠ αφορούσε τη λύση προβλήματος πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Για την ΠΓΠ δόθηκε στους φοιτητές η λύση ενός μαθητή για το ίδιο πρόβλημα και τους ζητήθηκε να αξιολογήσουν τη λύση του μαθητή. Η λύση του μαθητή ήταν η εξής: 3/4–1/3=…

Μόνο οι μισοί φοιτητές 23 (51,1%) μπόρεσαν να λύσουν επιτυχώς το πρόβλημα με τον πολλαπλασιασμό των κλασματικών αριθμών. Το λάθος που έκαναν 14 (31,1%) φοιτητές ήταν ίδιο με αυτό του μαθητή, δηλαδή αφαίρεσαν τα κλάσματα, 3/4- 1/3, αντί να τα πολλαπλασιάσουν. Μόνο 15 (33,3%) φοιτητές κατάφεραν να αξιολογήσουν σωστά τη λύση του μαθητή. 16 φοιτητές (35,6%) απάντησαν λάθος ισχυριζόμενοι ότι η λύση του μαθητή ήταν σωστή.

Αν εφαρμόσουμε το τεστ χ^2 και το τεστ McNemar βρίσκουμε ότι οι δύο ερωτήσεις συσχετίζονται μεταξύ τους και για τους φοιτητές είναι στατιστικά πιο εύκολη η ερώτηση ΓΠ από ότι η ερώτηση ΠΓΠ (χ^2 =11,38, df=1, p=0,039).

Αν πάρουμε το συνολικό σκορ στις πέντε ερωτήσεις ΓΠ και ΠΓΠ βρίσκουμε αντίστοιχα μέσους όρους 3,16 και 3,02. Αυτοί οι μέση όροι δεν παρουσιάζουν στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ τους (Wilcoxon, N=45, z=-0,835, p=0,404, δίπλευρος έλεγχος).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Απαντώντας στα βασικά ερωτήματα της έρευνας, βρήκαμε ότι ο μέσος όρος του ποσοστού επιτυχίας στη ΓΠ των 5 έργων που τέθηκαν είναι 63,1% και στην ΠΓΠ είναι 60,9%. Φαίνεται ότι ένα μεγάλο ποσοστό μελλοντικών εκπαιδευτικών έχει ελλείψεις σχετικά με τη ΓΠ και την ΠΓΠ των ρητών αριθμών, το συμπέρασμα αυτό επιβεβαιώνεται και από αντίστοιχες διεθνής έρευνες (Depaepe et all., 2015; Tirosh, 2000; Turnuklu & Yelsidere, 2007).

Όσον αφορά τη συσχέτιση μεταξύ των ερωτήσεων ΓΠ και ΠΓΠ φάνηκε ότι αυτή εξαρτάται από τη φύση των ερωτήσεων. Για παράδειγμα, στο έργο 2 της αναπαράστασης του κλάσματος με σκίαση και το έργο 5 του πολλαπλασιασμού κλασμάτων, οι ερωτήσεις ΓΠ συσχετίζονταν με τις ερωτήσεις ΠΓΠ και ήταν στατιστικά πιο εύκολες. Φαίνεται ότι οι μελλοντικοί δάσκαλοι γνωρίζουν περισσότερο να σκιάζουν το ¼ των 5 κύκλων και να αναγνωρίζουν τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων σε ένα πρόβλημα, από το να ερμηνεύουν τα αντίστοιχα λάθη σε αυτά τα έργα.

Αντίθετα οι μελλοντικοί δάσκαλοι γνωρίζουν καλύτερα να ερμηνεύουν το λάθος της πυκνότητας μεταξύ των κλασμάτων (1β) δηλαδή την ΠΓΠ από το να βρίσκουν αυτοί οι ίδιοι την απάντηση στην ερώτηση. Δηλαδή φαίνεται αυτό το παράδοξο αποτέλεσμα ότι οι φοιτητές γνωρίζουν να ερμηνεύουν ένα λάθος χωρίς οι ίδιοι να ξέρουν το σωστό. Μια ερμηνεία αυτής της παράδοξης συμπεριφοράς μπορεί να είναι ότι οι φοιτητές διδάχτηκαν στο μάθημα της Διδακτικής των Μαθηματικών να ερμηνεύουν αυτό το λάθος. Αλλά παρόλα αυτά οι ίδιοι δεν μπόρεσαν να βρουν τη σωστή απάντηση πράγμα που δείχνει την αδυναμία τους στη ΓΠ των Μαθηματικών.

Υπήρχαν ερωτήσεις όπως η ταξινόμηση των δεκαδικών αριθμών (έργο 3) και η διαίρεση των κλασμάτων (έργο 4) στις οποίες οι ερωτήσεις ΓΠ και ΠΓΠ δεν είχαν συνάφεια μεταξύ τους και δεν παρουσιάζονταν στατιστική διαφορά ως προς τη δυσκολία τους. Φαίνεται λοιπόν, ότι στις ερωτήσεις αυτές η ΓΠ δεν συσχετίζεται με την ΠΓΠ, πιθανά αυτό να οφείλεται στον τρόπο με τον οποίο τέθηκαν οι ίδιες οι ερωτήσεις ή στο είδος του περιεχομένου αυτών των ερωτήσεων. Το συμπέρασμα αυτό έρχεται σε αντίφαση με τα αποτελέσματα άλλων ερευνών (π.χ. Depaepe et al. 2015) οι οποίες βρίσκουν συνάφεια μεταξύ γνώσης περιεχομένους και παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου των υποψηφίων εκπαιδευτικών. Το θέμα αυτό πιθανά χρήζει περαιτέρω έρευνας.

Σχετικά με τη γνώση ελλήνων μαθητών για τους ρητούς (Lemonidis, Kaiafa, 2014; Stafylidou & Vosniadou, 2004; Vamvakoussi, & Vosniadou, 2004, Vamvakoussi, & Vosniadou, 2010) προκύπτει ότι μαθητές και μελλοντικοί καθηγητές έχουν κάποια ανάλογα προβλήματα στη γνώση περιεχομένου. Αυτό δείχνει ότι οι ρίζες κάποιων παρανοήσεων που υπάρχουν σε φοιτητές βρίσκονται στη σχολική εκπαίδευση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*, 389–407.

Depaepe, F.,Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, C. Verschaffel, L., Dooren, W. V. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education*, *47*, 82-92.

Kleickmann, T., Richter, D., Kunter, M., Elsner, J., Besser, M., Krauss, S., et al. (2013). Teachers' content and pedagogical content knowledge: the role of structural differences in teacher education. *Journal of Teacher Education*, *64*, 90-106.

Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lemonidis, C. Tsakiridou, H & Meliopoulou, I. (2017). In-Service Teachers’ Content and Pedagogical Content Knowledge in Mental Calculations with Rational Numbers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(83), pp.1-19. doi:10.1007/s10763-017-9822-6.

Lemonidis, Ch., Kaiafa, I. (2014). Fifth and sixth grade students' number sense in rational numbers and its relation with problem solving ability. *MENON: Journal Of Educational Research. 1st* Thematic Issue, 61-74.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers’ knowledge of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Post, T., Harel, G., Behr, M., & Lesh, R. (1988). Intermediate teachers knowledge of rational number concepts. *In Fennema, et al. (Eds.), Papers from First Wisconsin Symposium for Research on Teaching and Learning Mathematics* (pp. 194-219). Madison, WI: Wisconsin Center for Education Research.

Senk, S. L., Tatto, M. T., Reckase, M., Rowley, G., Peck, R., & Bankov, K. (2012). Knowledge of future primary teachers for teaching mathematics: an international comparative study. *ZDM Mathematics Education, 44*, 307-324.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*, 122.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14*, 503–518.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*,5–25.

Turnuklu, E. B., & Yesildere, S. (2007). The pedagogical content knowledge in mathematics: Pre-service primary mathematics teachers' perspectives in Turkey. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers, 1*,1–13.

Vamvakoussi, X., and Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach. *Learning and Instruction, 14,* 453-467.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction, 28*, 181–209.

Η ΣΧΕΣΗ ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΙΔΟΣΗΣ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΗΣ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

Μαγγίνας[1] Ιωάννης, Νικολαντωνάκης[2] Κωνσταντίνος, Γουναροπούλου[3] Σπυριδούλα

[1] Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, [2]Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, [3]Π.Τ.Ν. Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

johnmagginas@yahoo.gr, knikolantonakis@uowm.gr, spyridoula.goun@gmail.com

Η παρούσα ερευνητική εργασία επιχειρεί να εξετάσει τη συσχέτιση της μουσικής ακουστικότητας και της μαθηματικής επίδοσης σε παιδιά δευτέρας τάξης του Δημοτικού Σχολείου. Στην έρευνα συμμετείχαν 36 παιδιά (Ν=36) από τα οποία 15 ήταν αγόρια (Ν=15) και 21 ήταν κορίτσια (Ν=21). Για την εκτίμηση της μουσικής ακουστικότητας έγινε χρήση του τεστ «Στοιχειώδεις Μετρήσεις Μουσικής Ακουστικότητας» του Gordon και του εργαλείου εκτίμησης της μαθηματικής επίδοσης για μαθητές δευτέρας Δημοτικού που κατασκευάστηκε από τους ερευνητές. Τα αποτελέσματα έδειξαν δυνατή σχέση μεταξύ της συνολικής επίδοσης της μουσικής ακουστικότητας (total) και της μαθηματικής επίδοσης αποτελώντας παράλληλα σημαντικό προβλεπτικό παράγοντα της μαθηματικής επίδοσης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η σχέση μουσικής και μαθηματικών έχει εξεταστεί από παλιά. Τις τελευταίες τέσσερις δεκαετίες διερευνώνται οι συνδέσεις των δύο φαινομενικά διαφορετικών τομέων. Ποιες πτυχές και των δύο αντικειμένων είναι αυτές που συνδέονται. Η μουσική βελτιώνει την μαθηματική εκπαίδευση, αν ναι πως και γιατί; Ο σκοπός της παρούσας μελέτης είναι να ερευνήσει αν η επίδοση στο τεστ μουσικής ακουστικότητας συνδέεται με τη μαθηματική επίδοση καθώς και αν μπορεί να αποτελέσει προβλεπτικό παράγοντα της μαθηματικής επίδοσης σε μαθητές της δευτέρας τάξης του δημοτικού σχολείου.

Εννοιολογικός προσδιορισμός νοημοσύνης

Αντιλαμβανόμαστε τη νοημοσύνη ως γενική ικανότητα του ατόμου να προσαρμόζεται με επιτυχία στις συνθήκες του περιβάλλοντος και τη σκέψη ως έκφραση της νοημοσύνης (Carpenter, Just, & Shell, 1990; Μόττη-Στεφανίδου,1999). Οι σχετικές θεωρίες για τη φύση της νοημοσύνης ταξινομούνται σε δύο κατηγορίες. α) Τις μονοπαραγοντικές, σύμφωνα με τις οποίες η νοημοσύνη απαρτίζεται από ένα κυρίως κληρονομικό παράγοντα «g» και β) Τις πολυπαραγοντικές θεωρίες που θεωρούν την νοημοσύνη ως αποτέλεσμα περισσότερων παραγόντων (Gardner, 1983; Maranon & Pueyo, 2000). Οι πιο σύγχρονες από αυτές είναι η τριαρχική θεωρία του Sternberg (1985) που επιχειρεί να εξηγήσει την ασυνήθιστη (χαρισματική ή χαμηλή) νοημοσύνη στα παιδιά. Η άλλη θεωρία είναι η θεωρία των οκτώ τύπων νοημοσύνης του Gardner (Gardner, 1983) γνωστή ως θεωρία της πολλαπλής νοημοσύνης. Σύμφωνα με τη συγκεκριμένη θεωρία δεν γίνεται αποδεκτή η ύπαρξη ενός γενικού παράγοντα «g». Δεν υπάρχει ένα μόνο είδος νοημοσύνης, αλλά οκτώ, τα οποία είναι αυτόνομα και είναι: η γλωσσικολεκτική, η λογικομαθηματική, η μουσική, η χωρική, η σωματική, η διαπροσωπική, η ενδοπροσωπική και τέλος η φυσιοκρατική νοημοσύνη. Όλοι διαθέτουν αυτές τις δεξιότητες. Η διαφορά έγκειται στο διαφορετικό βαθμό κατοχής και εξέλιξης της κάθε δεξιότητας και στον τρόπο με τον οποίο συνδυάζονται.

Σχέση νοημοσύνης και μαθηματικής επίδοσης

Η νοημοσύνη αποτελεί ισχυρό προβλεπτικό παράγοντα της σχολικής επίδοσης (Deary, Strand, Smith, Fernandes, 2007; Gut, Reimann, & Grob, 2013; Roth, Becker, Romeyke, Schäfer, Domnick & Spinath, 2015). Στενά συνδεδεμένες με τη νοημοσύνη είναι η μαθηματική επίδοση και η μουσική δημιουργία. Η έρευνα δείχνει ισχυρή συσχέτιση μεταξύ της επίδοσης στα τεστ γνωστικής ικανότητας και των μαθηματικών (Deary et al., 2007; Roth et al., 2015), αφού για την κατανόηση των μαθηματικών απαιτείται συλλογιστική ικανότητα κύριο χαρακτηριστικό της ρέουσας νοημοσύνης (fluid intelligence) που σχετίζεται στενά με τα μαθηματικά (Floyd, Evans, & McGrew, 2003). Η συσχέτιση μεταξύ νοητικής ικανότητας και μαθηματικής επίδοσης έχει και προβλεπτική αξία για τη μαθηματική επίδοση (Neukrug & Fawcett, 2015) ακόμη και τρία χρόνια αργότερα (Gygi, Hagmann-von Arx, Schweizer & Grob, 2017). Ειδικότερα, ισχυρή σύνδεση φαίνεται να υπάρχει μεταξύ των μαθηματικών, της οπτικοχωρικής ικανότητας και της ικανότητας χωροταξικού σχεδιασμού (Battista, Clements, Arnoff, Battista, & Van Auken Borrow, 1998; Mulligan, Prescott & Mitchelmore, 2004).

Σχέση νοημοσύνης και μουσικής

Τα ευρήματα δείχνουν μια αιτιώδη σχέση νοητικής επίδοσης και μουσικής συγκεκριμένα με τη χωροχρονική λογική. Σε μελέτη (Schellenberg, 2006) αναφέρεται θετική συσχέτιση μεταξύ των μαθημάτων μουσικής και του IQ σε παιδιά ηλικίας 6-11 ετών. Φαίνεται πως η μουσική επιδρά θετικά στην αύξηση της νοημοσύνης (Dege, Kubicek, & Schwarzer, 2011). Η γνωστότερη έρευνα στον τομέα αυτό είναι η καλούμενη ως «αποτέλεσμα Μότσαρτ». Στην έρευνα αυτή (Rauscher, Shaw, Levine, Ky & Wright, 1994), η πρώτη μία ομάδα άκουσε τη σονάτα K. 448 του Μότσαρτ στο D Major για 10 λεπτά, η δεύτερη άκουσε οδηγίες χαλάρωσης και η τρίτη δε δέχθηκε καμία παρέμβαση. Έπειτα έγιναν δοκιμασίες χωρικών συλλογισμών με την κλίμακα Stanford-Binet. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως η ομάδα που άκουσε κλασσική μουσική πέτυχε 8-9 βαθμούς αύξηση του IQ. Οι Forgeard, Winner, Norton & Schlaug, (2008) σε έρευνά τους διαπίστωσαν ότι η πρακτική άσκηση ενός μουσικού οργάνου αυξάνει την απόδοση στο τεστ Raven's Matrices γεγονός που υποδηλώνει ότι οι μη λεκτικές δεξιότητες συλλογιστικής αναπτύσσονται όταν τα παιδιά λαμβάνουν μουσική κατάρτιση.

Γενικά μια μεγάλη συζήτηση βρίσκεται σε εξέλιξη για το γεγονός πως η μουσική εκπαίδευση οδηγεί σε αύξηση ειδικών δεξιοτήτων και είναι δυνατόν να οδηγήσει σε μια καθολική αύξηση γνωστικών ικανοτήτων που μετρώνται με το γενικό νοητικό πηλίκο.

Σχέση μουσικής και μαθηματικών

Η συμμετοχή των μαθητών σε δραστηριότητες μουσικής και μαθηματικών ενεργοποιεί υψηλά επίπεδα σκέψης, αυξάνει τη συμμετοχή και τα κίνητρα (Cranmore & Tunks, 2015). Η μουσική όπως και τα μαθηματικά σχετίζεται με αυξημένη νοημοσύνη, υψηλές βαθμολογίες και υψηλή ακαδημαϊκή επίδοση. Τα Μαθηματικά είναι μια δραστηριότητα οργάνωσης και επίλυσης προβλημάτων. Η οργάνωση ενός θέματος πρέπει να πραγματοποιηθεί σύμφωνα με τα μαθηματικά πρότυπα προκειμένου να εξευρεθούν λύσεις. Η μουσική απαιτεί επίσης την οργάνωση υλικού και, όπως ένας μαθηματικός, ο μουσικός αναζητά μοτίβα, δημιουργεί δομές και λύνει προβλήματα

Οι πιο σημαντικές σχέσεις μεταξύ της μουσικής και των μαθηματικών που διαπιστώθηκαν ήταν η χωρική αντίληψη, η χρονική συλλογιστική και η χωροχρονική λογική (Hetland, 2000a,b). Οι Rauscher, Shaw & Ky (1993) ερεύνησαν τη σχέση μουσικής και χωρικών δραστηριοτήτων σε παιδιά ηλικίας 3 έως 4 ετών και 9 μηνών. Τα αποτελέσματα έδειξαν σημαντική διαφορά επίδοσης στη δραστηριότητα της συναρμολόγησης αντικειμένων (υποκλίμακα του τεστ wisc iii) για την πειραματική ομάδα σε σχέση με την ομάδα ελέγχου.

Υπάρχουν αρκετά αποτελέσματα αναφορικά με τη συμβολή της μουσικής στην ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων (Geist, Geist, & Kuznik, 2012; Gruhn & Rauscher, 2002). Μάλιστα ορισμένες πτυχές της μουσικής επηρεάζουν την ικανότητα των μαθηματικών σε μεγάλο βαθμό. Σε μελέτη (Gardiner, 1996) μαθητών των πρώτων τάξεων που έλαβαν μουσική διδασκαλία με έμφαση στην ανάπτυξη δεξιοτήτων σειροθέτησης, διαδοχής και μουσικών παιχνιδιών με ρυθμό και τόνο εξετάστηκε η μαθηματική τους επίδοση μετά από περίοδο έξι μηνών. Οι μαθητές αυτοί βαθμολογήθηκαν σημαντικά καλύτερα στα μαθηματικά από τους μαθητές των ομάδων ελέγχου που έλαβαν την τυπική μουσική διδασκαλία.

Η εξακρίβωση περισσότερων πλευρών της σχέσης μουσικής και μαθηματικών είναι δυνατόν να ωφελήσει τους μαθητές όλων των επιπέδων και ικανοτήτων.

Ο σκοπός της έρευνας

Ορισμένες πτυχές της μουσικής, όπως για παράδειγμα ο ρυθμός και ο τόνος, βασικά στοιχεία της μουσικής ακουστικότητας φαίνεται να επηρεάζουν τη μαθηματική επίδοση (Gardiner, 1996).

Η μουσική ακουστικότητα (audiation) ως όρος αναφέρθηκε από τον Gordon και χαρακτηρίζεται ως η ικανότητα του ατόμου να αισθάνεται τις μελωδίες ή τους ρυθμούς που έχει ακούσει (Παπαζαχαρής, 1999), το περιεχόμενο και τον εκτελεστή του μουσικού συνόλου (Anvari, Trainor, Woodside, & Levy, 2002). Το άτομο είναι σε θέση να αντιλαμβάνεται και να αναγνωρίζει τις μεταβολές στον τόνο, δηλαδή τη διαφορετικότητα με την οποία αντιλαμβάνεται το αυτί συγκεκριμένες δονήσεις και διακρίνει τον ένα μουσικό φθόγγο από τον άλλο (π.χ. το φα από το ντο). Επίσης το άτομο διακρίνει το ρυθμό, που αποτελεί το σχεδιασμό της μουσικής στον χρόνο, δηλαδή την εναλλαγή των τονισμών, των ήχων και των παύσεων.

Η παρούσα έρευνα αποσκοπεί να ελέγξει την πιθανή σχέση μεταξύ της μουσικής ακουστικότητες και της μαθηματικής επίδοσης σε μαθητές δευτέρας τάξης του δημοτικού σχολείου. Στηριζόμενοι στα θεωρητικά και ερευνητικά δεδομένα, οδηγηθήκαμε στη διατύπωση των ερευνητικών ερωτημάτων:

- Αν η επίδοση των μαθητών της δευτέρας δημοτικού στη μουσική ακουστικότητα σχετίζεται και σε ποιο βαθμό με τη μαθηματική επίδοση.
- Αν η επίδοση των μαθητών της δευτέρας δημοτικού στην μουσική ακουστικότητα αποτελεί προβλεπτικό παράγοντα της μαθηματικής επίδοσης.

Η μελέτη έχει πιλοτικό χαρακτήρα και στοχεύει στον εντοπισμό παραγόντων που μπορούν έγκαιρα να δώσουν χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με τη μαθηματική επίδοση σε μαθητές της δευτέρας τάξης του δημοτικού σχολείου. Ο πιθανός έγκαιρος εντοπισμός του επιπέδου μαθηματικής επίδοσης είναι ιδιαίτερα σημαντικός, αφού η γρήγορη και έγκαιρη παρέμβαση μπορεί να αποβεί καθοριστική. Επίσης ως μια πρωτότυπη μελέτη θα μπορούσε να προετοιμάσει το έδαφος για περαιτέρω διεξοδική έρευνα στον τομέα αυτό.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Οι συμμετέχοντες

Στην έρευνα πήραν μέρος τριάντα έξι μαθητές (N=36) της δευτέρας τάξης 12/θ δημόσιου του δημοτικού σχολείου αστικής- ημιαστικής περιοχής, είκοσι ένα κορίτσια (N=21) και δέκα πέντε αγόρια (N=15). Οι αρχές ηθικής και δεοντολογίας έγιναν απόλυτα σεβαστές κατά τη διεξαγωγή της παρούσας έρευνας.

Πειραματικό σχέδιο και διαδικασία

Ο σχεδιασμός της πειραματικής διαδικασίας προέβλεπε εφαρμογή της παρέμβασης σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση αξιολογήθηκε το επίπεδο της μουσικής ακουστικότητας των μαθητών. Η δεύτερη φάση περιελάμβανε την αξιολόγηση της μαθηματικής επίδοσης. Μετά υπήρξε σύγκριση των αποτελεσμάτων της επίδοσης στη μουσική ακουστικότητα και της μαθηματικής επίδοσης για τον εντοπισμό συσχετίσεων και την εξαγωγή συμπερασμάτων.

Μετρήσεις

Για την εκτίμηση της επίδοσης της μουσικής ακουστικότητας έγινε χρήση του τεστ Στοιχειώδεις μετρήσεις μουσικής ακουστικότητας του Gordon (Primary Measures of Music Audiation - PMMA). Το τεστ απαρτίζεται από δύο δοκιμασίες μια τονική και μια ρυθμική (Στάμου, Schmidt & Humphreys, 2006). Η συμμετοχή δεν απαιτεί προηγούμενη μουσική εμπειρία, η διαδικασία είναι εύκολη και απλή με κατανοητές και σαφείς οδηγίες.

Το τονικό μέρος και το ρυθμικό μέρος, περιλαμβάνουν την ακρόαση 40 ηχογραφημένων ζευγών μελωδικών μοτίβων για το καθένα. Ο μαθητής ακούει το κάθε ζεύγος ηχογραφημένου μοτίβου από τον οπτικό δίσκο (cd) ο οποίος έχει τοποθετηθεί σε Η.Υ. που έχει κατάλληλα εξωτερικά ηχεία ώστε ο ήχος να είναι όσο το δυνατόν πιο ποιοτικός. Στη συνέχεια ο μαθητής αφού ακούσει το σχετικό ηχογραφημένο ζεύγος μελωδικού μοτίβου καλείται να κυκλώσει στο απαντητικό δελτίο το ζεύγος με τα όμοια χαμογελαστά σκίτσα προσώπων αν εκτιμά πως το ζεύγος που άκουσε είναι ίδιο, ενώ αν το ζεύγος μελωδικού μοτίβου εκτιμά πως είναι διαφορετικό, ο μαθητής κυκλώνει το ζεύγος των δύο διαφορετικών σκίτσων προσώπων όπου το ένα είναι λυπημένο και το άλλο χαμογελαστό. Μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας χορήγησης του τεστ PMMA, προκύπτουν τρία σκορ (δείκτες). Ο τονικός, ο ρυθμικός και το άθροισμά τους ο συνολικός δείκτης που θεωρείται ως ο δείκτης της συνολικής μουσικής ακουστικότητας του παιδιού (Στάμου, Schmidt & Humphreys, 2006).

Για την εκτίμηση της μαθηματικής επίδοσης προτιμήθηκε η κατασκευή ενός κριτηρίου αξιολόγησης που βασίζεται στην ύλη που διδάσκεται στη δευτέρα (Β΄) τάξη με βάση τις οδηγίες και το αναλυτικό πρόγραμμα (curriculum based). Οι τομείς που περιλαμβάνει το συγκεκριμένο κριτήριο είναι οι αισθητοποίηση αριθμών (αναγνώριση και γραφή, σύνθεση και ανάλυση αριθμών), η άνοδος και κάθοδος αριθμητικής κλίμακας, η θεσιακή αξία σύγκριση και διάταξη αριθμών, η νοερή και γραπτή εκτέλεση προσθέσεων και αφαιρέσεων, η επίλυση προβλημάτων, οι μετρήσεις (χρόνου, βάρους, μήκους, χρημάτων), η λογική ακολουθία απλών επαναλαμβανόμενων μοτίβων. Το συγκεκριμένο κριτήριο χορηγήθηκε πιλοτικά και έγιναν οι απαραίτητοι έλεγχοι. Έλεγχος αξιοπιστίας test-retest (a=0.87), εγκυρότητας περιεχομένου (content validitry) και έλεγχος εγκυρότητας κριτηρίου (criterion validity) με τη σύνδεσή του με το κριτήριο «California Standards Test Grade 2» (Los Angeles County Office of Education). Η συσχέτιση των δύο κριτηρίων υπήρξε αρκετά ικανοποιητική (r από 0.75 έως 0.94).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η επεξεργασία των αποτελεσμάτων έγινε με το στατιστικό πακέτο SPSS 21 for Windows. Έγινε έλεγχος κατανομής του δείγματος (One-Sample K-S Test) με τα αποτελέσματα να δείχνουν κανονικότητα. Ο βαθμός συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών ήταν ισχυρός (μαθηματική επίδοση * τονικό τεστ =,625** : μαθηματική επίδοση * ρυθμικό τεστ = ,659** : μαθηματική επίδοση * συνολικό τεστ =,700**). Χρησιμοποιήθηκε ο μη συσχετιζόμενος έλεγχος t (uncorrelated t) ο οποίος έδειξε πως οι μέσοι όροι των δύο συνόλων του δείγματος (αγόρια, κορίτσια) δεν διαφέρουν ως προς την επίδοση στους τομείς που εξετάστηκαν. Στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκε ανάλυση παλινδρόμησης (regression) για να ελεγχθεί ο βαθμός που οι ανεξάρτητες μεταβλητές συνεισφέρουν θετικά στην ερμηνεία της εξαρτημένης μεταβλητής (Permath = μαθηματική επίδοση) και σε ποιο ποσοστό αυτή η σχέση μπορεί να γενικευθεί στο γενικό πληθυσμό.

Model	R	R Square	Adj. R Square	Std. error of the Estimate	R Square Change	F Change	Model	df1	df2	Sig. F Change
1	,700[a]	,490	,475	21,11300	,490	32,624	1	1[a]	34	,000

Πίνακας 1: Σύνοψη μοντέλου (Model Summary)

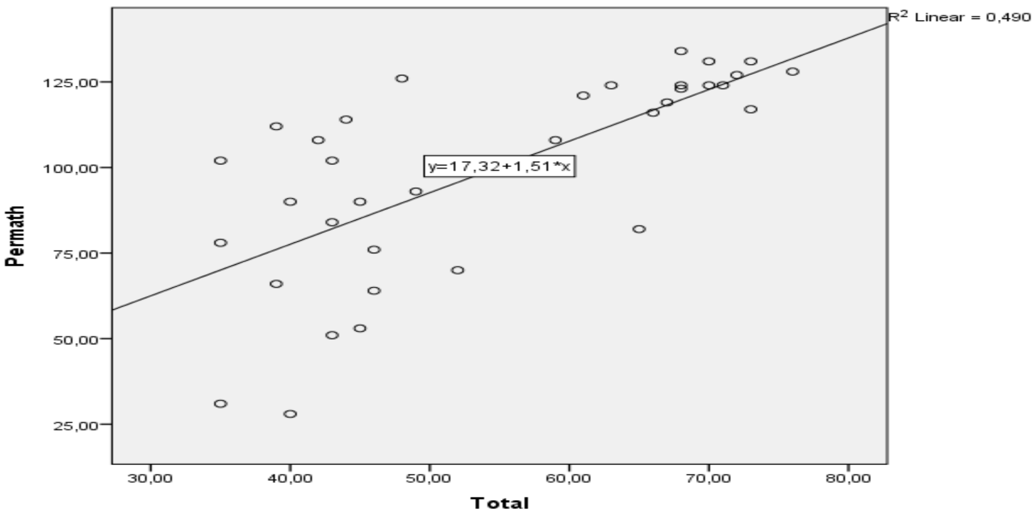
Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	14542,430	1	14542,430	32,624	,000[b]
	Residual	15155,792	34	445,759		
	Total	29698,222	35			

a. Dependent Variable: Permath b. Predictors: (Constant), Total

Πίνακας 2: Ανάλυση συνδιακύμανσης ANOVAa

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	Correlations		
		B	Std. Error	Beta			Zero-order	Partial	Part
1	(Constant)	17,319	14,765		1,173	,249			
	Total	1,507	,264	,700	5,712	,000	,700	,700	,700

Πίνακας 3: Συντελεστές (Coefficientsa)



Γράφημα 1: Γράφημα διασποράς των μεταβλητών

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα έρευνα συμμετείχαν συνολικά 36 μαθητές (N=36) δευτέρας τάξης του δημοτικού σχολείου (N=15 αγόρια και N=21 κορίτσια). Ο έλεγχος συσχέτισης των μεταβλητών μεταξύ τους έδειξε υψηλές συσχετίσεις (Ton* Ryth= ,674 : Ton* Total=,927: Ton* Permath=,625). Χρησιμοποιήθηκε η ανάλυση παλινδρόμησης για την ερμηνεία της μαθηματικής επίδοσης (Permath) από τις ανεξάρτητες μεταβλητές που ήταν οι επιδόσεις στο τονικό (Ton), στο ρυθμικό (Ryth) και στο συνολικό τεστ (Total). Τα αποτελέσματα (πίνακας 1) δείχνουν δυνατή σχέση μεταξυ της συνολικής επίδοσης στο τεστ μουσικής ακουστικότητας (total) και της μαθηματικής επίδοσης (R=,700[a], F=32,62 p<001). Η επίδοση στο τεστ μουσικής ακουστικότητας (total) συνεισφέρει θετικά (πίνακας 3) στην ερμηνεία της συνδιακύμανσης της μαθηματικής επίδοσης (Permath) (Beta = ,70: t= 5,71: p<0.001). Η επίδοση στο συνολικό ακουστικό τεστ (πίνακας 1), ερμηνεύει - εξηγεί τη μεταβλητότητα της μαθηματικής επίδοσης σε ποσοστό 49% (R Square=,490) που μπορεί να επεκταθεί στο γενικό πληθυσμό σε ποσοστό 47,5% (Adjusted R Square,475). Από τα υπόλοιπα στοιχεία (πίνακας 2) παρατηρούμε MSm μεγάλο (14542,430) και MSr μικρό (445,759). Το F είναι μεγάλο (32,624) επομένως συμπεραίνουμε από τον έλεγχο Ftest (sig <0,001) πως το μοντέλο έχει σημαντική συνεισφορά στην πρόβλεψη της μαθηματικής επίδοσης. Στον πίνακα 3 βλέπουμε το βαθμό σημαντικότητας να είναι 0.000 δηλαδή sig <0,001. Άρα οι δύο παράμετροι είναι διαφορετικοί από το μηδέν (0) και επομένως η συνεισφορά του μοντέλου στην πρόβλεψη της μαθηματικής επίδοσης είναι σημαντική. Επίσης παρατηρώντας το σχετικό γράφημα (γράφημα 1) βλέπουμε πως η ευθεία παλινδρόμησης έχει κλίση δεξιά συνεπώς η στάθμιση Β έχει θετική τιμή (a=17,31 και B=1,50). Μεγάλο μέρος των σημείων του γραφήματος διασποράς φαίνεται να σχηματίζουν ευθεία και είναι κοντά στην ευθεία παλινδρόμησης.

Η παρούσα έρευνα είχε ως στόχο την ανάδειξη τυχόν στενής σχέσης της επίδοσης των υποτεστ (Τονικό – Ρυθμικό – Συνολικό) του PMMA και της μαθηματικής επίδοσης. Τα αποτελέσματα δείχνουν δυνατή σχέση της συνολικής μουσικής ακουστικότητας (total) με τη μαθηματική επίδοση. Επιπλέον η επίδοση στο συνολικό τεστ μουσικής ακουστικότητας μπορεί να αποτελέσει προγνωστικό παράγοντα της μαθηματικής επίδοσης σε μαθητές δευτέρας (Β΄) τάξης του δημοτικού σχολείου. Μέχρι σήμερα είναι γνωστό πως τομείς των γνωστικών αντικειμένων μουσικής και μαθηματικών συνδέονται. Η εργασία αυτή δείχνει τη δυνατή σχέση της συνολικής μουσικής ακουστικότητας (total) με τη μαθηματική επίδοση καθώς και ότι η επίδοση στο συνολικό τεστ μουσικής ακουστικότητας μπορεί να αποτελέσει προγνωστικό παράγοντα της μαθηματικής επίδοσης. Η χρησιμότητα του έγκαιρου εντοπισμού του επιπέδου μαθηματικής επίδοσης και η δυνατότητα έγκαιρης και διαφοροποιημένης παρέμβασης επηρεάζει τις διδακτικές ενέργειες και το διδακτικό σχεδιασμό. Θεωρούμε ότι θα ευνοήσει περαιτέρω έρευνα σχετικά με το πώς θα μπορούσε να καλλιεργηθεί η μουσική ακουστικότητα με στόχο τη βελτίωση της μαθηματικής επίδοσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Anvari, S.H., Trainor, L.J., Woodside, J. & Levy, B.A. (2002).Relations among musical skills, phonological processing, and early reading ability in preschool children. *Journal Experimental Child Psychology, 83*(2) 111-130.

Battista, M. T., Clements, D. H., Arnoff, J., Battista, K., & Van Auken Borrow, C. (1998). Students' spatial structuring of two-dimensional arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(5), 503-532.

Carpenter, P.A., Just, A.J. & Shell, P. (1990). What one Intelligence Test Measures: A Theoretical Account of the Processing in the Raven Progressive Matrices Test. *Psychological Review 97*(3), 404-431.

Cranmore, J., & Tunks, J. (2015). High school students' perceptions of the relationship between music and math. *Mid-Western Educational Researcher, 27*(1), 51.

Deary I.J., Strand S., Smith P., Fernandes C. (2007). Intelligence and educational achievement. *Intelligence*,35,13–21.

Dege, F., Kubicek, C., & Schwarzer, G. (2011). Music lessons and intelligence: a relation mediated by executive functions. *Music Percept, 29*(2), 195–201.

Floyd, R. G., Evans, J. J., & McGrew, K. S. (2003). Relations between measures of Cattell- Horn- Carroll (CHC) cognitive abilities and mathematics achievement across the school- age years. *Psychology in the Schools, 40*(2), 155-171.

Gardner, H. (1983, 1993). *Frames of Mind: The theory of multiple intelligences*. New York: Basic Books.

Gardiner MF, Fox A, Knowles F, Jefferey D. (1996). Learning improved by arts training. *Nature*, 381(6580), 284

Geist, K., Geist, E, A., & Kuznik, K. (2012). The patterns of music: Young children learning mathematics through beat, rhythm, and melody. *Young Children, 67*(1), 74-79.

Gruhn, W., & Rauscher, F. (2002). The neurobiology of music cognition and learning. In R. Colwell & C. Richardson (Eds.), *The new handbook of research on music teaching and learning* (pp. 445-460). New York, NY: Oxford University Press.

Gut, J., Reimann, G., and Grob, A. (2013). A contextualized view on longterm predictors of academic performance. *Journal of Educational Psychology, 105*(2), 436–443.

Gygi J. ,Hagmann-von Arx P, Schweizer F & Grob A (2017). The Predictive Validity of Four Intelligence Tests for School Grades: A Small Sample Longitudinal Study. *Front Psychol*, 8, 375.

Hetland, L. (2000a) Listening to music enhances spatial_temporal reasoning: evidence for the 'Mozart effect". *The Journal of Aesthetic Education, 34*(3/4), 105-148.

Maranon,R.C., & Pueyo, A. A. (2000). The study of human intelligence: A review at the turn of the millennium. *Psychology in Spain*, 4, 167-182

Μόττη-Στεφανίδη, Φ. (1999). *Αξιολόγηση της νοημοσύνης παιδιών σχολικής ηλικίας και εφήβων. Εγχειρίδιο για ψυχολόγους*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Mulligan, J. T., Prescott, A., & Mitchelmore, M. C. (2004). Children's development of structure in early mathematics. In M. Hoines & A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 393-401). Bergen, Norway*: Bergen University College.

Neukrug E. S., Fawcett R. C. (2015). *The Essentials of Testing and Assessment: A Practical Guide for Counselors, Social Workers, and Psychologists*, 3rd Edition. Stamford, CT: Cengage Learning.

Παπαζαχαρής, Θ. (1999). *Μουσική μάθηση και εκπαίδευση*. Αθήνα: Εκδόσεις Παπαζήση.

Rauscher, F. H., Shaw, G. L., & Ky, K. N. (1993). Music and spatial task performance. *Nature 365*(6447), 611.

Roth B., Becker N., Romeyke S., Schäfer S., Domnick F., Spinath F. M. (2015). *Intelligence and school grades: a meta-analysis. Intelligence*, 53, 118–137

Schellenberg, E. (2004) Music lessons enchance I.Q. *Psychological Science, 15*(8),511-514

Schellenberg, E. (2006). Long-termpositive associations between music lessons and IQ. *Journal of Educational Psychology, 98*(2), 457–468.

Στάμου, Λ., Schmidt, C.P. & Humphreys, J.T. (2006). *Ερευνητική Μονογραφία: Η έρευνα στάθμισης του Primary Measures of Music Audiation (Στοιχειώδεις Μετρήσεις Μουσικής Ακουστικότητας) στην Ελλάδα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Πανεπιστημίου Μακεδονίας.

Sternberg, R. (1985). Beyond IQ: *a triarchic theory* of *human intelligence*. New York: Cambridge University Press.

ΚΑΙΝΟΤΟΜΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗΣ ΤΩΝ ΦΟΡΗΤΩΝ ΣΥΣΚΕΥΩΝ ΣΤΟ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΗΣ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Μελετίου-Μαυροθέρη[1] Μαρία, Βάσου[1] Χριστίνα, Παπαριστοδήμου[2] Έφη και Τσούκκας[1] Λούκας

Ευρωπαϊκό Πανεπιστήμιο Κύπρου1, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου2

M.Mavrotheris@euc.ac.cy, Paparistodemou.e@cyearn.pi.ac.cy, c.vasou@research.euc.ac.cy, louevge@gmail.com

Στο άρθρο γίνεται σύντομη επισκόπηση ενός πολυδιάστατου, εν εξελίξει προγράμματος επιμόρφωσης εκπαιδευτικών σε θέματα αξιοποίησης της τεχνολογίας φορητών συσκευών στα μαθηματικά. Το πρόγραμμα υιοθέτησε το αναθεωρημένο εννοιολογικό πλαίσιο Τεχνολογικής Παιδαγωγικής Γνώσης Περιεχομένου (ΤΠΓΠ) του Phillips (2016), ενισχύοντας το βασικό μοντέλο με την προσθήκη των συνιστωσών των κοινοτήτων πρακτικής και της επιμόρφωσης με βάση τη σχολική μονάδα. Οι εμπειρίες από τις πρώτες φάσεις του προγράμματος, καταδεικνύουν ότι η υιοθέτηση του αναθεωρημένου μοντέλου ενίσχυσε την ενεργητική συμμετοχή και συνεργασία όλων των εμπλεκομένων φορέων, τον αναστοχασμό και τη βιωματική επιμόρφωση.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μια υποσχόμενη πρόταση για αναβάθμιση της μάθησης και διδασκαλίας των μαθηματικών αφορά στη χρησιμοποίηση των ευρέως διαδεδομένων στην καθημερινή ζωή φορητών συσκευών ως εργαλεία εννοιολογικής οικοδόμησης μαθηματικής γνώσης. Οι ταμπλέτες τύπου iOS ή Android, τα smart phones και άλλες φορητές συσκευές καθίστανται υπό τον φακό αυτής της προοπτικής τυπικά μαθησιακά εργαλεία και η υιοθέτησή τους στην τάξη προβάλλει πλέον ως μια αναγκαιότητα. Η υπάρχουσα βιβλιογραφία υπογραμμίζει τη σημαντική δυναμική της τεχνολογίας φορητών συσκευών προς την κατεύθυνση του εμπλουτισμού της μαθηματικής παιδαγωγικής (Kyriakides, Meletiou-Mavrotheris, & Prodromou, 2016). Αυτό επιτυγχάνεται με τη δημιουργία εκπαιδευτικών πλαισίων απόλυτα συμβατών με τα δεδομένα και απαιτήσεις του 21ου αιώνα (Clark & Luckin, 2013).

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να συνεισφέρει ενεργά στην αναδυόμενη βιβλιογραφία γύρω από την παιδαγωγική αξιοποίηση στα μαθηματικά των οθονών αφής. Η έρευνα αποτελεί μέρος ενός εν εξελίξει προγράμματος διετούς διάρκειας (2016-2018) το οποίο λαμβάνει χώρα σε δημόσιο δημοτικό σχολείο της Κύπρου, σε συνεργασία με το Ευρωπαϊκό Πανεπιστήμιο Κύπρου και το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου. Το πρόγραμμα αποσκοπεί, μέσω της δημιουργίας υποστηρικτικής κουλτούρας, στην ενίσχυση των εκπαιδευτικών της συγκεκριμένης σχολικής μονάδας με τις απαιτούμενες γνώσεις, δεξιότητες και πρακτική εμπειρία, για αποτελεσματική ενσωμάτωση των οθονών αφής στη μαθησιακή διαδικασία.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Παιδαγωγικό Πλαίσιο και Ερευνητικά Ερωτήματα Προγράμματος

Ο ερευνητικός και παιδαγωγικός σχεδιασμός του προγράμματος επιμόρφωσης και των μαθησιακών δραστηριοτήτων που έχουν αναπτυχθεί, στηρίχθηκαν στο εννοιολογικό πλαίσιο που έχει προτείνει ο Phillips (2016). Το μοντέλο του Phillips αποτελεί αναθεωρημένο μοντέλο του πλαισίου των Mishra και Koehler (2006) Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK) – στην ελληνική ορολογία Τεχνολογική Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου (ΤΠΓΠ). Πραγματεύεται την κοινωνικοπολιτισμική διάσταση της ΤΠΓΠ, ενισχύοντας το μοντέλο ΤΠΓΠ με την προσθήκη των συνιστωσών των Κοινοτήτων Πρακτικής (Wenger, 1998) και της «επιμόρφωσης με βάση τη σχολική μονάδα» (McLaughlin & Talbert, 2006). Μέσω της υιοθέτησης του μοντέλου αυτού, έχει επιδιωχθεί η δημιουργία ενός εποικοδομιστικού κοινωνικού πλαισίου, όπου οι εκπαιδευτικοί είναι οι κύριοι αγωγοί της επαγγελματικής τους ανάπτυξης, υποστηριζόμενοι από ένα περιβάλλον πλούσιο σε προκλήσεις και αλληλεπιδράσεις. Η έρευνα που διεξάγεται στα πλαίσια του προγράμματος, αποσκοπεί στην αξιολόγηση της επίδρασης αυτού του κοινωνικού πλαισίου: (i) στις στάσεις και αντιλήψεις των εκπαιδευτικών όσον αφορά στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών μέσω της τεχνολογίας οθονών αφής (iOS και Android tablets), (ii) στην ΤΠΓΠ των επαιδευτικών σχετικά με την παιδαγωγική αξιοποίηση των οθονών αφής, (iii) στην ικανότητα των εκπαιδευτικών να μεταφέρουν τις αποκτηθείσες γνώσεις και δεξιότητες στη διδακτική πράξη.

Δομή Προγράμματος και Συμμετέχοντες

Το πρόγραμμα έχει υιοθετήσει μία συστημική προσέγγιση ενσωμάτωσης των φορητών συσκευών στο σχολικό περιβάλλον. Σ’ αυτό συμμετέχουν όλα τα μόνιμα μέλη του διδακτικού προσωπικού συμπεριλαμβανομένης της διευθυντικής ομάδας (33 μέλη - 27 γυναίκες & 6 άνδρες) και οι μαθητές/τριες τους (412 μαθητές – 18 τμήματα) καθώς και οι κύριοι άλλοι φορείς που μπορούν να συμβάλουν στην επιτυχία του προγράμματος: γονείς, σύμβουλοι επαγγελματικής μάθησης, διεύθυνση δημοτικής εκπαίδευσης, κτλ. Καθ' όλη τη διάρκεια υλοποίησης του προγράμματος, προσφέρεται λεπτομερής ενημέρωση καθώς και συνεχής εκπαίδευση και υποστήριξη όλων των εμπλεκομένων φορέων.

Πριν την έναρξη του προγράμματος, καταρτίστηκε από την διεύθυνση του σχολείου σε συνεργασία με την ερευνητική ομάδα και όλο το υπόλοιπο εκπαιδευτικό προσωπικό του σχολείου, σχέδιο δράσης της σχολικής μονάδας για την ενσωμάτωση των οθονών αφής, στη βάση της υπάρχουσας υποδομής και των ιδιαίτερων αναγκών των εκπαιδευτικών και σε συνάρτηση με τις ιδιαιτερότητες της σχολικής μονάδας (μαθητικός πληθυσμός, γονείς, κ.λπ.). Η όλη διαδικασία ενσωμάτωσης αποφασίστηκε όπως χωριστεί σε τέσσερις φάσεις (βλέπε Διάγραμμα 1):

Διάγραμμα 1: Φάσεις Υλοποίησης Προγράμματος

Φάση Ι: Προπαρασκευαστικό Στάδιο (Αύγ. 2016-Δεκ. 2016). Σε πρώτο στάδιο, έγινε επιμόρφωση όλου του διδακτικού προσωπικού του σχολείου σε θέματα παιδαγωγικής αξιοποίησης των φορητών συσκευών στα μαθηματικά και άλλα γνωστικά αντικείμενα. Διοργανώθηκε διήμερο βιωματικό εργαστήρι επιμόρφωσης που αποσκοπούσε στην: (i) εξοικείωση των εκπαιδευτικών με τις φορητές συσκευές και τις εκπαιδευτικές τους δυνατότητες, (ii) γνωριμία με τεχνικές εκπαιδευτικού σχεδιασμού και ενσωμάτωσης φορητών συσκευών, (iii) εξερεύνηση εποικοδομητικών τρόπων αξιοποίησης της φορητής συσκευής μέσα από το Α.Π. και (iv) γνωριμία με πλήθος εφαρμογών, διαθεματικών αλλά και στοχευμένων στα μαθηματικά. Ακολούθως, σχηματίστηκε ένα κεντρικός πυρήνας έξι (6) εκπαιδευτικών που εξέφρασαν βούληση να ενσωματώσουν άμεσα τις οθόνες αφής στη διδασκαλία τους. Οι εμπλεκόμενοι εκπαιδευτικοί χωρίστηκαν ανά τάξη, με σκοπό τον σχεδιασμό και την συγγραφή σχεδίων μαθήματος ή/και δραστηριοτήτων εστιασμένων στην ενσωμάτωση εφαρμογών φορητών συσκευών στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών. Για πρακτικούς αλλά και παιδαγωγικούς λόγους, αποφασίστηκε όπως οι παρεμβάσεις κατά επικεντρωθούν στις ακόλουθες δύο ενότητες περιεχομένου: (i) *Άλγεβρα*, καθώς συνδέεται άμεσα με την ενεργή μάθηση και την διαδικασία επίλυσης προβλημάτων μέσω της αξιοποίησης φορητών εφαρμογών προγραμματισμού (π.χ. ScratchJr, A.L.E.X.), (ii) *Στατιστική και Πιθανότητες*, καθώς αποτελεί μια από τις πλέον «παραγκωνισμένες» ενότητες των μαθηματικών στο επίσημο Αναλυτικό Πρόγραμμα αλλά και στην διδακτική πράξη, με αποτέλεσμα οι μαθητές της Κύπρου να αντιμετωπίζουν ιδιαίτερη δυσκολία στην κατανόηση στατιστικών εννοιών, όπως καταδεικνύουν διεθνείς έρευνες (π.χ. TIMSS-2015).

Πραγματοποιώντας ομαδικές ή/και ατομικές συναντήσεις με τους εμπλεκόμενους εκπαιδευτικούς σε εβδομαδιαία βάση, η ερευνητική ομάδα ανέλαβε συμβουλευτικό ρόλο, παρέχοντας σχετικές βιβλιογραφικές αναφορές, χρήσιμους συνδέσμους, οδηγούς χρήσης εφαρμογών κ.α.

Στη διάρκεια της Φάσης Ι, δόθηκαν επίσης ενημερωτικά έντυπα προς τους γονείς/κηδεμόνες αλλά και τα παιδιά, όπου πληροφορούνταν για τις δράσεις που επρόκειτο να υλοποιηθούν στο σχολείο. Στα έντυπα, ζητείτο επίσης η γραπτή συγκατάθεση των γονέων/κηδεμόνων για οποιαδήποτε συμπλήρωση ερωτηματολογίου από μαθητές/τριες, μαγνητοσκόπηση ή/και οπτικογράφηση μαθητών/τριών σε οποιαδήποτε φάση της έρευνας.

Φάση ΙΙ: Πιλοτική Εφαρμογή Προγράμματος (Ιαν. 2017-Ιούν. 2017). Στο στάδιο αυτό, έγινε η υλοποίηση των διδακτικών παρεμβάσεων που είχαν σχεδιαστεί στην Φάση Ι στις τάξεις των εμπλεκόμενων εκπαιδευτικών, με τη βοήθεια της ερευνητικής ομάδας. Διεξήχθησαν συνολικά 12 διδακτικές παρεμβάσεις διάρκειας 10-12 διδακτικών περιόδων η καθεμία. Συχνά, αυτές οι παρεμβάσεις είχαν την μορφή συνδιδασκαλίας, καθώς και παρακολούθησης δειγματικών μαθημάτων από το υπόλοιπο διδακτικό προσωπικό του σχολείου. Οι δράσεις της Φάσης ΙΙ περιλάμβαναν επίσης την οργάνωση βιωματικών εργαστηρίων, παρακολούθηση δειγματικών μαθημάτων από εκπαιδευτικούς εντός και εκτός σχολικής μονάδας, ενημερωτικές παρουσιάσεις προς τους γονείς, βραδιές μαθηματικών και τεχνολογίας απευθυνόμενες σε μαθητές και τους γονείς τους, κλπ.

Φάση ΙΙΙ: Αξιολόγηση Πιλοτικής Εφαρμογής (Ιούλ. 2017-Οκτ. 2017). Στο παρόν στάδιο διενεργείται λεπτομερής αξιολόγηση της πιλοτικής εφαρμογής του προγράμματος. Γίνεται λεπτομερής ανάλυση των πολλαπλών πηγών δεδομένων που είχαν συλλεχθεί κατά τις Φάσεις Ι & ΙΙ (βλέπε πιο κάτω), ούτως ώστε να αξιολογηθεί η αποτελεσματικότητα του προγράμματος και να γίνουν σχετικές αναθεωρήσεις και βελτιώσεις.

Φάση IV: Ολοκληρωμένη Εφαρμογή Προγράμματος (Νοέμ. 2017-Ιούν. 2018). Με βάση την ανατροφοδότηση από την πιλοτική εφαρμογή, θα σχεδιαστεί και θα υλοποιηθεί κατά το σχολικό έτος 2017-2018 σταδιακή ενσωμάτωση των φορητών συσκευών σε μεγαλύτερο αριθμό τάξεων μαθηματικών, σε περισσότερες ενότητες του Αναλυτικού Προγράμματος των μαθηματικών, καθώς και σε άλλα γνωστικά αντικείμενα.

Μέθοδοι συλλογής και ανάλυσης δεδομένων

Σε όλη τη διάρκεια του προγράμματος γίνεται συλλογή και ανάλυση διαφόρων πηγών δεδομένων, ούτως ώστε να διερευνηθούν διεξοδικά οι στάσεις, αντιλήψεις και πρακτικές όλων των εμπλεκομένων φορέων όσον αφορά στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών μέσω της τεχνολογίας οθονών αφής κατά τις διάφορες φάσεις εφαρμογής του προγράμματος. Πριν την έναρξη και μετά το τέλος του προγράμματος (Φάσεις I & IV), χορηγήθηκαν/θα χορηγηθούν ερωτηματολόγια (pre/post-surveys) σε μαθητές, γονείς και εκπαιδευτικούς για καταγραφή των αρχικών/τελικών στάσεων, πρακτικών και τάσεων που παρατηρούνταν στη χρήση των φορητών συσκευών και άλλων τεχνολογικών μέσων στο σχολείο και στο σπίτι. Τα ερωτηματολόγια οριστικοποιήθηκαν μετά από πιλοτική χορήγηση σε μικρή ομάδα ατόμων (5-10 άτομα) και χορηγήθηκαν/θα χορηγηθούν σε ηλεκτρονική μορφή κοινοποιώντας στους συμμετέχοντες ένα ασφαλή σύνδεσμο που δημιουργήθηκε με την χρήση της πλατφόρμας Google Forms.

Η κάθε διδακτική παρέμβαση που διεξήχθη ή που θα διεξαχθεί στη διάρκεια του προγράμματος συνοδεύεται από τη συλλογή πολλαπλών πηγών δεδομένων σε τρία στάδια: (i) *Αρχική αξιολόγηση* μέσω χορήγησης διαγνωστικού δοκιμίου για εντοπισμό των αρχικών/εναλλακτικών ιδεών και δυσκολιών που πιθανόν να αντιμετωπίζουν οι μαθητές/τριες και ως προπαρασκευή για τον σχεδιασμό της παρέμβασης, (ii) *Αξιολόγηση διαδικασίας* κατά τη διάρκεια της παρέμβασης χρησιμοποιώντας διάφορες πηγές δεδομένων: βιντεογραφήσεις διδακτικών επεισοδίων, καταγραφή της οθόνης των τεχνολογικών εργαλείων που χρησιμοποιούνται στην κάθε παρέμβαση, ανοικτού τύπου ατομικές συνεντεύξεις μαθητών και εκπαιδευτικών, δείγματα εργασίας παιδιών, σημειώσεις πεδίου, κλπ., (iii) *Τελική αξιολόγηση* για πιστοποίηση και έλεγχο του τι επιτεύχθηκε.

Στη συνέχεια, γίνεται σύντομη παρουσίαση των δραστηριοτήτων που έλαβαν χώρα κατά τις Φάσεις I και II και των κύριων εμπειριών που αποκομίστηκαν. Λόγω του ότι η ανάλυση των συλλεχθέντων δεδομένων βρίσκεται σε εξέλιξη, έχουν συμπεριληφθεί μόνο τα αποτελέσματα των ερωτηματολογίων που χορηγήθηκαν πριν την έναρξη του προγράμματος.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Όπως ήδη έχει αναφερθεί, της έναρξης του προγράμματος προηγήθηκε ο καταρτισμός ενός λεπτομερούς σχεδίου δράσης. Στον καταρτισμό του ενεπλάκησαν όλοι οι εκπαιδευτικοί του σχολείου και στην υλοποίησή του όλοι όσοι θα μπορούσαν να συμβάλουν στην επιτυχία του (εκπαιδευτικοί, γονείς, παιδαγωγικοί σύμβουλοι κτλ.). Ο καταρτισμός του Σχεδίου Δράσης, στηρίχθηκε στην εξέταση του κοινωνικού και πολιτισμικού πλαισίου μέσα στο οποίο θα συντελείτο η επαγγελματική ανάπτυξη και εξέλιξη των εκπαιδευτικών της σχολικής μονάδας. Αρχικά, έγινε *διάγνωση των αναγκών* όλων όσοι θα εμπλέκονταν άμεσα ή έμμεσα στο πρόγραμμα (παιδιών, εκπαιδευτικών, διευθυντικής ομάδας, γονέων). Στη βάση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών και αναγκών των εμπλεκομένων φορέων και του αναθεωρημένου μοντέλου ΤΠΓΠ, καθορίστηκε στην συνέχεια μία σειρά δράσεων *ενδοσχολικής επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών,* καθώς και *ενημέρωσης/επιμόρφωσης των γονέων* και άλλων εμπλεκομένων φορέων, ούτως ώστε να διασφαλιστούν όλες τις απαραίτητες υποστηρικτικές δομές για επιτυχή υλοποίηση του προγράμματος.

Διάγνωση Αναγκών Εμπλεκομένων Φορέων (End-user needs analysis)

Τα ερωτηματολόγια που χορηγήθηκαν σε μαθητές, γονείς και εκπαιδευτικούς πριν την έναρξη του προγράμματος παρείχαν χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με τις αρχικές τάσεις που παρατηρούνταν στη χρήση των φορητών συσκευών και άλλων τεχνολογικών μέσων στο σχολείο και στο σπίτι, αλλά και τις προηγούμενες εμπειρίες των εμπλεκομένων φορέων και την στάση τους έναντι στην αξιοποίηση των φορητών συσκευών στη μάθηση και διδασκαλία των μαθηματικών.

Όλοι οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί (n=*33*) εξέφρασαν θετική στάση έναντι στην εκπαιδευτική χρήση της τεχνολογίας. Σε όλες τις τάξεις γινόταν σε κάποιο βαθμό αξιοποίηση της τεχνολογίας, όμως αυτή έτεινε να περιορίζεται στην χρήση παρουσιάσεων Powerpoint, την προβολή βίντεο, την πλοήγηση στο διαδίκτυο και την αξιοποίηση εφαρμογιδίων τύπου πρακτικής και εξάσκησης (drill-and-practice applets). Οι εκπαιδευτικοί ήταν ιδιαίτερα θετικοί όσον αφορά στη δυνατότητα ενσωμάτωσης ταμπλετών και άλλων φορητών συσκευών στη διδασκαλία τους, όμως δεν είχαν προηγούμενη γνώση και εμπειρία με την φορητή μάθηση. Αν και όλοι χρησιμοποιούσαν τις φορητές συσκευές στην καθημερινή τους ζωή, δεν αισθάνονταν επαρκώς προετοιμασμένοι να ενσωματώσουν τις ταμπλέτες στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Όμως, σχεδόν όλοι (92%) αναγνώριζαν τις δυνατότητες που προσέφερε η αξιοποίηση των ταμπλετών για αύξηση των κινήτρων και της εμπλοκής των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία, αλλά και για μετασχηματισμό και αναβάθμιση της μαθηματικής παιδείας και βελτίωση των μαθησιακών αποτελεσμάτων. Επιθυμούσαν να τύχουν επιμόρφωσης σε θέματα παιδαγωγικής χρήσης των φορητών συσκευών, εκφράζοντας ιδιαίτερο ενδιαφέρον για ευκαιρίες επιμόρφωσης που να εστιάζονται στην αξιοποίηση των φορητών για την ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλήματος και της κριτικής σκέψης των παιδιών.

Οι απαντήσεις στα ερωτηματολόγια που συμπλήρωσαν οι μαθητές (*n=111*) που συμμετείχαν στο πρόγραμμα κατά την σχολική χρονιά 2016-2017 και οι γονείς τους (*n=103*) κατέδειξαν ότι οι φορητές συσκευές είναι αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινής τους ζωής. Σχεδόν όλοι οι μαθητές (95%) είχαν πρόσβαση σε ταμπλέτα στο σπίτι, ενώ τα δύο τρίτα (63%) διέθεταν δική τους ταμπλέτα. Τρία στα τέσσερα παιδιά (74%) δήλωσαν ότι χρησιμοποιούσαν κινητό τηλέφωνο ή ταμπλέτα σε καθημερινή βάση, ενώ σχεδόν όλα τα παιδιά (95%) τουλάχιστον 1-2 φορές την εβδομάδα. Ο κύριος λόγος για τον οποίο χρησιμοποιούσαν τις φορητές συσκευές ήταν η ενασχόληση με ψηφιακά παιχνίδια (92%) κυρίως ψυχαγωγικού περιεχομένου (π.χ. Minecraft, Candy Crash). Σημαντικό ποσοστό επίσης τις χρησιμοποιούσε για ακρόαση μουσικής (67%), επικοινωνία με φίλους/γονείς (60%) και διεκπεραίωση κατ' οίκον εργασίας (54%). Αν και το 47% των παιδιών δήλωσαν ότι έπαιζαν στο σπίτι με κινητό τηλέφωνο ή ταμπλέτα εκπαιδευτικά παιχνίδια που να έχουν σχέση με τα μαθηματικά, τα παραδείγματα στα οποία αναφέρθηκαν κατέδειξαν ότι οι εμπειρίες τους περιορίζονταν σε εφαρμογές τύπου πρακτικής και εξάσκησης, όπως π.χ. «παιχνίδια με αριθμούς», «παιχνίδια πράξεων». Παρόμοια, αν και τα μισά παιδιά (52%) δήλωσαν ότι στο σχολείο χρησιμοποιούσαν εκπαιδευτικά παιχνίδια και άλλες εφαρμογές στο μάθημα των μαθηματικών τουλάχιστον 1-2 φορές την εβδομάδα, και σ' αυτό το πλαίσιο οι εφαρμογές που χρησιμοποιούνταν ήταν τύπου πρακτικής και εξάσκησης. Όταν κλήθηκαν να δηλώσουν τι θα ήθελαν να αλλάξει στο μάθημα των μαθηματικών, ποσοστό 84% των μαθητών δήλωσαν ότι θα επιθυμούσαν να χρησιμοποιούν ταμπλέτες ή άλλες φορητές συσκευές και 74% ότι θα ήθελαν να χρησιμοποιούν πλατφόρμες παιχνιδιών, ψηφιακούς κόσμους κτλ.

Όπως οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές, έτσι και οι γονείς είχαν θετική στάση έναντι στο ενδεχόμενο παιδαγωγικής αξιοποίησης των φορητών συσκευών στο σχολείο και στο σπίτι. Η συντριπτική πλειοψηφία συμφώνησαν ότι *«οι φορητές συσκευές είναι ένα εξαιρετικό εκπαιδευτικό εργαλείο» (80%) και ότι «με τις φορητές συσκευές το παιδί [τους] καλλιεργεί δεξιότητες του 21ου αιώνα» (90%)* . Σε πολύ υψηλά ποσοστά, δήλωσαν ότι θα τους ενδιέφερε η *«συμμετοχή σε σεμινάρια με θέμα την παιδαγωγική αξιοποίηση των φορητών συσκευών στο σπίτι»* (66%) και η *«ενημέρωση σχετικά με το πώς μπορούν οι φορητές συσκευές να εμπλουτίσουν την σχολική εμπειρία»* (89%).

Ενδοσχολική επιμόρφωση εκπαιδευτικών

Μέσω της υιοθέτησης του αναθεωρημένου μοντέλου ΤΠΓΠ του Philips (2016), επιδιώχθηκε η δημιουργία ενός εποικοδομιστικού και κοινωνικού σχολικού πλαισίου το οποίο να υποστηρίζει την ανταλλαγή απόψεων, την συνεργασία, τον πειραματισμό και τον αναστοχασμό ως διαδικασίες κατασκευής της γνώσης. Προς τούτη την κατεύθυνση, συμπεριλήφθηκε μια σειρά δράσεων που αποσκοπούσαν στην αναβάθμιση του ΤΠΓΠ των εκπαιδευτικών: (i) *Συνεδρίες προσωπικού, ομαδικές συναντήσεις και βιωματικά εργαστήρια* για επιμόρφωση στο μοντέλο ΤΠΓΠ και στις συνιστώσες του, (ii) *Δειγματικά μαθήματα* με τη χρήση των οθονών αφής (από εκπαιδευτικούς του κεντρικού πυρήνα ή/και από μέλη της ερευνητικής ομάδας), (iii) *Ομαδικό σχεδιασμό μαθημάτων* στα οποία ενσωματώνονταν οι οθόνες αφής, εφαρμογή, παρακολούθηση και συζήτηση για βελτίωσή τους, (iv) *Επιμορφώσεις σε ατομικό επίπεδο ή και σε ζεύγη τάξεων ή μικρών ομάδων εκπαιδευτικών με τις ίδιες ανάγκες, (v) Αναστοχαστικές συζητήσεις* με βάση αλληλοπαρατηρήσεις διδασκαλιών ή/και συνδιδασκαλίες, παρακαλούθηση βιντεοσκοπημένων αποσπασμάτων από κάποιες τάξεις, κλπ., (vi) Εφαρμογή της *μεθοδολογίας της έρευνας δράσης*.

Οι πιο πάνω δράσεις, συνέβαλαν στη δημιουργία θετικής και υποστηρικτικής κουλτούρας, και συγκεκριμένα στην: (i) Ανάπτυξη διαλόγου και συνεργασίας ανάμεσα σε εκπαιδευτικούς με διαφορετικά επίπεδα αξιοποίησης και εμπειρίας, αναφορικά με τη χρήση των φορητών συσκευών, (ii) Ώθηση των εκπαιδευτικών να μοιράζονται τις γνώσεις, εμπειρίες και εκπαιδευτικές τους πρακτικές, (iii) Ανάπτυξη ευκαιριών για αξιοποίηση των γνώσεων, δεξιοτήτων και ικανοτήτων όλων των μελών του προσωπικού, (iv) Αλληλεπίδραση και αλληλοστήριξη στον διάλογο και αναστοχασμό, στην ανταλλαγή εμπειριών, απόψεων και καλών πρακτικών, (v) Υιοθέτηση ερευνητικού ρόλου για δημιουργία νέας γνώσης, (vi)Υιοθέτηση της έρευνας δράσης ως ερευνητικής μεθοδολογίας και διαδικασίας επαγγελματικής ανάπτυξης, (vii) Προσφορά ευκαιριών για αναστοχαστικές διαδικασίες, αυτο-αξιολόγηση και προβληματισμό για τις πρακτικές που υιοθετούνται, (viii) Ανταλλαγή διαφορετικών τρόπων σκέψης, μεθοδολογίας και προσεγγίσεων, (ix) Αξιοποίηση πρακτικών τρόπων επιμόρφωσης, (x) Λειτουργία κοινοτήτων μάθησης στο σχολείο.

Η ερευνητική ομάδα μαζί με την διεύθυνση του σχολείου και τον κεντρικό πυρήνα εκπαιδευτικών συντόνιζαν την όλη προσπάθεια, στηρίζοντας τους υπόλοιπους εκπαιδευτικούς σε τυχόν δυσκολίες, προβληματισμούς και εμπόδια που αντιμετώπιζαν. Παράλληλα, καταβαλλόταν συνεχής προσπάθεια για σταδιακή εμπλοκή περισσότερων μελών του προσωπικού στην όλη διαδικασία, πράγμα που επιτεύχθηκε. Αναμένεται μάλιστα ότι κατά το επόμενο σχολικό έτος (2017-2018, Φάση IV του προγράμματος) θα εμπλακούν στο πρόγραμμα τα πλείστα τμήματα της σχολικής μονάδας.

Ενημέρωση/επιμόρφωση γονέων

Αναγνωρίζοντας το γεγονός ότι η συνεργασία με τους γονείς είναι θεμελιώδους σημασίας για τη διασφάλιση της επιτυχούς εισαγωγής των φορητών συσκευών στην εκπαιδευτική διαδικασία, οι Φάσεις I και II περιλάμβαναν μία σειρά δράσεων που συνέβαλαν στην ενημέρωση και ενεργητική εμπλοκή των γονέων: (i) *Αποστολή ενημερωτικών εντύπων* σε όλους τους γονείς στην Φάση I και στους γονείς των παιδιών που συμμετείχαν στις διδακτικές παρεμβάσεις της Φάσης II, (ii) *Ενημερωτική συγκέντρωση γονέων* κατά τη Φάση II (Μάρτιος 2017) που περιλάμβανε παρουσίαση των αποτελεσμάτων των αρχικών ερωτηματολογίων γονέων και μαθητών, παραδείγματα από τις διδακτικές παρεμβάσεις μέσα από επίδειξη οπτικογραφημένου υλικού και συζήτηση γύρω από στρατηγικά θέματα που αφορούν τους γονείς (π.χ. τρόποι παιδαγωγικής αξιοποίησης των φορητών συσκευών στο σπίτι, γονικός έλεγχος και ασφάλεια στο διαδίκτυο), *(iii) Διοργάνωση βραδιών μαθηματικών και τεχνολογίας* στα τέλη του σχολικού έτους 2016-2017, όπου οι γονείς ενεπλάκησαν μαζί με τα παιδιά τους σε πρακτικές, διασκεδαστικές και παιγνιώδεις μαθηματικές δραστηριότητες με την χρήση των φορητών συσκευών.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Αναμφίβολα, το μοντέλο της ΤΠΓΠ παρέχει ένα στέρεο θεωρητικό πλαίσιο το οποίο επηρεάζει σήμερα διεθνώς τους ερευνητικούς και εκπαιδευτικούς σχεδιασμούς που αφορούν στην ένταξη των ΤΠΕ στην εκπαίδευση (Τζιμογιάννης & Κόμης, 2016). Όμως, παρά το γεγονός ότι το μοντέλο έχει αξιοποιηθεί από εκατοντάδες ερευνητές, ο αριθμός των μελετών που αναφέρονται σε εν υπηρεσία εκπαιδευτικούς είναι μικρός, ενώ η διερεύνηση του τρόπου απόκτησης της ΤΠΓΠ στον εργασιακό χώρο αποτελεί μια ανεξερεύνητη περιοχή (Philips, 2016). Επιπρόσθετα, η πλειοψηφία των υπαρχουσών ερευνών δίνουν ελάχιστη σημασία στο κοινωνικοπολιτισμικό πλαίσιο μέσα στο οποίο το ΤΠΓΠ εξελίσσεται και ενεργοποιείται, αγνοώντας σημαντικούς παράγοντες που επηρεάζουν τις διαδικασίες διαμόρφωσης της ταυτότητας των εκπαιδευτικών, καθώς και των πρακτικών τους. Αναγνωρίζοντας τις πιο πάνω αδυναμίες, η παρούσα έρευνα υιοθέτησε το εννοιολογικό πλαίσιο του Phillips (2016), ενισχύοντας έτσι το βασικό μοντέλο της ΤΠΓΠ μέσα από την προσθήκη των συνιστωσών των κοινοτήτων πρακτικής και της επιμόρφωσης με βάση το σχολείο. Η προκαταρκτική ανάλυση των δεδομένων καταδεικνύει ότι η υιοθέτηση του αναθεωρημένου μοντέλου έχει συμβάλει προσθετικά στην όλη προσπάθεια της σχολικής μονάδας για ενσωμάτωση των φορητών συσκευών. Η αξιοποίηση του κοινωνικοπολιτισμικού πλαισίου εντός του οποίου συντελείται η επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών, έχει ενισχύσει την ενεργητική συμμετοχή του διδακτικού προσωπικού και των άλλων εμπλεκομένων φορέων και την ανάπτυξη κουλτούρας διαλόγου. Αυτό έχει συμβάλει στην δημιουργία ενός ευέλικτου περιβάλλοντος που υποστηρίζει την ανταλλαγή απόψεων, την συνεργασία, τον αναστοχασμό και τον πειραματισμό ως διαδικασίες κατασκευής της γνώσης.

Αναμένεται ότι τα αποτελέσματα του παρόντος ερευνητικού έργου, θα αποτελέσουν βάση για μελλοντικά προγράμματα επιμόρφωσης, αλλά και για έρευνες στην Κύπρο και σε άλλες χώρες, ώστε να βελτιωθεί η διδασκαλία και κατά προέκταση τα επιτεύγματα των παιδιών στα μαθηματικά μέσω της αξιοποίησης των φορητών συσκευών και άλλων καινοτόμων τεχνολογικών εργαλείων. Συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα αυτά, τα οποία θα έχουν προκύψει από την σχολική πραγματικότητα, θα εσωκλείουν χρήσιμες στρατηγικές για στήριξη των εκπαιδευτικών να προχωρήσουν σε υψηλά επίπεδα τεχνολογικής παιδαγωγικής γνώσης περιεχομένου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Clark, W. & Luckin, R. (2013). *What the research says - iPads in the classroom*. London Knowledge Lab, Institute of Education: University of London.

Kyriakides, A., Meletiou-Mavrotheris, M., & Prodromou, T. (2016). Mobile technologies in the service of students' learning of mathematics: The example of game app A.L.E.X. in the context of a primary school in Cyprus. *Mathematics Education Research Journal (MERJ), 28*(1), 53-78.

McLaughlin, M. W., & Talbert, J. E. (2006). *Building school-based teacher learning communities: Professional strategies to improve student achievement.* New York: Teachers College Press.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017-1054.

Phillips, M. (2016). Re-contextualising TPACK: exploring teachers’ (non)use of digital technologies, *Technology, Pedagogy and Education*, *25*(5), 555-571.

Τζιμογιάννης, Α., & Κόμης, Β. (2016). *Νέες ερευνητικές κατευθύνσεις στην Τεχνολογική Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου (TPACK)*. 10ο Πανελλήνιο και Διεθνές Συνέδριο «Οι ΤΠΕ στην Εκπαίδευση», Ιωάννινα, 23-25 Σεπτεμβρίου.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice. Learning, meaning and identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

ΑΤΟΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΣΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΓΙΑ ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Μπεμπένη Μαρία*, Πουλοπούλου Σταυρούλα και Βαμβακούση Ξένια***

*Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, **Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

mbempeni@cc.uoi.gr, spoulopo@gmail.com, xenva@cc.uoi.gr,

Σε μια ποσοτική μελέτη, ελέγξαμε την υπόθεση ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο που οι μαθητές συνδυάζουν την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τα κλάσματα που παραμένουν σημαντικές ακόμα και στο Γυμνάσιο. Για το σκοπό αυτό κατασκευάσαμε και αξιολογήσαμε ένα ερωτηματολόγιο που επιδόθηκε σε 138 μαθητές Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου. Σε συμφωνία με την υπόθεσή μας, πάνω από το μισούς συμμετέχοντες ομαδοποιήθηκαν μέσω ανάλυσης συστάδων σε δύο προφίλ: μαθητές των οποίων η εννοιολογική γνώση υπερτερεί σε σχέση με τη διαδικαστική (21,2%) και μαθητές των οποίων η διαδικαστική γνώση υπερτερεί σε σχέση με την εννοιολογική (34%).

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ως διαδικαστική γνώση ορίζεται η ικανότητα του ατόμου να εκτελεί μία αλληλουχία πράξεων για να επιλύει προβλήματα ενώ η εννοιολογική γνώση περιλαμβάνει γνώση για τις έννοιες και τις σχετικές αρχές που διέπουν ένα πεδίο (Rittle-Johnson, Siegler, & Alibali, 2001). Οι σύγχρονες θεωρήσεις για τη μάθηση των μαθηματικών συγκλίνουν στην άποψη ότι τόσο η διαδικαστική όσο και η εννοιολογική γνώση είναι εξίσου απαραίτητες (Rittle-Johnson & Schneider, 2014). Ωστόσο η μαθηματική εκπαίδευση αμφιταλαντεύεται, δίνοντας προτεραιότητα πότε στον έναν και πότε στον άλλον τύπο γνώσης (Moss & Case, 1999; Star, 2005). Έτσι, ανακύπτουν ερωτήματα σχετικά με τις βέλτιστες διδακτικές προσεγγίσεις που πρέπει να υιοθετηθούν.

Ένα πρόβλημα στο χώρο έρευνας για τη διαδικαστική και την εννοιολογική γνώση γενικά, και στα μαθηματικά συγκεκριμένα, είναι η σειρά με την οποία αναπτύσσονται τα δύο είδη γνώσης. Πράγματι, υπάρχουν εμπειρικά δεδομένα που υποστηρίζουν δύο εκ διαμέτρου αντίθετες θεωρητικές απόψεις, δηλαδή τόσο ότι η διαδικαστική γνώση προηγείται της εννοιολογικής, όσο και το αντίστροφο (Rittle-Johnson et al., 2001). Ανεξάρτητα από το ποιο είδος προηγείται, η σχέση ανάμεσα στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τη μαθηματική γνώση είναι συχνά αμφίδρομη. Σύμφωνα με το επαναληπτικό μοντέλο των Rittle–Johnson et al. (2001), τα δύο είδη αναπτύσσονται παράλληλα και συσχετίζονται θετικά με τη βελτίωση του ενός είδους γνωσης να οδηγεί στη βελτίωση του άλλου, το οποίο με τη σειρά του ενισχύει το πρώτο είδος γνώσης. Οι παραπάνω θεωρίες, παρότι διαφορετικές, συμφωνούν στο ότι όλοι οι μαθητές αναπτύσσουν τα δύο είδη γνώσης με τον ίδιο τρόπο. Ωστόσο η σχέση μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης δεν είναι πάντα συμμετρική, με την έννοια ότι η επιρροή της εννοιολογικής γνώσης στη διαδικαστική δεν είναι ίδια με αυτή της διαδικαστικής γνώσης στην εννοιολογική (Rittle-Johnson & Schneider, 2014), τεκμηριώνοντας την ύπαρξη ατομικών διαφορών, δηλαδή τη διαφορετικότητα στον τρόπο που οι μαθητές συνδυάζουν τα δύο είδη γνώσης (Canobi, 2004; Canobi, Reeve, & Patisson, 2003).

Πρόσφατα, οι Hallett και συνεργάτες (Hallett, Nunes, & Bryant, 2010; Hallett, Nunes, Bryant, & Thorpe, 2012) ερεύνησαν τέτοιου είδους ατομικές διαφορές στο χώρο των ρητών αριθμών. Οι Hallett et al. (2010) υπέθεσαν ότι τα παιδιά μπορούν να μάθουν, είτε αναπτύσσοντας πρώτα τις διαδικασίες, είτε τις έννοιες και σε αντίθεση με τους Rittle Johnson et al. (2001) δε θεωρούν ότι το ένα είδος γνώσης οδηγεί απαραίτητα στην ανάπτυξη του άλλου είδους. Από έρευνά τους στην οποία συμμετείχαν μαθητές Δ΄ και Ε΄ Δημοτικού, βρέθηκε ότι υπάρχουν μαθητές που βασίζονται περισσότερο στη διαδικαστική γνώση, μαθητές που βασίζονται περισσότερο στην εννοιολογική και μαθητές που βασίζονται εξίσου στα δύο είδη γνώσης. Επιπλέον εντοπίστηκαν δύο ομάδες μαθητών που δυσκολεύονται στα κλάσματα, δηλαδή, μαθητές χωρίς την προσδοκώμενη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση. Οι Hallett et al. (2012) επέκτειναν την έρευνά τους σε παιδιά ΣΤ΄ Δημοτικού και Β΄ Γυμνασίου και επιβεβαίωσαν την ύπαρξη ατομικών διαφορών στη γνώση για τα κλάσματα, οι οποίες, αξίζει να σημειωθεί, ήταν λιγότερο εμφανείς στα παιδιά της Β΄ Γυμνασίου.

Σε προηγούμενη ποιοτική έρευνα (Bempeni & Vamvakoussi, 2015) εξετάστηκε η διαδικαστική και εννοιολογική γνώση επτά μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου στους ρητούς αριθμούς. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο που τα παιδιά συνδυάζουν τα δύο είδη γνώσης για τους ρητούς αριθμούς. Πιο συγκεκριμένα, προέκυψαν τρία προφίλ μαθητών. Οι 3 μαθητές που κατατάχθηκαν στο πρώτο προφίλ πέτυχαν σε σχεδόν όλα τα έργα κάνοντας ευέλικτη χρήση διαδικαστικών και εννοιολογικών στρατηγικών (διαδικαστικό-εννοιολογικό προφίλ). Οι 3 μαθητές που ανήκαν στο διαδικαστικό προφίλ πέτυχαν σε όλα τα έργα που μπορούσαν να λυθούν με διαδικαστικές στρατηγικές, αλλά απέτυχαν σε εκείνα που εξέταζαν ακόμα και απλή εννοιολογική κατανόηση (διαδικαστικό προφίλ). Η μία μαθήτρια του εννοιολογικού προφίλ πέτυχε στα περισσότερα έργα που εξέταζαν εννοιολογική γνώση, ακόμη και τα πιο απαιτητικά, χρησιμοποιώντας συστηματικά εννοιολογικές στρατηγικές, αλλά απέτυχε σε όλα τα έργα με διαδικαστική στόχευση. Τα ευρήματα αυτά δείχνουν, επιπλέον, ότι είναι δυνατόν να υπάρχουν ακραίες ατομικές διαφορές στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τους ρητούς αριθμούς, παρά το γεγονός ότι οι διαφορές συνήθως αμβλύνονται με την ηλικία (Hallett et al., 2012), και μάλιστα σε μεγαλύτερα παιδιά από αυτά που συμμετείχαν στην έρευνα των Hallett et al. (2012). Τα ευρήματα αυτά έχουν ιδιαίτερο θεωρητικό ενδιαφέρον γιατί αντιτάσσονται στις θεωρίες που υποστηρίζουν ότι από όλα τα παιδιά ακολουθείται μία συγκεκριμένη αναπτυξιακή οδός για την απόκτηση των δύο ειδών γνώσης (βλ. επίσης Canobi et al., 2003) και θέτουν μια πρόκληση για το επαναληπτικό μοντέλο των Rittle-Johnson et al. (2001) που υποστηρίζει ότι η εννοιολογική και διαδικαστική γνώση στα μαθηματικά αναπτύσσονται παράλληλα.

Για την περαιτέρω διερεύνηση αυτού του θέματος, κατασκευάστηκε και αξιολογήθηκε ένα καινούργιο εργαλείο μέτρησης της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης στα κλάσματα. Χρησιμοποιήθηκε το εργαλείο αυτό σε μαθητές Α΄ & Γ΄ Γυμνασίου για να ελέγχθεί η υπόθεση ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο που οι μαθητές συνδυάζουν τα δύο είδη γνώσης για τα κλάσματα. Επιπλέον, στόχος ήταν να ελεγχθεί αν, παρόμοια με το εύρημα των Hallett et al. (2012), οι ατομικές διαφορές αμβλύνονται στις μεγαλύτερες ηλικίες.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Μέσα συλλογής δεδομένων

Το ερευνητικό εργαλείο περιλάμβανε 39 έργα για τα κλάσματα τα οποία ήταν ομαδοποιημένα σε δύο μέρη: το πρώτο μέρος περιλάμβανε 12 διαδικαστικά έργα με τη μορφή ερωτήσεων ανοικτού τύπου και το δεύτερο 27 εννοιολογικά έργα με τη μορφή ερωτήσεων πολλαπλής επιλογής. Τα διαδικαστικά έργα τέθηκαν με τη μορφή ερωτήσεων ανοικτού τύπου προκειμένου να διασφαλιστεί ότι οι μαθητές είναι σε θέση να εκτελούν τους σχετικούς αλγορίθμους. Αντίθετα, η εννοιολογική γνώση εξετάστηκε με τη μορφή ερωτήσεων πολλαπλής επιλογής με σκοπό να αποφευχθεί η επίλυση των έργων με χαρτί και μολύβι π.χ. ένα έργο σύγκρισης κλασμάτων δεν εξετάζει εννοιολογική γνώση αν τα κλάσματα μετατραπούν σε ομώνυμα προκειμένου να συγκριθούν. Τα διαδικαστικά έργα απαιτούσαν τη γνώση αλγορίθμων που διδάσκονται στο σχολείο (πράξεις με κλάσματα, εφαρμογή του «χιαστί», μετατροπή σύνθετου κλάσματος σε απλό, κανόνες της σύγκρισης). Η κατασκευή των εννοιολογικών έργων βασίστηκε σε μία εκτεταμένη ανασκόπηση της βιβλιογραφίας και ως βάση αξιοποιήθηκαν έργα τα οποία έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί σε προηγούμενη έρευνα (Bempeni & Vamvakoussi, 2015). Πιο συγκεκριμένα, τα έργα αφορούσαν τη σχηματική αναπαράσταση γνήσιων και καταχρηστικών κλασμάτων σε επιφάνεια, την αναγνώριση του κλάσματος ως λόγου, το ρόλο του κλάσματος ως λόγο σε πραγματικό πρόβλημα, την κατανόηση της επίδρασης του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με κλάσματα ως όρους, την επιλογή της κατάλληλης πράξης σε πραγματικό πρόβλημα, τη σύγκριση και διάταξη κλασμάτων, την αναπαράσταση κλασμάτων στην αριθμογραμμή, την εκτίμηση αποτελέσματος αθροίσματος κλασμάτων και την πυκνή διάταξη των κλασμάτων. Να σημειωθεί ότι, ενώ τα περισσότερα από τα έργα εμπίπτουν στη διδακτέα ύλη, δεν εντοπίστηκαν όμοια ή κάποια παραλλαγή αυτών στο σχολικό εγχειρίδιο.

Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν 138 μαθητές, εκ των οποίων 70 μαθητές της Α΄ και 68 μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου.

Διαδικασία

Δόθηκε το ίδιο ερωτηματολόγιο σε δύο εκδοχές (Α και Β), με τα έργα σε διαφορετική σειρά ή μορφή έτσι ώστε να αποφευχθούν φαινόμενα αντιγραφής. Οι μαθητές είχαν πενήντα λεπτά στη διάθεσή τους για να απαντήσουν στα έργα για τα κλάσματα.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ - ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι απαντήσεις των ερωτήσεων και των δύο ομάδων κωδικοποιήθηκαν ως σωστές ή λανθασμένες. Για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα στατιστικής επεξεργασίας SPSS και η γλώσσα προγραμματισμού R (R Project for Statistical Computing).

Αξιολόγηση εργαλείου

Προκειμένου να αξιολογηθεί το εργαλείο της έρευνας ως προς την εγκυρότητα και την αξιοπιστία του διενεργήθηκε πιλοτική έρευνα με μικρό αριθμό μαθητών (61 άτομα).

Για τον έλεγχο της εγκυρότητας του ερωτηματολογίου ως προς τους εννοιολογικούς και λειτουργικούς ορισμούς, πραγματοποιήθηκε *έλεγχος εγκυρότητας προσώπου* καθώς επίσης και *έλεγχος εγκυρότητας περιεχομένου*. Για την εγκυρότητα προσώπου, ρωτήθηκαν 6 ειδικοί του χώρου (μέλη ΔΕΠ, διδάκτορες και υποψήφιοι διδάκτορες της Διδακτικής των Μαθηματικών) αν το ερωτηματολόγιο αυτό φαίνεται να είναι ένα καλό εργαλείο μέτρησης της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης των κλασμάτων και αν όλες οι ερωτήσεις είναι διατυπωμένες κατά τρόπο σαφή. Οι ειδικοί έκριναν το ερωτηματολόγιο ως σαφές, ακριβές και πλήρες. Για την εγκυρότητα του περιεχομένου, οι ειδικοί αξιολόγησαν τη σχέση καθεμιάς από τις 39 ερωτήσεις με το σκοπό του ερωτηματολογίου, σε μια κλίμακα από 1 έως 4, όπου 1 = μη σχετικό, 2 = κάπως σχετικό, 3 = αρκετά σχετικό, και 4 = πολύ σχετικό. Για κάθε ερώτηση, υπολογίστηκε ο δείκτης εγκυρότητας περιεχομένου CVI. Οι ειδικοί θεώρησαν όλες τις ερωτήσεις σχετικές με το θέμα, επομένως ο δείκτης βρέθηκε 1, δηλαδή έλαβε τιμή μεγαλύτερη από 0,83 που απαιτείται για να θεωρηθεί αποδεκτή η ερώτηση (Polit, Beck, & Owen, 2007).

Για να διερευνηθεί αν κάθε υποκατηγορία ερωτημάτων (κλίμακα) όντως μετράει την διαδικαστική και εννοιολογική γνώση των μαθητών έγινε *έλεγχος εγκυρότητας εννοιολογικής κατασκευής* με την μέθοδο ανάλυσης πολλαπλών χαρακτηριστικών. Κατασκευάστηκε *πίνακας συσχετίσεων πολλαπλών χαρακτηριστικών* ώστε να μελετηθεί τόσο η *συγκλίνουσα εγκυρότητα* όσο και η *διακρίνουσα εγκυρότητα* του ερωτηματολογίου.

Όλες οι ερωτήσεις για τη διερεύνηση της διαδικαστικής γνώσης παρουσίασαν υψηλή συγκλίνουσα εγκυρότητα, δηλαδή υψηλή συσχέτιση με την κλίμακα στην οποία ανήκουν. Οι συσχετίσεις έλαβαν τιμές μεγαλύτερες του 0,7 και σε όλες τις περιπτώσεις υπερέβησαν τις αντίστοιχες συσχετίσεις με την κλίμακα στην οποία δεν ανήκουν, γεγονός αυτό αναδεικνύει την ύπαρξη εγκυρότητας διάκρισης του ερωτηματολογίου. Ωστόσο κάποιες ερωτήσεις για τη διερεύνηση της εννοιολογικής γνώσης επέδειξαν χαμηλή συσχέτιση με την κλίμακα στην οποία ανήκουν. Μία πιθανή εξήγηση είναι η διαφορετική δυσκολία αυτών των έργων, που αποδείχτηκαν ιδιαίτερα απαιτητικά για τους μαθητές της πιλοτικής έρευνας. Δεδομένου, ωστόσο, ότι πρόκειται για έργα που μπορούν να διαχωρίσουν τους συμμετέχοντες με πολύ υψηλή εννοιολογική κατανόηση, αποφασίστηκε να μην εξαιρεθούν από το εργαλείο (βλ. επίσης Hallett et al., 2012).

Όσον αφορά τον έλεγχο της αξιοπιστίας του ερωτηματολογίου, αρχικά έγινε *έλεγχος αξιοπιστίας εσωτερικής συνάφειας* (Ware & Gandek, 1998). Υπολογίστηκαν οι τιμές του συντελεστή άλφα του Cronbach για κάθε κλίμακα, όπως επίσης και η τιμή του συντελεστή άλφα του Cronbach που θα είχε η κλίμακα στην οποία ανήκει αν αφαιρούσαμε την συγκεκριμένη ερώτηση από αυτή την κλίμακα, για κάθε ερώτηση ξεχωριστά. Βρέθηκε ότι οι κλίμακες παρουσιάζουν υψηλό επίπεδο εσωτερικής συνάφειας, με την κλίμακα για την διερεύνηση του βαθμού διαδικαστικής γνώσης να παρουσιάζει τα υψηλότερα επίπεδα εσωτερικής συνάφειας 0,930, ενώ η κλίμακα σχετικά με το βαθμό εννοιολογικής γνώσης να παρουσιάζει βαθμό εσωτερικής συνάφειας 0,762.

Για τον *έλεγχο αξιοπιστίας εξωτερικής συνάφειας* χρησιμοποιήθηκε η διαδικασία των επαναληπτικών μετρήσεων με σκοπό την εκτίμηση της αξιοπιστίας ελέγχου-επανελέγχου. Από το σύνολο των 61 ατόμων της πιλοτικής μελέτης, 40 κατέστη δυνατόν να απαντήσουν και πάλι στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου μετά την πάροδο 15 ημερών. Για κάθε ερώτηση υπολογίστηκε ο ενδοταξιακός συντελεστής (intraclass correlation) για να διερευνηθεί η συνέπεια μεταξύ των δυο μετρήσεων και διαπιστώθηκε ότι όλα τα διαδικαστικά έργα και τα περισσότερα από τα εννοιολογικά έργα παρουσιάζουν καλό συντελεστή αξιοπιστίας (>0,50).

Κύρια Ανάλυση

Τα δεδομένα αναλύθηκαν με τη μέθοδο της ανάλυσης συστάδων με μεταβλητές τα κανονικοποιημένα κατάλοιπα των μέσων ποσοστών επιτυχίας (σκορ) στους δύο τύπους έργων, τα οποία προέκυψαν με παλινδρόμηση του ενός σκορ με το άλλο. Ένα θετικό (αντ. αρνητικό) κατάλοιπο π.χ. στο διαδικαστικό σκορ σημαίνει ότι η επίδοση του ατόμου στα αντίστοιχα έργα είναι υψηλότερη (αντ. χαμηλότερη) από την προβλεπόμενη επίδοση στα εννοιολογικά έργα. Επιλέχθηκαν τα τυποποιημένα κατάλοιπα έτσι ώστε το μέτρο του κάθε είδους γνώσης να είναι ανεξάρτητο από το μέτρο του άλλου (βλ. και Hallett et al., 2012).

Χρησιμοποιήθηκε η γλώσσα προγραμματισμού R (The R package clValid) (Brock, Pihur, Datta, & Datta, 2008) για να επιλεγεί ο βέλτιστος αριθμός συστάδων (clusters) στατιστικά χρησιμοποιώντας μία σειρά από μέτρα αξιολόγησης της εγκυρότητας. Προέκυψε ότι καλύτερη στατιστική μέθοδος για την ομαδοποίηση των δεδομένων μας ήταν ο αλγορίθμος k-means με βέλτιστο αριθμό συστάδων τις τέσσερις.

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται το μέσο εννοιολογικό και διαδικαστικό σκορ και τα αντίστοιχα κανονικοποιημένα κατάλοιπα ανά συστάδα.

Η πρώτη συστάδα ("Καλύτεροι στη διαδικαστική", N=47, 34%) χαρακτηρίζεται από θετικό διαδικαστικό κατάλοιπο και αρνητικό εννοιολογικό κατάλοιπο. Δηλαδή, η συστάδα αυτή αποτελείται από μαθητές των οποίων η διαδικαστική επίδοση ήταν υψηλότερη από την προβλεπόμενη, ενώ η εννοιολογική τους επίδοση ήταν χαμηλότερη από την προβλεπόμενη. Το αντίθετο συμβαίνει στη τέταρτη συστάδα ("Καλύτεροι στην εννοιολογική", N=29, 21,2%), η οποία χαρακτηρίζεται από αρνητικό διαδικαστικό κατάλοιπο και θετικό εννοιολογικό κατάλοιπο).

Η δεύτερη συστάδα (“Υψηλά και στις δύο”, N=26, 18.8%) χαρακτηρίζεται από θετικό εννοιολογικό και θετικό διαδικαστικό κατάλοιπο, δηλαδή αποτελείται από μαθητές που παρουσίασαν υψηλότερη από την προβλεπόμενη επίδοση και στους δύο τύπους έργων.

	Συστάδα								***p-value***
	1		***2***		***3***		***4***		
	MT	***TA***	***MT***	***TA***	***MT***	***TA***	***MT***	***TA***	
Διαδικαστικό κατάλοιπο	0.9	0.5	0.3	0.4	-0.3	0.5	-1.5	0.4	<.0001
Εννοιολογικό κατάλοιπο	-0.9	0.5	1.2	0.8	-0.2	0.4	0.7	0.6	<.0001
Διαδικαστικό σκορ	69.8	17.6	86.9	11.8	36.5	21.8	8.9	11.1	<.0001
Εννοιολογικό σκορ	4.5	8.2	54.8	10.6	26.2	8.1	31.2	8.6	<.0001

Συστάδα 1: Καλύτεροι στη διαδικαστική

Συστάδα 2: Υψηλά και στις δύο

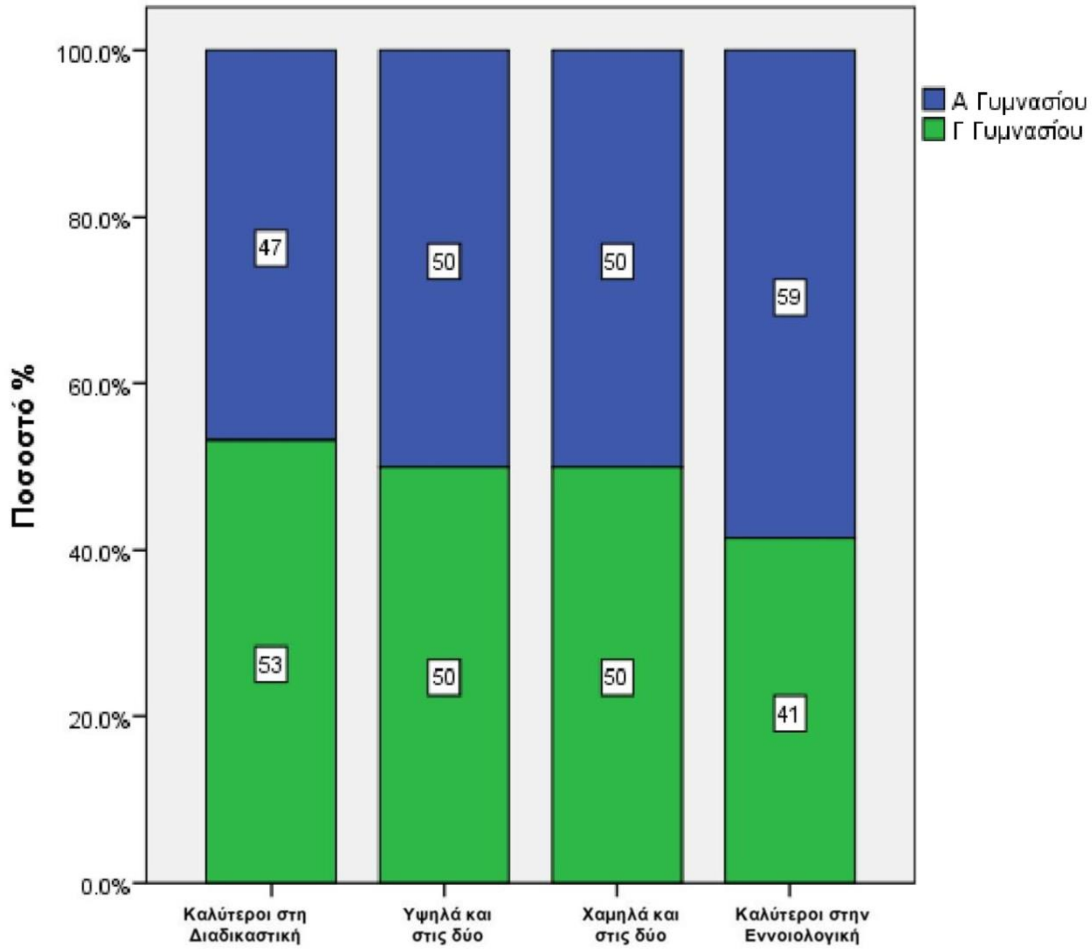
Συστάδα 3: Χαμηλά και στις δύο

Συστάδα 4: Καλύτεροι στη διαδικαστικοί

Πίνακας 1: Μέσο εννοιολογικό και διαδικαστικό σκορ και τα αντίστοιχα κανονικοποιημένα κατάλοιπα, ανά συστάδα

Τέλος, η τρίτη συστάδα (“Χαμηλά και στις δύο”, N=36, 26%) χαρακτηρίζεται από αρνητικό διαδικαστικό κατάλοιπο και αρνητικό εννοιολογικό κατάλοιπο, δηλαδή αποτελείται από μαθητές που είχαν χαμηλότερη από την προβλεπόμενη επίδοση και στους δύο τύπους έργων.

Από το Σχήμα 1 φαίνεται ότι η κατανομή των δύο ηλικιακών ομάδων στις συστάδες είναι παρόμοια. Η παρατήρηση αυτή επιβεβαιώθηκε από το στατιστικό έλεγχο ανεξαρτησίας χ2 (χ2 =1.025, df=3, p=0.795).



Σχήμα 1: Ποσοστό της κάθε ηλικιακής ομάδας ανά συστάδα

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα αποτελέσματα της έρευνας επιβεβαιώνουν την υπόθεση ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο που οι μαθητές συνδυάζουν την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τα κλάσματα και ότι οι διαφορές αυτές παραμένουν σημαντικές ακόμη και σε μαθητές Γυμνασίου. Η υπόθεση αυτή υποστηρίζεται περαιτέρω από το γεγονός ότι τα προφίλ μαθητών που προέκυψαν από την παρούσα έρευνα είναι παρόμοια με αυτά των Hallett et al. (2010, 2012) παρά το ότι ένα διαφορετικό εργαλείο χρησιμοποιήθηκε και σε ένα διαφορετικό πληθυσμό (Έλληνες μαθητές), και μάλιστα και σε μεγαλύτερα παιδιά (μαθητές Γ΄ Γυμνασίου). Αντίθετα με τα ευρήματα των Hallett et al. (2012), τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι ατομικές διαφορές στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τα κλάσματα δεν αμβλύνονται απαραίτητα με την ηλικία.

Τα αποτελέσματα έδειξαν επίσης ότι λίγοι μαθητές συνδυάζουν επαρκώς την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση. Δεδομένου λοιπόν ότι η εννοιολογική και διαδικαστική γνώση είναι κρίσιμες για τη μαθηματική ανάπτυξη, είναι σημαντικό να αξιοποιούνται στη διδασκαλία οι διδακτικές στρατηγικές και τεχνικές που υποστηρίζουν και τους δύο τύπους γνώσης, (βλ. Rittle-Johnson & Schneider, 2014, για μία λεπτομερή ανάλυση). Αξίζει να σημειωθεί ότι η ομάδα «Καλύτεροι στη διαδικαστική» είχε τη μεγαλύτερη συμμετοχή στο δείγμα, κάτι που ενδεχομένως αναδεικνύει την ανάγκη για μεγαλύτερη προσοχή στην εννοιολογική γνώση στη διδασκαλία, τουλάχιστον στο ελληνικό πλαίσιο.

Επιπλέον, η τεκμηρίωση τέτοιων ατομικών διαφορών αναδεικνύει τη σημασία της διαφοροποιημένης διδασκαλίας, ανάλογα με τις ανάγκες των μαθητών. Πράγματι, οι μαθητές που ανήκουν σε διαφορετικά προφίλ θα μπορούσαν να επωφεληθούν από διαφορετικές διδακτικές προσεγγίσεις που θα αξιοποιούν την εννοιολογική ή διαδικαστική γνώση που διαθέτει το κάθε παιδί (Gilmore & Bryant, 2006).

Τέλος, σημειώνεται ότι το εργαλείο που κατασκευάστηκε παρουσίασε καλούς δείκτες εγκυρότητας και αξιοπιστίας και θα μπορούσε να εξελιχθεί σε σταθμισμένο εργαλείο αξιολόγησης της κατανόησης των μαθητών στα κλάσματα και διάγνωσης των ενδεχόμενων ελλειμμάτων σε εννοιολογική ή/και σε διαδικαστική γνώση, προκειμένου να προσαρμοστεί κατάλληλα η διδασκαλία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bempeni, M. & Vamvakoussi, X. (2015). Individual differences in students’ knowing and learning about fractions: Evidence from an in-depth qualitative study. *Frontline Learning Research, 3,* 17-34.

Brock, G., Pihur, V., Datta, S., & Datta, S. (2008). clValid: An R package for cluster validation. *Journal of Statistical Software*, *25*(4) (p.1-22).

Canobi, K. H. (2004). Individual differences in children's addition and subtraction knowledge. *Cognitive Development, 19,* 81-93.

Canobi, K. H., Reeve, R. A., & Pattison, P. E. (2003). *Patterns of knowledge in children’ s addition. Developmental Psychology, 39,* 521-534.

Cronbach L. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika, 6,* 297–334.

Gilmore, C. K., & Bryant, P. (2006). Individual differences in children’s understanding of inversion and arithmetical skill. *British, Journal of Educational Psychology, 76,* 309–331.

Hallett, D., Nunes, T., & Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of Educational Psychology, 102,* 395–406.

Hallett, D., Nunes, T., Bryant, P., & Thorpe, C. M. (2012). Individual differences in conceptual and procedural fraction understanding: The role of abilities and school experience. *Journal of Experimental Child Psychology, 113,* 469-486.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum, *Journal for Research in Mathematics Education, 30,* 122-147.

Polit, D., Beck, C., & Owen, S. (2007). Is the CVI an acceptable indicator of content validity? Appraisal and recommendations. *Res Nurs Health, 30,* 459-467.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93,* 346-362.

Rittle-Johnson, & B., Schneider, M. (2014). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. Kadosh & A. Dowker (Eds.), *Oxford Handbook of Numerical Cognition* (pp.1118-1134). Oxford: Oxford University Press.

Star, J.R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for research in mathematics education, 36,* 404-411.

Ware J. & Gandek B. (1998). Methods for testing data quality, scaling assumptions and reliability: The IQOLA project approach. *J Clin Epidemiol., 51,* 945–952.

ΟΙ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ ΚΑΙ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΔΥΟ ΠΡΩΤΩΝ ΤΑΞΕΩΝ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ.

Μπίτσικα Δέσποινα-Χρυσαυγή

Ελληνικό Ανοιχτό Πανεπιστήμιο

std089962@ac.eap.gr

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η διερεύνηση των απόψεων των εκπαιδευτικών για τη Μαθηματική Εκπαίδευση στις δύο πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου. Για την συγκέντρωση των δεδομένων επιλέχθηκε η ποσοτική προσέγγιση και διαμορφώθηκε ένα ερωτηματολόγιο το οποίο διακινήθηκε ηλεκτρονικά στους συμμετέχοντες. Η ανάλυση των δεδομένων έδειξε ότι οι εκπαιδευτικοί εξακολουθούν να παρουσιάζουν χαμηλές προσδοκίες για τις μαθηματικές ικανότητες των μικρών μαθητών. Ενθαρρυντικό είναι το γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί φαίνεται να επιλέγουν διδακτικές πρακτικές και μαθηματικές δραστηριότητες που προτείνονται στα σύγχρονα προγράμματα σπουδών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια έχουν πραγματοποιηθεί σημαντικά βήματα στον τομέα της διδακτικής των Μαθηματικών στην προσχολική και την πρώτη σχολική ηλικία. Πρόσφατες αναπτυξιακές μελέτες φανερώνουν ότι τα παιδιά ηλικίας 4-8 ετών είναι σε θέση να προσεγγίσουν σύνθετες μαθηματικές έννοιες (Clements & Sarama, 2003). Ωστόσο, τα πορίσματα σύγχρονων ερευνών δείχνουν ότι οι εκπαιδευτικοί αγνοούν το περιεχόμενο και το επίπεδο των μαθηματικών εννοιών που αναμένεται να προσεγγίσουν οι μικροί μαθητές και δεν αναγνωρίζουν την αξία της πρώιμης διδασκαλίας των μαθηματικών (Hachey, 2013). Οι απόψεις αυτές των εκπαιδευτικών είναι ιδιαίτερα σημαντικές καθώς επηρεάζουν τις μεθόδους και τις πρακτικές που επιλέγουν κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών στις μικρές τάξεις και κατ’ επέκταση την εξέλιξη της μαθηματικής ανάπτυξης των μαθητών. Παρόλα αυτά στην Ελλάδα δεν εντοπίζεται ικανοποιητικός αριθμός ερευνών που να εξετάζουν με συστηματικό τρόπο τις απόψεις των εκπαιδευτικών για το θέμα που μελετάμε. Με την παρούσα εργασία επιχειρήσαμε να καλύψουμε το ερευνητικό κενό που εντοπίζεται στην υπάρχουσα βιβλιογραφία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Στις μέρες μας έχει θεμελιωθεί ερευνητικά η σημασία της μαθηματικής εκπαίδευσης στις μικρές ηλικίες καθώς και το γεγονός ότι οι μικροί μαθητές είναι σε θέση να προσεγγίζουν μεγάλα μαθηματικά νοήματα. Για τον λόγο αυτό, πολλές χώρες πειραματίζονται με ριζικές αλλαγές στα προγράμματα σπουδών των Μαθηματικών, στις διδακτικές προσεγγίσεις αλλά και στις δραστηριότητες που προτείνονται για την προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών από τους μικρούς μαθητές. Ωστόσο, τα ερευνητικά δεδομένα φανερώνουν ότι οι εκπαιδευτικοί εξακολουθούν να υποτιμούν τις μαθηματικές ικανότητες των μικρών μαθητών και θεωρούν ότι «πραγματικά» Μαθηματικά κάνουν οι μαθητές στις μεγαλύτερες τάξεις του δημοτικού σχολείου (Zakaria & Iksan, 2007). Όσον αφορά στις διδακτικές πρακτικές, τα αποτελέσματα πρόσφατων ερευνών φανερώνουν πως ακόμα και οι εκπαιδευτικοί που ισχυρίζονται ότι είναι υπέρ των σύγχρονων μεθόδων διδασκαλίας εξακολουθούν να διδάσκουν προσκολλημένοι σε παραδοσιακές πρακτικές με αποτέλεσμα η διδασκαλία τους να περιορίζεται στη μηχανική αποστήθιση και την απομνημόνευση (Ginsburg, Sun Lee, & Stevenson Boyd, 2008). Τέλος, όσον αφορά στις μαθηματικές δραστηριότητες που επιλέγουν οι εκπαιδευτικοί κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών στις μικρές τάξεις του δημοτικού σχολείου, αρκετοί εκπαιδευτικοί περιορίζονται σε δραστηριότητες χωρίς προσανατολισμό και στην ενασχόληση με μαθηματικό υλικό χωρίς φροντίδα για την ανάπτυξη αυθεντικής μαθηματικής δραστηριότητας (Hackey, 2013).

ΣΚΟΠΟΣ ΚΑΙ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Σκοπός της παρούσας ερευνητικής εργασίας ήταν η διερεύνηση των απόψεων των εκπαιδευτικών Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης για τη Μαθηματική Εκπαίδευση στις δυο πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου.

Τα ερευνητικά ερωτήματα στα οποία επιδιώξαμε να απαντήσουμε είναι τα εξής:

1. Ποιες είναι οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για το περιεχόμενο των μαθηματικών εννοιών που μπορούν να διδάσκονται στους μαθητές των δύο πρώτων τάξεων του δημοτικού σχολείου;
2. Ποιο, σύμφωνα με τις απόψεις των εκπαιδευτικών, είναι το επίπεδο των μαθηματικών εννοιών που μπορούν να προσεγγίσουν οι μαθητές των πρώτων τάξεων του δημοτικού σχολείου;

3. Ποιες, σύμφωνα με τις απόψεις των εκπαιδευτικών, είναι οι κατάλληλες διδακτικές προσεγγίσεις για την ανάπτυξη των επιδιωκόμενων μαθηματικών εννοιών στην πρώτη σχολική ηλικία;
4. Ποιες, σύμφωνα με τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών, είναι οι κατάλληλες δραστηριότητες για την προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών στην πρώτη σχολική ηλικία;

Με τον όρο περιεχόμενο μαθηματικών εννοιών αναφερόμαστε στους 5 θεματικούς άξονες που προτείνονται στα σύγχρονα προγράμματα σπουδών και είναι οι εξής: Αριθμοί και Πράξεις, Άλγεβρα, Γεωμετρία, Μετρήσεις και Ανάλυση δεδομένων και Πιθανότητες (National Council of Teachers of Mathematics, 2000; Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011).

Με τον όρο επίπεδο των μαθηματικών εννοιών αναφερόμαστε στον βαθμό προσέγγισης των μαθηματικών εννοιών σε κάθε ηλικιακό στάδιο ανά θεματικό άξονα (Τζεκάκη, 2010). Παρακάτω ορίζουμε το επίπεδο των μαθηματικών εννοιών που αναμένεται να προσεγγίσουν οι μαθητές των δύο πρώτων τάξεων του δημοτικού σχολείου, όπως αυτό αποκρυσταλλώνεται στα σύγχρονα προγράμματα σπουδών και στα πορίσματα πρόσφατων ερευνών.

Για το επίπεδο στον άξονα Αριθμοί και Πράξεις: Αριθμοί ως το 200, ανάλυση-σύνθεση αριθμών, σχέσεις αριθμών, προσθέσεις και αφαιρέσεις ως το 200, προσέγγιση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, επίλυση προβλημάτων (Τζεκάκη, 2010).

Για το επίπεδο στον άξονα Γεωμετρία: Περιγραφή των θέσεων των αντικειμένων στο χώρο, αναγνώριση και ονομασία επίπεδων σχημάτων, περιγραφή ιδιοτήτων επίπεδων σχημάτων, κατασκευή επίπεδων σχημάτων, ανάλυση και σύνθεση επίπεδων σχημάτων, αναγνώριση και κατασκευή συμμετρικών σχημάτων, κατασκευή και περιγραφή τρισδιάστατων καταστάσεων (Sarama & Clements, 2009).

Για το επίπεδο στον άξονα Μετρήσεις: Πραγματοποίηση μετρήσεων με τον χάρακα ή με άλλα εργαλεία, μετρήσεις επιφανειών, συγκρίσεις όγκων, επίλυση απλών μετρικών προβλημάτων, εκτιμήσεις μήκους, επιφάνειας και όγκου (Sarama & Clements, 2009).

Για το επίπεδο στον άξονα Άλγεβρα: Παρατήρηση, ανάλυση και συμπλήρωση μοτίβων, κατανόηση της έννοιας της ισότητας και της ανισότητας (Τζεκάκη, 2010).

Για το επίπεδο στον άξονα Ανάλυση Δεδομένων και Πιθανότητες: Κατασκευή απλών γραφημάτων, ερμηνεία δεδομένων που παρουσιάζονται στα γραφήματα, ταξινόμηση ενός γεγονότος ως βέβαιο, πιθανό ή αδύνατο να συμβεί (Τζεκάκη, 2010).

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (Ζαχάρος, 2006) η ενημέρωση των εκπαιδευτικών για το επίπεδο των μαθηματικών εννοιών που μπορούν να προσεγγίσουν οι μαθητές των δύο πρώτων τάξεων του δημοτικού σχολείου πραγματοποιείται κυρίως από το αναλυτικό πρόγραμμα, το προτεινόμενο επίπεδο από τα σχολικά εγχειρίδια, τα διδακτικά βοηθήματα, το διαδίκτυο καθώς και από επιμορφωτικά προγράμματα.

Οι διδακτικές προσεγγίσεις που μελετάμε διακρίνονται σε παραδοσιακές διδακτικές προσεγγίσεις, σύγχρονες διδακτικές προσεγγίσεις καθώς και σε διδακτικές προσεγγίσεις που συνδυάζουν χαρακτηριστικά παραδοσιακών και σύγχρονων μεθόδων. Η μελέτη των διδακτικών προσεγγίσεων στηρίχθηκε στους εξής άξονες: ρόλος του εκπαιδευτικού καθώς και ρόλος των μαθητών μέσα στην τάξη, μορφή αλληλεπίδρασης μεταξύ εκπαιδευτικού και μαθητών, μορφή οργάνωσης της τάξης, προτεινόμενες δραστηριότητες από τον εκπαιδευτικό, περιεχόμενο των δράσεων, ενθάρρυνση διαδικασιών από τον εκπαιδευτικό, μέσα διδασκαλίας καθώς και σκοπός της αξιολόγησης (Οικονόμου, 2008).

Τέλος, με τον όρο μαθηματικές δραστηριότητες για την προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών στις μικρές ηλικίες αναφερόμαστε σε: ασκήσεις από το σχολικό εγχειρίδιο, φύλλα εργασίας, επίλυση προβλημάτων, δραστηριότητες με παιχνίδια, κατασκευές και δραματοποιήσεις (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για την επίτευξη των στόχων της συγκεκριμένης ερευνητικής εργασίας θεωρήσαμε καταλληλότερη την ποσοτική προσέγγιση. Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 114 εκπαιδευτικοί του κλάδου ΠΕ70 που διδάσκουν ή έχουν διδάξει στις δύο πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου. Η επιλογή του δείγματος πραγματοποιήθηκε με τη μέθοδο της βολικής δειγματοληψίας. Τα χαρακτηριστικά του δείγματος τα οποία μας ενδιέφεραν ήταν το φύλο, η ηλικία, τα χρόνια υπηρεσίας, οι σπουδές των εκπαιδευτικών, η τάξη στην οποία διδάσκουν την τρέχουσα σχολική χρονιά καθώς και οι προτιμήσεις τους σχετικά με τις τάξεις που επιλέγουν να διδάσκουν. Τα στοιχεία αυτά έχει δειχθεί ότι συχνά επηρεάζουν τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για το θέμα που μελετάμε (Αννίβα, 2010).

Για τις ανάγκες της παρούσας ερευνητικής εργασίας θεωρήσαμε καταλληλότερη τη διαμόρφωση ενός ψηφιακού ερωτηματολογίου αυτοαναφορικών ερωτήσεων. Το κυρίως μέρος του ερωτηματολογίου αποτελούνταν από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος περιλάμβανε ερωτήσεις σχετικά με τα δημογραφικά χαρακτηριστικά των ερωτηθέντων. Το δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου δομήθηκε σε 4 ενότητες οι οποίες αντιστοιχούσαν στα ερευνητικά ερωτήματα που έχουν τεθεί. Συγκεκριμένα, η πρώτη ενότητα περιλάμβανε μια ερώτηση η οποία επικεντρωνόταν στις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με περιεχόμενο των μαθηματικών εννοιών που μπορούν να αναπτυχθούν στις δύο πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου, όπως αυτό αναλύθηκε παραπάνω. Η δεύτερη ενότητα περιλάμβανε ερωτήσεις σχετικά με το επίπεδο των μαθηματικών εννοιών που είναι σε θέση να προσεγγίσουν οι μικροί μαθητές ανά θεματικό άξονα, όπως αυτό ορίστηκε παραπάνω. Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί καλούνταν να εκφράσουν εάν γνωρίζουν το επίπεδο των μαθηματικών εννοιών που είναι σε θέση να προσεγγίσουν οι μικροί μαθητές του δημοτικού σχολείου καθώς και από πού θεωρούν πως μπορούν να ενημερωθούν γι' αυτό. Στην τρίτη ενότητα η οποία αποτελούνταν από τρία ερωτήματα, έγινε προσπάθεια να διερευνηθούν οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τις διδακτικές πρακτικές που θεωρούν ότι είναι καλό να αξιοποιούνται συχνότερα για την προσέγγιση των επιδιωκόμενων μαθηματικών εννοιών στις μικρές τάξεις. Οι διαστάσεις που μελετήθηκαν στην παρούσα ενότητα αναλύθηκαν παραπάνω. Τέλος, η τέταρτη ενότητα αποτελούνταν από μία ερώτηση η οποία εστίαζε στη διερεύνηση των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών σχετικά με τις δραστηριότητες που πιστεύουν πως πρέπει να χρησιμοποιούνται συχνότερα για την προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών στην πρώτη σχολική ηλικία, όπως αυτές ορίστηκαν στη σχετική ενότητα.

ΒΑΣΙΚΑ ΕΥΡΗΜΑΤΑ

Στο ερώτημα σχετικά με τις απόψεις των εκπαιδευτικών για το περιεχόμενο των μαθηματικών εννοιών που είναι σε θέση να προσεγγίσουν οι μαθητές των δύο πρώτων τάξεων του δημοτικού σχολείου παρατηρείται ότι το 98% των εκπαιδευτικών συμφωνεί με την ικανότητα των μαθητών στον άξονα Αριθμοί και Πράξεις. Αντίθετα, το 70% των εκπαιδευτικών διαφωνεί με την ικανότητα των μικρών μαθητών στον άξονα Ανάλυση Δεδομένων και Πιθανότητες. Παρόμοια, το 50% των εκπαιδευτικών διαφωνεί με την ικανότητα ανταπόκρισης των μικρών μαθητών στον άξονα της Άλγεβρας. Για τους υπόλοιπους άξονες οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών κυμαίνονται ανάμεσα στις επιλογές ούτε συμφωνώ ούτε διαφωνώ έως συμφωνώ απόλυτα.

	Αριθμοί και Πράξεις	Άλγεβρα	Γεωμετρία	Μετρήσεις	Ανάλυση Δεδομένων και Πιθανότητες
Διαφωνώ και Διαφωνώ Απόλυτα	0,0%	50,0%	35,1%	7,0%	70,2%
Ούτε Συμφωνώ ούτε Διαφωνώ	1,8%	23,7%	16,7%	40,4%	21,1%
Συμφωνώ και Συμφωνώ Απόλυτα	98,2%	26,3%	48,2%	52,6%	8,8%
Σύνολο	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Πίνακας 1. Περιεχόμενο Μαθηματικών Εννοιών στις δύο πρώτες τάξεις του Δημοτικού σχολείου

Οι απαντήσεις αυτές επιβεβαιώνονται και από τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών στη δεύτερη ενότητα του ερωτηματολογίου σχετικά με τις απόψεις των εκπαιδευτικών για το επίπεδο των μαθηματικών εννοιών στις δύο πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου. Συγκεκριμένα, το 43% των εκπαιδευτικών διαφωνεί με την ικανότητα ανταπόκρισης των μαθητών στην προσέγγιση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Παρόμοια, για τον άξονα της Γεωμετρίας, το 56% των εκπαιδευτικών διαφωνεί με την ικανότητα ανταπόκρισης των μικρών μαθητών στην κατασκευή τρισδιάστατων καταστάσεων. Σχετικά με τις απόψεις των εκπαιδευτικών για τον άξονα των Μετρήσεων, μόνο το 13% των εκπαιδευτικών συμφωνεί με την ικανότητα των μικρών μαθητών για εκτιμήσεις μήκους, επιφάνειας και όγκου. Για τον άξονα της Άλγεβρας, διαπιστώνουμε ότι οι εκπαιδευτικοί έχουν δώσει θετικές απαντήσεις στα ερωτήματα που αναφέρονται στην ικανότητα ανταπόκρισης των μικρών μαθητών τόσο στην παρατήρηση, την ανάλυση και τη συμπλήρωση μοτίβων (85% συμφωνεί) όσο και στην κατανόηση της έννοιας της ισότητας και της ανισότητας (88,6% συμφωνεί). Οι απόψεις τους αυτές έρχονται σε αντίθεση με την απάντηση που είχαν δώσει στην πρώτη ενότητα του ερωτηματολογίου στην οποία μόνο το 26% συμφωνούσε πως οι μαθητές μπορούν να προσεγγίσουν μαθηματικές έννοιες από τον άξονα της Άλγεβρας. Τέλος, στον άξονα Ανάλυση Δεδομένων και Πιθανότητες, οι εκπαιδευτικοί στην πλειοψηφία τους απαντούν αρνητικά και στα τρία ερωτήματα.

Όσον αφορά στις απόψεις των εκπαιδευτικών για τις διδακτικές πρακτικές που αφορούν τον ρόλο του εκπαιδευτικού, τα ερωτήματα που συγκεντρώνουν τα υψηλότερα ποσοστά είναι κατά σειρά η αξιοποίηση των λαθών των μαθητών από τον εκπαιδευτικό (97,4% συμφωνεί), η ανάπτυξη του αναστοχασμού (95,6% συμφωνεί) καθώς και των μεταγνωστικών ικανοτήτων των μαθητών (94,8% συμφωνεί). Επίσης, συνολικά το 91% των εκπαιδευτικών πιστεύει ότι ο εκπαιδευτικός συντονίζει την εκπαιδευτική διαδικασία παρακολουθώντας την εργασία των ομάδων. Χαμηλότερα ποσοστά, τα οποία όμως αγγίζουν το 59%, συγκεντρώνει η διδακτική πρακτική που θέλει τον εκπαιδευτικό να κατευθύνει την όλη διδασκαλία. Μάλιστα, οι εκπαιδευτικοί με περισσότερα χρόνια διδασκαλίας τείνουν να συμφωνούν περισσότερο με τη συγκεκριμένη διδακτική πρακτική σε σχέση με τους νεότερους εκπαιδευτικούς.

Όσον αφορά στις απόψεις των εκπαιδευτικών για τις διδακτικές πρακτικές που σχετίζονται με τον ρόλο των μαθητών κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών στις μικρές τάξεις, το 91% των εκπαιδευτικών συμφωνεί ότι ο μαθητής συμμετέχει στην εκπαιδευτική διαδικασία οικοδομώντας ενεργά τη νέα γνώση. Αξίζει να σημειωθεί πως οι εκπαιδευτικοί με λιγότερα χρόνια υπηρεσίας φαίνεται πως συμφωνούν περισσότερο με τη συγκεκριμένη πρακτική σε σχέση με τους υπόλοιπους εκπαιδευτικούς. Η διδακτική πρακτική που σημειώνει το χαμηλότερο ποσοστό, το οποίο ωστόσο αγγίζει το 52%, είναι αυτή που θέλει τον μαθητή να αποδέχεται τις πληροφορίες που προσφέρονται από τον εκπαιδευτικό.

Στο ερώτημα σχετικά με τα μέσα διδασκαλίας που αξιοποιούν οι εκπαιδευτικοί για την προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών στις δύο πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου, η επιλογή που συγκεντρώνει τα υψηλότερα ποσοστά στις προτιμήσεις των εκπαιδευτικών είναι ο πίνακας.

	Πίνακας	Σχολικό εγχειρίδιο	Πρόσθετο Εκπαιδευτικό υλικό	Ψηφιακό υλικό
Ποτέ και Σπάνια	0,0%	3,5%	0,0%	2,7%
Μερικές Φορές	5,3%	14,9%	8,8%	20,1%
Συχνά	27,2%	40,4%	29,8%	28,1%
Πολύ Συχνά	67,5%	41,2%	61,4%	49,1%

Πίνακας 2: Απόψεις εκπαιδευτικών για τα μέσα διδασκαλίας στο μάθημα των Μαθηματικών

Συνεχίζοντας, μελετώντας τις απόψεις των εκπαιδευτικών για τον σκοπό της αξιολόγησης, η επιλογή που συγκεντρώνει το υψηλότερο ποσοστό (96%) είναι η ανατροφοδότηση των μαθητών και ακολουθεί με ποσοστό 95% η βελτίωση της μαθησιακής διαδικασίας.

Τέλος, όσον αφορά στις απόψεις των εκπαιδευτικών για τις δραστηριότητες που αξιοποιούν συχνότερα κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών στις δύο πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου, παρατηρώντας τον παρακάτω πίνακα, συμπεραίνουμε ότι το υψηλότερο ποσοστό (88%) συγκεντρώνει η επιλογή δραστηριότητες με παιχνίδια. Μάλιστα, οι κάτοχοι Μεταπτυχιακού και Διδακτορικού Τίτλου Σπουδών φαίνεται να επιλέγουν συχνότερα δραστηριότητες με παιχνίδια, επίλυση προβλημάτων, κατασκευές και δραματοποιήσεις σε σχέση με τους υπόλοιπους εκπαιδευτικούς.

	Ασκήσεις βιβλίου	Φύλλα εργασίας	Επίλυση προβλημάτων	Παιχνίδια	Κατασκευές	Δραματοποιήσεις
Ποτέ και Σπάνια	4,4%	2,6%	0,9%	0,9%	3,5%	10,6%
Μερικές Φορές	22,8%	21,1%	13,2%	10,5%	14,0%	22,8%
Συχνά	38,6%	36,8%	40,3%	26,3%	35,1%	28,9%
Πολύ Συχνά	34,2%	39,5%	45,6%	62,3%	47,4%	37,7%

Πίνακας 3: Απόψεις των εκπαιδευτικών για τη συχνότητα αξιοποίησης των παρακάτω δραστηριοτήτων στο μάθημα των Μαθηματικών

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από τα αποτελέσματα της παρούσας ερευνητικής εργασίας επιβεβαιώνεται ότι οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί, παρά τις συστάσεις των διεθνών προγραμμάτων σπουδών, εξακολουθούν να υποτιμούν σημαντικά τις μαθηματικές ικανότητες των μικρών μαθητών και δυσκολεύονται να δεχτούν ότι η μαθηματική εκπαίδευση ξεκινά από την προσχολική και την πρώτη σχολική ηλικία. Τα δεδομένα που προκύπτουν από τη συνεκτίμηση των ευρημάτων της παρούσας έρευνας και των αποτελεσμάτων των σχετικών ερευνών, επιβεβαιώνουν ότι ακόμα και σήμερα αρκετοί εκπαιδευτικοί αγνοούν τα πορίσματα πρόσφατων ερευνών για την αξία της πρώιμης διδασκαλίας των μαθηματικών εννοιών (Ginsburg et al., 2008). Συμπεραίνουμε, επίσης, ότι οι εκπαιδευτικοί δεν ενημερώνονται με συστηματικό τρόπο για το περιεχόμενο των αξόνων και το επίπεδο των μαθηματικών εννοιών που αναμένεται να προσεγγίσουν οι μαθητές σε κάθε ηλικιακό στάδιο όπως αυτό προτείνεται στα σύγχρονα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών (Ζαχάρος, 2006). Τα ευρήματα αυτά αναδεικνύουν ως ιδιαίτερα σημαντικό το ζήτημα της επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με σκοπό την κατάλληλη προετοιμασία και την πληρέστερη ενημέρωση των εκπαιδευτικών για το περιεχόμενο και το επίπεδο των μαθηματικών εννοιών που αναμένεται να προσεγγίσουν οι μαθητές των δύο πρώτων τάξεων του δημοτικού σχολείου.

Όσον αφορά στις απόψεις των εκπαιδευτικών για τις διδακτικές πρακτικές που υιοθετούν κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών στις δύο πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου αυτό που προκαλεί εντύπωση είναι το γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί δίνουν θετικές απαντήσεις τόσο στα ερωτήματα που αναφέρονται σε παραδοσιακές προσεγγίσεις όσο και στα ερωτήματα που αφορούν σύγχρονες διδακτικές πρακτικές. Τα ευρήματα αυτά δείχνουν ότι οι εκπαιδευτικοί παρόλο που υιοθετούν πρακτικές που αντιστοιχούν στις σύγχρονες παιδαγωγικές αντιλήψεις για τη διδασκαλία των Μαθηματικών και αναγνωρίζουν τη αξία της πρώιμης διδασκαλίας των μαθηματικών εννοιών, στην ουσία δυσκολεύονται να απαρνηθούν τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών και παραμένουν προσκολλημένοι σε αυτόν. Τα αποτελέσματα αυτά βρίσκονται σε απόλυτη συμφωνία με τα αποτελέσματα της έρευνας των Ginsburg et al. (2008) στην οποία εντοπίζουμε διδακτικές πρακτικές οι οποίες συνδυάζουν στοιχεία τόσο από τις παραδοσιακές όσο και από τις σύγχρονες προσεγγίσεις για τη διδασκαλία των Μαθηματικών.

Τέλος, στο τέταρτο ερευνητικό ερώτημα σχετικά με τις δραστηριότητες που προτιμούν οι εκπαιδευτικοί για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στις δύο πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου τα ερευνητικά δεδομένα φανερώνουν πως οι εκπαιδευτικοί φαίνεται να αξιοποιούν μαθηματικές δραστηριότητες οι οποίες ακολουθούν τα πρότυπα των σύγχρονων προγραμμάτων σπουδών. Τα ευρήματα αυτά έρχονται σε αντίθεση με τα πορίσματα παλαιότερων ερευνών τα οποία έδειχναν ότι αρκετοί είναι οι εκπαιδευτικοί που υποτιμούν την αξία της διαμόρφωσης ελκυστικών και αναπτυξιακά κατάλληλων δραστηριοτήτων για την ουσιαστική προσέγγιση των επιδιωκόμενων μαθηματικών εννοιών (Τζεκάκη, 2010). Έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον θα είχε η πραγματοποίηση έρευνας που να συνδυάζει στοιχεία ποσοτικών και ποιοτικών μεθόδων προκειμένου να εξασφαλιστεί η τριγωνοποίηση των δεδομένων και να διαπιστωθεί εάν οι αντιλήψεις των εκπαιδευτικών τόσο για τις διδακτικές πρακτικές όσο και για τις δραστηριότητες που επιλέγουν εφαρμόζονται στην πράξη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αννίβα, Ε. (2010, Ιούνιος). Οι στάσεις των εκπαιδευτικών δημοτικής εκπαίδευσης προς το μάθημα των μαθηματικών. *Ανακοίνωση στο 11^{o}*

συνέδριο Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου, Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Clements, D. H., & Sarama, J. (Eds.) (2003). *Engaging young children in Mathematics: standards for early childhood mathematics education.* London: Lawrence Erlbaum Associates. Ανακτήθηκε: https://books.google.gr/books?hl=el&lr=&id=jCge1O7gc60C&oi=fnd&pg=PP2&dq=engaging+young+children+in+mathematics&ots=tHoL7PUgWN&sig=qSBj6MOf1k27JIMR5OwD32K2qDQ&redir_esc=y#v=onepage&q=engaging%20young%20children%20in%20mathematics&f=false

Ζαχάρος, Κ. (2006). *Οι μαθηματικές έννοιες στην προσχολική εκπαίδευση και η διδασκαλία τους*, Αθήνα: ΜΕΤΑΙΧΜΙΟ.

Ginsburg, H. P., Sun Lee, J., & Stevenson Boyd, J. (2008). Mathematics education for young children: What it is and how to promote it. *Social Policy Report, 22*(1), 3-24.

Hachey, A. C. (2013). The early childhood mathematics education revolution. *Early education and development*, *24*(4), 419-430.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*, Reston, VA: Author. Ανακτήθηκε:http://www.mtedu.utaipei.edu.tw/mathweb/opendata/NCTM2000/chapter4/index.htm

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. (2011). *Μαθηματικά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Οδηγός για τον εκπαιδευτικό. «Εργαλεία διδακτικών προσεγγίσεων»*. Ανακτήθηκε από http://ebooks.edu.gr/new/ps.php

Sarama, J., & Clements D.H. (2009). *Early childhood mathematics. Education research. Learning trajectories for young children*, New York: Routledge.

Τζεκάκη, Μ. (2010). *Μαθηματική Εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία*. Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

Zakaria, E., & Iksan, Z. (2007). Promoting cooperative learning in science and mathematics education: a Malaysian perspective. *Eurasia journal of mathematics, Science & Technology education, 3* (1), 35-39.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Ντάντου Γλυκερία, Βαμβακούση Ξένια, Καλδρυμίδου Μαρία

Π.Τ.Ν., Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

glykeria_nt@hotmail.com, xvamvak@cc.uoi.gr, mkaldrim@uoi.gr

Η εργασία αυτή αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης ερευνητικής εργασίας που αφορά τη διερεύνηση των ικανοτήτων των μαθητών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης κατά την ενασχόλησή τους με κανονικότητες και με έργα συμμεταβολής ποσοτήτων, πριν από οποιαδήποτε οργανωμένη διδακτική παρέμβαση. Ειδικότερα, η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στις στρατηγικές των μαθητών στα έργα που απαιτούσαν σύνδεση όρου και θέσης σε επαναλαμβανόμενες κανονικότητες (μακρινή γενίκευση) και στα έργα σχέσεων συμμεταβολής. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές συναντούν δυσκολία σε σχετικά ζητήματα, αλλά παρόλα αυτά αναπτύσσουν αξιοσημείωτες στρατηγικές.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η συναρτησιακή σκέψη θεωρείται ως συνιστώσα της αλγεβρικής (Blanton & Kaput, 2004, 2011). Πράγματι, θεμελιώδη στοιχεία της αλγεβρικής σκέψης θεωρούνται η δυνατότητα γενίκευσης, η δυνατότητα εντοπισμού και έκφρασης σχέσεων, και η σταδιακή τυποποίηση των παραπάνω μέσω γλωσσικών ή μαθηματικών αναπαραστατικών εργαλείων. Από την άλλη μεριά, θεμελιώδη στοιχεία της συναρτησιακής σκέψης θεωρούνται ο εντοπισμός και η έκφραση σχέσεων μεταξύ δύο (τουλάχιστον) μεταβαλλόμενων ποσοτήτων, καθώς και η γενίκευσηκαι τυποποίησή τους.

Στην εργασία αυτή εξετάζουμε πώς ανταποκρίνονται μαθητές της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης (5-12) ετών σε έργα που απαιτούν τον εντοπισμό και αξιοποίηση της σχέσης μεταξύ δύο ποσοτήτων (συναρτησιακή σκέψη), χωρίς προηγούμενη διδασκαλία. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζουμε πώς ανταποκρίνονται οι μαθητές σε έργα «μακρινής γενίκευσης»(εύρεση ενός όρου επαναλαμβανόμενης κανονικότητας που βρίσκεται μακριά από τους δεδομένους) και σε έργα «κοντινής γενίκευσης» στο πλαίσιο μιας κατάστασης στην οποία δύο μεταβαλλόμενες ποσότητες συνδέονται με μια γραμμική σχέση, με ή χωρίς αρχική τιμή.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Σε καταστάσεις στις οποίες συμμεταβάλλονται ποσότητες, έχουν ταυτοποιηθεί δύο είδη προσεγγίσεων των μαθητών,ανάλογα με το αν εντοπίζουν και αξιοποιούν τη σχέση μεταξύ των ποσοτήτων (Blanton&Kaput,2011;Martinez & Brizuela,2006). Στην πρώτη (*βαθμωτή*), εξετάζεται η μεταβολή στους όρους μιας ακολουθίας τιμών μιας εκ των δύο ποσοτήτων (και, άρα, δε λαμβάνονται υπόψη οι δυο ποσότητες ταυτόχρονα). Η προσέγγιση αυτή είναι γνωστή και ως *αναδρομική*, γιατί η εύρεση ενός όρου (κοντινού ή μακρινού) απαιτεί την εύρεση όλων των προηγούμενών του.Στη δεύτερη (*συναρτησιακή*), οι μεταβολές στις δύο ποσότητες εξετάζονται ταυτόχρονα (όπως, για παράδειγμα, αντανακλάται στην περιγραφή «όταν το χαυξάνεται κατά 1, το γαυξάνεται κατά 2»).

Γενικά, συναρτησιακή αντίληψη ανάμεσα στις δύο μεταβλητές έχει η μειοψηφία των μαθητών (βλ. Kaldrimidou&Moroglou, 2009).Το φαινόμενο αυτό είναι πιο έντονο στους μαθητές των μικρότερων ηλικιών(Stephensetal., 2012; Warren, 2005), όπου η βαθμωτήπροσέγγιση είναι κυρίαρχη, σε έργα χειρισμού διαφορετικών αναπαραστάσεων των συναρτησιακών σχέσεων και κυρίως του πίνακα τιμών.Οι μαθητές που ακολουθούν βαθμωτή προσέγγιση εντοπίζουν σχέσεις (συνήθως, προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές) μεταξύ των διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας τιμών της μίας μόνο από τις δύο ποσότητεςκαι συμπληρώνουν τον πίνακα ανά στήλη, ξέχωρα τη μία από την άλλη.Για να θεωρηθεί ότι οι μαθητέςακολουθούν συναρτησιακή προσέγγισηπρέπει αυτοί να εστιάζουν στη σχέση μεταξύ των αντίστοιχων όρων των δύο ποσοτήτων και να συμπληρώνουν τον πίνακα ανά γραμμή

Αυτή η διάκριση (βαθμωτή/αναδρομική ή συναρτησιακή προσέγγιση) είναι χρήσιμη και στην περίπτωση της εύρεσης μακρινού όρου σε έργα επαναλαμβανόμενων κανονικοτήτων.Για παράδειγμα, ακόμα και παιδιά της πρωτοσχολικής ηλικίας, εφόσον εντοπίσουν τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται οι όροι μιας κανονικότητας της μορφής ΑΒΑΒ, μπορούν να την επεκτείνουν όσο χρειάζεται για να βρουν έναν κοντινό όρο (π.χ., τον10^{ο}), η ακόμα, δεδομένου ενός μακρινού όρου, να βρουν τον επόμενό του. Από την άλλη μεριά, η εύρεση ενός μακρινού όρου (π.χ., του 1000^{ου}) ή η διατύπωση του κανόνα για τον οποιονδήποτε (το ν-οστό) όρο, απαιτεί τη σύνδεση του όρου με τη θέση του (π.χ., «Α στις μονές θέσεις, Β στις ζυγές»). Υπό αυτή την έννοια, η μακρινή γενίκευση απαιτεί συναρτησιακή προσέγγισηκαι συνδέεται άμεσα με την ανάπτυξη της συναρτησιακής σκέψης (Κυλάφης, 2009). Πλήθος ερευνών δείχνουν ότι οι μαθητές της πρωτοσχολικής ηλικίας αναπτύσσουν σημαντικές ικανότητες σχετικά με τις επαναλαμβανόμενες κανονικότητες, ακόμα και χωρίς συστηματική διδασκαλία (Fox, 2005; Τζεκάκη& Κούλελη, 2007). Ωστόσο, η μακρινή γενίκευση, που απαιτεί τον εντοπισμό συναρτησιακής σχέσης, είναι απαιτητική και για τα μεγαλύτερα παιδιά (Blanton&Kaput, 2004).

Φαίνεται ότι τα παιδιά της πρωτοβάθμιας ακολουθούν κυρίως τη βαθμωτή προσέγγιση στις μακρινές γενικεύσεις, παρά το γεγονός ότι αυτή είναι επίπονη ή μη αποτελεσματική (Mulliganetal., 2008; Papic&Mulligan, 2007; Stephensetal., 2012). Παράλληλα, υπάρχουν και παιδιά που δυσκολεύονται ναγενικεύσουν, καθώςδεν αναγνωρίζουν ή παρερμηνεύουν τις σχέσεις, ή που ακολουθούν επιφανειακές στρατηγικές (π.χ. «μαντεψιά», εστίαση στους αριθμούς που ενδεχομένως υπάρχουν στην κατάσταση και εκτέλεση πράξεων) (Lannin, 2005; Mulliganetal., 2008).

Ωστόσο, υπάρχει πλήθος ερευνητικών δεδομένων που δείχνουν ότι, με κατάλληλη διδακτική υποστήριξη τα παιδιά της πρωτοβάθμιας, ακόμα και της πρωτοσχολικής, μπορούν να εντοπίσουν, και να εκφράσουν και να αιτιολογήσουν, ακόμα και συμβολικά, τόσο βαθμωτές, όσο και συναρτησιακές σχέσεις (Stephensetal., 2012; Blanton&Kaput, 2004; Panorkou&Maloney, 2016).

Στην παρούσα μελέτη διερευνούμε κατά πόσο παιδιά διαφορετικών ηλικιών, τα οποία δεν έχουν εκτεθεί σε σχετική συστηματική διδασκαλία, μπορούν να ανταποκριθούν σε έργα που άπτονται της συναρτησιακής σκέψης και με ποια προσέγγιση (βαθμωτή, συναρτησιακή, ή επιφανειακή) . Επισημαίνουμε ότι, παρά το γεγονός ότι στο τρέχον αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών προβλέπεται η διδασκαλία κανονικοτήτων, ωστόσο αυτές εντάσσονται στον άξονα περιεχομένου «Μετρήσεις» και δε συνδέονται με την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης, η οποία απαιτεί στοχευμένη διδακτική διαχείριση (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2015).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το δείγμα της διερευνητικής αυτής μελέτης περίπτωσης αποτέλεσαν 13 μαθητές της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης πέντε διαφορετικών σχολείων του Ν. Καρδίτσας, οι οποίοι χωρίστηκαν σε δύο ομάδες βάσει των ηλικιών τους. Η Α΄ ομάδα περιελάμβανε τους μαθητές των νηπίων-Α΄-Β΄ Δημοτικού (n=4) και είχε τη δυνατότητα χρήσης πραγματικού υλικού, ενώ η Β΄ ομάδα τους μαθητές των μεγαλύτερων τάξεων (Γ΄-Δ΄-Ε΄-ΣΤ΄, n=9) και εργάστηκε με εικονιστικό υλικό. Κάθε παιδί εξετάστηκε ατομικά και η διαδικασία μαγνητοφωνήθηκε ή βιντεοσκοπήθηκε.

Οι ικανότητες των μαθητών ελέγχθηκαν ατομικά μέσα από την επίδοση τους σε 7 έργα, τα 4 από τα οποία ήταν έργα με την κανονικότητα ως αντικείμενο και τα υπόλοιπα 3 έργα με την κανονικότητα ως εργαλείο για την επίλυση προβλήματος συμμεταβολής. Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε 3 από αυτά(Εικόνα 1): Το Έργο 1 αφορούσε σε μια κανονικότητα δομής ΑΒ. Οι μαθητές κλήθηκαν αρχικά να κάνουν διάφορες δράσεις πάνω σε αυτό (επέκταση, συμπλήρωση-μετάφραση,εύρεση προηγούμενου-επόμενου όρου, εύρεση κοντινού όρου). Στη συνέχεια, τους ζητήθηκε να βρουν τον 100^{o} όρο (100^{o} τουβλάκι και 100^{o} βέλος αντίστοιχα για τις 2 ομάδες). Πρόκειται για μια μακρινή γενίκευση, η οποία απαιτεί τη σύνδεση του όρου με τη θέση του, κάτι που απαιτεί συναρτησιακή σκέψη.

Εικόνα 1: Έργα της έρευνας που θα αναλυθούν

Το Έργο 2ήταν προσαρμογή ενός έργου που υπάρχει στη βιβλιογραφία (Stephensetal., 2012): Δίνεται ένα τετράγωνο τραπέζι, γύρω από το οποίο μπορούν να καθίσουν 4 άτομα. Στη συνέχεια, ένα δεύτερο τραπέζι ενώνεται με το πρώτο, γύρω από τα οποία μπορούν να καθίσουν 6 άτομα. Από τους μαθητές της Α΄ Ομάδας ζητήθηκε να βρουν το πλήθος των ατόμων που μπορούν να κάτσουν γύρω από 3, 4 και 10 τραπέζια (κοντινή γενίκευση). Από τη Β΄ ομάδα ζητήθηκε η συμπλήρωση ενός πίνακα τιμών και η εύρεση ενός κοντινού όρου (10ος όρος). Στο πρόβλημα η σχέση συμμεταβολής ανάμεσα στο πλήθος των τραπεζιών (ν) και το πλήθος των ατόμων (2ν+2). είναιγραμμικήμε αρχική τιμή.

Στο Έργο 3 η σχέση μεταξύ των δύο μεγεθών (ν, 2ν) είναι γραμμική χωρίς αρχική τιμή. Οι μαθητές της Α΄ ομάδας κλήθηκαν να βρουν τον αριθμό των γαντιών για μια παρέα 2, 3, 4 και 5 παιδιών με τη χρήση υλικού. Για τη Β΄ ομάδα, το πρόβλημα εμπεριείχε τη συμμεταβολή τριών ποσοτήτων και αφορούσε στην καταγραφή των υλικών για συγκεκριμένο αριθμό γλυκών (2, 3, 5 και 10 ατομικά γλυκά), αφού πρώτα δόθηκαν στους μαθητές τα υλικά που χρειάζονται για ένα γλυκό.

Η ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών έγινε με βάση τη διάκριση μεταξύ της βαθμωτής και της συναρτησιακής προσέγγισης.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Έργο 1

Όλοι οι μαθητές και των δύο ηλικιακών ομάδων πραγματοποίησαν σωστά την κοντινή γενίκευση με την αναδρομική στρατηγική, εκτός από μια μαθήτρια της Ε΄τάξης, η οποία αν και συνέδεσε τον όρο με τη θέση του, εξηγώντας ότι «*για να βρω το 10ο θα πω.. το 5ο είναι μπλε άρα 5 και 5 δέκα..και το δέκατο θα είναι μπλε*!», βρήκε λάθος αποτέλεσμα.

Στη μακρινή γενίκευση, οι 2 από τους 4 μαθητές της Α΄ Ομάδας προσπάθησαν να μαντέψουν το χρώμα στο 100^{ο} τουβλάκι και δεν ήταν σε θέση να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Ένας μαθητής (Β΄ τάξη) συνέδεσε τον όρο της ακολουθίας με τη θέση του, εξηγώντας ότι κάθε 5^{ο} τουβλάκι θα είναι κίτρινο/κόκκινο εναλλάξ:

Ερευν.: Ποιο πιστεύεις ότι θα βρίσκεται στη θέση 100;

Μ3(Β΄): Δεν υπάρχουν τόσα τουβλάκια…

Ερευν.: Άρα;

Μ3(Β΄): Ίσως κανένα…

Ερευν.: Ωραία, φαντάσου ότι υπάρχουν τόσα…

Μ3(Β΄): χμμ… το κίτρινο!

Ερευν.: Πως το σκέφτηκες;

Μ3(Β΄): Με απλό τρόπο..κόκκινο,κίτρινο,κόκκινο,κίτρινο…

Ερευν.: Κι έφτασες στο 100;

Μ3(Β΄): Σιγά σιγά.. τα μέτρησα πέντε πέντε…

Ερευν.: Δηλαδή; Εξήγησέ μου…

Μ3(Β΄): πέντε… μετά θα βάλω κι άλλη πεντάδα.. θα είναι κίτρινο.. κι άλλη, κι άλλη (τις τοποθετεί τη μια πεντάδα κάτω από την άλλη).. το κόκκινο θα είναι το 20ο , μετά το συνεχίζεις με πεντάδα και φτάνεις στο κίτρινο… και έτσι θα φτάσω στο 100.

Τέλος, ένας μαθητής απάντησε ότι «αφού το 10^{ο} είναι κίτρινο, βάζεις και ένα μηδενικό και είναι πάλι κίτρινο, δεν αλλάζει κάτι.». Ενώ αυτή η απάντηση θα μπορούσε να ερμηνευθεί, παρόμοια με του προηγούμενου μαθητή, ως σύνδεση όρου με τη θέση του, ο μαθητής φαίνεται να εστίασε περισσότερο στη σχέση μεταξύ της ακολουθίας των θέσεων, καθώς δεν ήταν σε θέση να εξηγήσει περαιτέρω το σκεπτικό του.

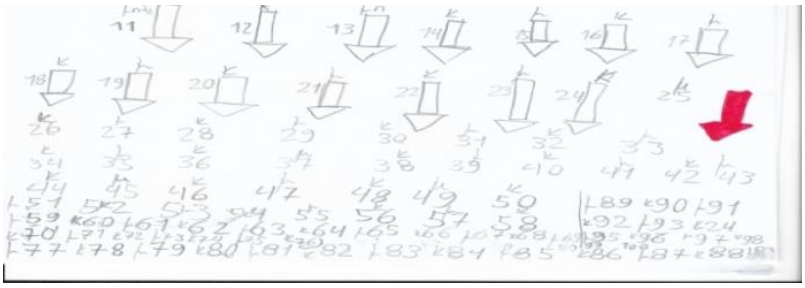
Παρόμοια με τον τελευταίο μαθητή ανταποκρίθηκαν οι 2 από τους 9 μαθητές της Β΄ Ομάδας, οι οποίοι εξέφρασαν με πράξη τη σχέση ανάμεσα στο 10 και το 100 (10x10=100). Έξι μαθητές εγκατέλειψαν την προσπάθεια εφαρμογής της αναδρομικής στρατηγικής ή δεν επιδόθηκαν καθόλου, και προσπάθησαν να μαντέψουν την απάντηση νοερά/τυχαία:

Μ9(Δ΄): Είναι δύσκολο αυτό…

Ερευν.: Τι σε δυσκόλεψε;

Μ9(Δ΄): Δεν μπορώ να βρω το χρώμα… θα βάλω το κόκκινο γιατί αν τελειώνει σε κόκκινο αυτή η σειρά μπορεί να είναι πάλι κόκκινο…

Τέλος, μια μαθήτρια της Γ΄ τάξης βρήκε τον 100ο όρο με την αναδρομική στρατηγική (βρίσκοντας δηλαδή πρώτα όλες τους προηγούμενους όρους).



Εικόνα 2: Αναδρομική στρατηγική

Επισημαίνουμε ότι η μαθήτρια της Ε΄, η οποία είχε συνδέσει τον όρο με τη θέση του στην κοντινή γενίκευση, δεν το έκανε στη μακρινή γενίκευση.

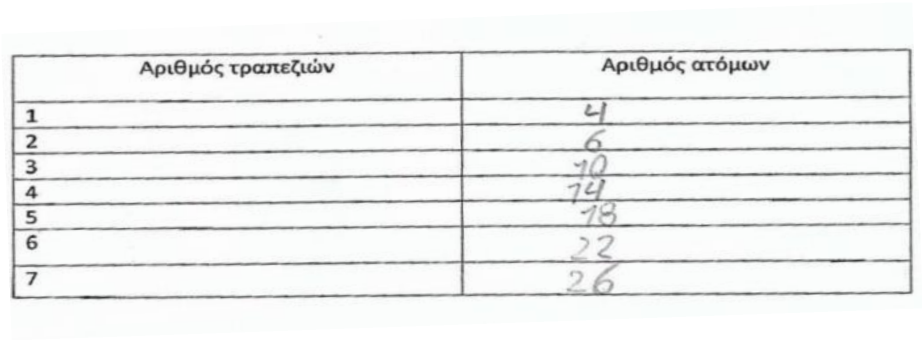
Έργο 2

Όλοι οι μαθητές της Α΄ ομάδας κατάφεραν να βρουν τον αριθμό των ατόμων για τα 3 και 4 τραπέζια με τη βοήθεια του πραγματικού υλικού.

Για τα 10 τραπέζια τρεις από τους τέσσερις βρήκαν τον αριθμό με τη χρήση υλικού και ένας μαθητής της Β΄ Δημοτικού φαίνεται να παρατήρησε σε ένα πρώτο επίπεδο τις σχέσεις συμμεταβολής που υπήρχαν, αιτιολογώντας κατάλληλα το σκεπτικό του.

Μ3(Β΄): Χμμ..αφού σε ένα θα καθίσουν 4, σε δύο 6… είναι σχεδόν το διπλάσιο… τότε σε τρία τραπέζια 8 και…κάπως έτσι…(συνεχίζει να μετράει προσθέτοντας 2 κάθε φορά) σε δέκα θα καθίσουν 22 άτομα!

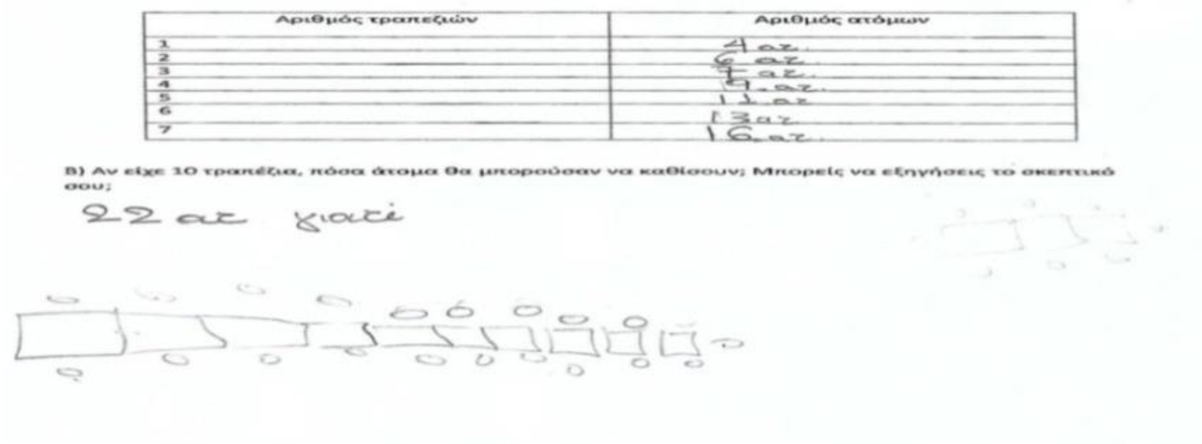
Οι 6 από τους 9 μαθητές της Β΄ ομάδας συμπλήρωσαν τον πίνακα τιμών κάθετα (βαθμωτή στρατηγική) χωρίς να συσχετίζουν τις ποσότητες στις δύο στήλες (εικόνα 3)



Αριθμός τραπεζιών	Αριθμός ατόμων
1	4
2	6
3	10
4	14
5	18
6	22
7	26

Εικόνα 3: Κάθετη προσθετική συμπλήρωση πίνακα τιμών

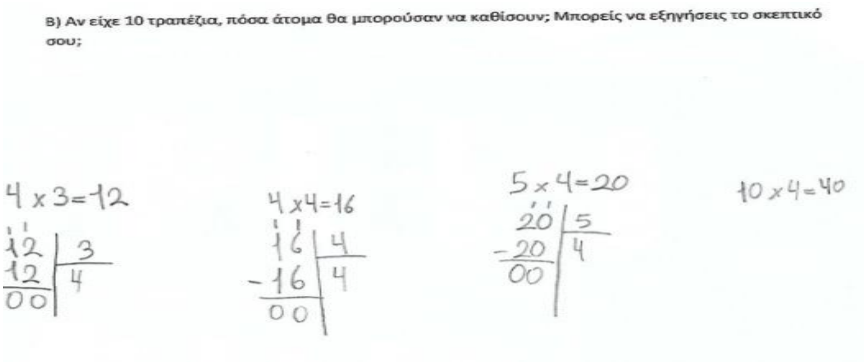
Ενδιαφέρον παρουσίασε η στρατηγική της συμπλήρωσης του πίνακα τιμών μιας μαθήτριας της Στ΄ τάξης (εικόνα 4).



Εικόνα 4: Επίλυση με τη βοήθεια της αναπαράστασης του προβλήματος

Αρχικά, συμπλήρωσε τον πίνακα τιμών κάθετα και έπειτα με τη βοήθεια της αναπαράστασης στο β΄ ερώτημα τροποποίησε τις απαντήσεις που είχε δώσει συσχετίζοντας με επιτυχία την αριθμητική τιμή των ατόμων με την αριθμητική τιμή των τραπεζιών (συναρτησιακή στρατηγική).

Στο β΄ ερώτημα του ίδιου προβλήματος («κοντινή» γενίκευση) οι 3 από τους 9 μαθητές της Β΄ ομάδαςέκαναν χρήση της βαθμωτής στρατηγικής αλλά απέτυχαν να δώσουν σωστή απάντηση: έκαναν πράξεις, εστίασαν στην πολλαπλασιαστική σχέση και αγνόησαν την αρχική τιμή (Εικόνα 5). Τέσσερις μαθητές προσπάθησαν να απαντήσουν κάνοντας λανθασμένες και βεβιασμένες αναπαραστάσεις, ενώ 2 έδωσαν τυχαία απάντηση.



Εικόνα 5: Επίλυση με πράξεις

Έργο 3

Στο πρόβλημα της ευθείας αναλογίας (γραμμική συμμεταβολή χωρίς αρχική τιμή) οι 3 από τους 4 μαθητές της Α΄ ομάδας βρήκαν τον αριθμό των γαντιών που **χρειάζεται μια παρέα πέντε παιδιών με ευκολία και μάλιστα δύο από αυτούς, για κάθε επιπλέον παιδί μετρούσαν δύο επιπλέον γάντια, φτάνοντας στον υπολογισμό των δέκα γαντιών μετρώντας ανά δύο: στη αναδρομική αυτή στρατηγική μπορούμε να ισχυριστούμε ότι εμφανίζονται στοιχεία συναρτησιακής προσέγγισης.** Ένας μόνο μαθητής δεν κατάφερε να βρει τον αριθμό των γαντιών για 3 και 5 παιδιά.

Οι 5 από τους 9 μαθητές της Β΄ ομάδας αν και χρησιμοποίησαν λέξεις όπως «διπλασιάζω» ή «τριπλασιάζω», που παραπέμπουν στο 2ν και όχι στη σχέση ν→2ν, δεν κατάφεραν να συμπληρώσουν σωστά τις συνταγές. Δύο μαθητές επίσης απέτυχαν να συμπληρώσουν τις συνταγές με τη χρήση της προσθετικής στρατηγικής (προσθέτοντας ένα σταθερό αριθμό κάθε φορά στα υλικά), ενώ σωστές απαντήσεις δόθηκαν από δύο μαθήτριες, οι λεκτικές εξηγήσεις των οποίων είχαν χαρακτηριστικά κατανόησης της συμμεταβολής γλυκών-υλικών.

Μ6(Γ΄): για να βρω το γάλα για τα 5 γλυκά..μμμ.. για να δω.. για 1 γλυκό 2 ποτήρια, για 5… 5 φορές το 2…δηλαδή 10 ποτήρια! Το ίδιο και για τα αυγά… 3 φορές το 5..15!

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα αποτελέσματα της έρευνας είναι συμβατά με προηγούμενες έρευνες που δείχνουν ότι οι μαθητές της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης αν και αντιλαμβάνονται σε ικανοποιητικό βαθμό της έννοια της κανονικότητας (Τζεκάκη & Κούλελη, 2007;Fox, 2005), εντούτοις φαίνεται ότι συναντούν δυσκολία στη μακρινή γενίκευση, η οποία απαιτεί συναρτησιακή σκέψη (Blanton&Kaput, 2004, 2011).

Σε συμφωνία με την προϋπάρχουσα έρευνα, στα έργα συμμεταβολής η πλειοψηφία των μαθητών εστίασε, σωστά ή λανθασμένα, κυρίως στη μεταβολή της μίας από τις δύο ποσότητες. Υπήρχαν επίσης περιπτώσεις που επιφανειακών στρατηγικών, όπως η «μαντεψιά» (Lannin, 2005). Εντούτοις υπήρξαν μαθητές που χρησιμοποίησαν τρόπους και αιτιολογίες που δίνουν ενδείξεις συναρτησιακής προσέγγισης. Πρέπει εδώ να τονίσουμε ότι η βιβλιογραφία θέλει τους μαθητές της προσχολικής και σχολικής ηλικίας ικανούς να αναγνωρίζουν και να εκφράζουν σχέσεις συμμεταβολής σε γραμμικά προβλήματα με ή χωρίς αρχική τιμή, αλλά ύστερα από κατάλληλη διδακτική παρέμβαση (Stephensetal., 2012; Warren, 2005; Blanton & Kaput, 2004).

Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι οι μαθητές της Α΄ ομάδας είχαν σε αρκετές περιπτώσεις καλύτερη απόδοση σε σχέση με τους μαθητές των μεγαλύτερων τάξεων. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα γραμμικής συμμεταβολής με αρχική τιμή, η Α΄ ομάδα φαίνεται να υπερτερεί της Β΄. Ενδεχομένως όμως αυτό να οφείλεται, στη χρήση πραγματικού υλικού από την Α΄ ομάδα. Η ύπαρξη αρχικής τιμής και η μη δυνατότητα χρήσης πραγματικού υλικού για τη Β΄ ομάδα ίσως κατέστησε δυσκολότερη την επίλυση του προβλήματος, καθώς αντίστοιχες έρευνες σε έργα με απλή γραμμική σχέση χωρίς την ύπαρξη αρχικής τιμής αναδεικνύουν επιτυχίες των μαθητών σε ζητήματα κατανόησης και έκφρασης της συμμεταβολής (Panorkou& Maloney, 2016). Το γεγονός αυτό δίνει αφορμή για σκέψεις πάνω στη χρήση εμπράγματου υλικού και στα μεγαλύτερα παιδιά. Ειδικά στα ζητήματα συμμεταβολής, το εμπράγματο υλικό καθιστά «παρούσες» και τις δύο μεταβλητές και δημιουργεί ενδεχομένως ένα καταλληλότερο πλαίσιο για την εννοιολογική προσέγγιση των συναρτήσεων.

Εν κατακλείδι, αν και το δείγμα της έρευνας είναι μικρό και τα απολέσματα όχι γενικεύσιμα, θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι οι όποιες δυσκολίες δεν οφείλονται σε αναπτυξιακούς περιορισμούς--αφού και μικροί μαθητές χρησιμοποίησαν συναρτησιακή συλλογιστική-- αλλά κυρίως στην έλλειψη εμπειριών στο σχολικό πλαίσιο. Θα άξιζε, λοιπόν, να διερευνηθεί η επίδραση οργανωμένων διδακτικών παρεμβάσεωναπό τα πρώτα σχολικά χρόνια με εστίαση σε έργα συμμεταβολής δύο ή και περισσότερων ποσοτήτων, με κατάλληλη στήριξη και ανατροφοδότηση των εκπαιδευτικών (Blanton & Kaput, 2011; Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2015)..

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Βαμβακούση, Ξ. & Καλδρυμίδου, Μ. (2015). Σχεδιασμός δραστηριοτήτων για τη διδασκαλία κανονικοτήτων από μελλοντικές νηπιαγωγούς: δυσκολίες και προβλήματα. Στο Δ. Δεσλή, Ι.

Παπαδόπουλος, Μ. Τζεκάκη, *Πρακτικά 6ου Συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ*, (σελ. 208-217). Θεσ/νίκη: ΕΝΕΔΙΜ.

Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. *Proceedings of the 28th -PME,*(Vol. *2*,pp.135-142). Bergen, Norway:PME.

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades.In J. Cai& E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization*, (pp. 5-24).Berlin: Springer-Verlag.

Fox, J. (2005). Child-initiated mathematical patternning in the pre-compulsory years. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME,* (Vol. *2*, pp. 313-320). Melbourne: PME.

Kaldrimidou, M., Moroglou, M. (2009). On functions: Representations and students' conceptions. In M.Tzekaki, M. Kaldrimidou, H. Sakonidis (eds) *Proceedings of the 33rdPME*. (Vol. 3, pp. 265-272).Thessaloniki, Greece: PME.

Κυλάφης, Π. (2009). *Ο ρόλος των patterns στη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα*. ΑδημοσίευτηΜεταπτυχιακήΔιατριβή, ΕΚΠΑ.

Lannin, J.K. (2005). Generalization and justification: the challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities, *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231-258.

Martinez, M., Brizuela, B. (2006). An unexpected way of thinking about linear function tables. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of 30th PME*, (Vol.4,pp. 153-160). Prague, Czech Republic: PME

Mulligan, J., Mitchelmore, M., Marston, J., Highfield, K., Kemp, C. (2008). Promoting mathematical pattern and structure in the first year of schooling: An intervention study. In O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano& A.Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*(Vol. 4, pp. 129-136). México: Cinvestav-UMSNH.

Papic, M. & Mulligan, J. T. (2007). The growth of early mathematical patterning: An intervention study. In J. Watson, & K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, (Vol. 2, pp. 591-600). Adelaide: MERGA.

Panorkou, N., Maloney, P.A. (2016). Expressing covariation and correspondence relationships. *Teaching Children Mathematics*, *23*(2), 90-99.

Stephens, A., Isler I., Marum, T., Blanton, M., Knuth, E., Murphy Gardiner, A. (2012).From recursive pattern to correspondence rule: Developing students' abilities to engage in functional thinking. In L.R Van Zoest, J.-J. Lo, & J.L Kratky (Eds.), *Proceedings of the 34th Annual Meeting of NA-PME*, (pp. 821-828).Kalamazoo, MI: Western Michigan University.

Τζεκάκη, Μ. & Κούλελη, Μ. (2007). Διερεύνηση της ικανότητας αναγνώρισης προτύπων σε παιδιά προσχολικής ηλικίας, στο Χ. Σακονίδης & Δ. Δεσλή (επιμ.), *Πρακτικά του 2ου ΣυνεδρίουΕΝΕΔΙΜ,* (σελ.267-278). Αθήνα: Τυπωθήτω&ΕΝΕΔΙΜ.

Warren, E. (2005). Patterns supporting the development of early algebraic thinking. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*(pp.759-766).Sydney: MERGA.

Η ΑΠΟΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΤΥΧΑΙΟΥ ΟΤΑΝ ΤΑ ΠΑΙΔΙΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΖΟΥΝ ΚΑΙ ΠΑΙΖΟΥΝ ΤΑ ΔΙΚΑ ΤΟΥΣ ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ

Παπαριστοδήμου Έφη [1], Μελετίου-Μαυροθέρη Μαρία [2], Βάσου Χριστίνα [2]

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου[1], Ευρωπαϊκό Πανεπιστήμιο Κύπρου[2]

e.paparistodemou@cytanet.com.cy[1], m.mavrotheris@euc.ac.cy[2], christina.vasou3@gmail.com [2]

Ο προγραμματισμός είναι μια δεξιότητα που παρέχει τα κίνητρα για ένα δομημένο τρόπο σκέψης, ενώ προσφέρει μια εξωτερική αναπαράσταση της διαδικασίας επίλυσης ενός προβλήματος, δίνοντας την ευκαιρία του αναστοχασμού (Resnick, 2007). Στην παρούσα εργασία επιχειρήσαμε να ενισχύσουμε το συλλογισμό των παιδιών (ηλικίας μεταξύ 8 και 13 ετών) σχετικά με την έννοια της πιθανότητας ζητώντας τους να σχεδιάσουν, να προγραμματίσουν και να παίξουν ένα ψηφιακό παιχνίδι, χρησιμοποιώντας τη γλώσσα προγραμματισμού Scratch 2.0. Τα πορίσματα της μελέτης δείχνουν ότι η έννοια του τυχαίου είχε σημαντικό ρόλο στα παιχνίδια τους και ότι τα παιδιά αναφέρονταν σε έννοιες πιθανοτήτων ενώ σχεδίαζαν, κωδικοποιούσαν, έπαιζαν, αναθεωρούσαν και επανασχεδίαζαν το παιχνίδι τους.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η αυξημένη χρήση των ψηφιακών παιχνιδιών οδήγησε σε ένα ευρύτατο ενδιαφέρον για τη αξιοποίησή τους ως εργαλείων μάθησης. Αρκετοί ερευνητές, οι οποίοι έχουν πειραματιστεί τα τελευταία χρόνια με ψηφιακά παιχνίδια, διερευνούν τους τρόπους με τους οποίους αυτή η μαζική δημοφιλής παγκόσμια νεανική δραστηριότητα θα μπορούσε να εισαχθεί στην τάξη των μαθηματικών προκειμένου να αυξήσει το ενδιαφέρον των παιδιών και να διευκολύνει την εκμάθηση στατιστικών εννοιών (π.χ. Pratt et al., 2008; Paparistodemou et al., 2008; Erickson, 2014). Αναγνωρίζοντας την υποσχόμενη προοπτική των ψηφιακών παιχνιδιών, η παρούσα έρευνα επιχειρεί να απαντήσει στο ακόλουθο ερευνητικό ερώτημα:

‘Πώς τα παιδιά εκφράζονται για την έννοια του τυχαίου όταν σχεδιάζουν, προγραμματίζουν και παίζουν τα δικά τους παιχνίδια;’.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η διδακτική της στατιστικής και των πιθανοτήτων εντάσσεται διεθνώς όλο και περισσότερο στο σχολικό πρόγραμμα μαθηματικών. Εντούτοις, απαιτείται ακόμα προσπάθεια για να γεφυρωθεί το χάσμα μεταξύ διαίσθησης και εννοιολογικής κατανόησης (Batanero & Díaz, 2012). Αρκετές μελέτες (π.χ., delMas, Garfield, Ooms & Chance, 2007) που εξετάζουν τα μαθησιακά αποτελέσματα έδειξαν μια ανησυχητική έλλειψη στατιστικού συλλογισμού και εφαρμογής των στατιστικών εννοιών, ενώ άλλες υποστηρίζουν ότι ακόμη και τα μικρά παιδιά μπορούν να αναπτύξουν ισχυρές αντιλήψεις για τη στατιστική συμπερασματολογία, όταν χρησιμοποιούν κατάλληλα εργαλεία αναπαράστασης δεδομένων (π.χ., Meletiou-Mavrotheris & Paparistodemou, 2015). Η παρούσα μελέτη συνεισφέρει στην υφιστάμενη βιβλιογραφία σε ό,τι αφορά την οικοδόμηση στατιστικών εννοιών μέσα από τον σχεδιασμό παιχνιδιών. Η εργασία χρησιμοποιεί τη λογική του προγραμματισμού και παρουσιάζει τη μελέτη περίπτωσης μιας ομάδας παιδιών (ηλικίας 8-13 ετών) που ανέπτυξαν τα δικά τους παιχνίδια με τη χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Scratch 2.0 (Massachusetts Institute of Technology, 2013).

Η σχετική βιβλιογραφική ανασκόπηση κάνει σαφές ότι τα ψηφιακά εκπαιδευτικά παιχνίδια έχουν πολλά πιθανά οφέλη για τη διδασκαλία και μάθηση των παιδιών. Μία από τις κορυφαίες δυνατότητες που παρέχει στα παιδιά είναι η ενσωμάτωση και ο προγραμματισμός των ‘ηρώων’ του παιχνιδιού. Έχει αποδειχθεί ότι τα εκπαιδευτικά παιχνίδια αιχμαλωτίζουν την προσοχή των μαθητών, συμβάλλοντας στην αύξηση των κινήτρων και της δέσμευσής τους στις έννοιες που χρησιμοποιούν (Ke, 2008). Πέρα από την παροχή κινήτρων, τα παιχνίδια έχουν επίσης τη δυνατότητα να μεγιστοποιήσουν τα μαθησιακά αποτελέσματα των μαθητών (Kolovou, van den Heuvel-Panhuizen, & Köller, 2013). Υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις στη βιβλιογραφία (π.χ., Lowrie & Jorgensen, 2015) ότι κατάλληλα σχεδιασμένα παιχνίδια μπορούν να υποστηρίξουν πειραματισμούς με μαθηματικές και στατιστικές ιδέες σε αυθεντικά περιβάλλοντα και μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μηχανισμοί για τη ενεργητική συμμετοχή των παιδιών σε δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων.

Ενώ τα ψηφιακά εκπαιδευτικά παιχνίδια μπορούν να προσφέρουν μια σειρά από πιθανά οφέλη για τη διδασκαλία και τη μάθηση, παραδόξως δεν ενσωματώνονται συχνά στη διδασκαλία. Ένας υποσχόμενος τύπος παιχνιδιών είναι τα παιχνίδια με τη χρήση κώδικα, τα οποία προσεγγίζουν τις έννοιες μέσω του προγραμματισμού. Σε πολλές χώρες σε όλο τον κόσμο έχουν αρχίσει να εμφανίζονται κάποια καινοτόμα εκπαιδευτικά περιβάλλοντα μάθησης που υποστηρίζουν την ανάπτυξη δεξιοτήτων προγραμματισμού από νεαρή ηλικία. Εκπαιδευτικές εφαρμογές βοηθούν τα παιδιά να αντιληφθούν τα βασικά χαρακτηριστικά του προγραμματισμού μέσω της εξερεύνησης ή/και της δημιουργίας διαδραστικών παιχνιδιών (π.χ. Scratch, ScratchJr, HopScotch, Bee-Bot). Έχοντας εμπνευστεί από τη γλώσσα προγραμματισμού Logo (Papert, 1980), τα εκπαιδευτικά περιβάλλοντα προγραμματισμού προωθούν μια κατασκευαστική προσέγγιση στη χρήση της τεχνολογίας, δίνοντας έμφαση στο να γίνουν τα ίδια τα παιδιά δημιουργοί παιχνιδιών. Εκτός από την παροχή μιας ιδιαίτερα κινητήριας και πρακτικής προσέγγισης για την εισαγωγή των παιδιών στον προγραμματισμό των υπολογιστών και την ανάπτυξη της υπολογιστικής τους σκέψης, το λογισμικό προγραμματισμού (Scratch) προσφέρει πλούσιες ευκαιρίες για την ενίσχυση των δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων, κριτικής σκέψης και λογικής σκέψης (π.χ. ανάλυση αλληλουχίας, πρόβλεψη, μεταγνώση) που μπορεί να εφαρμοστεί σε όλους τους τομείς. Τα παιδιά σκέφτονται πιο δημιουργικά, λογοθετούν συστηματικά και συνεργάζονται εποικοδομητικά, αποκτώντας έτσι τις απαραίτητες δεξιότητες για τον 21ο αιώνα (Resnick, 2007; Lesh & Harel, 2003). ¨

Στην παρούσα εργασία εξετάζεται ο τρόπος με τον οποίο τα παιδιά εκφράζονται για την έννοια του τυχαίου όταν σχεδιάζουν, προγραμματίζουν και παίζουν τα δικά τους παιχνίδια.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Πλαίσιο και συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες ήταν είκοσι έξι παιδιά (N = 26, 16 αγόρια, 10 κορίτισια), ηλικίας μεταξύ 8 και 13 ετών. Τα παιδά συμμετείχαν σε τέσσερα εργαστήρια τον Ιούλιο του 2016 σε εθελοντική βάση. Το κάθε εργαστήριο διήρκεσε δύο ώρες. Μια πρόσκληση προς τους γονείς αναρτήθηκε στα μέσα κοινωνικής δικτύωσης και τα παιδιά επιλέχθηκαν από μια λίστα προτεραιότητας με βάση την ημερομηνία εγγραφής. Όλοι ανεξαρτήτως οι συμμετέχοντες είχαν το δικαίωμα να σταματήσουν τη συμμετοχή τους εξ ολοκλήρου οποιαδήποτε στιγμή του προγράμματος. Επιπρόσθετα, όλοι οι γονείς έδωσαν τη γραπτή συγκατάθεσή τους σχετικά με τη χρήση και τη δημοσίευση της εργασίας των παιδιών τους για ερευνητικούς σκοπούς. Σε αυτή την εργασία, όλα τα ονόματα που χρησιμοποιούνται είναι ψευδώνυμα για να διατηρηθεί η ανωνυμία των συμμετεχόντων.

Για την επίτευξη του σκοπού της έρευνας, επιλέγηκε το Scratch 2.0, μια γλώσσα προγραμματισμού, η οποία αναπτύχθηκε στο MIT Media Lab.

Το Scratch αποτελείται από επαναχρησιμοποιούμενα κομμάτια κώδικα, τα οποία μπορούν εύκολα να συνδυαστούν, να μοιραστούν και να προσαρμοστούν και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προγραμματισμό αλληλεπιδραστικών ιστοριών, παιχνιδιών και κινούμενων σχεδίων, τέχνης και μουσικής. Τα παιδιά μπορούν να μοιραστούν όλες αυτές τις δημιουργίες με άλλους σε μια διαδικτυακή κοινότητα (http://scratch.mit.edu/). Το Scratch κυκλοφόρησε για πρώτη φορά το 2007, ενώ το Scratch 2.0, το οποίο είναι η πιο πρόσφατη έκδοση του λογισμικού, κυκλοφόρησε το 2013. Για την εκπόνηση της εργασίας θεωρήθηκε ότι το Scratch 2.0 ήταν ένα κατάλληλο εργαλείο για την κωδικοποίηση μαθησιακών περιβαλλόντων και την ανάπτυξη εννοιών πιθανοτήτων.

Το πρώτο εργαστήριο στόχευε σε μια γενική εισαγωγή στο λογισμικό. Στο δεύτερο εργαστήριο συζητήθηκαν οι άξονες x και y με βάση τη θέση και στο τρίτο εργαστήριο, τα παιδιά επεξεργάστηκαν τις μεταβλητές και την ιδέα της έννοιας του τυχαίου μέσω πειραματισμού με ένα παιχνίδι νομισμάτων όπου χρησιμοποιήθηκε το μπλοκ με την εντολή του τυχαίου. Στη διάρκεια του τρίτου εργαστηρίου, ζητήθηκε επίσης από τα παιδιά να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις και δεξιότητες που απέκτησαν για να δημιουργήσουν το δικό τους παιχνίδι. Κατά την τελευταία συνάντηση, τα παιδιά συνέχισαν τα παιχνίδια που είχαν αρχίσει να κατασκευάζουν στην προηγούμενη συνάντηση, αλλάζοντάς τα, αν το επιθυμούσαν, και ζήτησαν από έναν φίλο να παίξει το παιχνίδι τους έτσι ώστε να πάρουν πληροφορίες για το πώς βρίσκει το παιχνίδι τους ένας άλλος χρήστης.

Μέθοδοι συλλογής δεδομένων

Για τους σκοπούς συλλογής των δεδομένων, χρησιμοποιήθηκε μια ποικιλία μεθόδων, συμπεριλαμβανομένων της οπτικογράφησης του εργαστηρίου και της παρατήρησης των αλληλεπιδράσεων των συμμετεχόντων με το λογισμικό. Άλλες πηγές δεδομένων περιλάμβαναν σημειώσεις πεδίου και παρατηρήσεις στην τάξη. Σε έξι περιπτώσεις παιδιών, τα οποία φάνηκε να χρησιμοποιούν περισσότερο από τους άλλους την έννοια του τυχαίου στα παιχνίδια τους, πραγματοποιήθηκαν επιπλέον ημιδομημένες συνεντεύξεις κατά τη διάρκεια της εφαρμογής και του επανασχεδιασμού των παιχνιδιών τους. Οι ημιδομημένες συνεντεύξεις επέτρεψαν στους μαθητές να εμβαθύνουν περισσότερο, να αναλύσουν και να τεκμηριώσουν την απάντησή τους. Η ανάλυση στηρίχθηκε σε όλα τα συλλεχθέντα δεδομένα. Αφού έγινε προσεκτική ανάγνωση των δεδομένων, εντοπίστηκαν επαναλαμβανόμενα μοτίβα, τα οποία και χρησιμοποιήθηκαν για να γίνει κατηγοριοποίηση των δεδομένων και στην υπογράμμιση θεμάτων τα οποία επαναλαμβάνονταν. Οι διαπιστωμένες συγκλίσεις παρατίθενται στο μέρος που ακολουθεί.

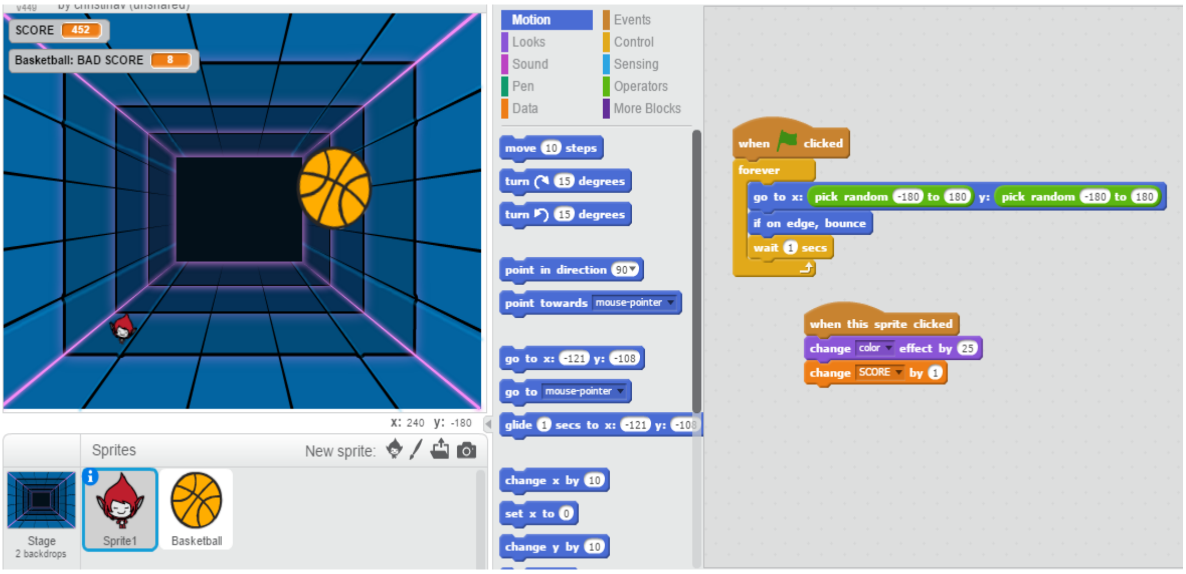
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η έννοια του τυχαίου στον προγραμματισμό παιχνιδιών

Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζονται οι συλλογισμοί των παιδιών σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποίησαν την έννοια του τυχαίου στα παιχνίδια τους. Τα παιχνίδια των παιδιών που παρουσιάζονται είναι από την τελευταία συνάντηση.

Κατά τη διάρκεια των συναντήσεων, τα παιδιά πειραματίστηκαν με διαφορετικές μαθηματικές και στατιστικές έννοιες κατά το σχεδιασμό των παιχνιδιών τους. Ενας από τους προβληματισμούς που τέθηκε ήταν το ‘πώς να προγραμματίσω το τυχαίο;’. Το μπλοκ "*random pick*", το οποίο επιτρέπει στους χρήστες να φέρνουν μια τυχαία επιλογή των αντικειμένων του Scratch, επεξηγήθηκε στα παιδιά, με παρόμοιο τρόπο με τον τρόπο που εισήχθησαν τα υπόλοιπα μπλοκ του προγράμματος. Ήταν ενδιαφέρουσα η ανακάλυψη ότι τα παιδιά κατέληξαν να χρησιμοποιούν την έννοια του τυχαίου σε πολλές κατασκευές παιχνιδιών τους.

Ο Γιώργος (9 χρονών) έκανε το πιο κάτω παιχνίδι με το ξωτικό να κινείται τυχαία και να προσπαθεί ο παίκτης να το αγγίξει με την μπάλα του μπάσκετ.



Εικόνα 1: Το παιχνίδι του Γιώργου με ξωτικό

Γιώργος: Το ξωτικό κινείται τυχαία…

Ερευνήτρια: Πώς δηλαδή;

Γιώργος: Δεν ξέρουμε πού θα πάει ακριβώς… και προσπαθούμε να το αγγίξουμε με την μπάλα… Βασικά βλέπω πού πάει και προσπαθώ να *προβλέψω* πού θα είναι η θέση του την επόμενη φορά.

Ερευνήτρια: Πώς το προβλέπεις;

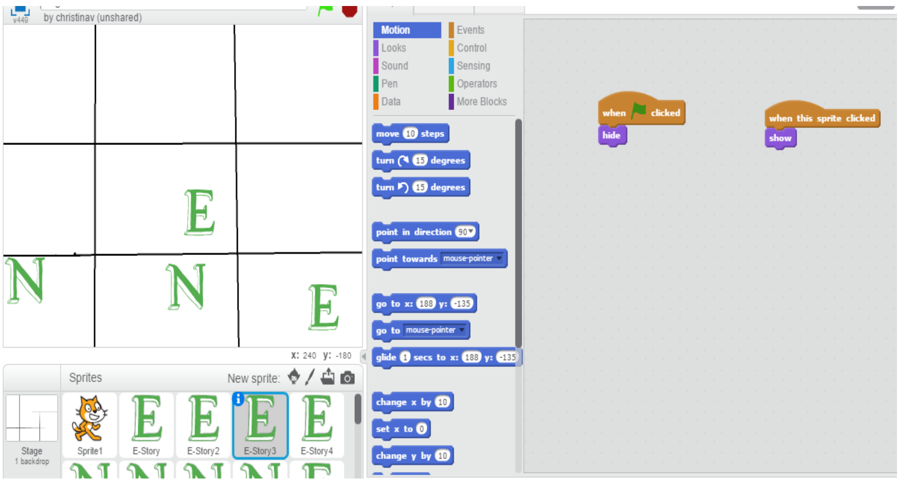
Γιώργος: Βλέπω που ήταν…. Θα κινηθεί τυχαία, αλλά δε θα πηγαίνει συνέχεια στην ίδια θέση… Εγώ το βλέπω με περιοχές που θα πάει…. Την μπάλα τη μεγάλωσα… να έχω περισσότερες πιθανές θέσεις να αγγίξω.

Ερευνήτρια: Τι εννοείς;

Γιώργος: Προβλέπω μια περιοχή για τη θέση του ξωτικού αντί τη συγκεκριμένη θέση… τοποθετώ την μπάλα μου εκεί και έτσι παίρνω πολλές θέσεις… έχουν διαφορετικό… όχι χώρο που κινούνται, αλλά χώρο που παίρνουν… έτσι έχω περισσότερες πιθανότητες να την ‘κτυπήσω’… κατάλαβες;

Είναι σημαντικό πώς ο Γιώργος προσπαθεί να εντοπίσει την τυχαία θέση του ξωτικού με την μπάλα του μπάσκετ. Ο ίδιος αναφέρεται στη ‘χωρική’ αναπαράσταση της πιθανότητας. Αποφάσισε να μεγαλώσει την μπάλα του μπάσκετ, την οποία ελέγχει ο ίδιος και ουσιαστικά να επιλέγει περισσότερες από μία θέσεις ξωτικού.

Ο Έρικ (δέκα χρονών) και η Νίκη (δώδεκα χρονών) σχεδίασαν ένα παιχνίδι όπου το πρώτο γράμμα του ονόματός τους εμφανίζεται τυχαία όταν ο χρήστης κάνει κλικ στον πίνακα.



Εικόνα 2: Το παιχνίδι του Έρικ και της Νίκης με τα γράμματα

Έρικ: Μου αρέσει το γεγονός ότι τα γράμματα εμφανίζονται σε τυχαία θέση. Αυτό κάνει το παιχνίδι μας πιο ενδιαφέρον.

Ερευνήτρια: Γιατί γίνεται αυτό;

Νίκη: Πρέπει να *δεις* την *πιθανότητα*, από πού μπορεί να πάει [το γράμμα], και στη συνέχεια να επιλέξεις το γράμμα.

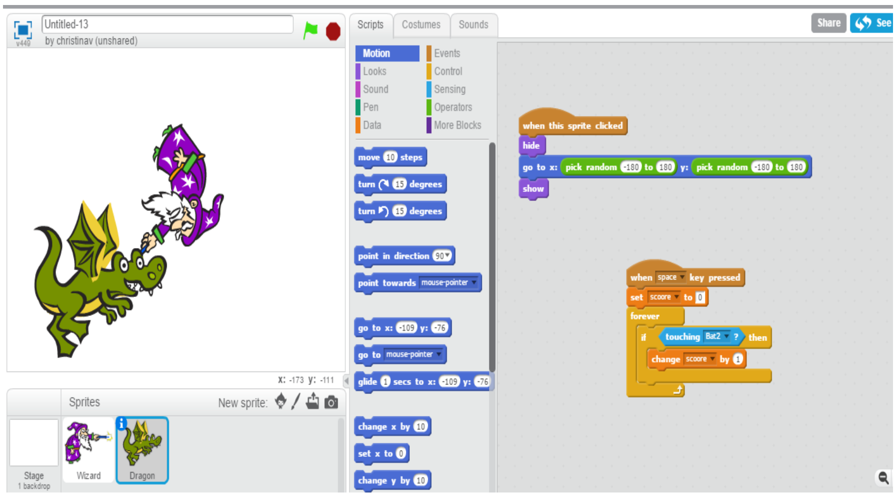
Έρικ: Δεν ξέρεις στην αρχή ... Πρέπει να κάνεις μια εικασία. Εάν δεν εξετάζεις τα αποτελέσματα και απλά παίζεις, τότε είναι πιθανότερο να χάσεις ... αλλά τίποτα δεν είναι σίγουρο.

Ερευνήτρια: Είναι δίκαιο το παιχνίδι σας;

Νίκη: Ναι… θα το *δεις… αν το αφήσουμε* να παίζει για πολλή ώρα και βάλουμε έναν μετρητή θα πάρει τον ίδιο αριθμό [για το κάθε γράμμα].

Ο Ερικ και η Νίκη χρησιμοποίησαν τον τυχαίο κανόνα στο παιχνίδι τους για να το κάνουν πιο ενδιαφέρον, αφού αυτό έδινε ‘δράση’ στο παιχνίδι τους. Η Νίκη αναφέρθηκε στην έννοια της πιθανότητας προκειμένου να κάνει μια σωστή πρόβλεψη με βάση τα αποτελέσματα του παιχνιδιού. Έτσι, οι μαθητές έπαιζαν το παιχνίδι και προσπαθούσαν να μαντέψουν πού θα εμφανιζόταν το επόμενο γράμμα με βάση τη συνθήκη του προγραμματισμού που είχαν θέσει. Στη συνέχεια σχολιάζουν κατά πόσο είναι δίκαιο το παιχνίδι τους, αναφέροντας ότι η πιθανότητα κάθε γράμματος να εμφανιστεί κάπου είναι ίση για κάθε τετράγωνο και αυτό μπορεί να επαληθευτεί αν αφήσουμε το παιχνίδι «να παίζει για πολλή ώρα», υποδηλώνοντας άτυπη κατανόηση του ‘νόμου των μεγάλων αριθμών’.

Ο Χάρης (9 χρονών) κατασκεύασε επίσης ένα παιχνίδι χρησιμοποιώντας την έννοια του τυχαίου.



Εικόνα 3: Το παιχνίδι του Χάρη με τον δράκο

Ο σκοπός του παιχνιδιού του Χάρη ήταν ο μάγος να αγγίξει τον δράκο. Όταν ο δράκος πατηθεί, εμφανίζεται σε τυχαία θέση. Ο μάγος ακολουθεί τον δράκο στη νέα του θέση.

Χάρης: Ξέρετε, το έκανα μόνο για διασκέδαση! Είναι ωραίο να βλέπεις τον δράκο να κινείται χωρίς να ξέρει ... Αλλά θα το συνεχίσω [το παιχνίδι]. Έκανα τον δράκο να κινηθεί σε όλο τον τόπο [χώρο].

Ερευνήτρια: Πώς δηλαδή;

Χάρης: Του λες εδώ [δείχνει τον κώδικα] και τον παρακολουθείς… Αν τον αφήσουμε να παίζει θα δεις ότι θα περάσει.

Ερευνήτρια: Θα εμφανιστεί ξανά σε αυτή τη θέση που τον βλέπουμε τώρα;

Χάρης: Φυσικά! Θα κάνω κάτι για να μετρώ πού πηγαίνει, έτσι θα δούμε ποια θέση παίρνει κάθε φορά ... Μπορεί να αγγίζει κάτι ... Να δω τι μπορώ να κάνω ...

Ο Χάρης συνειδητοποιεί ότι το τυχαίο είναι κάτι που δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων. Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι σχεδίασε έναν δράκο να κινείται τυχαία και στη συνέχεια προσπάθησε να προβλέψει τις κινήσεις του μετρώντας τη θέση του δράκου κάθε φορά. Παραδέχεται ότι έτσι ξεκινάει η διασκέδαση! Η ιδέα της χρήσης των μεταβλητών x και y με τυχαίο τρόπο και η προσπάθεια να προβλεφθεί η επόμενη θέση ώθησαν τον Χάρη να χρησιμοποιήσει την ιδέα ότι ο δράκος θα κινηθεί σε όλο τον χώρο όταν το παιχνίδι τον αφήσει να παίζει για πολύ χρόνο (νόμος μεγάλων αριθμών). Ο δράκος δηλαδή θα περάσει από κάθε σημείο (με βάση τα x και y).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα περιβάλλοντα μάθησης, όπου τα παιδιά μπορούν να σχεδιάσουν με κώδικα ένα παιχνίδι παρέχουν μια ιδανική ευκαιρία για να ενσωματωθούν έννοιες με φιλικό τρόπο προς το παιδί (Resnick, 2007). Σκοπός του παρόντος άρθρου ήταν να διερευνήσει πώς τα παιδιά χρησιμοποιούν την έννοια του τυχαίου όταν σχεδιάζουν, προγραμματίζουν και παίζουν τα δικά τους παιχνίδια. Τα παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα αντιμετώπισαν την έννοια της πιθανότητας ως διερευνητική διαδικασία επίλυσης προβλημάτων. Τα συλλεχθέντα δεδομένα κατέδειξαν μία σύνδεση μεταξύ της έννοιας του τυχαίου και της χωρικής αναπαράστασης της πιθανότητας. Λόγω της φύσης του προγράμματος Scratch, τα παιδιά χρησιμοποίησαν τον κώδικα του τυχαίου χωρίς καν να αναφερθεί ποιος είναι ο δειγματικός χώρος ή πώς υπολογίζεται η πιθανότητα. Ο σχεδιασμός, η κωδικοποίηση, η αναθεώρηση και ο επανασχεδιασμός του κώδικα του ψηφιακού παιχνιδιού, βοήθησε τους μαθητές να αναπτύξουν δεξιότητες επίλυσης χρησιμοποιώντας την έννοια του τυχαίου και της πιθανότητας.

Η παρούσα μελέτη δείχνει ότι η έννοια του τυχαίου αποτελεί ένα σημαντικό στοιχείο του παιχνιδιού και ένα λογισμικό όπως το Scratch μπορεί να δώσει ευκαιρίες έκφρασης εννοιών της πιθανότητας (Batanero & Díaz, 2012). Εμβαθύνοντας στις προηγούμενες μελέτες για την έννοια του τυχαίου (π.χ., Pratt, 2000; Pratt et al., 2008; Paparistodemou et al., 2008; Meletiou-Mavrotheris, 2013; Erickson, 2014), παρατηρούμε ότι τα παιδιά τείνουν να χρησιμοποιούν τη συμμετρία για τη δημιουργία παιχνιδιών ίσης πιθανότητας (π.χ., ζάρια, νομίσματα, τροχούς τύχης), κάτι που παρατηρήθηκε και στα δεδομένα της παρούσας εργασίας, (π.χ. στην περίπτωση της Νίκης και του Έρικ). Η παρούσα μελέτη κατέδειξε κάποια στοιχεία από τη συλλογιστική των παιδιών σχετικά με την έννοια της πιθανότητας, ενώ αυτά σχεδίαζαν παιχνίδια με τη χρήση του λογισμικού Scratch. Περαιτέρω ανάλυση των δεδομένων θα έχει ως στόχο την διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο τα παιδιά εκφράζουν έννοιες πιθανοτήτων, όπως ο νόμος των μεγάλων αριθμών, και του τρόπου με τον οποίο τροποποιούν τους κώδικες τους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Batanero, C. & Díaz, C. (2012). Training school teachers to teach probability. Reflections and challenges: *Chilean Journal of Statistics, 3(1)*, 3-13.

delMas, R. C., Garfield, J., Ooms, A., & Chance, B. (2007). Assessing students' conceptual understanding after a first course in statistics. *Statistics Education Research Journal, 6*(2), 28-58.

Erickson, T. (2014). Exploring informal inferential reasoning through data games. In K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), Sustainability in statistics education. *Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS9, July, 2014), Flagstaff, Arizona, USA. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Ke, F. (2008). Computer games application within alternative classroom goal structures: cognitive, metacognitive, and affective evaluation. *Educational Technology, Research and Development, 56*, 539-556.

Kolovou, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Köller, O. (2013). An intervention including an online game to improve Grade 6 students' performance in early algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(3), 510-549.

Lesh, R., & Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *International Journal of Mathematics Thinking and Learning, 5*, 157-189.

Lowrie, T., and Jorgensen, R., (2015). *Digital games and mathematics learning: Potential, promises and pitfalls.* New York: Springer.

Massachusetts Institute of Technology (M.I.T.) (2013). *Scratch* (version 2.0) [programming software]. Retrieved from https://scratch.mit.edu.

Meletiou-Mavrotheris, M., (2013). Integrating Game-Enhanced Mathematics Learning into the Pre-Service Training of Teachers. In S. de Freitas, M. Ott, M. Popescu, and I.Stanescu (Eds), *New Pedagogical Approaches in Game Enhanced Learning: Curriculum Integration* (pp. 142-166). Hershey, PA: IGI Global.

Meletiou-Mavrotheris, M., and Paparistodemou, E. (2015). Developing Young Learners' Reasoning about Samples and Sampling in the Context of Informal Inferences. *Educational Studies in Mathematics, 88*(3), 385-404.

Paparistodemou, E., Noss, R. and Pratt, D. (2008*).* The Interplay between Fairness and Randomness. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13,* 89-110.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: children, computers and powerful ideas*. New York: Basic Books.

Pratt, D. (2000). Making sense of the Total of Two Dice. Journal for Research in Mathematics Education, 31, 5, 602-625

Pratt, D., Johnston-Wilder,P., Ainley,J., & Mason, J. (2008). Local and global thinking in statistical inference, *Statistical Education Research Journal*, *7*(2), 107–129, http://www.stat. auckland.ac.serj

Resnick, M. (2007). Sowing the Seeds for a More Creative Society. *Learning and Leading with Technology*, December.

ΚΡΙΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΡΙΩΝ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ

Σοφοκλέους Παρασκευή και Πίττα-Πανταζή Δήμητρα

Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

skevis@ucy.ac.cy και dpitta@ucy.ac.cy

Η σημασία της κριτικής σκέψης στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι ευρέως αποδεκτή. Παρατηρείται, όμως, να παραμελείται λόγω της ασάφειας που υπάρχει στον ορισμό της. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να παρουσιάσει ένα ολοκληρωμένο και κατάλληλο μοντέλο για ορισμό και μέτρηση της κριτικής σκέψης στα μαθηματικά. Οκτακόσιοι δυο μαθητές Στ΄ δημοτικού συμπλήρωσαν ένα δοκίμιο που αξιολογούσε ικανότητες της κριτικής σκέψης στα μαθηματικά. Χρησιμοποιώντας επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση, βρέθηκε ότι η κριτική σκέψη στα μαθηματικά περιγράφεται από τρεις ικανότητες: την ανάλυση, τη σύνδεση και την αξιολόγηση.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η κριτική σκέψη θεωρείται απαραίτητη για επιβίωση του ατόμου στον 21^{ο} αιώνα (Partnership for 21st Century Skills, 2015) και για αυτό διάφορα αναλυτικά προγράμματα θέτουν ως σκοπό την ανάπτυξή της (π.χ., Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority, 2015). Το Εθνικό Συμβούλιο Δασκάλων για τα Μαθηματικά στην Αμερική (NCTM) (1989) τονίζει ότι η κριτική σκέψη είναι βασικό συστατικό της αποτελεσματικής διδασκαλίας των μαθηματικών και υπάρχει ανάγκη για ενίσχυσή της. Ακόμη υποστηρίζεται ότι η κριτική σκέψη στα μαθηματικά βοηθάει τους μαθητές να σκέφτονται και να κατανοούν εις βάθος, να έχουν αυτοπεποίθηση για τις σκέψεις τους, να ελέγχουν τη μάθησή τους και να έχουν ενισχυμένες τις μαθηματικές διαδικασίες της αναπαράστασης, της επικοινωνίας, της λύσης προβλήματος και του συλλογισμού (TC^2, 2013). Έχει διαπιστωθεί ότι στη συνηθισμένη τάξη των μαθηματικών δεν δίνεται έμφαση στην κριτική σκέψη, παρά μόνο εντοπίζονται προσπάθειες ενίσχυσής της σε ικανούς μαθητές (Balcaen & Klassen, 2008). Αυτό μπορεί να οφείλεται στο ότι δεν είναι ξεκάθαρα τα στοιχεία που καθορίζουν την κριτική σκέψη σε διάφορα επιστημονικά πεδία, όπως τα μαθηματικά (Ennis, 1989). Η παρούσα εργασία έχει ως στόχο να παρουσιάσει ένα ολοκληρωμένο και κατάλληλο μοντέλο για ορισμό και μέτρηση της κριτικής σκέψης στα μαθηματικά μέσα από την ανάλυση εμπειρικών δεδομένων.

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Κριτική σκέψη: Οι διάφορες προσεγγίσεις

Μέσα από την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας έχουν εντοπιστεί τρεις διαφορετικές σχολές προσέγγισης της κριτικής σκέψης (Lai, 2011). Από τη μια είναι η φιλοσοφική προσέγγιση που θεωρεί ότι η κριτική σκέψη είναι η αναστοχαστική σκέψη που καθορίζει τα πιστεύω και τις πράξεις του ατόμου (Ennis, 1989). Από την άλλη, η προσέγγιση της εκπαιδευτικής ψυχολογίας υποστηρίζει ότι η κριτική σκέψη είναι μια συλλογή από νοερές διαδικασίες, στρατηγικές και αναπαραστάσεις που χρησιμοποιεί το άτομο για να λύσει προβλήματα και να πάρει αποφάσεις (π.χ., Sternberg, 1986). Η τρίτη προσέγγιση, η εκπαιδευτική, θεωρεί ότι η κριτική σκέψη ταυτίζεται με τα τρία ανώτερα επίπεδα της ταξινομίας των Bloom et al. (1956): ανάλυση, σύνθεση και αξιολόγηση (Kennedy, Fisher, & Ennis, 1991). Οι τρεις αυτές προσεγγίσεις, με βάση τη Lai (2011), συμφωνούν στο ότι η κριτική σκέψη περιλαμβάνει τις ικανότητες: της ανάλυσης, της διατύπωσης συμπερασμάτων και της αξιολόγησης. Τα χαρακτηριστικά αυτά της κριτικής σκέψης συνοψίζονται στον ορισμό που δόθηκε για την κριτική σκέψη στο μοντέλο σκέψης του Iowa Department of Education (1989). Με βάση το μοντέλο αυτό, η κριτική σκέψη είναι μία από τις διαστάσεις της ανωτέρου επιπέδου σκέψης και αποτελεί την ικανότητα αναδιοργάνωσης της γνώσης, χρησιμοποιώντας τις διαδικασίες της ανάλυσης, της σύνδεσης και της αξιολόγησης της αποδεκτής γνώσης (Iowa Department of Education, 1989). Η αποδεκτή γνώση είναι η βασική ακαδημαϊκή γνώση που πρέπει να έχει ένα άτομο για ένα θέμα (Iowa Department of Education, 1989).

Η διαδικασία της ανάλυσης αφορά τον τεμαχισμό μιας ολότητας σε επιμέρους κομμάτια και την κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των κομματιών. Περιλαμβάνει τις ικανότητες: αναγνώριση μοτίβων, ταξινόμηση αντικειμένων με κοινά χαρακτηριστικά, εντοπισμός των περιορισμών μιας κατάστασης, εύρεση της κύριας ιδέας/νοήματος και σειροθέτηση. Η διαδικασία της σύνδεσης αναφέρεται στην κατασκευή σχέσεων μεταξύ όλων. Περιλαμβάνει τις ικανότητες: εύρεση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ διαφόρων αντικειμένων, λογική σκέψη, παραγωγικό και επαγωγικό συλλογισμό και προσδιορισμό αιτιατών σχέσεων. Η αξιολόγηση είναι η ικανότητα του ατόμου να κρίνει κάτι με βάση κριτήρια και όχι με τις αντιλήψεις του. Περιλαμβάνει τις ικανότητες: αξιολόγηση πληροφοριών, προσδιορισμός κριτηρίων, εντοπισμός προτεραιοτήτων, αναγνώριση λαθών και τεκμηρίωση (Iowa Department of Education, 1989).

Το μοντέλο αυτό δεν αποτελεί το μοναδικό παιδαγωγικό μοντέλο κριτικής σκέψης, αλλά προσφέρει ένα οργανωμένο πλαίσιο που συνδυάζει διάφορες προσεγγίσεις της κριτικής σκέψης παρουσιάζοντας μια αναλυτική προσέγγισή της και ταυτόχρονα διαχειρίσιμη. Τονίζεται ότι δεν έχει βρεθεί εργασία η οποία να έχει επιβεβαιώσει με εμπειρικά δεδομένα το μοντέλο αυτό τόσο σε γενικό επίπεδο όσο και πιο ειδικά στα μαθηματικά.

Κριτική σκέψη στα μαθηματικά

Γενικά, με βάση τη Jablonka (2014) διαπιστώνεται ότι δεν υπάρχει εκτενής βιβλιογραφία για την κριτική σκέψη στα μαθηματικά. Οι Krulic και Rudnick (1999) ορίζουν την κριτική σκέψη στα μαθηματικά ως τη σκέψη που αναλύει, συσχετίζει και αξιολογεί όλες τις πτυχές μιας κατάστασης ή ενός προβλήματος (Krulik & Rudnick, 1999). Επεκτείνοντας αυτό, η Mărcuț (2005), υποστηρίζει ότι η κριτική σκέψη στα μαθηματικά περιλαμβάνει την ικανότητα του ατόμου να οργανώνει τη μαθηματική του σκέψη και να κάνει συνδέσεις μέσω της επικοινωνίας, να μεταφέρει τη μαθηματική του σκέψη συνοπτικά και ξεκάθαρα χρησιμοποιώντας με ακρίβεια τη μαθηματική γλώσσα και να αναλύει και να αξιολογεί τη μαθηματική σκέψη και τις στρατηγικές των άλλων.

Οι έρευνες που μελέτησαν την κριτική σκέψη ατόμων στα μαθηματικά είτε χρησιμοποίησαν τα ευρέως αποδεκτά εργαλεία μέτρησης της κριτικής σκέψης (π.χ., Watson – Glaser Critical Thinking Appraisal) είτε εξέτασαν την κριτική σκέψη ως μια συλλογή δεξιοτήτων. Για παράδειγμα, οι Applebaum και Leikin (2007) μελέτησαν την κριτική σκέψη μέσα από την ικανότητα του δείγματος τους να αναγνωρίσουν αντικρουόμενες πληροφορίες και μη συναφή δεδομένα σε μαθηματικές ασκήσεις. Οι Aizikovitsh και Amit (2008) μελέτησαν τη βελτίωση της κριτικής σκέψης του δείγματος τους μετά από συγκεκριμένες διδασκαλίες μέσα από δεδομένα που προέκυψαν από εργασίες και διαγωνίσματα. Σε αυτά εξέτασαν κατά πόσο το δείγμα τους υποθέτει, αξιολογεί την αξιοπιστία πηγών, προσδιορίζει μεταβλητές, εξάγει συμπεράσματα και αναζητεί εναλλακτικές λύσεις. Οι Maričić, Špijunović και Lazić (2016) μελέτησαν την κριτική σκέψη μαθητών τρίτης δημοτικού μέσα από την ικανότητά τους να κατανοήσουν ένα πρόβλημα (επιλογή κατάλληλης ερώτησης, συμπλήρωση ερώτησης, αναγνώριση περιττών δεδομένων ή δεδομένων που λείπουν, επιλογή κατάλληλων δεδομένων κτλ). Γενικά, παρατηρείται ότι δεν υπάρχει ένα σαφές, συνοπτικό παιδαγωγικό μοντέλο κριτικής σκέψης στα μαθηματικά (Balcaen & Klassen, 2008· Maričić et al., 2016).

Η ΠΑΡΟΥΣΑ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σκοπός της εργασίας

Σκοπός της εργασίας είναι να παρουσιάσει ένα ολοκληρωμένο μοντέλο για ορισμό και μέτρηση της κριτικής σκέψης στα μαθηματικά. Για αυτό αξιοποιώντας το μοντέλο που προτάθηκε από το Iowa Department of Education (1989) για την κριτική σκέψη, εξετάστηκαν τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

1. Επιβεβαιώνεται με βάση εμπειρικά δεδομένα ότι η κριτική σκέψη στα μαθηματικά περιγράφεται από τρεις διακριτές διαστάσεις: την ανάλυση, τη σύνδεση και την αξιολόγηση;
2. Υπάρχουν διαφορές μεταξύ των επιδόσεων των μαθητών στις τρεις διαστάσεις της κριτικής σκέψης: ανάλυση, σύνδεση και αξιολόγηση;

Δείγμα της εργασίας - Μέσα συλλογής δεδομένων - Διαδικασία

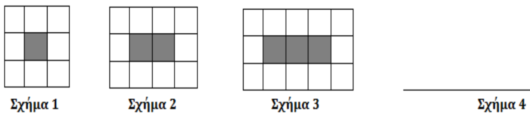
Το δείγμα της εργασίας αυτής αποτέλεσαν 802 μαθητές Στ΄ δημοτικού από 33 δημόσια και ιδιωτικά σχολεία της Κύπρου. Οι μαθητές αυτοί συμπλήρωσαν ένα δοκίμιο κριτικής σκέψης που αποτελείτο από εννέα έργα. Για τη συμπλήρωσή του δόθηκε χρόνος 40 λεπτών. Τα έργα που επιλέχθηκαν απαιτούσαν από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τις διαδικασίες της ανάλυσης (χειρισμός σχέσεων μέρους/όλου), της σύνδεσης (χειρισμός σχέσεων μεταξύ όλων) και της αξιολόγησης (έλεγχος πληροφοριών με βάση κριτήρια) της βασικής τους γνώσης, για να παράγουν αναδιοργανώμενη γνώση (Balcaen & Klassen, 2008· Iowa Department of Education, 1989· TC^2, 2013). Τα έργα αυτά αφορούσαν διάφορες μαθηματικές έννοιες από τις πέντε ενότητες περιεχομένου του αναλυτικού προγράμματος της Κύπρου (αριθμοί, μέτρηση, γεωμετρία, άλγεβρα, στατιστική-πιθανότητες) και ανταποκρίνονταν στο μαθηματικό περιεχόμενο που θεωρείται ότι κατέχουν οι μαθητές του δείγματος, ώστε να παρουσιαστεί η κριτική τους σκέψη. Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι για να μπορέσει κάποιος να απαντήσει τα έργα που απαιτούν διαδικασίες σύνδεσης και αξιολόγησης, στηρίζεται σε διαδικασίες ανάλυσης. Αυτό γιατί σύμφωνα με τους ορισμούς των τριών διαδικασιών που δόθηκαν στο μοντέλο του Iowa Department of Education (1989) κάποιος για να μπορεί να κάνει συνδέσεις μεταξύ ολοτήτων χρειάζεται να εντοπίσει τα κοινά τους χαρακτηριστικά αναλύοντας τις σε επιμέρους κομμάτια, καθώς και να αξιολογήσει μια κατάσταση χρειάζεται να αναγνωρίζει τους περιορισμούς της ή να εντοπίζει την κύρια ιδέα της αναλύοντας την σε επιμέρους κομμάτια. Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται ενδεικτικά έργα για κάθε διάσταση της κριτικής σκέψης και αιτιολογείται η επιλογή του κάθε έργου για μέτρηση της συγκεκριμένης διάστασης.

ΕΡΓΑ	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

Ανάλυση

Κ1: Συμπλήρωση του τέταρτου όρου σε γεωμετρικό μοτίβο

Να συνεχίσεις το μοτίβο.



- (Τροποποιήθηκε από Friel et al., 2009)

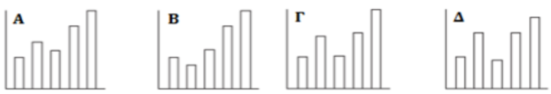
Απαιτείται η χρήση της διαδικασίας της ανάλυσης για την εύρεση του τέταρτου όρου του μοτίβου. Συγκεκριμένα, απαιτείται να αναλυθούν οι τρεις πρώτοι όροι του μοτίβου ως προς τον αριθμό των άσπρων και των μαύρων τετραγώνων που αποτελούνται και τον τρόπο που διατάσσονται, ώστε να φανεί με ποιο τρόπο αλλάζουν σε κάθε όρο.

Σύνδεση

Κ4: Επιλογή κατάλληλου ραβδογράμματος για αναπαράσταση αριθμητικών δεδομένων

Ο πιο κάτω πίνακας δείχνει τον αριθμό των κατοίκων σε πέντε χωριά της Κύπρου. Να βάλεις σε κύκλο τη γραφική παράσταση που παρουσιάζει τα δεδομένα του πίνακα.

Χωριά	Λύμπια	Λιοπέτρι	Ξυλοτύμβου	Κολόσσι	Γεροσκήπου
Αριθμός Κατοίκων	2997	4432	3761	5980	7440



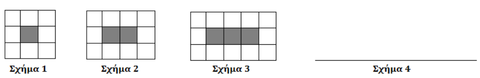
(Τροποποιήθηκε από Butterworth & Thwaites, 2013)

Απαιτείται η χρήση της διαδικασίας της σύνδεσης των αναπαραστάσεων του έργου αυτού για εύρεση της ορθής απάντησης. Συγκεκριμένα, απαιτείται η σύγκριση των δυο διαφορετικών αναπαραστάσεων (πίνακα τιμών και ραβδόγραμμα) και παράλληλα η εύρεση ομοιοτήτων και διαφορών τόσο μεταξύ των τεσσάρων ραβδογραμμάτων που δίνονται ως επιλογές όσο και μεταξύ των αριθμών του πίνακα.

Αξιολόγηση

Κ7: Αξιολόγηση δοσμένου αριθμού αν ανήκει σε συγκεκριμένο μοτίβο-επεξήγηση κανόνα

Μπορεί ένα σχήμα στο πιο κάτω μοτίβο να έχει 11 άσπρα τετράγωνα; Να δικαιολογήσεις την απάντησή σου.



(Τροποποιήθηκε από Friel et al., 2009)

Απαιτείται η χρήση της διαδικασίας της αξιολόγησης για την εύρεση της ορθής απάντησης του ερωτήματος αυτού. Συγκεκριμένα, απαιτείται το άτομο να ελέγξει κατά πόσο ο αριθμός 11 ανήκει ή όχι στο μοτίβο που ακολουθούν τα άσπρα τετράγωνα και να τεκμηριώσει την απάντησή του με αναφορά σε γενίκευση του μοτίβου (π.χ., Δεν μπορεί γιατί δεν είναι άρτιος αριθμός.).

Πίνακας 1: Ενδεικτικά έργα κριτικής σκέψης και σύντομη περιγραφή τους.

Σημειώνεται ότι για τη βαθμολόγηση των έργων λάβαμε υπόψη όχι μόνο την ορθότητα της απάντησης που δινόταν, αλλά και το βαθμό που χρησιμοποιήθηκε η διαδικασία της κριτικής σκέψης που εξετάστηκε (ανάλυση, σύνδεση, αξιολόγηση). Έτσι, δόθηκαν βαθμολογίες από 0 μέχρι 4, με το 0 να δίνεται στην πλήρως λανθασμένη απάντηση και το 4 στην πλήρως ορθή απάντηση. Η εσωτερική αξιοπιστία των επιδόσεων των μαθητών στα εννέα έργα ήταν Cronbach a=.75, που θεωρείται ικανοποιητική.

Τεχνικές ανάλυσης δεδομένων

Για την απάντηση του πρώτου ερευνητικού ερωτήματος έγινε χρήση της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης (CFA: Confirmatory Factor Analysis) στο λογισμικό δομικής ανάλυσης Mplus. Η επιλογή της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης αντί της διερευνητικής παραγοντικής ανάλυσης στο SPSS έγινε λόγω του είναι γνωστή η δομή μοντέλου που ερευνάται. Για έλεγχο της προσαρμογής των δεδομένων των 802 μαθητών στο μοντέλο χρησιμοποιήθηκαν πέντε δείκτες (Geiser, 2010): (α) ο δείκτης Comparative Fit Index, $CFI>.95$, (β) ο δείκτης Tucker-Lewis Index (TLI)>.95, (γ) ο λόγος $x^2/df<1.96$, (δ) ο δείκτης Root Mean-Square Error of Approximation, $RMSEA<.05$ και (ε) ο δείκτης Standardized Root Mean Square Residual ($SRMR$)<.05. Για την απάντηση του δεύτερου ερευνητικού ερωτήματος έγινε χρήση των τεχνικών περιγραφικής και συσχετιστικής στατιστικής στο στατιστικό πακέτο SPSS.

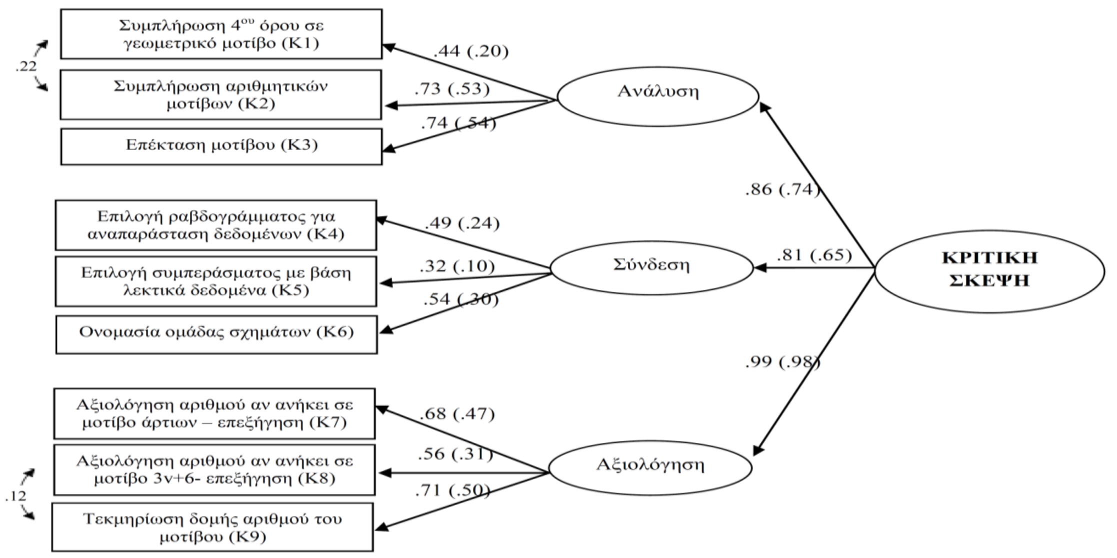
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Για να εξεταστεί η προσαρμογή των δεδομένων των μαθητών από το δοκίμιο στο προτεινόμενο μοντέλο σχετικά με τις ικανότητες που περιγράφουν την κριτική σκέψη στα μαθηματικά, χρησιμοποιήθηκε η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση. Συγκεκριμένα, το μοντέλο υποθέτει ότι: (α) οι επιδόσεις των μαθητών στις εννιά μεταβλητές (έργα) μπορούν να εξηγηθούν από τρεις παράγοντες πρώτης τάξης (ανάλυση, σύνδεση, αξιολόγηση), (β) κάθε μεταβλητή φορτίζει σε κάθε παράγοντα που έχει σχεδιαστεί και δεν φορτίζει σε άλλους παράγοντες και (γ) οι τρεις παράγοντες πρώτης τάξης φορτίζουν σε παράγοντα δευτέρας τάξης (κριτική σκέψη στα μαθηματικά).

Τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης έδειξαν ότι τα δεδομένα των μαθητών του δείγματος προσαρμόζονται στο προτεινόμενο μοντέλο σε ικανοποιητικό βαθμό (βλέπε Διάγραμμα 1), αφού οι τιμές των πέντε δεικτών που εξετάζονται είναι μέσα στο εύρος τιμών που ορίζονται για καλή προσαρμογή: (α) $CFI = .98\,(>.95)$, (β)

$TLI = .98\ (>.95)$, (γ) $x^2 = 40.86,\ df = 22$, $x^2/df = 1.85\ (<1.96)$, (δ) $RMSEA = .03\ (<.05)$ και (ε) $SRMR = .02\ (<.05)$. Επειδή ο Kline (1998) υποστηρίζει ότι «έστω και εάν η θεωρία είναι ακριβής σχετικά με τον αριθμό των παραγόντων ενός μοντέλου πρώτης τάξης, ο ερευνητής πρέπει να εξετάσει κατά πόσο προσαρμόζονται τα δεδομένα σε ένα πιο απλό μοντέλο, ενός παράγοντα», εξετάστηκε κατά πόσο τα δεδομένα προσαρμόζονται σε ένα μόνο παράγοντα. Τα αποτελέσματα από την ανάλυση έδειξαν ότι το μοντέλο ενός παράγοντα δεν πληροί τα κριτήρια που ορίζονται για καλή προσαρμογή, αφού οι τιμές των περισσότερων δεικτών δεν είναι στο ενδεδειγμένο εύρος τιμών.

Οι φορτίσεις των εννιά μεταβλητών στους παράγοντες πρώτης τάξης (ανάλυση, σύνδεση, αξιολόγηση) είναι όλες στατιστικά σημαντικές, θετικές και οι περισσότερες σχετικά υψηλές (.30 μέχρι .77). Με βάση το Διάγραμμα 1, τα έργα που αφορούσαν συμπλήρωση και επέκταση μοτίβων (έργα Κ1-Κ3) φορτίζουν μόνο στον παράγοντα πρώτης τάξης: «Ανάλυση». Σε αυτά τα έργα οι μαθητές απαιτείτο να χειριστούν σχέσεις μέρους/όλου, δηλαδή να αναλύσουν τα μοτίβα που δίνονταν και να κατανοήσουν τη σχέση μεταξύ των όρων τους ώστε να τα συμπληρώσουν ή και να τα επεκτείνουν. Τα έργα Κ4-Κ6 φορτίζουν μόνο στον παράγοντα πρώτης τάξης: «Σύνδεση». Σε αυτά τα έργα οι μαθητές απαιτείτο να συγκρίνουν αναπαραστάσεις δεδομένων που δίνονταν (εντοπίζοντας ομοιότητες και διαφορές) και να βρουν τη σχέση τους. Τα έργα Κ7-Κ9 φορτίζουν μόνο στον παράγοντα πρώτης τάξης: «Αξιολόγηση». Σε αυτά τα έργα οι μαθητές απαιτείτο να ελέγξουν δεδομένα που δίνονταν ως προς τη σχετικότητα τους σε δοσμένη κατάσταση και να τεκμηριώσουν την απάντησή τους. Άρα, οι τρεις παράγοντες πρώτης τάξης δείχνουν τρεις διακριτές ικανότητες όσον αφορά την κριτική σκέψη στα μαθηματικά.



Σημείωση. Ο πρώτος αριθμός αποτελεί τη φόρτιση στον παράγοντα και ο αριθμός στην παρένθεση είναι η αντίστοιχη ερμηνευόμενη διασπορά (r^2).

Διάγραμμα 1: Το μοντέλο για την κριτική σκέψη στα μαθηματικά.

Η σχέση των τριών παραγόντων πρώτης τάξης είναι ιδιαίτερα ισχυρή, ώστε να συνθέτουν έναν παράγοντα ανωτέρας τάξης. Οι φορτίσεις των παραγόντων πρώτης τάξης (ανάλυση, σύνδεση, αξιολόγηση) στην κριτική σκέψη (παράγοντας δεύτερης τάξης) είναι επίσης στατιστικά σημαντικές, θετικές και ιδιαίτερα υψηλές (0.86, 0.81 και 0.99 αντίστοιχα). Αυτό δείχνει ότι το όλο μοντέλο που αναφέρεται στην κριτική σκέψη μπορεί να ερμηνεύσει και να επεξηγήσει τις διακυμάνσεις των μαθητών σε τέτοιου είδους έργα με αρκετά μεγάλη ακρίβεια.

Η επίδοση των μαθητών του δείγματος σε κάθε ένα από τους παράγοντες πρώτης τάξης της κριτικής σκέψης είναι διαφορετική. Οι μαθητές σημείωσαν τον υψηλότερο μέσο όρο στον παράγοντα της ανάλυσης ($\bar{X}$ =.81, *SD*=.27) και τους χαμηλότερους μέσους όρους στους παράγοντες της σύνδεσης ($\bar{X}$ =.55, *SD*=.20) και της αξιολόγησης ($\bar{X}$ =.48, *SD*=.32). Εξετάστηκε κατά πόσο υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των επιδόσεων αυτών χρησιμοποιώντας το κριτήριο t για εξαρτημένα δείγματα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι μεταξύ κάθε ζευγαριού επίδοσης υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ($p<.01$).

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η εργασία αυτή βρήκε ότι η κριτική σκέψη στα μαθηματικά μπορεί να οριστεί από τρεις διακριτές ικανότητες: την ανάλυση, τη σύνδεση και την αξιολόγηση. Αυτό αποτελεί νέο εύρημα στη βιβλιογραφία της μαθηματικής παιδείας, αφού στις εργασίες που εντοπίστηκαν παρουσιαζόταν ότι η κριτική σκέψη ήταν μια ελλιπής συλλογή από δεξιότητες και έτσι χρειαζόταν ένα ολοκληρωμένο, καλά οργανωμένο και πρακτικά διαχειρίσιμο μοντέλο για αυτήν (Balcaen & Klassen, 2008· Ennis, 1989· Maričić et al., 2016). Η εργασία αυτή παρουσιάζει ένα τέτοιο μοντέλο για την κριτική σκέψη στα μαθηματικά, χωρίς όμως να θεωρεί ότι είναι το μοναδικό και ότι περιγράφει εξ ολοκλήρου την κριτική σκέψη όλων των μαθητών στα μαθηματικά. Είναι ολοκληρωμένο αφού συνοψίζει προσεγγίσεις της κριτικής σκέψης από διάφορες σχολές (φιλοσοφική, ψυχολογική, εκπαιδευτική), καθώς και ορισμούς που δόθηκαν στη βιβλιογραφία της μαθηματικής παιδείας (π.χ., Krulik & Rudnick, 1999· Mărcuț, 2005). Είναι καλά οργανωμένο αφού αποτελείται από τρεις διακριτές και καλά ορισμένες ικανότητες: την ανάλυση (χειρισμός σχέσεων μέρους/όλου μέσω της κατανόησης, της συμπλήρωσης και της επέκτασης μοτίβων), τη σύνδεση (κατασκευή σχέσεων μεταξύ όλων μέσω εντοπισμού ομοιοτήτων και διαφορών, εφαρμογής λογικού και επαγωγικού συλλογισμού και εύρεσης αιτιατών σχέσεων) και την αξιολόγηση (έλεγχος δεδομένων με βάση κριτήρια και τεκμηρίωση). Είναι πρακτικά διαχειρίσιμο αφού μπορεί να αξιοποιηθεί για ανάπτυξη περιβαλλόντων ενίσχυσης της κριτικής σκέψης στα μαθηματικά καθώς και για μέτρησή της.

Η επίδοση των μαθητών του δείγματος στις τρεις διαστάσεις της κριτικής σκέψης δεν ήταν η ίδια. Συγκεκριμένα, σημείωσαν την υψηλότερη μέση επίδοση στα έργα της ανάλυσης και τη χαμηλότερη στα έργα της σύνδεσης και της αξιολόγησης. Η υψηλή επίδοση που σημείωσαν οι μαθητές του δείγματος στα έργα της ανάλυσης μπορεί να οφείλεται στο ότι οι μαθητές του δείγματος ήταν περισσότερο εξοικειωμένοι με αυτά σε σχέση με τα έργα της σύνδεσης και της αξιολόγησης. Πιθανόν η διδασκαλία των μαθηματικών που δέχονται οι μαθητές του δείγματος να μην δίνει τόση έμφαση στις διαδικασίες της σύνδεσης και της αξιολόγησης, όση δίνει στη διαδικασία της ανάλυσης.

Τονίζεται ότι τα αποτελέσματα της εργασίας δεν μπορούν να γενικευτούν, αφού οι απαντήσεις των μαθητών προέκυψαν με βάση τις ασκήσεις που δόθηκαν, το μαθηματικό περιεχόμενό τους, την κουλτούρα και το εκπαιδευτικό σύστημα που συμμετέχουν οι μαθητές (Lave & Wenger, 1991). Για αυτό, περαιτέρω έρευνες χρειάζονται να γίνουν ώστε να εξεταστούν με ποιο τρόπο ενισχύονται ή διαφοροποιούνται τα αποτελέσματα της εργασίας με δεδομένα (α) μαθητών από συνεντεύξεις, (β) μαθητών άλλων εκπαιδευτικών συστημάτων, (γ) μαθητών διαφορετικών ηλικιών και (δ) μαθητών σε συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Aizikovitsh, E. & Amit, M. (2008) Developing critical thinking in probability lesson. In O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the 32th Annual Conference of the PME* (Vol. 2, pp. 9-13). Mexico: PME.

Applebaum, M., & Leikin, R. (2007). Looking back at the beginning: Teachers' critical reasoning when solving non-realistic tasks. *Montana Mathematical Enthusiast Journal*, *4*(2), 258-265.

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (ACARA). (2015). *General capabilities in the Australian Curriculum: Mathematics*. Retrieved from http://www.australiancurriculum.edu.au/

Balcaen, P. L., & Klassen, W. (2008). *Teaching critical mathematics thinking (Mathematical mindedness)*. Proceedings of the 2008 Canadian Society for the Study of Education Congress, University of British Columbia, USA.

Butterworth, J., & Thwaites, G. (2013). *Thinking skills: Critical thinking and problem solving* (2nd ed.). UK: Cambridge University Press.

Critical Thinking Consortium (TC^2). (2013). *Critical thinking in elementary mathematics: What?Why?When? and How?*. Retrieved from http://tc2.ca/.

Ennis, R. H. (1989). Critical thinking and subject specificity: Clarification and needed research. *Educational Researcher*, *18*(3), 4-10.

Friel, S.N., Arbaugh, F., Mooney, E. S., Pugalee, D. K., Watanabe, T., & Smith, M. S. (2009). *Navigating through problem solving and reasoning in grades 6-8*. Reston, VA: NCTM.

Geiser, C. (2010). *Data analysis with MPLUS*. New York: The Guiford press.

Iowa Department of Education (1989). *A guide to developing higher order thinking across the curriculum*. Des Moines, IA: Department of Education. Retrieved from ERIC database (ED 306 550).

Jablonka, E. (2014). Critical thinking in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 121-125). New York: Springer.

Kennedy, M., Fisher, M. B., & Ennis, R. H. (1991). Critical thinking: Literature review and needed research. In L. Idol & B.F. Jones (Eds.), *Educational values and cognitive instruction: Implications for reform (pp. 11-40)*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum & Associates.

Kline, R. B. (1998). *Principles and Practice of Structural Equation Modeling*. New York: The Guilford Press.

Krulik, S. & Rudnick, J.A. (1999). Innovative tasks to improve critical and creative thinking skills. In L. Stiff (Ed.), *Developing mathematical reasoning in grades K – 12* (pp. 138-145). VA: NCTM.

Lai, E. R. (2011). *Critical thinking: A literature review*. Pearson. Retrieved from http://www.pearsonassessments.com/

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge, UK: Cambridge University Press

Mărcuț, I. (2005). Critical thinking - applied to the methodology of teaching mathematics. *Educația Matematică*, *1*(1), 57–66

Maričić, S., Špijunović, K., & Lazić, B. (2016). The influence of content on the development of students' critical thinking in the initial teaching of mathematics. *Croatian Journal of Education, 18*(1), 11-40.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Partnership for 21st Century Skills (P21). (2015). *P21 Framework Definitions*. Retrieved from http://www.p21.org/index.php

Sternberg, R. J. (1986). *Critical thinking: Its nature, measurement, and improvement.* Washington, DC: National Institute of Education. Retrieved from ERIC database (ED 272882).

Η ΠΡΟΚΑΤΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΦΥΣΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΤΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ – ΠΕΡΑ ΑΠΟ ΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Χρήστου Κωνσταντίνος Π.

Τμήμα Νηπιαγωγών, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

kpchristou@gmail.com

Η παρούσα μελέτη εστιάζει στις δυσκολίες των μαθητών με τους ρητούς αριθμούς και εξετάζει την επίδραση της Προκατάληψης του Φυσικού Αριθμού (δηλ. της τάση να εφαρμόζονται ιδιότητες των φυσικών στους ρητούς) στις διαισθητικές τους πεποιθήσεις για το μέγεθος αλλά και το είδος των αποτελεσμάτων του πολ/σμού και της διαίρεσης. Η μελέτη σε 91 μαθητές Α' και Β΄ τάξης Γυμνασίου έδειξε ότι η εν λόγω προκατάληψη επιδρά στο να θεωρείται ότι οι πράξεις δίνουν συγκεκριμένα αποτελέσματα τόσο ως προς το μέγεθος (ότι ο πολ/σμός πάντα μεγαλώνει και η διαίρεση μικραίνει) όσο και ως προς το είδος των αριθμών (ότι οι φυσικοί αριθμοί δίνουν φυσικούς κι οι δεκαδικοί δίνουν δεκαδικούς).

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το θεωρητικό πλαίσιο

Οι μαθητές όλων των βαθμίδων της εκπαίδευσης, αλλά ακόμα και οι ενήλικες δυσκολεύονται με την κατανόηση των ρητών αριθμών. Πολλές από τις δυσκολίες τους θα μπορούσαν να ερμηνευτούν ως αποτέλεσμα της τάσης των μαθητών να εφαρμόζουν ιδιότητες των φυσικών αριθμών στους ρητούς αριθμούς. Η τάση αυτή έχει χαρακτηριστεί ως *προκατάληψη του φυσικού αριθμού* (natural number bias) στον τρόπο κατανόησης των ρητών (Ni & Zhou, 2005) και συχνά οδηγεί σε λάθη και χαμηλές επιδόσεις λόγω των διαφορών ανάμεσα στους φυσικούς και τους ρητούς αριθμούς.

Το φαινόμενο της προκατάληψης του φυσικού αριθμού φαίνεται να έχει τις ρίζες του σε μια αρχική εννοιολόγηση για τον αριθμό, που κατασκευάζεται ήδη από πολύ πρώιμη ηλικία μέσα από διαδικασίες όπως της απαγγελίας της σειράς των αριθμών και της καταμέτρησης (Gelman, 2000). Η αρχική αυτή εννοιολόγηση είναι κοντινή με τη μαθηματική έννοια του φυσικού αριθμού και ενισχύεται τα πρώτα χρόνια της σχολικής εκπαίδευσης με τη συστηματική διδασκαλία του συμβολισμού και των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών. Καταλήγει έτσι να αποτελεί μια καλά διαμορφωμένη γνώση για το πώς πρέπει να μοιάζει ο αριθμός και ποιες να είναι οι ιδιότητές του. Ως αποτέλεσμα της τάσης τους να χρησιμοποιούν την αρχική τους εννοιολόγηση για τον αριθμό στους μη-φυσικούς αριθμούς (βλ. το φαινόμενο της προκατάληψης των φυσικών αριθμών) οι μαθητές, ανάμεσα σε άλλα, εμφανίζουν την τάση να θεωρούν ότι κάθε αριθμός έχει έναν συγκεκριμένο επόμενο κι έναν προηγούμενο αριθμό (Vamvakoussi, Van Dooren, & Verschaffel, 2013). Επίσης, τείνουν να διατάσσουν τους ρητούς χρησιμοποιώντας ιδιότητες των φυσικών αριθμών, θεωρώντας, για παράδειγμα, ότι όσο πιο πολλά ψηφία έχει ένας δεκαδικός αριθμός τόσο μεγαλύτερη και η αξία του (π.χ., 2,346>2,8) και αντίστοιχα ότι μεγαλύτερο είναι το κλάσμα που έχει τους μεγαλύτερους όρους (Ni & Zhou, 2005).

Προηγούμενες μελέτες

Η έρευνα που εστιάζει στη μελέτη του φαινομένου της προκατάληψης του φυσικού αριθμού σχετικά πρόσφατα εστίασε στη μελέτη των απλών αριθμητικών πράξεων, επισημαίνοντας έντονη τάση των μαθητών όλων των βαθμίδων να θεωρούν ότι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός ανάμεσα σε δύο αριθμούς έχεις ως αποτέλεσμα αριθμό μεγαλύτερο των αρχικών όρων, ενώ η αφαίρεση και η διαίρεση έχει ως αποτέλεσμα αριθμό μικρότερο των αρχικών όρων (Vamvakoussi et al., 2013; Van Hoof, Vandewalle, Verschaffel, & Van Dooren, 2015). Η επίδραση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού στις αριθμητικές πράξεις με τον τρόπο που περιγράφηκε είναι εύλογη αν σκεφτεί κανείς ότι τα αποτελέσματα της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού ανάμεσα σε φυσικούς αριθμούς είναι πράγματι αριθμοί μεγαλύτεροι των αρχικών όρων (εκτός βέβαια αν στους αρχικούς όρους εμπλέκονται το 0 και 1 αντίστοιχα), κι επίσης τα αποτελέσματα της αφαίρεσης και της διαίρεσης με φυσικούς αριθμούς είναι αριθμοί μικρότεροι των αρχικών όρων. Αυτά όμως δεν ισχύουν για ένα μεγάλο εύρος μη-φυσικών αριθμών για τους οποίους το μέγεθος του αποτελέσματος εξαρτάται από τους αρχικούς όρους της πράξης. Πιο συγκεκριμένα, τα αποτελέσματα των πράξεων με ρητούς αριθμούς μικρότερους της μονάδας και αρνητικούς αριθμούς διαψεύδουν τις προσδοκίες των μαθητών για το μέγεθος του αποτελέσματος του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης στην πρώτη περίπτωση και της πρόσθεσης και της αφαίρεσης στη δεύτερη. Για παράδειγμα, το 8:0.4 είναι μεγαλύτερο του 8, και το αποτέλεσμα του 4×0.5 είναι μικρότερο του 4, και 3+(−2) είναι μικρότερο του 3. Το παραπάνω φαινόμενο που συχνά αποκαλείται «*ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει*» είναι γνωστό στους δασκάλους της τάξης, και στους ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης ήδη από τη δεκαετία του ογδόντα όταν ο Fischbein και οι συνεργάτες του είχαν επισημάνει αυτή την τάση των μαθητών, την οποία απέδωσαν στην ύπαρξη άδηλων διαισθητικών μοντέλων για κάθε πράξη (Fischbein, Deri, Nello, & Marino, 1985). Από τη βιβλιογραφία φαίνεται ότι το φαινόμενο αυτό εμφανίζεται τη στιγμή που οι μαθητές εισάγονται στους ρητούς αριθμούς, στη μέση περίπου του Δημοτικού σχολείου, αλλά παραμένει ισχυρό όχι μόνο μέχρι και το τέλος του Γυμνασίου (Van Hoof et al., 2015), αλλά και σε μη-ειδικούς ενήλικες (Vamvakoussi et al., 2013).

Πρόσφατη μελέτη σε παιδιά Ε' και ΣΤ' Δημοτικού (Christou, 2015) έδειξε μάλιστα ότι στις αριθμητικές πράξεις με αριθμούς που λείπουν (π.χ., 5-_=8;) η προκατάληψη του φυσικού αριθμού επιδρά με δύο τρόπους στις απαντήσεις των μαθητών: α) τους ωθεί να βασίζονται σε διαισθητικές πεποιθήσεις όσον αφορά τα αποτελέσματα των πράξεων, που παίρνουν τη μορφή γενικών κανόνων, όπως ότι *ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει τους αριθμούς ενώ η διαίρεση τους μικραίνει*, και β) τους επηρεάζει να σκέφτονται κατά προτεραιότητα με φυσικούς αριθμούς για τους αριθμούς που λείπουν, κι έτσι να εξετάζουν τα αποτελέσματα των πράξεων δοκιμάζοντας μόνο με φυσικούς. Αυτή η τελευταία έκφανση της προκατάληψης του φυσικού αριθμού συμβαδίζει με ευρήματα πρόσφατων μελετών που δείχνουν έντονη τάση των μαθητών να θεωρούν ότι τα μη αριθμητικά σύμβολα που χρησιμοποιούνται στη θέση αριθμών αναπαριστούν κατά προτεραιότητα φυσικούς αριθμούς. Έτσι, για παράδειγμα, οι μαθητές θεωρούν ότι αλγεβρικές παραστάσεις όπως η 2x αναπαριστούν μόνο θετικούς ακέραιους πολλαπλάσια του 2, γιατί το x αναπαριστά μόνο φυσικούς αριθμούς (Christou & Vosniadou, 2012).

Η παρούσα μελέτη

Από τη σύντομη βιβλιογραφική επισκόπηση που προηγήθηκε μπορεί κανείς να επισημάνει ότι το ενδιαφέρον της έρευνας στο συγκεκριμένο πεδίο μέχρι τώρα έχει επικεντρωθεί αποκλειστικά στη μελέτη των διαισθήσεων των μαθητών όσον αφορά το *μέγεθος* των αποτελεσμάτων των αριθμητικών πράξεων και πιο συγκεκριμένα στο κατά πόσο τα αποτελέσματα των πράξεων είναι μεγαλύτερα ή μικρότερα σε σχέση με τους αρχικούς όρους της πράξης. Βασικός στόχος της παρούσας μελέτης είναι να προσφέρει εμπειρικά δεδομένα που να υποστηρίζουν ότι πέραν από το μέγεθος των αποτελεσμάτων των πράξεων, οι μαθητές, επηρεασμένοι από την προκατάληψη του φυσικού αριθμού θα εμφανίζουν την τάση να αναμένουν τα αποτελέσματα των πράξεων να είναι του ίδιου *είδους* με τους αρχικούς όρους των πράξεων· για παράδειγμα, ότι η διαίρεση δεκαδικών αριθμών θα δίνει ως αποτέλεσμα δεκαδικό αριθμό (κι όχι ακέραιο, για παράδειγμα) και ότι ο πολλαπλασιασμός ακεραίων θα δίνει αποτέλεσμα ακέραιο κι όχι, για παράδειγμα, δεκαδικό. Εδώ θα πρέπει να γίνει ξεκάθαρο ότι με τον όρο «είδος» του αριθμού γίνεται αναφορά στις διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις των ρητών αριθμών, που μπορεί να πάρουν μορφή ακεραίου, δεκαδικού ή κλάσματος. Όπως θα γίνει πιο φανερό παρακάτω, οι μαθητές έχουν την τάση να θεωρούν ότι αυτές οι διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις συμβολίζουν διαφορετικά «είδη αριθμών», και ο συγκεκριμένος όρος χρησιμοποιείται με αυτόν τον τρόπο στο παρόν κείμενο.

Από όσο μπορούμε να γνωρίζουμε, δεν υπάρχει έρευνα που να έχει επικεντρωθεί στη μελέτη των πεποιθήσεων που αφορούν στο είδος των αποτελεσμάτων των πράξεων. Ωστόσο, η προαναφερθείσα υπόθεση υποστηρίζεται από προηγούμενα ευρήματα της έρευνας στην κατανόηση των ρητών. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν ενδείξεις ότι οι μαθητές έχουν δυσκολίες να κατανοήσουν τους ρητούς αριθμούς ως ενιαίο σύστημα αριθμών (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001) και ότι αντιμετωπίζουν τους δεκαδικούς αριθμούς και τα κλάσματα σαν να ήταν διαφορετικά είδη αριθμών αντί για εναλλακτικές αναπαραστάσεις των ίδιων αριθμών (π.χ. O'Connor, 2001). Στο πλαίσιο της διάταξης των αριθμών, για παράδειγμα, οι μαθητές εμφάνιζαν την τάση να θεωρούν ότι οι αριθμοί που υπάρχουν ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς πρέπει να είναι του ίδιου είδους με τους αριθμούς που ορίζουν το διάστημα [δηλ. ότι μόνο δεκαδικοί αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα σε δεκαδικούς και μόνο κλάσματα ανάμεσα σε κλάσματα (Vamvakoussi et al., 2013)]. Σε αυτή τη βάση θα αναμένονταν ότι στο πλαίσιο των αριθμητικών πράξεων θα υπήρχαν διαφορές στις απαντήσεις των μαθητών ανάλογα με το είδος των αριθμών που εμφανίζονται ως αποτελέσματα και ως αρχικοί όροι των πράξεων.

Με βάση τα παραπάνω, η παρούσα έχει στόχο να εξετάσει σε μαθητές του Γυμνασίου, την υπόθεση ότι οι μαθητές βασίζονται είτε σε διαισθητικές πεποιθήσεις όσον αφορά τα αποτελέσματα των πράξεων, που παίρνουν τη μορφή γενικών κανόνων, όπως ότι *ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει τους αριθμούς ενώ η διαίρεση τους μικραίνει*, είτε σκέφτονται κατά προτεραιότητα με φυσικούς αριθμούς για τους αριθμούς που λείπουν, κι έτσι εξετάζουν τα αποτελέσματα των πράξεων δοκιμάζοντας μόνο με φυσικούς (Υπόθεση 1). Επίσης, να πάει ένα βήμα παραπέρα και να εξετάσει την υπόθεση ότι οι προσδοκίες των μαθητών όσον αφορά τα αποτελέσματα επηρεάζονται και από το *είδος* των αριθμών που εμφανίζονται ως όροι των πράξεων, όπως ήδη περιγράφηκε (Υπόθεση 2).

Προκειμένου να εξεταστούν οι παραπάνω υποθέσεις, σχεδιάστηκε ένα ερωτηματολόγιο που περιλάμβανε αριθμητικές πράξεις με αριθμούς που λείπουν στη βάση προηγούμενης μελέτης (βλ. Χρήστου, 2015) και δόθηκε σε μαθητές Γυμνασίου. Η παρούσα μελέτη επικεντρώνεται αποκλειστικά στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, και οι αριθμοί ήταν φυσικοί ή ρητοί με τη μορφή δεκαδικού αριθμού.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Συμμετέχοντες

Στην μελέτη συμμετείχαν 91 μαθητές/τριες Α' και Β' Γυμνασίου· 43 από την Α' και 48 από την Β' τάξη, δημόσιου Γυμνασίου της Ελλάδας· 53 δήλωσαν κορίτσια. Ήδη από την Δ' Δημοτικού οι μαθητές μαθαίνουν ιδιότητες των ρητών και πράξεις με ρητούς αριθμούς.

Υλικά - Διαδικασία

Στους συμμετέχοντες δόθηκε να συμπληρώσουν ένα έντυπο ερωτηματολόγιο που περιλάμβανε 46 ερωτήσεις/έργα ισότητες με πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης ανάμεσα σε δοσμένους αριθμούς και αριθμούς που λείπουν και συμβολίζονται με κενά - το αποτέλεσμα της κάθε πράξης ήταν επίσης δοσμένο (π.χ., 2:_=5). Από τους μαθητές ζητήθηκε να επιλέξουν αν «γίνεται» ή «δεν γίνεται» να ισχύει μια τέτοια ισότητα, δηλαδή αν γίνεται ή όχι να βρεθεί τέτοιος αριθμός που θα έδινε στη συγκεκριμένη αναγραφόμενη πράξη το δοσμένο αποτέλεσμα, χωρίς απαραίτητα να πουν ποιος είναι αυτός ο αριθμός.

Για να εξεταστεί η Υπόθεση 1 της έρευνας σχεδιάστηκαν τρεις βασικές κατηγορίες έργων: α) έργα όπου το μέγεθος του αποτελέσματος ήταν συμβατό με τις διαισθητικές πεποιθήσεις των μαθητών για το μέγεθος του αποτελέσματος των πράξεων (βλ. ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει και η διαίρεση μικραίνει) και οι αριθμοί που έλειπαν ήταν φυσικοί αριθμοί, για παράδειγμα 6×_=30 (Συμβατά με Φυσικούς Αριθμούς· *συντ*: Συμβατά με ΦΑ)· β) έργα όπου το μέγεθος του αποτελέσματος της πράξης ήταν συμβατό με τις διαισθητικές πεποιθήσεις των μαθητών αλλά οι αριθμοί που έλειπαν ήταν ρητοί, για παράδειγμα 6×_=11 (Συμβατά με Ρητούς Αριθμούς· *συντ*: Συμβατά με ΡΑ)· γ) τέλος, έργα στα οποία παραβιάζονταν οι διαισθητικές πεποιθήσεις των μαθητών για το μέγεθος του αποτελέσματος των πράξεων (π.χ., 2:_=5), γιατί οι αριθμοί που έλειπαν ήταν ρητοί μικρότεροι της μονάδας (Ασύμβατα με Φυσικούς Αριθμούς· *συντ*: Ασύμβατα με ΡΑ).

Για να εξεταστεί η Υπόθεση 2, τα παραπάνω έργα μπορούσαν να μπουν σε δύο άλλες μεγάλες κατηγορίες ανάλογα με τον εάν το δοσμένο αποτέλεσμα ήταν του ίδιου ή διαφορετικού είδους από αυτό του αριθμού που εμφανίζονταν ως αρχικός όρος της πράξης, στο αριστερό μέρος της ισότητας. Έτσι τα έργα ήταν: α*) Συμβατά ως προς το είδος*, όπου ο δοσμένος όρος και το αποτέλεσμα είναι του ίδιου είδους [δηλ. φυσικός αριθμός δίνει αποτέλεσμα φυσικό (π.χ., 41×_=7) ή δεκαδικός αριθμός δίνει αποτέλεσμα δεκαδικό (6,3×.... = 2,1)], ή β) *Ασύμβατα ως προς το είδος*, όπου το αποτέλεσμα ήταν αριθμός διαφορετικού είδους από τον δοσμένο αρχικό όρο [π.χ., φυσικός δίνει δεκαδικό (4: .... = 7,6) ή αντίστροφα].

Τέλος, υπήρχαν και έργα που λειτουργούσαν ως *εξουδετερωτές* της συνεχόμενης απάντησης «γίνεται» που είναι και η μόνη σωστή στα παραπάνω έργα (π.χ., 0×_=46). Οι μαθητές συμπλήρωσαν τα ερωτηματολόγια στην τάξη τους σε 40΄ που ήταν επαρκής χρόνος για την πλήρη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών βαθμολογήθηκαν με 0 ενώ οι σωστές με 1. Ανάλυση διασποράς της συνολικής επίδοσης δεν έδειξε σημαντικές διαφορές που οφείλονται στο φύλο [$F(1, 87) = 1.361$, $p = .247$, $\eta_p^2 = .015$]. Οι μαθητές της Β’ Γυμνασίου είχαν παρόμοιες επιδόσεις με τους μαθητές της Α’ Γυμνασίου (ΜΟ = .53, ΤΣ = .029 vs ΜΟ = .52, ΤΣ = .025) και η μικρή τους διαφορά δεν ήταν στατιστικώς σημαντική [$F(1, 87) = .013$, $p = .959$, $\eta_p^2 < .001$] που σημαίνει ότι οι δυσκολίες των μαθητών με τις πράξεις δεν είχαν ξεπεραστεί από τους μεγαλύτερους μαθητές.

Για την ανάλυση των απαντήσεων υπολογίστηκαν οι μέσοι όροι επίδοσης στις βασικές κατηγορίες έργων με πράξεις ανάμεσα σε αριθμούς που λείπουν, όπως αυτές περιγράφονται παραπάνω· τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.

Κατηγορίες	N	min	max	Μέσος Όρος (ΜΟ)	Τυπική Απόκλιση (ΤΑ)
Συμβατά με ΦΑ	91	.33	1.00	.85	.17
Συμβατά με ΡΑ	91	0	1.00	.57	.27
Ασύμβατα με ΡΑ	91	0	1.00	.32	.26

Πίνακας 1: Μέσες επιδόσεις στα έργα με μαθηματικές πράξεις

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 1, η υψηλότερη μέση επίδοση των μαθητών του δείγματος σημειώθηκε στα έργα που ήταν συμβατά με τις πεποιθήσεις τους όσον αφορά το μέγεθος των αποτελεσμάτων των πράξεων και οι αριθμοί που έλειπαν ήταν φυσικοί αριθμοί, ενώ η χαμηλότερη μέση επίδοση σημειώθηκε στα έργα που ήταν μη-συμβατά με τις πεποιθήσεις όσον αφορά το μέγεθος του αποτελέσματος των πράξεων. Μάλιστα, τα ελάχιστα λάθη που εμφανίζονται στην πρώτη κατηγορία δείχνουν ότι τα έργα έγιναν κατανοητά από τους μαθητές και ήταν μέσα στο εύρος των δυνατοτήτων τους. Στατιστικός έλεγχος με χρήση Paired-samples t-test, υποστήριξε την Υπόθεση 1 της μελέτης. Ενδεικτικά, οι μαθητές σημείωσαν στατιστικώς σημαντικά υψηλότερες επιδόσεις στα έργα που ήταν συμβατά με τις πεποιθήσεις τους όσον αφορά το μέγεθος των αποτελεσμάτων των πράξεων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης σε σύγκριση με τα έργα που ήταν επίσης συμβατά με τις εν λόγω πεποιθήσεις αλλά οι αριθμοί που έλειπαν ήταν ρητοί $t(90) = 10.213$, $p < .001$. Οι τελευταίες, μάλιστα, ήταν στατιστικώς σημαντικά υψηλότερες από τις επιδόσεις στα έργα που ήταν ασύμβατα με τις πεποιθήσεις όσον αφορά το μέγεθος των αποτελεσμάτων των πράξεων $t(90) = 7.392$, $p < .001$.

Για να εξεταστεί η Υπόθεση 2 της μελέτης που αφορά την επίδραση στις απαντήσεις των μαθητών του είδους των αριθμών που εμφανίζονται στις πράξεις, υπολογίστηκαν οι μέσες επιδόσεις σε δύο νέες κατηγορίες απαντήσεων που δημιουργήθηκαν: α) *Συμβατά σε Είδος*, και β) *Ασύμβατες σε Είδος*, όπου αυτές περιγράφονται αναλυτικά παραπάνω. Οι μαθητές απαντούσαν στατιστικώς σημαντικά καλύτερα στα Συμβατά σε Είδος έργα (ΜΟ= .53, ΤΑ=.18) παρά στα Ασύμβατα σε Είδος έργα (ΜΟ=.45, ΤΑ=.24); $t(90) = 5.388$, $p < .001$. Αυτό σημαίνει πως οι μαθητές είχαν την τάση να θεωρούν ότι οι πράξεις ανάμεσα σε αριθμούς ενός είδους θα έπρεπε να δίνει αποτελέσματα του ίδιου είδους.

Στη συνέχεια υπολογίστηκαν οι μέσες επιδόσεις των μαθητών του δείγματος στις παραπάνω κατηγορίες έργων ενοποιημένες όσον αφορά είτε τη Συμβατότητα/Ασυμβατότητα με το Μέγεθος ανάμεσα σε αποτελέσματα και αρχικούς όρους της πράξης, είτε τη Συμβατότητα/Ασυμβατότητα με το Είδος τους, κι έτσι προέκυψαν οι τέσσερις νέες κατηγορίες που εμφανίζονται στον Πίνακα 2.

Κατηγορίες	N	min	max	M.O.	T.A.
Συμβατά με Μέγεθος /Συμβατά με Είδος	91	.33	1	.68	.19
Συμβατά με Μέγεθος/Ασύμβατα με Είδος	91	0	1	.53	.28
Ασύμβατα με Μέγεθος/Συμβατά με Είδος	91	0	1	.38	.25
Ασύμβατα με Μέγεθος/Ασύμβατα με Είδος	91	0	1	.4	.26

Πίνακας 2: Μέσες επιδόσεις στις ενοποιημένες κατηγορίες ως προς τη Συνέπεια/Ασυνέπεια με το Μέγεθος/Είδος των όρων

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 2, η υψηλότερη επίδοση σημειώθηκε στα έργα εκείνα που τα αποτελέσματα των πράξεων δεν ήταν μόνο συμβατά με τις πεποιθήσεις των μαθητών ως προς το μέγεθος των αποτελεσμάτων

των πράξεων αλλά ήταν συμβατά και ως προς το είδος των αποτελεσμάτων αυτών [δηλ. ο πολλαπλασιασμός έδινε ως αποτέλεσμα αριθμούς μεγαλύτερους από τους αρχικούς παράγοντες (η διαίρεση έδινε μικρότερους) κι επίσης οι αριθμοί αυτοί ήταν του ίδιου είδους με τους όρους των πράξεων]. Η μέση επίδοση στα έργα αυτής της κατηγορίας (Συμβατά με Μέγεθος /Συμβατά με Είδος) ήταν στατιστικώς σημαντικά υψηλότερη από τη δεύτερη κατά σειρά υψηλότερη μέση επίδοση που σημειώθηκε στα έργα όπου τα αποτελέσματα των πράξεων ήταν συμβατά με τις πεποιθήσεις όσον αφορά το μέγεθος των αποτελεσμάτων των πράξεων, αλλά ασύμβατα σε σχέση με το είδος των αριθμών (Συμβατά με Μέγεθος /Ασύμβατα με Είδος) $t(90) = 5.779$, $p < .001$. Η μέση επίδοση στην τελευταία κατηγορία ήταν στατιστικώς σημαντικά υψηλότερη από τη μέση επίδοση στην κατηγορία έργων όπου τα αποτελέσματα των πράξεων ήταν ασύμβατα ως προς τις πεποιθήσεις όσον αφορά το μέγεθος των αποτελεσμάτων των πράξεων, κι ασύμβατά επίσης ως προς το είδος των αριθμών (Ασύμβατα με Μέγεθος /Ασύμβατα με Είδος) $t(90)=5.107$, $p<.001$. Παραδόξως, η μέση επίδοση στα έργα που ήταν ασύμβατα τόσο ως προς τις πεποιθήσεις για το μέγεθος όσο και για το είδος των αριθμών (Ασύμβατα με Μέγεθος /Ασύμβατα με Είδος) ήταν υψηλότερη από εκείνη στα έργα όπου τα αποτελέσματα των πράξεων ήταν ασύμβατά με τις πεποιθήσεις όσον αφορά το μέγεθος αλλά συμβατά όσον αφορά το είδος των αριθμών (Ασύμβατα με Μέγεθος/Συμβατά με Είδος), αν και αυτές οι διαφορές δεν ήταν στατιστικώς σημαντικές $t(90) = 1.158$, $p =.250$.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα αποτελέσματα της εμπειρικής μελέτης που παρουσιάστηκαν παραπάνω υποστήριξαν τη βασική υπόθεση ότι η προκατάληψη του φυσικού αριθμού στις αριθμητικές πράξεις επηρεάζει τους μαθητές να προσδοκούν από κάθε αριθμητική πράξη συγκεκριμένα αποτελέσματα τόσο ως προς το μέγεθος όσο και ως προς το είδος των αριθμών.

Τα αποτελέσματα του πρώτου μέρους της ανάλυσης έδειξαν ότι η προκατάληψη του φυσικού αριθμού επηρεάζει, και πιθανώς επίσης διαμορφώνει, τις τάσεις των μαθητών να συνδέουν διαισθητικά κάθε πράξη με συγκεκριμένο μέγεθος αποτελέσματος· δηλαδή να θεωρούν ότι το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού είναι πάντα μεγαλύτερο από τους αρχικούς όρους και το αποτέλεσμα της διαίρεσης είναι πάντα μικρότερο. Επίσης, η προκατάληψη του φυσικού αριθμού επηρεάζει τους μαθητές που μπαίνουν στη διαδικασία να αντικαταστήσουν νοητικά τα σύμβολα των αριθμών που λείπουν με συγκεκριμένους αριθμούς, να τα αντικαθιστούν μόνο με φυσικούς αριθμούς, αποφασίζοντας για το γενικό αποτέλεσμα της πράξης βασιζόμενοι στα αποτελέσματα των συγκεκριμένων δοκιμών. Το πρώτο συμπέρασμα υποστηρίζεται από τη διαπίστωση ότι οι μαθητές του δείγματος είχαν σημαντικά καλύτερη επίδοση στα έργα που ήταν συμβατά με τις πεποιθήσεις τους όσον αφορά το μέγεθος των αποτελεσμάτων των πράξεων (δηλ. ο πολλαπλασιασμός δίνει ως αποτέλεσμα μεγαλύτερους αριθμούς), σε σύγκριση με τα έργα στα οποία παραβιάζονταν αυτές τις πεποιθήσεις. Το δεύτερο συμπέρασμα υποστηρίζεται από τις στατιστικώς σημαντικές διαφορές μεταξύ των επιδόσεων στα δύο είδη έργων, δηλαδή σε εκείνα όπου οι αριθμοί που έλειπαν ήταν φυσικοί αριθμοί και σε εκείνα που έλειπαν ρητοί αριθμοί, όταν και στις δύο περιπτώσεις οι διαισθητικές πεποιθήσεις των μαθητών για το μέγεθος των αποτελεσμάτων των πράξεων δεν παραβιάζονταν. Με άλλα λόγια, το αποτέλεσμα ότι τα έργα στα οποία οι αριθμοί που έλειπαν ήταν ρητοί (π.χ., 6×_=11) προκάλεσαν περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις από τα έργα στα οποία οι αριθμοί που έλειπαν ήταν φυσικοί (π.χ., 7×_=21) ερμηνεύεται ως συνέπεια της τάσης των μαθητών να σκέφτονται μόνο φυσικούς αριθμούς στη θέση των αριθμών που λείπουν. Αυτά τα ευρήματα ευθυγραμμίζονται με προηγούμενα ευρήματα στο πεδίο (Christou, 2015; Van Hoof et al., 2015).

Το καινοτόμο εύρημα αυτής της μελέτης είναι ότι, εκτός από το μέγεθος η προκατάληψη του φυσικού αριθμού επηρεάζει και τις προσδοκίες των μαθητών για το είδος των αποτελεσμάτων των πράξεων. Δηλαδή, ότι η συμβολική αναπαράσταση του αποτελέσματος αναμένεται από τους μαθητές να είναι αριθμός του ίδιου είδους με τους αρχικούς όρους των πράξεων. Αυτό το συμπέρασμα υποστηρίχθηκε από το γεγονός ότι οι μαθητές είχαν στατιστικώς σημαντικά υψηλότερες επιδόσεις στα έργα που ήταν συμβατά με τις πεποιθήσεις τους ότι τα αποτελέσματα κάθε πράξης πρέπει να είναι αριθμοί του ίδιου είδους με τους όρους των πράξεων, σε σχέση με τα έργα που παραβίαζαν αυτές τις πεποιθήσεις. Σε αυτό το τελευταίο εύρημα μπορεί να στηριχθεί περαιτέρω η θέση ότι οι μαθητές τείνουν να αντιμετωπίζουν τους δεκαδικούς αριθμούς και τα κλάσματα σαν να ήταν διαφορετικά είδη αριθμών αντί για εναλλακτικές αναπαραστάσεις των ίδιων αριθμών, φαινόμενο που απορρέει από τη δυσκολία κατανόησης των ρητών αριθμών ως ενιαίου συστήματος αριθμών με διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001, O'Connor, 2001, Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Η παρανόηση του είδους των αποτελεσμάτων των αριθμητικών πράξεων μπορεί να θεωρηθεί απόρροια της προκατάληψης του φυσικού αριθμού που οφείλεται στην αρχική εννοιολόγηση από τους μαθητές του αριθμού που οργανώθηκε γύρω από την έννοια του φυσικού αριθμού. Αυτό διότι οι φυσικοί αριθμοί έχουν μοναδική συμβολική αναπαράσταση και οι πράξεις μεταξύ των φυσικών αριθμών έχουν ως αποτέλεσμα φυσικό αριθμό. Αυτό βέβαια δεν ισχύει στη διαίρεση μεταξύ φυσικών αριθμών, ωστόσο, πριν εισαχθούν στους ρητούς αριθμούς η διαίρεση διδάσκεται ως σχέση φυσικών αριθμών χρησιμοποιώντας πολλαπλασιασμό και πρόσθεση (δηλ. διαιρετέος = διαιρέτης × πηλίκο + υπόλοιπο).

Τα αποτελέσματα της παραπάνω μελέτης θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν και ως υλικό διδασκαλίας για να βοηθηθούν οι μαθητές να αλλάξουν τις διαισθητικές τους πεποιθήσεις για τους αριθμούς και τις ιδιότητές τους, όπως για το μέγεθος και το είδος των αποτελεσμάτων κάθε αριθμητικής πράξης, ώστε να δεχτούν μη-διαισθητικές εννοιολογίσεις για τον αριθμό που είναι πιο κοντά στη μαθηματική έννοια του ρητού αριθμού.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τις Τίνα Δημητριάδη και Μαρία Μαμφέρδα (ΠΜΣ Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών, ΕΚΠΑ) για τη βοήθειά τους στη συλλογή των δεδομένων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Christou, K. P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM Mathematics Education, 47*(5), 747-758.

Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2012). What kinds of numbers do students assign to literal symbols? Aspects of the transition from arithmetic to algebra. *Mathematical Thinking and Learning, 14*(1), 1-27.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving problems in multiplication and division. *Journal of Research in Mathematics Education, 16*, 3-17.

Gelman, R. (2000). The epigenesis of mathematical thinking. *Journal of Applied Developmental Psychology, 21*, 27-37.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Ni, Y. J., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27-52.

O’Connor, M. C. (2001). “Can any fraction be turned into a decimal?” A case study of a mathematical group discussion. *Educational studies in mathematics, 46*, 143-185.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2013). Educated adults are still affected by intuitions about the effect of arithmetical operations: evidence from a reaction-time study. *Educational studies in mathematics*, *82*(2), 323-330.

Van Hoof, J., Vandewalle, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015). In search for the natural number bias in secondary school students' interpretation of the effect of arithmetical operations. *Learning and Instruction*, *30*, 30-38.

Χρήστου, Κ. Π. (2015). Τρόποι επίδρασης της προκατάληψης του φυσικού αριθμού σε πράξεις, μέγεθος και διάταξη των ρητών. In Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλος, & Μ. Τζεκάκη (Eds.), *Μαθηματικά ΜΕ διάκριση και ΧΩΡΙΣ διακρίσεις - Πρακτικά του 6ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών* (pp. 688-697). Θεσσαλονίκη: (ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ).

ΑΝΑΡΤΗΜΕΝΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ (POSTERS)

ΑΞΙΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΗΝ ΠΑΙΔΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΑ ΩΣ ΠΛΑΙΣΙΟ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

Δεμερτζή Σταυρούλα, Τριανταφυλλίδης Τριαντάφυλλος Α., Παπαρούση Μαρία

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

stavr.uth12@gmail.com, ttriant@uth.gr, mpaparou@uth.gr

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να παρουσιάσουμε αποτελέσματα ενός διδακτικού πειράματος (teaching experiment) που επιχείρησε τη διαθεματική σύζευξη Μαθηματικών-Λογοτεχνίας για την ταυτόχρονη ανάπτυξη των μαθητών και στις δυο περιοχές (Altieri, 2009) και για τη συμμετοχή τους σε μαθηματικές συζητήσεις (Bintz et al, 2011). Σκοπός του ήταν να διερευνηθεί πώς το πλαίσιο της μαθηματικής λογοτεχνίας επηρεάζει (α) την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και (β) το ενδιαφέρον των μαθητών για ενασχόληση με (i) τα Μαθηματικά και (ii) τη Λογοτεχνία. Αφόρμηση για την παραγωγή του διδακτικού υλικού ήταν το βιβλίο της Elinor Pinczes *Inchworm and a half*. Το διδακτικό πείραμα έλαβε χώρα σε μια Ε΄ τάξη δημόσιου δημοτικού σχολείου, σε 8 διδακτικά επεισόδια διάρκειας δυο διδακτικών ωρών το καθένα και σε χρονικό διάστημα πέντε εβδομάδων. Το βιβλίο πραγματεύεται τη μέτρηση του μήκους, ενώ εμπλέκει και τις κλασματικές μονάδες 1/2,1/3,1/4 ως υποδιαιρέσεις της μονάδας μέτρησης. Σχεδιάσαμε λογοτεχνικά και μαθηματικά έργα με βάση σύγχρονες διδακτικές προσεγγίσεις και κατασκευάσαμε συνοδευτικό χειραπτικό υλικό. Οι μαθητές εξέφρασαν εντυπώσεις για την ιστορία, έκαναν «διορθώσεις», τη συνέχισαν, εκτίμησαν και μέτρησαν μήκη με μη τυπικές μονάδες, κατασκεύασαν χάρακα μη τυπικών μονάδων, εκφράστηκαν καλλιτεχνικά. Διαπιστώσαμε παρανοήσεις στη διαδικασία της μέτρησης, ενδιαφέροντες προβληματισμούς κατά την κατασκευή του χάρακα (πού τοποθετώ την «αρχή», τι γίνεται όταν τα 2/4 πέφτουν πάνω στο 1/2), δυσκολίες στην εκτίμηση μηκών. Το νέο πλαίσιο όπου εντάχθηκε η μέτρηση έδωσε ευκαιρίες για μαθηματική δράση στην τάξη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Altieri, J.L. (2009). Strengthening connections between elementary classroom mathematics and literacy. *Teaching Children Mathematics, 15*(6), 346–351.

Bintz, W.P., Moore, S.D., Wright, P. & Dempsey, L. (2011). Using Literature to Teach Measurement. *The Reading Teacher: A Journal of Research-Based Classroom Practice*, *65*(1), 58–70.

ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΦΟΙΤΗΤΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Εμβαλωτής Αναστάσιος και Κούτσιανου Αθηνά

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Σχολή Επιστημών Αγωγής, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

aemvalot@uoi.gr, akoutsia@cc.uoi.gr

Η δημοσίευση παρουσιάζει προκαταρκτικά αποτελέσματα έρευνας για τις πεποιθήσεις αποτελεσματικότητας φοιτητών παιδαγωγικού τμήματος, αναφορικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών και τις αντιλήψεις τους για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Στην έρευνα συμμετείχαν 74 φοιτητές (9 άνδρες και 62 γυναίκες) που παρακολουθούσαν το 2ο (*n* = 26), 3ο (*n* = 30) ή 4ο (*n* = 18) έτος σπουδών, κατά την έναρξη του ακαδημαϊκού έτους 2016-2017. Οι φοιτητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν ερωτηματολόγιο σχετικά με το βαθμό εμπιστοσύνης που έχουν στις ικανότητές τους αναφορικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών και να σχεδιάσουν τον εαυτό τους να διδάσκει μαθηματικά στη σχολική τάξη. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας, οι φοιτητές είχαν μέτριες τιμές στις πεποιθήσεις τους αναφορικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών, τόσο στην κλίμακα αυτοαποτελεσματικότητας (*Μ.Ο.* = 3.64, *Τ.Α.* = .49), όσο και στην κλίμακα αναμενόμενων αποτελεσμάτων (*Μ.Ο.* = 3.41, *Τ.Α.* = .52). Οι περισσότεροι φοιτητές (79.7%) σχεδίασαν τον εαυτό τους να διδάσκει μαθηματικά υιοθετώντας δασκαλοκεντρική μέθοδο, ενώ ελάχιστοι φοιτητές (13,5%) (κυρίως του τέταρτου έτους) σχεδίασαν στοιχεία που υποδεικνύουν την επιλογή της μαθητοκεντρικής προσέγγισης. Επιπλέον, δεν βρέθηκε στατιστικά σημαντική σχέση ανάμεσα στις πεποιθήσεις αποτελεσματικότητας και στις αντιλήψεις των φοιτητών αναφορικά με τη μέθοδο διδασκαλίας των μαθηματικών. Ωστόσο, οι φοιτητές που σχεδίασαν τον εαυτό τους να υιοθετεί πρακτικές της μαθητοκεντρικής προσέγγισης, είχαν μέτριες έως και υψηλές τιμές στις πεποιθήσεις αυτοαποτελεσματικότητας και αναμενόμενων αποτελεσμάτων.

ΔΙΕΡΕΥΝΩΝΤΑΣ ΤΗΝ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ ΑΝΑΓΝΩΣΗΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΦΟΙΤΗΤΩΝ ΤΟΥ ΤΕΙ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

Κοντογιάννη Αριστούλα, Τάτσης Κωνσταντίνος

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων (Γρεβενά)-Τ.Ε.Ι. Δυτικής Μακεδονίας, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης-Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

desmath@gmail.com, ktatsis@uoi.gr

Μία από τις βασικές ικανότητες που συνδέονται άρρηκτα με τον στατιστικό γραμματισμό είναι η ανάγνωση, η κατανόηση και η ερμηνεία στατιστικών γραφημάτων. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο σχεδιάσαμε και διεξήγαμε την έρευνα που παρουσιάζουμε με την παρούσα εργασία. Η έρευνά μας έλαβε χώρα στο τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων, με έδρα τα Γρεβενά, του Τεχνολογικού Εκπαιδευτικού Ιδρύματος (ΤΕΙ) Δυτικής Μακεδονίας. Οι συμμετέχοντες ήταν 73 φοιτητές και η έρευνα διενεργήθηκε στο πλαίσιο μαθήματος που διδασκόταν στο δεύτερο εξάμηνο σπουδών του ακαδημαϊκού έτους 2016-2017. Για την αξιολόγηση του επιπέδου των μαθηματικών γνώσεων των πρωτοετών φοιτητών τμήματος ΤΕΙ σχετική έρευνα είναι των Πολυχρονίδου κ.α. (2014). Για τους σκοπούς της έρευνάς μας σχεδιάσαμε ένα ερωτηματολόγιο με ερωτήσεις ανοιχτού και κλειστού τύπου το οποίο διανείμαμε και συμπληρώθηκε ηλεκτρονικά. Τα στατιστικά γραφήματα που περιλαμβανόταν στις ερωτήσεις προερχόταν από την Ελληνική Στατιστική Αρχή. Οι ερωτήσεις κατασκευάστηκαν με βάση τα επίπεδα κατανόησης γραφημάτων που προτείνονται από τους Friel, κ.α. (2001). Στις ερωτήσεις που απαιτούσαν το πρώτο επίπεδο κατανόησης, στην πλειονότητα τους οι φοιτητές απέδωσαν ικανοποιητικά ενώ σε ερωτήσεις που απαιτούσαν υψηλότερο επίπεδο κατανόησης η απόδοση τους δεν ήταν τόσο ικανοποιητική.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Friel S. N., Curcio F. R., & Bright G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 124-158.

Πολυχρονίδου, Π., Σάλτας, Β., Πετασάκης, Ι., & Τσιάντος, Β. (2014). Το επίπεδο των Μαθηματικών των πρωτοετών φοιτητών της σχολής Τεχνολογικών Εφαρμογών του ΤΕΙ ΑΜΘ. Στο *Πρακτικά του 5ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.* Φλώρινα ΕνΕΔιΜ.

Ανακτήθηκε στις 3 Οκτωβρίου, 2017: http://www.enedim.gr/images/praktika_synedrion/praktika5.zip

Η ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Κουρουνιώτης Χρήστος, Παπαδάκη Εύη

Πανεπιστήμιο Κρήτης

chrisk@uoc.gr, evi.papadaki@math.uoc.gr

Πολλά διαφορετικά μαθηματικά αντικείμενα μπορούν να θεωρηθούν ως διανύσματα, δηλαδή ως στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου. Όμως η εισαγωγή της έννοιας του διανύσματος αποτελεί ένα διδακτικό πρόβλημα, το οποίο έχει μελετηθεί από πολλούς ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών, (δες τη βιβλιογραφία στο Dorier, 2000).

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται η προσέγγιση της εισαγωγής της έννοιας του διανύσματος σε πρωτοετείς φοιτητές και φοιτήτριες Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο Κρήτης. Εισάγονται ταυτόχρονα τα γεωμετρικά διανύσματα (βέλη στο επίπεδο) και τα αριθμητικά διανύσματα (διατεταγμένα ζεύγη στο R^2), και αναδεικνύεται η αντιστοιχία μεταξύ των δύο εννοιών, μέσα από την επιλογή ενός συστήματος αναφοράς στο επίπεδο. Η συγκεκριμένη προσέγγιση αποβλέπει στην αξιοποίηση των συμπληρωματικών πλεονεκτημάτων της embodied και της συμβολικής αντίληψης του διανύσματος, (Watson et al., 2003), με στόχο τη δημιουργία εννοιακών εικόνων που θα διευκολύνουν την παρακολούθηση του δεύτερου μαθήματος (αφηρημένης) Γραμμικής Άλγεβρας και τη μελέτη άλλων περιοχών του προπτυχιακού προγράμματος Μαθηματικών που βασίζονται σε αυτές τις έννοιες.

Γίνεται μία πρώτη προσπάθεια αποτίμησης των αποτελεσμάτων αυτής της προσέγγισης μέσα από συνεντεύξεις με επτά φοιτητές και φοιτήτριες που παρακολούθησαν το εν λόγω μάθημα. Η ανάλυση των συνεντεύξεων δείχνει ότι περίπου 6 μήνες μετά την εισαγωγή του, το γεωμετρικό διάνυσμα καταλαμβάνει κεντρική θέση στην εικόνα της έννοιας του διανύσματος των συμμετεχόντων. Περαιτέρω έρευνα χρειάζεται να εξετάσει το βαθμό στον οποίο επηρεάζεται η κατανόηση των σχετικών εννοιών στο συμβολικό και αφηρημένο επίπεδο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Dorier, J. L. (ed.) 2000. *On the teaching of linear algebra*. Netherlands: Springer.

Watson, A., Spyrou, P., & Tall, D. (2003). The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: The concept of vector. *The Mediterranean Journal of Mathematics Education*, *1*(2), 73-97.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΕΝΗΛΙΚΕΣ

Μπαλωμένου Λυδία, Τάτσης Κωνσταντίνος

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

lydiampalw@gmail.com, ktatsis@uoi.gr

Η ενάριθμη συμπεριφορά, πέρα από αριθμητικές δεξιότητες, περιλαμβάνει την κριτική σκέψη και την ικανότητα εξαγωγής νοήματος από μη μαθηματικά πλαίσια ιδωμένα από μαθηματική οπτική (Geiger, Forgasz & Goos, 2015). Η παρούσα έρευνα εξετάζει την ανταπόκριση 100 ενηλίκων σε έξι ρεαλιστικά προβλήματα βάσει ενός ερωτηματολογίου που πληροφορεί για δημογραφικά στοιχεία, επαγγελματική κατάσταση, μορφωτικό επίπεδο και στάσεις του λύτη απέναντι στα μαθηματικά.

Ενδεικτικό πρόβλημα

Ενδιαφέρεσαι να αγοράσεις ένα ζευγάρι αθλητικά παπούτσια και αποφασίζεις να επισκεφτείς τα καταστήματα την περίοδο των εκπτώσεων. Στο πρώτο τοπικό κατάστημα (εικόνα 1) βρίσκεις τα παπούτσια με αρχική τιμή 120 ευρώ, ενώ στο πολυκατάστημα της πόλης (εικόνα 2) τα ίδια παπούτσια κοστίζουν 140 ευρώ. Από πού θα επιλέξεις να αγοράσεις τα παπούτσια και γιατί;

Εικόνα 10

Εικόνα 9

Την ίδια μέρα, έκανες ανάληψη από την τράπεζα και πήρες πέντε χαρτονομίσματα των 50 ευρώ. Πόσα ρέστα θα πάρεις από την αγορά των παπουτσιών;

Οι ενήλικες ανταποκρίθηκαν με επιτυχία στη χρήση των ποσοστών. Από τους 43 συμμετέχοντες που χρησιμοποίησαν τα ποσοστά, όλοι έκαναν σωστούς υπολογισμούς, ενώ 37 άτομα δεν εκμαίευσαν πληροφορίες από τις εικόνες. Άλλοι παράγοντες που επηρέασαν τις επιλογές των συμμετεχόντων ήταν η απόσταση του εμπορικού από το κέντρο της πόλης, η ποσότητα καυσίμων που θα αναλωνόταν για την επίσκεψη στο εμπορικό και η περίπτωση της ηλεκτρονικής παραγγελίας. Επιπροσθέτως, 37 συμμετέχοντες σκέφτηκαν ότι δεν θα δώσουν το σύνολο χρημάτων που έλαβαν από την τράπεζα, αλλά δύο ή τρία χαρτονομίσματα, ενώ ένας συμμετέχοντας έδωσε απάντηση χωρίς νόημα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Geiger, V., Forgasz, H., & Goos, M. (2015). A critical orientation to numeracy across the curriculum. *ZDM Math. Education, 47,* 611–624.

Η ΠΡΟΚΑΤΑΛΗΨΗ ΤΟΥ ΦΥΣΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΕ ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ

Μπάμπη[1] Κατερίνα, Χρήστου[2] Κωνσταντίνος Π.

[1]Ε.Κ.Π.Α., [2]Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

1katbam@math.uoa.gr, 2kchristou@uowm.gr

Η παρούσα μελέτη εστιάζει στην επίδραση του φαινομένου της προκατάληψης του φυσικού αριθμού (δηλαδή, της τάσης να εφαρμόζονται ιδιότητες των φυσικών αριθμών στους ρητούς) (Ni & Zhou, 2005) σε πράξεις με ακεραίους. Βασική υπόθεση είναι ότι η προκατάληψη του φυσικού αριθμού θα επηρεάζει τους μαθητές να θεωρούν ότι οι πράξεις δίνουν συγκεκριμένο αποτέλεσμα όσον αφορά τόσο το μέγεθος όσο και το πρόσημο του αποτελέσματος μιας πράξης. Σε 86 μαθητές Β' γυμνασίου δόθηκαν ερωτηματολόγια με 30 έργα/ισότητες στα οποία έλειπε ένας από τους δύο αρχικούς όρους της πράξης, π.χ. -4:_=-2 (βλ. Christou, 2015) και τους ζητήθηκε να επιλέξουν αν η πράξη «Γίνεται» ή «Δε Γίνεται».

Για τον έλεγχο της υπόθεσης σχεδιάστηκαν έργα που κατηγοριοποιούνται ως προς το *μέγεθος* του αποτελέσματος σε: *συμβατά* με τις διαισθητικές πεποιθήσεις των μαθητών/τριών ότι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνουν, ενώ η αφαίρεση και η διαίρεση μικραίνουν τους αρχικούς όρους της πράξης, ή *ασύμβατα*, όταν οι παραπάνω πεποιθήσεις ανατρέπονται. Τα ίδια έργα κατηγοριοποιούνταν επίσης ως προς το *πρόσημο* του τελικού αποτελέσματος σε: *συμβατά με πρόσημο*, όταν ο αρχικός όρος και το αποτέλεσμα έχουν το ίδιο πρόσημο, ή *ασύμβατα με πρόσημο*.

Όπως αναμένονταν, η υψηλότερη μέση επίδοση των μαθητών/τριών σημειώθηκε στα έργα που ήταν συμβατά με τις διαισθητικές πεποιθήσεις τους τόσο για το μέγεθος όσο και για το πρόσημο των αποτελεσμάτων των πράξεων (Μ.Ο.=0.88, Τ.Α.=0.33) και ήταν στατιστικώς σημαντικά υψηλότερη από την επίδοση στα έργα στα οποία αυτές οι πεποιθήσεις ανατρέπονταν $t(85) = 9.713$, $p < .001$. Παιδαγωγικές εφαρμογές θα συζητηθούν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Christou, K. P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM*, *47*(5), 747-758.

Ni, Y., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27-52.

ΠΕΠΟΙΘΗΣΕΙΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΑΝΑΛΟΓΑ ΜΕ ΤΑ ΧΡΟΝΙΑ ΥΠΗΡΕΣΙΑΣ ΤΟΥΣ

Πεκρή Χριστίνα

Frederick University Cyprus

cppekr01@gmail.com

Η εργασία αυτή πραγματοποιήθηκε με σκοπό τη διερεύνηση των πεποιθήσεων επάρκειας στη διδασκαλία, εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, ανάλογα με τα χρόνια υπηρεσίας τους. Το δείγμα αποτέλεσαν 117 εκπαιδευτικοί πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (26 άντρες και 91 γυναίκες). Χορηγήθηκε ένα ερωτηματολόγιο με 21 δηλώσεις που μέτρησε τις πεποιθήσεις επάρκειας τους. Χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πρόγραμμα SPSS και η ανάλυση t-test για ανεξάρτητα δείγματα. Η ανεξάρτητη μεταβλητή ήταν τα χρόνια υπηρεσίας των εκπαιδευτικών, η οποία αποτελείτο από δύο ομάδες [0-5 χρόνια (n=57), 6-30 χρόνια (n=47)]. Η εξαρτημένη μεταβλητή ήταν οι Πεποιθήσεις επάρκειας των εκπαιδευτικών στη Διδασκαλία. Βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στο βαθμό πεποιθήσεων επάρκειας στη διδασκαλία ανάμεσα στις δύο ομάδες. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι εκπαιδευτικοί με πολλά χρόνια υπηρεσίας φαίνεται να έχουν και υψηλότερες πεποιθήσεις επάρκειας στη διδασκαλία τους. Τα αποτελέσματα φαίνεται να τονίζουν τη σημαντικότητα της πείρας εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, στις πεποιθήσεις επάρκειας τους στη διδασκαλία των μαθηματικών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Enochs, L., Smith, P., & Huinker, D. (2000). Establishing factorial validity of the mathematics teaching efficacy beliefs instrument. *School Science and Mathematics, 100*(4), 194-202.

Πεκρή, Χ. (2017). Η ανάπτυξη ενός ερωτηματολογίου για τη μέτρηση των πεποιθήσεων επάρκειας εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαιδευσης στη διδασκαλία των μαθηματικών. Στο Α. Φιλίππου, Σ. Λοϊζιάς, Δ. Καραντάνος και Θ. Παραγυίου (Επιμ.), *19ο Παγκύπριο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης, 10-12 Φεβρουαρίου 2017* (σσ.23). Πάφος.

ΟΜΑΔΕΣ ΑΝΤΑΛΛΑΓΩΝ

ΕΙΚΟΝΙΚΗ ΚΑΙ ΕΠΑΥΞΗΜΕΝΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ: ΖΩΝΤΑΝΕΥΟΝΤΑΣ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ

Ιλόνα-Ελευθερία Ουασίτσα[1], Σταύρος Πιτσικάλης[2], Μαρία Μελετίου-Μαυροθέρη[1], Κωνσταντίνος Κάτζης[1], Χρήστος Δημόπουλος[1]

[1]Ευρωπαϊκό Πανεπιστήμιο Κύπρου, [2]Πανεπιστήμιο Αιγαίου

i.lasica@research.euc.ac.cy, psed16007@rhodes.aegean.gr, m.mavrotheris@euc.ac.cy, k.katzis@euc.ac.cy, c.dimopoulos@euc.ac.cy

Η παρούσα ομάδα ανταλλαγής έχει ως στόχο να κινητοποιήσει τους/τις εκπαιδευτικούς ώστε να εφαρμόσουν καινοτόμες προσεγγίσεις στο πεδίο των μαθηματικών, «ζωντανεύοντας» μαθηματικές έννοιες στην τάξη με κατάλληλα εργαλεία και παιδαγωγικές προσεγγίσεις. Μέσα από τις ομαδικές συναντήσεις, οι συμμετέχοντες/ουσες θα έχουν την ευκαιρία να (α) ενημερωθούν σχετικά με τις σύγχρονες τάσεις στα μαθηματικά μέσα από μελέτες περίπτωσης σε διεθνές επίπεδο, (β) γνωρίσουν καινοτόμες τεχνολογίες όπως η εικονική (προσομοιώσεις) και επαυξημένη πραγματικότητα, (γ) συμμετέχουν σε συζητήσεις σχετικές με τα παραπάνω θέματα και (δ) αξιοποιήσουν οι ίδιοι/ες τις συγκεκριμένες τεχνολογίες.

ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΟΜΑΔΑΣ ΑΝΤΑΛΛΑΓΗΣ.

Η συγκεκριμένη ομάδα ανταλλαγής φιλοδοξεί να προσφέρει στους συμμετέχοντες την ευκαιρία να μοιραστούν τις απόψεις τους, σε θέματα που αφορούν στις νέες τεχνολογίες στα μαθηματικά, με έμφαση στις τεχνολογίες της εικονικής και επαυξημένης πραγματικότητας [Virtual Reality (VR), Augmented Reality (AR)]. Για την ολοκλήρωση της ομάδας ανταλλαγής προβλέπονται δύο ωριαίες συναντήσεις.

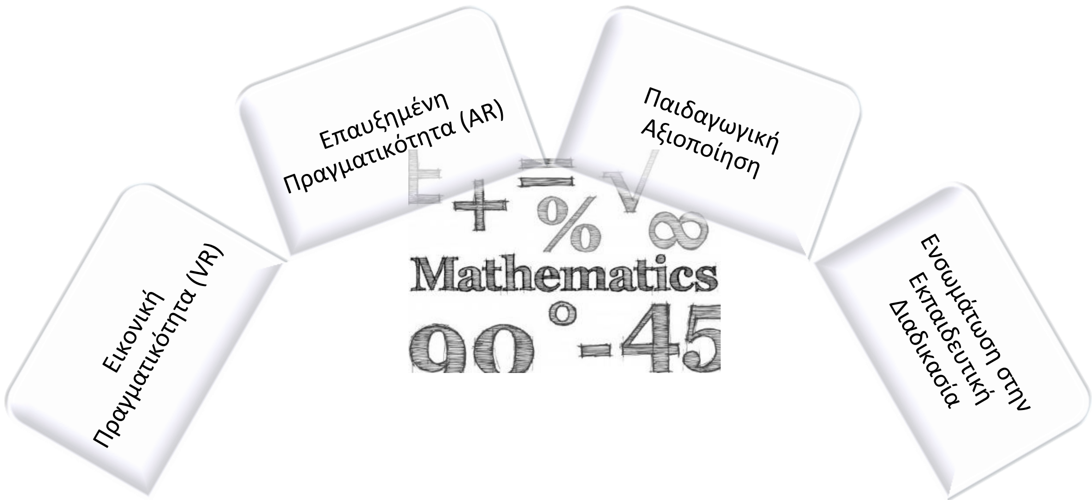
Η ομάδα ανταλλαγών θα ξεκινήσει με την προβολή ενός βίντεο για την εκπαίδευση του μέλλοντος, το οποίο θα αποτελέσει σημείο αναφοράς για την εξέλιξη της συζήτησης και των υπόλοιπων δραστηριοτήτων. Ο συντονιστής της ομάδας σε συνεργασία με τους συν-διοργανωτές, θα παρουσιάσουν εν συντομία προβληματισμούς γύρω από το βίντεο, ερευνητικά δεδομένα και μελέτες περίπτωσης σχετικά με την εικονική και επαυξημένη πραγματικότητα στα μαθηματικά, προσπαθώντας να δημιουργήσουν κριτική συζήτηση μεταξύ των συμμετεχόντων. Κατά τη διάρκεια των συναντήσεων, θα πραγματοποιηθούν εργασίες σε ομάδες, δίνοντας στους/στις συμμετέχοντες/ουσες την ευκαιρία να δοκιμάσουν σύγχρονα εργαλεία και να προτείνουν τις δικές τους εφαρμογές.

Στόχοι.

- Ενημέρωση συμμετεχόντων/ουσών σχετικά με τις τάσεις της τεχνολογίας σε διεθνές επίπεδο, με έμφαση σε τεχνολογίες όπως εικονική και επαυξημένη πραγματικότητα.
- Δημιουργία εποικοδομητικού διαλόγου γύρω από τους άξονες εστίασης (βλ. επόμενη ενότητα) της ομάδας ανταλλαγής.
- Εργασία σε ομάδες για την ανάδειξη της εκπαιδευτικής αξίας εκπαιδευτικού περιεχομένου VR ή/και AR - δημιουργία δικτύου και διάθεση διατήρησης μετά το πέρας της ομάδας ανταλλαγής.
- Αξιοποίηση VR ή/και AR εκπαιδευτικού περιεχομένου στο αντικείμενο των μαθηματικών.

Άξονες Εστίασης.

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζονται οι άξονες εστίασης της προτεινόμενης ομάδας ανταλλαγής:



Εικόνα 1: Άξονες Εστίασης Ομάδας Ανταλλαγής

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΠΡΩΤΗΣ ΣΥΝΑΝΤΗΣΗΣ.

Δραστηριότητα	Διάρκεια	Περιγραφή	Σύνδεσμοι
Εισαγωγή - Γνωριμία	10’	Γνωριμία με συμμετέχοντες - εισαγωγή στο θέμα	
Βίντεο - σημείο αναφοράς	5’	Προβολή βίντεο	Link1
Σχολιασμός - Παρουσίαση Δεδομένων	20’	- Προβληματισμοί γύρω από το βίντεο - Ερευνητικά δεδομένα και	Link1

		μελέτες περίπτωσης (VR, AR, MR στα μαθηματικά)	
Κριτική Συζήτηση	25’	- Χωρισμός σε ομάδες ανάλογα με τους συμμετέχοντες - Ανάπτυξη Απόψεων	

Πίνακας 1: Δραστηριότητες 1ης συνάντησης.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΣΥΝΑΝΤΗΣΗΣ.

Δραστηριότητα	Διάρκεια	Περιγραφή	Σύνδεσμοι
Σύνοψη 1ης συνάντησης	10’	Λίγα λόγια για όσα έχουν συζητηθεί	
Παρουσίαση Παραδειγμάτων VR-AR-MR	15’	- Παρουσίαση Συλλογών Προσομοιώσεων (VR) - Περιπτώσεις χρήσης AR στα μαθηματικά διεθνώς	Link1 Link2 Link3
Αξιοποίηση εφαρμογών/ εργαλείων VR/AR	35’	- Χωρισμός σε ομάδες ανάλογα με τους συμμετέχοντες - Αξιοποίηση εφαρμογών/ εργαλείων - Ανάπτυξη ιδεών	

Πίνακας 2: Δραστηριότητες 2ης συνάντησης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bujak, K. R., Radu, I., Catrambone, R., Macintyre, B., Zheng, R., & Golubski, G. (2013). A psychological perspective on augmented reality in the mathematics classroom. *Computers & Education*, *68*, 536-544.

Kaufmann, H. (2002). Construct3D: an augmented reality application for mathematics and geometry education. In *Proceedings of the tenth ACM international conference on Multimedia* (pp. 656-657).

Lasica Ilona-Elefteryja, Katzis Konstantinos, Meletiou-Mavrotheris Maria, D. C. (2016). Research Challenges in future laboratory-based STEM Education. *IEEE TCLT Bulletin*, *18*(1), 2–5.

Sommerauer, P., & Müller, O. (2014). Augmented reality in informal learning environments: A field experiment in a mathematics exhibition. *Computers & Education*, *79*, 59-68.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΤΟΜΑ ΜΕ ΑΝΑΠΗΡΙΑ

Μαρία Τουλτσινάκη[2], Παναγιώτης Σταυρόπουλος[2], Έλενα Ναρδή[1], Ειρήνη Μπιζά[1]

[1]School of Education, University East Anglia, Norwich, UK

[2]Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

maria_toul@yahoo.gr, stavropoulos.panagiotis@gmail.com, e.nardi@uea.ac.uk, i.biza@uea.ac.uk

Σκοπός της προτεινόμενης ομάδας ανταλλαγών είναι ο προβληματισμός και η συζήτηση σχετικά με τη διδακτική των μαθηματικών σε μαθητές και μαθήτριες με αναπηρία και ειδικές διδακτικές ανάγκες. Συγκεκριμένα θα συζητηθούν περιπτώσεις μαθητών με προβλήματα όρασης ή ακοής σχετικά με τις μαθησιακές τους προσεγγίσεις και ανάγκες όσο και οι απόψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με αυτές τις προσεγγίσεις και ανάγκες. Ειδικότερα, στην πρώτη συνεδρία θα γίνει παρουσίαση του προγράμματος CAPTeaM (Changing Ableist Perspectives on the Teaching of Mathematics), αναφορικά με την εκπαίδευση χωρίς αποκλεισμούς και τις απόψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με το πώς οι μαθητές με αναπηρία, τυφλοί και κωφοί μαθητές, ασχολούνται με τα μαθηματικά. Στη δεύτερη συνεδρία θα συζητηθούν διδακτικές προσεγγίσεις και αναλύσεις αυτών, σε μαθητές που ανήκουν στις παραπάνω κατηγορίες με τελικό αναστοχασμό και ανταλλαγή απόψεων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο πλαίσιο της διδακτικής των μαθηματικών σε μαθητές και μαθήτριες με ειδικές διδακτικές ανάγκες η συγκεκριμένη ομάδα ανταλλαγών αποκτά μία επιπρόσθετη αξία με δεδομένο ότι η βιβλιογραφία είναι περιορισμένη και η έρευνα στον συγκεκριμένο τομέα βρίσκεται ακόμα σε αρχικό στάδιο. Πιστεύουμε ότι μαθητές με αναπηρία στην όραση, την ακοή, την κίνηση και άλλα συνοδά προβλήματα είναι σημαντικό να μελετηθούν και να έρθουν στο προσκήνιο οι διαφορετικές προσεγγίσεις και αντιλήψεις τους για τα μαθηματικά. Η ανταλλαγή εμπειριών και σκέψεων, φιλοδοξούμε να δώσουν την αφορμή για μελλοντικές έρευνες στον συγκεκριμένο τομέα ο οποίος μπορεί να προσφέρει συμπεράσματα για τη διδασκαλία των μαθηματικών σε μαθητές με ή χωρίς αναπηρίες.

CAPTEAM

Το πρόγραμμα CAPTeaM (*Changing Ableist Perspectives on the Teaching of Mathematics - Αλλάζοντας τις Ικανοτιστικές Απόψεις για τη Μαθηματική Παιδεία*), αφορά την μαθηματική εκπαίδευση στην ενιαία τάξη που συμπεριλαμβάνει άτομα με αναπηρία και ειδικές διδακτικές ανάγκες. Το *CAPTeaM* εστιάζει στις απόψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με τη μάθηση και την *ικανότητα για μάθηση* των μαθηματικών από άτομα με αναπηρία. Με τον όρο *Ικανοτισμό* (υπό συζήτηση μετάφραση στα Ελληνικά του Ableism) περιγράφουμε εκείνο το σύμπλεγμα πεποιθήσεων που βλέπει τα άτομα με αναπηρία ως άτομα περιορισμένων νοητικών δυνατοτήτων (Nardi, Healy, Biza & Fernandes 2016, in press). Ειδικά στα μαθηματικά τέτοιες πεποιθήσεις μπορεί να υποστηρίζουν, για παράδειγμα, ότι ένα τυφλό άτομο δε μπορεί να αντιληφθεί τα γεωμετρικά σχήματα ή ότι είναι καλύτερα να εργάζεται στο περιθώριο της κανονικής τάξης. Τέτοιες πεποιθήσεις στη μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να περιορίσουν την συμπερίληψη και να οδηγήσουν σε περιορισμό όχι μόνο των ευκαιριών που ένα άτομο με αναπηρία μπορεί να έχει αλλά και τις ευκαιρίες που η *οπτική* αυτού του ατόμου μπορεί να προσφέρει στα άτομα που δεν έχουν αναπηρίες να δούνε τα μαθηματικά με διαφορετικά *μάτια*. Στο πρόγραμμα αυτό με την υποστήριξη της Βρετανικής Ακαδημίας (British Academy) και σε συνεργασία με μία ερευνητική ομάδα της Βραζιλίας (www.matematicainclusiva.net.br) αναπτύσσουμε δραστηριότητες και εργαστήρια για εκπαιδευτικούς μαθηματικών που στοχεύουν στον κλονισμό αυτών των πεποιθήσεων. Μέχρι τώρα έχουν προσφερθεί εργαστήρια στη Βρετανία, τη Βραζιλία και την Ελλάδα. Παραδείγματα αυτών των δραστηριοτήτων και ερευνητικά αποτελέσματα από την ανάλυση δεδομένων που συλλέχθηκαν με αυτές τις δραστηριότητες θα συζητηθούν στην πρώτη συνεδρία.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ

Η διδακτική πράξη σε μαθητές με αναπηρία παρουσιάζει σημαντικές διαφορές σε σχέση με τους υπόλοιπους μαθητές δεδομένου των νέων συνθηκών που έχει να αντιμετωπίσει ο εκπαιδευτικός. Θα πρέπει να συνυπολογίσει σημαντικές πληροφορίες όπως το μέρος, τα υλικά αλλά και τις ειδικές δυνατότητες του εκάστοτε μαθητή. Στη δεύτερη συνεδρία, εφαλτήριο για συζήτηση θα αποτελέσουν 3 διδακτικές προσεγγίσεις σε μαθητές με προβλήματα όρασης που συμπεριλαμβάνουμε στη βιβλιογραφία. Η πρώτη αφορά μια συγκριτική μελέτη σε έρευνα των Biza et al. (2008) ως προς τη μελέτη της έννοιας της εφαπτομένη σε μαθητές με προβλήματα όρασης (Stavropoulos, Toultsinaki 2017). Πρόκειται για την μετάβαση της έννοιας από την Ευκλείδεια Γεωμετρία στην ανάλυση μέσω της απτικής αντίληψης ανάγλυφων σχημάτων. Η δεύτερη αφορά τη μελέτη περίπτωσης μιας τυφλής μαθήτριας σε σχέση με την αριθμητική και τη διατακτική ιδιότητα των ακεραίων αριθμών με τη χρήση μιας ανάγλυφης αριθμογραμμής (Toultsinaki & Stavropoulos, 2016). Εδώ παρατηρείται η συνεχής ανάκληση ενός μοντέλου που σχηματίζει η ίδια η μαθήτρια, το μοντέλο του θερμόμετρου, το οποίο αντλεί από την καθημερινή της ζωή. Τέλος, η τρίτη έρευνα αφορά τον ρόλο της γεωμετρίας στην κατανόηση των συμβόλων της άλγεβρας σε μη βλέποντες μαθητές (Τουλτσινάκη & Σταυρόπουλος, 2015). Οι μαθητές μέσω τις απτικής αντίληψης, των χειρονομιών και χρήση της γλώσσας επαναπροσεγγίζουν το θέμα της παραγοντοποίησης με τη βοήθεια εμβαδών επίπεδων ορθογώνιων παραλληλογράμμων και τετραγώνων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Biza, I., Christou, C., Zachariades, T. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis, *Research in Mathematics Education* 10:1, 53 - 70

CAPTeaM: Changing Ableist Perspectives on the Teaching of Mathematics (n.d.). Retrieved from https://www.uea.ac.uk/education/research/areas/mathematics-education/our-research/mathtask_greek/capteam

Nardi, E., Healy, L., Biza, I., & Fernandes, S.H.A.A. (in press). 'Feeling' the mathematics of disabled learners: Supporting teachers towards attuning and resignifying in inclusive mathematics classrooms. In R. Hunter, M. Civil, B. Herbel-Eisenmann, N. Planas, & D. Wagner (Eds.), *Mathematical discourse that breaks barriers and creates space for marginalized learners*. SENSE Publications.

Nardi, E., Healy, L., Biza, I., & Fernandes, S.H.A.A. (2016). Challenging ableist perspectives on the teaching of mathematics through situation-specific tasks. In Csíkos, C., Rausch, A., & Szitányi, J. (Eds.). *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 3, pp. 347-354). Szeged, Hungary: PME.

Stavropoulos P., Toultsinaki M. (2017). The concept of the tangent in the transition from Euclidean geometry to analysis: a visualization via touch, *Proceedings of the 9th International Mathematics Education and Society Conference* (pp. 889-900). Volos, Greece: MES9.

Toultsinaki M. & Stavropoulos P. (2016). The use of number line by blind children in order to understand the integers, *Proceedings of 10th*

International Conference on Conceptual Change. Florina, Greece: EARLI.

Τουλτσινάκη Μ. & Σταυρόπουλος Π. (2015). Ο ρόλος της γεωμετρίας στην κατανόηση των συμβόλων της άλγεβρας σε μαθητές με προβλήματα όρασης, *Πρακτικά 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝΕΔΙΜ*. Θεσσαλονίκη, Ελλάδα.

ΚΑΙΝΟΤΟΜΕΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

ΠΡΟΤΑΣΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΣΤΗ Δ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Βασιλά Αικατερίνη και Δεσλή Δέσποινα

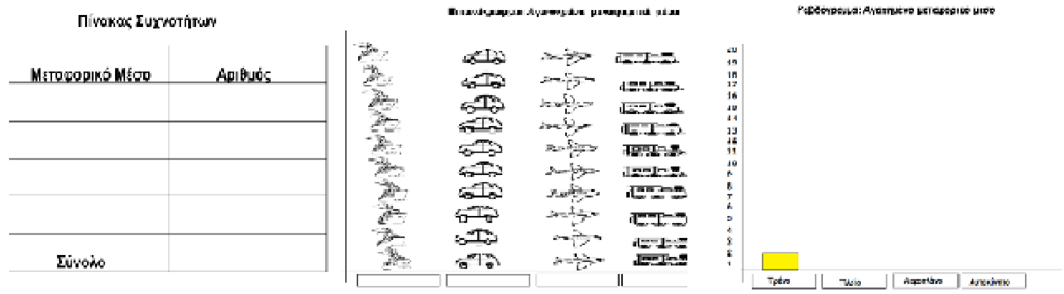
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Α.Π.Θ

basilakaterina@yahoo.gr, ddesli@eled.auth.gr

ΣΤΟΧΟΣ – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Στην παρούσα εργασία επιχειρείται η περιγραφή μιας διδακτικής παρέμβασης για το μάθημα της Στατιστικής στο δημοτικό σχολείο. Στόχος της διδακτικής παρέμβασης ήταν η προσέγγιση βασικών εννοιών περιγραφικής στατιστικής αναφορικά με την οργάνωση και παρουσίαση δεδομένων και πληροφοριών καθώς και την κατασκευή πίνακα συχνοτήτων, εικονογράμματος και ραβδογράμματος. Η συγκεκριμένη διδακτική παρέμβαση υλοποιήθηκε σε 27 μαθητές/τριες της Δ΄ τάξης, περιελάμβανε 17 φύλλα δραστηριοτήτων μέσα στα οποία εντάσσονταν και φύλλα αξιολόγησης και διήρκησε 15 διδακτικές ώρες.

Για τον σχεδιασμό των δραστηριοτήτων λήφθηκε υπόψη η ηλικία των παιδιών, η διδακτέα ύλη των σχολικών εγχειριδίων και οι στόχοι του Νέου Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών (2011), το οποίο έχει δομηθεί στη λογική της τροχιάς μάθησης. Σύμφωνα με αυτή, προτείνονται συγκεκριμένα διδακτικά έργα τα οποία αναμένεται να προκαλέσουν την ανάπτυξη και να οδηγήσουν τα παιδιά σε ανώτερα επίπεδα σκέψης (Clements & Sarama, 2004). Στην παρούσα διδακτική παρέμβαση χρησιμοποιήθηκαν δραστηριότητες διαβαθμισμένης δυσκολίας με ρεαλιστικό σενάριο από οικείες καταστάσεις της καθημερινής ζωής των παιδιών καθώς και η ομαδοσυνεργατική μορφή διδασκαλίας. Αρχικά ζητήθηκε από τα παιδιά να διατυπώσουν ερωτήματα προς έρευνα. Επιλέχθηκε αυτό της αγαπημένης εποχής. Στη συνέχεια κλήθηκαν να γράψουν σε post-it την εποχή προτίμησής τους, να τα κολλήσουν στον πίνακα και να κατηγοριοποιήσουν τις απαντήσεις τους με τον τρόπο αυτό ήρθαν σε επαφή με την έννοια της μεταβλητής και της συχνότητας. Σε επόμενη δραστηριότητα έμαθαν να συλλέγουν τα δεδομένα τους, να κατασκευάζουν και να ερμηνεύουν πίνακα συχνοτήτων, ακόμα και με διπλό πληθυσμό. Ακολούθησε το στάδιο της κατασκευής και της ερμηνείας εικονογράμματος, κατά το οποίο τα παιδιά έπρεπε να βασίζονται στα δεδομένα που είχαν συλλέξει από τον πίνακα συχνοτήτων. Τα εικονογράμματα ήταν διαμορφωμένα έτσι ώστε να αναπαριστούν ένα προς ένα τα δεδομένα και στην πορεία εξελικτικά η εικόνα ή το σύμβολο αντιπροσώπευε πολλαπλάσια του ένα εντάσσοντας και την έννοια του διπλού πληθυσμού. Η διδακτική παρέμβαση ολοκληρώθηκε με τις δραστηριότητες που αφορούσαν την κατασκευή και ερμηνεία ραβδογράμματος. Για παράδειγμα, σε μία δραστηριότητα η οποία αναφερόταν στην προτίμηση των μεταφορικών μέσων, ζητήθηκε από τα παιδιά να συλλέξουν και να οργανώσουν τα δεδομένα τους σε πίνακα συχνοτήτων, να κατασκευάσουν εικονόγραμμα και ραβδόγραμμα και να ερμηνεύσουν τα δεδομένα τους (βλ. εικόνα 1). Η διδακτική παρέμβαση ολοκληρώθηκε με φύλλο αξιολόγησης που αφορούσε την συχνότητα στις ρίψεις ζαριών.



Εικόνα 1: Παράδειγμα δραστηριότητας

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από μία πρώτη ανάλυση στα φύλλα αξιολόγησης που δίνονταν στα παιδιά κατά την ολοκλήρωση κάθε ενότητας φάνηκε ότι τα παιδιά προσέγγισαν επαρκώς τις βασικές στατιστικές έννοιες που είχαν τεθεί ως στόχος. Στην προσωπική συνέντευξη που ακολούθησε, τόνισαν τον ενισχυτικό ρόλο που είχαν τα παραδείγματα που τους δίνονταν στην προσέγγιση της κάθε νέας έννοιας, ο παιγνιώδης τρόπος που αυτή παρουσιάζονταν και τα οικεία θέματα που καλούνταν να διαχειριστούν. Τα παιδιά ως μέλη των ομάδων συνεργάστηκαν αρμονικά μεταξύ τους. Η συγκεκριμένη διδακτική παρέμβαση θα συνεχιστεί και σε άλλες τάξεις στη βάση της τροχιάς μάθησης, προκειμένου να ολοκληρωθεί η ενιαία εικόνα της πορείας ανάπτυξης των εννοιών της στατιστικής.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Clements, D.H., Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6,* 81-89.

Νέο Πρόγραμμα Σπουδών (2011). *Μαθηματικά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση (Δημοτικό), Νέο Σχολείο (Σχολείο 21ου αιώνα).* Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, ΕΣΠΑ 2007-2013.

Η ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ ΑΝΑΖΗΤΑ ΤΟΝ "ΧΩΡΟ" ΤΗΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ: ΜΙΑ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΗ Β΄ ΤΑΞΗ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Γαβριήλ Άννα

Μαθηματικός, M.Sc. στη Διδακτική των Μαθηματικών

Καθηγήτρια Μαθηματικών στο Ιδιωτικό Γυμνάσιο – Λύκειο: «Πολύτροπη Αρμονία»

Email: nzqrcanna@gmail.com

Η εργασία αποτελεί μία διδακτική πρόταση – δραστηριότητα για τη Στερεομετρία στη Β΄ τάξη του Γυμνασίου δίνοντας έμφαση στην αυτενέργεια των μαθητών και τη διερευνητική τους διάθεση γύρω από τη μετάβαση από το δισδιάστατο επίπεδο στον τρισδιάστατο χώρο.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Η διδασκαλία της Στερεομετρίας στο ελληνικό σχολείο είναι εντός της διδακτέας ύλης, όμως τις περισσότερες χρονιές βρίσκεται «εκτός χρόνου». Θα μπορούσε η διδασκαλία της Στερεομετρίας να βρει «τον χώρο» της στο Γυμνάσιο, τουλάχιστον; Η επέκταση του σχολικού έτους κατά τη σχολική χρονιά 2016 – 2017 ευνοεί την προσπάθεια αυτή; Η χρήση σχημάτων στον χώρο απαιτεί αρκετή φαντασία. (Οικονόμου, 1994) Αντιμετωπίζονται οι δυσκολίες αυτές με τη χρήση των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας; (Μπολοτάκης, 2017) Οι μέθοδοι διδασκαλίας, όπου μαθητές και διδάσκοντες προσεγγίζουν μία διδακτική ενότητα διαθεματικά σε ομάδες βοηθούν τη διδασκαλία; (Γιαννοπούλου, 2011) Πώς θα ενεργοποιήσουμε το ενδιαφέρον των μαθητών μας; Η τέχνη, η ιστορία κι η φιλοσοφία των μαθηματικών αποτελούν αφορμή να εργαστούν οι μαθητές πιο δραστήρια; (Τουμάσης,2005) Η ανάθεση τέτοιων εργασιών στους μαθητές τους προτρέπει να επιλέξουν ένα θέμα στις ενδοσχολικές εξετάσεις σχετικό με την εργασία τους;

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ – ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Η διδασκαλία - δραστηριότητα έγινε σε δύο τμήματα της Β΄τάξης του ιδ. γυμνασίου «Πολύτροπη Αρμονία». Η εισαγωγή έγινε με τα ιστορικά στοιχεία που υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο σχετικά με την προοπτική στη ζωγραφική με τον πίνακα, «Μυστικός Δείπνος», του Leonardo Da Vinci, με την αναφορά στα Πλατωνικά στερεά και τον συμβολισμό τους. Συζητήθηκαν οι πίνακες του Ντυρέρ, «Μελαγχολία» (Χαρακτικό, 1514) και του Έσερ, «Ερπετά» (Λιθογραφία, 1943). Στη διάρκεια των μαθημάτων χρειάστηκαν τα απτά γεωμετρικά στερεά, τα οποία οι μαθητές επεξεργάζονταν με ενδιαφέρον. Προτρέπαμε τους μαθητές να μην αποστηθίζουν τους τύπους των εμβαδών επιφάνειας των στερεών, αλλά να τα συσχετίζουν με τα αναπτύγματά τους. Κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας του κεφαλαίου οι μαθητές χωρίστηκαν σε οκτώ ομάδες των πέντε ατόμων για τη δημιουργία μιας εργασίας (αρχείο ppt) με διαφορετικό θέμα η κάθε μία από τη γεωμετρία του χώρου, με σαφείς οδηγίες από την καθηγήτρια, όπως προτεινόμενη βιβλιογραφία. Τα θέματα των ομάδων αφορούσαν τα ιστορικά στοιχεία σχετικά με τα στερεά και σύντομη παρουσίαση των πέντε πλατωνικών στερεών. Τη χρήση τους στην τέχνη και την απεικόνιση της τρίτης διάστασης σε πίνακες. Την περιγραφή των βασικών γεωμετρικών εννοιών με τη χρήση του Geogebra 3D. Την παρουσίαση των βασικών στοιχείων των ορθών πρισμάτων, του κυλίνδρου, της πυραμίδας, του κώνου και της σφαίρας. Η τελευταία ομάδα βρήκε ή τράβηξε φωτογραφίες με στερεά σχήματα που συναντάμε γύρω μας. Από τις παρουσιάσεις των ομάδων έγινε σαφές ότι οι μαθητές κατανόησαν τις έννοιες της γεωμετρίας του χώρου σε ικανοποιητικό βαθμό. Μπόρεσαν να σχεδιάσουν ένα στερεό τρισδιάστατα στο χαρτί, το ανάπτυγμά του, αλλά και στο Geogebra 3D. Αρκετοί μαθητές (25 στους 39, 64%) θεώρησαν ότι η εργασία τούς βοήθησε να επιλέξουν το θέμα της Στερεομετρίας στις εξετάσεις. Απόλαυσαν να δουλεύουν σε ομάδες και «να ερευνούν». Η επέκταση του σχολικού έτους ευνοεί την πραγματοποίηση τέτοιων δραστηριοτήτων στο γυμνάσιο. Τέλος, η διδασκαλία των εννοιών γίνεται ευκολότερα με το συνδυασμό της τεχνολογίας και των μακετών κι είναι ιδιαίτερα ευχάριστη με αναφορές στην τέχνη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Γιανναράκη, Ο. (2005): *Στερεομετρία: Γεωμετρία στη σφαίρα και κάποιες διδακτικές προεκτάσεις*. Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών.

Γιαννοπούλου, Α. (2011): *Διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών με χρήση εργαλείων εξ αποστάσεως εκπαίδευσης*. Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μαθηματικών.

Θωμαΐδης, Γ. & Πούλος Α. (2006): *Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Μπολοτάκης, Γ. (2017): «Η αίσθηση του χώρου των τριών διαστάσεων». Πρακτικά Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικών διοργάνωση Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Παράρτημα Ροδόπης, Κομοτηνή.

Οικόνομου Π. (1994): Σύγχρονα δεδομένα για τη διδασκαλία της Στερεομετρίας. *ΔΙΑΣΤΑΣΗ, 4*, έκδοση του Παραρτήματος Κεντρικής Μακεδονίας της Ε.Μ.Ε, Θεσσαλονίκη

Τουμάσης, Μ. (2005): *Πώς να ενεργοποιήσουμε τα παιδιά στο μάθημα των Μαθηματικών*. Εκδόσεις Κωστόγιαννος, Χαλκίδα.

ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Γαβρίλης Κ., Σίδερης Α., Αποστολοπούλου Ε.

επιτ. Σχολικός Σύμβουλος, 3ο ΓΕΛ Αλίμου, 4ο ΓΕΛ Γαλατσίου

kogavr@gmail.com, aposider@gmail.com, efsapostol@sch.gr

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ένα μεγάλο μέρος των δραστηριοτήτων της σχολικής Άλγεβρας (επίλυση εξισώσεων, αλγεβρικές πράξεις) εμπλέκει τους μαθητές σε ένα ευρύ φάσμα αλγεβρικών ενεργειών, όπως ο μετασχηματισμός, η γενίκευση, η επίλυση, η απλοποίηση, η γραφική παράσταση, η επιχειρηματολογία και η έκφραση σχέσεων και δομών (Usiskin, 1988). Η ελλιπής κατανόηση του αλγεβρικού συμβολισμού και η κακή χρήση των αλγεβρικών διαδικασιών είναι συχνά κύριες αιτίες για τα λάθη των μαθητών στην σχολική Άλγεβρα (Kieran, 1992, Knuth et al., 2006). Το σύμβολο της ισότητας συνήθως χρησιμοποιείται στην έκφραση των τύπων, των εξισώσεων, των ταυτοτήτων, των ιδιοτήτων (π.χ. επιμεριστική) και των συναρτήσεων (Usiskin, 1988). Οι μαθητές συχνά αδυνατούν να διακρίνουν τον διαφορετικό ρόλο του στις παραπάνω περιπτώσεις, και ιδιαίτερα στην έκφραση της ισοδυναμίας των αλγεβρικών παραστάσεων.

ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Κύριος στόχος ήταν η εμπλοκή των μαθητών στη νοηματοδότηση της έννοιας των ισοδύναμων αλγεβρικών εκφράσεων, στη διάκριση του ρόλου του "=" και στη συσχέτιση των παραπάνω νοημάτων με τις έννοιες της μεταβλητής, του γενικού αριθμού, του αγνώστου και της παραμέτρου.

ΚΕΝΤΡΙΚΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ

Η πολύωρη εξάσκηση των μαθητών σε τεχνικές και εφαρμογές αλγορίθμων δεν εξασφαλίζει την νοηματοδοτησή τους. Έτσι συχνά αγνοούν το διαφορετικό νόημα του "=" στις εξισώσεις και στους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

Η διδακτική παρέμβαση πραγματοποιήθηκε σε 50 μαθητές της Α΄ Λυκείου. Χωρισμένοι σε ομάδες των δύο, ενεπλάκησαν σε κατάλληλες δραστηριότητες, αξιοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα ή την παραγοντοποίηση. Παραθέτουμε δείγμα των δραστηριοτήτων:

1η δραστηριότητα: Α) Η παράσταση 4(2x+y) είναι ίση με την παράσταση (α) 2(4x+2y), (β) 8x+2y, (γ) 2x(4+2y), (δ) 8x+4y Β)

Υπολογίστε την τιμή της παράστασης αν (α) 2x+y=5, (β) x=y=0, (γ) 4x+2y=-2.

2η δραστηριότητα: Η παράσταση 6a+5b-3n είναι ίση με την παράσταση (α) 3(2a-n)+5b, (β) 3n+6a-5b, (γ) 5b+(6a-3n), (δ) 5a+3(b-2n). Β) Αν

6a-3n=2015, ποιο είναι το b ώστε η παράσταση να ισούται με 2020 Γ) Αν 2a-n=3b με τι ισούται η παράσταση;

3η δραστηριότητα: Να συμπληρώσετε τις ισότητες με ισοδύναμες εκφράσεις των αντίστοιχων αλγεβρικών παραστάσεων: (α) (α+β)2=..., (β) α2+2α+1=..., (γ) (x2-1)2-2(x2-1)+1=... Για ποιο x η παράσταση ισούται με α4/16;

Στη συνέχεια έγινε στην τάξη μια αναστοχαστικού τύπου συζήτηση.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Οι μαθητές ταύτισαν με σχετική ευκολία τις δοσμένες αλγεβρικές εκφράσεις αξιοποιώντας αλγεβρικά εργαλεία και ιδιότητες, δίνοντας έτσι νόημα στον μετασχηματισμό και την ισοδυναμία αλγεβρικών εκφράσεων. Ωστόσο, παρουσιάστηκαν αξιοσημείωτα λάθη. Στην 1η δραστηριότητα π.χ. βλέποντας τις ισότητες 2x+y=5 και 4(2x+y)=2(4x+2y) ένας μαθητής αποφάσισε να λύσει το σύστημά τους και να βρει τις τιμές των x και y, δίνοντας αφορμή να συζητηθεί η διάκριση ταυτότητας- εξίσωσης. Στην 3η δραστηριότητα δεν αναγνωρίστηκε η σχέση του γ) με τα προηγούμενα, με αποτέλεσμα όλοι να κάνουν πράξεις. λέγοντας: «είναι ξεκάθαρο τι πρέπει να κάνουμε». Στη συνέχεια, για την εύρεση του κατάλληλου x είπαν: «ας κάνουμε δοκιμές». Η συζήτηση στην τάξη ανέδειξε παρανοήσεις, εμβαθύνοντας στο νόημα της ισοδυναμίας των αλγεβρικών παραστάσεων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford (Ed.) *The ideas of algebra, K–12. 1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 8–19). Reston, VA: NCTM

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). New York: Simon & Schuster.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for research in Mathematics Education, 37*(4) 297-312.

ΣΥΜΒΟΛΗ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΩΝ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΩΝ ΠΟΣΩΝ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ: ΣΥΣΧΕΤΙΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ, ΧΡΟΝΟΥ ΚΑΙ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ

Καζαντζής Θεόδωρος

Μετ. Φοιτητής Π.Τ.Δ.Ε., Δ.Π.Θ.

kaztheod@gmail.com

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η εκπαιδευτική ρομποτική είναι μια μορφή τεχνολογίας ελέγχου που χρησιμοποιείται διεθνώς στη διδακτική διαδικασία, εκτός των άλλων και ως μαθησιακό εργαλείο για τη διδασκαλία εννοιών στα Μαθηματικά, τη Φυσική και άλλων γνωστικών τομέων (Alimisis & Kynigos, 2009), τόσο σε περιβάλλοντα τυπικής εκπαίδευσης, όσο και μη τυπικής. Μέσα από την κατασκευή πραγματικών απτών μοντέλων-αναπαραστάσεων του φυσικού κόσμου και τον έλεγχο της συμπεριφοράς τους διαμέσου του εικονικού κόσμου του Η/Υ, οι μαθητές εμπλέκονται σε καταστάσεις πειραματισμού, όπου συζητούν και διερευνούν έννοιες-μεγέθη, καθώς και τις συσχετίσεις τους (Arlegui et al., 2009).

Οι παραπάνω δυνατότητες της εκπαιδευτικής ρομποτικής, καθώς και το *συναρτησιακό τοπίο*, που αναδύεται μεταξύ των τριών εννοιών ταχύτητας-απόστασης-χρόνου, όπου αν και ξεχωριστές «οντότητες» δημιουργούν ένα κλειστό σύστημα που διατηρώντας το ένα μέγεθος σταθερό, το δεύτερο επιδρά ανάλογα (σχέσεις ταχύτητας-απόστασης και απόστασης-χρόνου) ή αντιστρόφως ανάλογα (σχέση ταχύτητας-χρόνου) στο τρίτο (Wilkening, 1981), δημιουργούν ένα ευνοϊκό μαθησιακό περιβάλλον για τη μελέτη των υπόψη μαθηματικών εννοιών. Όλα τα παραπάνω, μέσω της ανακαλυπτικής προσέγγισης και των πειραματικών δραστηριοτήτων συνέθεσαν την παρούσα διδακτική παρέμβαση με γνώμονα το γενικότερο διδακτικό μοντέλο *ΤΠΓΠ (Τεχνολογική Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου)* που την πλαισίωσε (Mishra & Koehler, 2006).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Διδακτικές παρεμβάσεις μικρής κλίμακας (περίπου 1 διδακτικής ώρας) υλοποιήθηκαν σε 6 μαθητές Στ΄ Δημοτικού (δύο ομάδες των τριών) στον χώρο του εργαστηρίου εκπαιδευτικής ρομποτικής του Εθνολογικού Μουσείου Θράκης, την περίοδο 2016-17. Πιο συγκεκριμένα, σε κάθε συνάντηση, αφού οι μαθητές κατασκεύαζαν την εκάστοτε ρομποτική κατασκευή (μέσω του ρομποτικού πακέτου «Lego WeDo») και την προγραμμάτιζαν (μέσω του λογισμικού «Scratch») για την εκτέλεση απλών ενεργειών, καλούνταν να ασχοληθούν με φύλλο εργασίας, όπου αρχικά διατύπωναν υποθέσεις για την εξέλιξη του πειράματος (όπου διαφαίνονταν και οι προϋπάρχουσες ιδέες τους), έπειτα υλοποιούσαν τα πειράματα με βασικό εργαλείο τη ρομποτική κατασκευή (αλλά και όποτε χρειάστηκαν εργαλεία μέτρησης χρόνου και απόστασης), στη συνέχεια κατέγραφαν τις παρατηρήσεις τους (διαψεύδοντας ή επαληθεύοντας τις αρχικές υποθέσεις) και τέλος εξήγαγαν τα αντίστοιχα συμπεράσματα, προσπαθώντας να αναφέρουν παραδείγματα αντίστοιχων μεγεθών από την καθημερινότητά τους. Οι μαθητές διερεύνησαν τόσο τις σχέσεις των κινηματικών μεγεθών σε ευθύγραμμες κινήσεις (π.χ. *οι αγώνες ταχύτητας*), όσο και σε περιστροφικές (π.χ. *τα πουλιά που χορεύουν*).

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ- ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα μαθησιακά αποτελέσματα των μαθητών αξιολογήθηκαν διαμορφωτικά, κατά τη διάρκεια των παρεμβάσεων μέσω των φύλλων εργασίας, αλλά και τελικά μέσω δοκιμασιών (tasks), που περιελάμβαναν καταστάσεις κίνησης δυο αυτοκινήτων, όπου στην κάθε μια παρέχονταν πληροφορίες για τα δυο μεγέθη και ζητούταν η μεταβολή στην τιμή του τρίτου μεγέθους ποιοτικά (μεγαλύτερη, μικρότερη, ίση) και ποσοτικά (πόσες φορές μεγαλύτερη ή μικρότερη). Οι μαθητές φάνηκαν να κατανοούν τις ανάλογες και αντιστρόφως ανάλογες σχέσεις μεταξύ των μεγεθών, εφαρμόζοντάς τες ορθά σε καταστάσεις κίνησης που το απαιτούσαν, με φανερή βελτίωση στις αντιστρόφως ανάλογες σχέσεις, που αρχικά έδειξαν να τους δυσκολεύουν (π.χ. εφαρμογή ανάλογων σχέσεων).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Alimisis, D., & Kynigos, C. (2009). Constructionism and robotics in education. In D. Alimisis (Ed.), *Teacher Education on Robotic-Enhanced Constructivist Pedagogical Methods* (pp. 11-26). Athens: School of Pedagogical and Technological Education (ASPETE).

Arlegui, J., Fava, N., Menegatti, E., Monfalcon, S., Moro, M., & Pina, A. (2009). Robotics as learning object. In D. Alimisis (Ed.), *Teacher Education on Robotics-Enhanced Constructivist Pedagogical Methods* (pp. 27-102). Athens: School of Pedagogical and Technological Education (ASPETE).

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017-1054.

Wilkening, F. (1981). Integrating velocity, time, and distance information: A developmental study. *Cognitive psychology*, *13*(2), 231-247.

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ PATTERNS ΣΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ

Καμπορούδη Παρασκευή

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

pkamporoudi@gmail.com

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗ

Σύμφωνα με τον Kaput (1998), η άλγεβρα δεν αποτελεί ξεχωριστό κομμάτι της ύλης. Η προσέγγισή της στο σχολικό πλαίσιο πραγματοποιείται με ποικίλους τρόπους. Ένας από αυτούς υποδεικνύει τη χρήση των patterns, όπου η άλγεβρα προκύπτει από τη γενίκευση και την τυποποίηση καταστάσεων, μέσα από τη δημιουργία συναρτησιακών σχέσεων.

Τα patterns αποτελούν ένα κατάλληλο εργαλείο για την εισαγωγή στο πεδίο των συναρτήσεων. Η σχέση που εντοπίζεται μεταξύ της θέσης του όρου μιας ακολουθίας και της τιμής του αποτελεί συνάρτηση (Sierpinska, 1992). Έτσι, η ικανότητα εύρεσης ενός απομακρυσμένου όρου αντί του επόμενου καταδεικνύει την ικανότητα γενίκευσης (Threlfall & Frobisher, 1999).

ΣΤΟΧΟΙ – ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Η παρούσα εργασία αφορά σε μια παρέμβαση διάρκειας 130 ωρών, με σκοπό την ανάδειξη και την καλλιέργεια της αλγεβρικής συλλογιστικής σκέψης. Η παρέμβαση πραγματοποιήθηκε σε 20 μαθητές της ΣΤ’ τάξης, οι οποίοι ήταν χωρισμένοι σε ομάδες των 4 ατόμων. Ο ρόλος του δασκάλου ήταν να συντονίζει τη συζήτηση και να θέτει ερωτήματα.

Οι δραστηριότητες που αξιοποιήθηκαν απαιτούσαν την εύρεση και τη συνέχιση επαναλαμβανόμενων και αναπτυσσόμενων pattern (ακολουθίες), γεωμετρικών και αριθμητικών. Επίσης, απαιτούνταν η εύρεση του τύπου σύμφωνα με τον οποίο μπορεί να δοθεί ένας οποιοσδήποτε όρος μιας ακολουθίας, ενώ έγινε εισαγωγή και στην έννοια της συνάρτησης.

Η παρέμβαση παρουσιάζει καινοτόμο χαρακτήρα, αφού εισάγει στο δημοτικό έννοιες και διαδικασίες, οι οποίες, βάσει αναλυτικού προγράμματος, διδάσκονται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ / ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Μέσα από την παρέμβαση έγινε φανερή η ικανότητα γενίκευσης των μαθητών, χαρακτηριστικό γνώρισμα της ύπαρξης αλγεβρικής συλλογιστικής. Κατά τη διάρκειά της συνδυάστηκαν και άλλες μαθηματικές έννοιες, με τις οποίες οι μαθητές έχουν έρθει σε επαφή (περίμετρος, εμβαδόν, δυνάμεις, πρώτοι αριθμοί, εξισώσεις, κ.α.), παρέχοντάς τους την ευκαιρία να συνδέσουν τις προϋπάρχουσες γνώσεις τους σε ένα ενιαίο πλαίσιο. Ακόμη, τα patterns αποδείχθηκαν πολύ καλή αφορμή για την εισαγωγή σε συναρτησιακές σχέσεις και τη συσχέτιση των δύο μεταβλητών.

Στην αρχή της παρέμβασης κανένας μαθητής δεν είχε δυσκολία στην εύρεση της μονάδας επανάληψης και στη συνέχιση του μοτίβου. Στην πορεία των μαθημάτων, άλλοι περισσότερο και άλλοι λιγότερο, άρχισαν να αντιπαραβάλλουν καταστάσεις, να αναιρούν, να απορρίπτουν και να αντιπροτείνουν πλέον με λογικά επιχειρήματα, ώστε οι κανόνες τους να απαντούν σε κάθε όρο της ακολουθίας.

Έτσι, για την εύρεση του $70^{ου}$ σχήματος στο μοτίβο ΟΟΔΔΔ αρκετοί μαθητές επιστράτευσαν τα κριτήρια διαιρετότητας, ενώ για την εύρεση της θέσης του $27^{ου}$ κύκλου μερικοί σκέφτηκαν 26:2=13 επαναλήψεις, $13\cdot5=65$ σχήματα, $65+1=66^{η}$ θέση.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το σκεπτικό ενός μαθητή, όταν κλήθηκε να υπολογίσει το άθροισμα 1+2+3+…+99+100. Ο μαθητής σκέφτηκε: αφού 1+2+…+8+9=45, άρα 10+11+…+18+19=10·10+45=145, 10·20+45=245, 345, 445, κλπ. Στο τέλος πρόσθεσε 45+145+…+945+100=5050. Η σκέψη του προδίδει ένα εξαιρετικό επίπεδο αφαίρεσης, αφού γενικεύει χωρίς δυσκολία και με τον δικό του αυθεντικό τρόπο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Kaput, J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K–12 curriculum. In National Council of Teachers of Mathematics and Mathematical Sciences Education Board (Eds.), *The nature and role of algebra in the K–14 curriculum: Proceedings of a national symposium* (pp. 25-26). Washington, DC: National Research Council, National Academy Press.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of fuction. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy,* MAA Notes, Vol. 25 (pp. 59-84). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Threlfall, J. & Frobisher, L. (1999). Patterns in processing and learning addition facts. In A. Orton (Eds.), *Patterns in the teaching and learning of mathematics* (pp. 49-66). London: Cassell.

ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΔΙΔΑΣΚΟΥΝ - ΟΙ ΣΥΜΜΑΘΗΤΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΟΥΝ

Καραγιάννης Βασίλης

M.Sc. στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών,
Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

vasilis_karagiannis@yahoo.gr

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ

Στο τέλος του σχολικού έτους 2016-17, χώρισα τη διδαχθείσα ύλη των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου σε έξι ενότητες και πρότεινα στους μαθητές των τριών τμημάτων να χωριστούν σε έξι ομάδες και κάθε ομάδα να οργανώσει και να υλοποιήσει μια διδασκαλία διάρκειας μιας διδακτικής ώρας, που να έχει ως στόχο την παρουσίαση των κύριων σημείων μιας συγκεκριμένης ενότητας. Κάθε ομάδα είχε την πλήρη ελευθερία ως προς το τι θα παρουσιάσει και με ποιον τρόπο θα επιλέξει να το κάνει. Στο τέλος κάθε διδασκαλίας, οι υπόλοιποι μαθητές του τμήματος έκριναν και αξιολόγησαν τη διδασκαλία που παρακολούθησαν. Οι ομάδες ήταν των 3 ή 4 μαθητών και πραγματοποιήθηκαν συνολικά 18 διδασκαλίες, 6 σε κάθε τμήμα.

Στόχος της διδακτικής παρέμβασης ήταν να διαμορφώσει συνθήκες που ευνοούν την επικοινωνία και συνεργασία των μαθητών, να αναδείξει το στοιχείο του καταμερισμού εργασίας και της ανάληψης ρόλων, αλλά και να δώσει τη δυνατότητα στους μαθητές να δράσουν δημιουργικά.

Υπό το πρίσμα της θεωρίας δραστηριότητας, κάθε μία από τις 18 διδασκαλίες τη θεωρούμε ως μια συλλογική δραστηριότητα όλου τμήματος. Επίσης, την κάθε ομάδα που ανέλαβε μια συγκεκριμένη διδασκαλία τη βλέπουμε ως μια εν δυνάμει δυναμική δημιουργική ομάδα.

ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Η *Θεωρία Δραστηριότητας* (Activity Theory) βασίζεται στο έργο του Vygotsky και κυρίως του Leont’ev. Σύμφωνα με τον Vygotsky (1978) η ανθρώπινη δραστηριότητα είναι σκόπιμη και πραγματοποιείται με σειρά ενεργειών και κάθε ενέργεια μέσω της χρήσης «διαμεσολαβητικών εργαλείων», τα οποία μπορεί να είναι φυσικά ή ψυχολογικά.

Ο Leont’ev (1978, 1981) περιέγραψε τη δραστηριότητα ως μια ολιστική, υψηλού επιπέδου, συνήθως συνεργατική, κατασκευή, η οποία δεν πρέπει να συγχέεται με τις καθημερινές απλές δραστηριότητες. Έκανε διάκριση μεταξύ δραστηριότητας (activity), ενεργειών (actions) και λειτουργιών (operations).

Ο Engeström (1987) προτείνει το *σύστημα συλλογικής δραστηριότητας*, ένα μοντέλο που προσφέρει μια ολιστική, περιεκτική και σαφή ερμηνεία της συλλογικής δραστηριότητας που θέλουμε να περιγράψουμε.

Ο Robinson (2011) υποστηρίζει ότι η δομή και η οργανωτική κουλτούρα της μαζικής εκπαίδευσης, βασισμένες στις αρχές της τυποποίησης και της συμμόρφωσης, στην πράξη καταπνίγουν τις βασικές συνθήκες για την ανάπτυξη της δημιουργικότητας. Μείζον ζήτημα στην εκπαίδευση είναι να διευκολύνουμε τη διαμόρφωση και ανάδειξη *δυναμικών δημιουργικών ομάδων*.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

- Τα μέλη κάθε ομάδας επικοινωνούσαν μέσω συναντήσεων και μέσω των μέσων κοινωνικής δικτύωσης. Το επίπεδο συνεργασίας που ανέπτυξαν οι 16 από τις 18 ομάδες ποικίλει, στις 4 από αυτές ήταν υψηλό και η κατανομή των ρόλων αρκετά λειτουργική. Στις υπόλοιπες 2 ομάδες δεν υπήρξε καμία επικοινωνία και καθόλου συνεργασία.
- Οι 3 από τις 16 ομάδες παρουσίασαν τα κύρια στοιχεία της ενότητας χωρίς σοβαρές ελλείψεις και με αρκετά κατανοητό τρόπο. Στις υπόλοιπες ομάδες παρατηρήσαμε ελλείψεις, από λίγες έως πολλές και σημαντικές
- Στη διδακτική πρακτική όλων των ομάδων κυριάρχησε το φορμαλιστικού τύπου σχήμα: «Ορισμός – Θεωρία – Ασκήσεις». Επίσης, παρατηρήσαμε ότι όλες οι ομάδες επέλεξαν ασκήσεις με αυστηρά μαθηματικό πλαίσιο, δεν υπήρξε καμία περίπτωση προβλήματος με πραγματικό πλαίσιο.
- Η συμμετοχή των μαθητών στην άσκηση της κριτικής ήταν μεγάλη. Τις αξιολογήσεις τους θα τις χαρακτηρίζαμε αυστηρές, παρατηρήσαμε δε, ότι στην πλειοψηφία τους αξιολογούσαν τον τρόπο κίνησης και εκφοράς λόγου των συμμαθητών τους και όχι τόσο το περιεχόμενο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Engeström, Y. (1987). *Learning by expanding: An Activity Theoretical approach to developmental research.* Helsinki: Orienta-Konsultit.

Leont'ev, A. N. (1978). *Activity, Consciousness, and Personality*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Leont'ev, A. N. (1981). *Problems of the development of the mind.* Moscow: Progress.

Robinson, K. (2011). *Άλλη λογική - Για μια επανάσταση δημιουργικότητας.* Αθήνα: Εκδόσεις εν πλω.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

ΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ΣΥΝΑΝΤΟΥΝ ΤΟ ΘΕΑΤΡΙΚΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ: ΤΑ «ΚΟΛΛΗΤΟ-ΣΚΕΤΣΑΚΙΑ»

Κατσομήτρος Σωτήριος

Δάσκαλος, Μεταπτυχιακός φοιτητής «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών», ΕΚΠΑ

sotkatso@gmail.com

Το παρόν διδακτικό σενάριο αποτελεί μια σύγχρονη και καινοτόμα διδακτική προσέγγιση της διδακτικής των γεωμετρικών σχημάτων στην Β’ δημοτικού, αξιοποιώντας το θεατρικό παιχνίδι ως κύρια διδακτική τεχνική διδασκαλίας. Στην παρούσα διδακτική πρόταση, δύναται να προκύψουν πολλαπλά γνωστικά και ψυχο-παιδαγωγικά οφέλη για τους μαθητές μέσα από την διαθεματική προσέγγιση της έννοιας των γεωμετρικών σχημάτων, πάντα εντός ενός παιγνιώδους πλαισίου.

ΤΟ ΘΕΑΤΡΙΚΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Κατά τον Fischbein (1993), κάθε γεωμετρικό σχήμα έχει εννοιολογικά χαρακτηριστικά και ταυτόχρονα αποτελεί και μια εικόνα, ένα στιγμιότυπο. Αυτή η αλληλεπίδραση μεταξύ του εννοιολογικού και του «οπτικού» χαρακτήρα των γεωμετρικών αντικειμένων χαρακτηρίζει γενικοτερα τις γεωμετρικές δραστηριότητες (Τάτσης & Γούτση, 2011). Το θεατρικό παιχνίδι ως διδακτική τεχνική προσφέρεται στην σύνδεση της έννοιας των γεωμετρικών σχημάτων με την καθημερινότητα των μαθητών, με αποτέλεσμα την καλύτερη κατανόηση της μαθηματικής έννοιας μέσα από το παιχνίδι. Μέσω αυτού, τα γεωμετρικά σχήματα σωματοποιούνται και παράλληλα η δυσκολία των μαθητών να αναγνωρίσουν γεωμετρικά σχήματα, όταν αυτά δεν έχουν μια συγκεκριμένη στερεοτυπική μορφή (Κολέζα, 2000), μειώνεται με τον καλύτερο δυνατό τρόπο, εφόσον συνδέεται κατάλληλα ο εννοιολογικός με τον οπτικό χαρακτήρα των γεωμετρικών σχημάτων.

Τα «Κολλητό-σκετσάκια»

Στόχοι της δραστηριότητας είναι οι μαθητές αφενός να αναγνωρίζουν και να ταξινομούν τα γεωμετρικά σχήματα, να διακρίνουν τα βασικά τους γεωμετρικά γνωρίσματα και να τα συνδέουν με αντικείμενα του περιβαλλοντός τους και αφετέρου να επεκτείνουν την συνεργατική και επικοινωνιακή τους δεξιότητα από τη συμμετοχή τους σε ομαδικές δραστηριότητες και παράλληλα να αναπτύξουν ικανότητες αυτενέργειας και συλλογικής ευθύνης.

Η δραστηριότητα με βάση τους παραπάνω στόχους και την δομή του θεατρικού παιχνιδιού (Βουτσινά, 1991) αποτελείται από τέσσερις φάσεις, στις οποίες η μετάβαση είναι ομαλή και όχι διακοπτόμενη. Ειδικότερα, στην πρώτη φάση (φάση απελευθέρωσης), οι μαθητές μέσω παντομίμας και σωματικής έκφρασης (π.χ. σωματοποίηση σχημάτων ανά ομάδες μαθητών) επιτυγχάνουν την κατανόηση των γεωμετρικών ιδιοτήτων στο επίπεδο και την σύνδεση των γεωμετρικών σχημάτων με καθημερινά αντικείμενα. Στην δεύτερη φάση (φάση αναπαραγωγής), οι μαθητές καλούνται να αναγνωρίσουν, περιγράψουν και ταξινομήσουν τα γεωμετρικά σχήματα με την βοήθεια εποπτικών μέσων (π.χ. κατασκευές προσωπείων με χαρτόνια γεωμετρικών σχημάτων) και αυτοσχεδιαστικών μονολόγων. Τέλος, ακολουθεί η θεατρική δράση (τρίτη φάση) ενώ η ανακαφαλαίωση της θεωρίας για τα γεωμετρικά σχήματα μαζί με την επίλυση των αποριών περιλαμβάνονται στην τέταρτη φάση (φάση ανάλυσης), η οποία έχει ανατροφοδοτικό χαρακτήρα.

Κλείνοντας, εξαιτίας του παιγνιώδη χαρακτήρα του προτεινόμενου σεναρίου, ενεργοποιείται το ενδιαφέρον των μαθητών, εφόσον η οπτική αναπαράσταση των γεωμετρικών αντικειμένων σωματοποιείται (Ιωακειμίδης, 2012). Αναμένονται κυρίως δυσκολίες ως προς την διαχείριση του χρόνου υλοποίησης, αλλά και ως προς τον συντονισμό των ομάδων των μαθητών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Βουτσινά, Κ. (1991). *Το θεατρικό παιχνίδι.* Αθήνα. Εκδόσεις Δίπτυχο.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.

Ιωακειμίδης, Π. (2012). Όταν η θεατρική παιδεία συναντά τα μαθηματικά: μια πρόταση εκπαιδευτικού σεναρίου με δράσεις Θεατρικής Αγωγής για τηδιδασκαλία της ενότητας «Τα γεωμετρικά σχήματα». Στα Πρακτικά *του 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου του Ελληνικού Ινστιτούτου Εφαρμοσμένης Παιδαγωγικής και Εκπαίδευσης (ΕΛΛ.Ι.Ε.Π.ΕΚ.),* Αθήνα.

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών.* Αθήνα. Εκδόσεις Leader Books.

Τάτσης, Κ. & Γούτση, Θ. (2011). Το παιχνίδι «σπασμένο τηλέφωνο» στο μάθημα της γεωμετρίας. Στο Μ. Καδρυμίδου, Ξ. Βαμβακούση (επιμ.). *Πρακτικά του 4ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.* (σελ. 479-487). Ιωάννινα: ΕΝΕΔΙΜ

ERATOSTHENES @ SCHOOL: ΜΕΘΟΔΟΣ CLIL ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

Κοταρίνου Παναγιώτα, Φλώρου Παρασκευή

Καλλιτεχνικό Γυμνάσιο Γέρακα με Λυκειακές τάξεις

pkotarinou@uth.gr, emilianna2008@gmail.com

Ο στόχος μας στην εργασία αυτή είναι να συζητήσουμε την εμπλοκή μιας τάξης εφήβων μαθητών στο διαθεματικό project, 'Eratosthenes @ school' που πραγματοποιήθηκε στα μαθήματα Αγγλικής Γλώσσας και Γεωμετρίας με βάση τις αρχές της προσέγγισης CLIL (Content and Language Integrated Learning), το οποίο είχε βασικό στόχο τη δημιουργία κινήτρων για ενεργό συμμετοχή των μαθητών στο μάθημα της Γεωμετρίας.

Η προσέγγιση CLIL 'Ολοκληρωμένη Εκμάθηση Περιεχομένου και Γλώσσας' αποτελεί μια εκπαιδευτική προσέγγιση με διπλό σημείο εστίασης, τη διδασκαλία τόσο του περιεχομένου όσο και της γλώσσας (Mehisto, Marsh, & Frigols, 2008). Όσον αφορά στη διδασκαλία των μαθηματικών με βάση τις αρχές της προσέγγισης CLIL οι σχετικές έρευνες αναδεικνύουν τα μαθησιακά οφέλη που προκύπτουν από τη διδασκαλία τους σε μια γλώσσα διαφορετική από τη μητρική (Surmont, Struys, Van Den Noort, & Van De Craen, 2016; Ouazizi, 2016) καθώς και τη δημιουργία μαθησιακού περιβάλλοντος που προσφέρει κίνητρα για τους μαθητές (Hoffmannová και Novotná, 2003).

Το project στην πράξη: Οι διδασκαλίες πραγματοποιήθηκαν σε τμήμα 26 μαθητών/τριών Α΄ Λυκείου στο Καλλιτεχνικό Λύκειο Γέρακα το σχολ. έτος 2015-2016 και είχαν διάρκεια 11 διδακτικές ώρες (4 στο μάθημα της Γεωμετρίας και 7 στο μάθημα Αγγλικής Γλώσσας). Η αξιολόγηση του project πραγματοποιήθηκε με ένα ερωτηματολόγιο το οποίο συμπλήρωσαν οι μαθητές με ανοιχτές ερωτήσεις αναφορικά με τις απόψεις τους σχετικά με τις διδακτικές πρακτικές, καθώς επίσης με έναν αριθμό ημιδομημένων συνεντεύξεων, με στόχο την καταγραφή των εμπειριών των μαθητών. Μαθησιακοί στόχοι για το μάθημα της Γεωμετρίας ήταν: να γνωρίσουν οι μαθητές τη μέτρηση της γης από τον Ερατοσθένη και να πραγματοποιήσουν τη δική τους μέτρηση της γης, ενώ για το μάθημα της Αγγλικής Γλώσσας ήταν η εκμάθηση λεξιλογίου από τη Γεωμετρία, η ακουστική εξάσκηση μέσω αυθεντικού υλικού από βίντεο, η χρήση του προφορικού λόγου για έναν επικοινωνιακό σκοπό μέσω τεχνικών Δράματος και η εξάσκηση στην παραγωγή γραπτού λόγου σε ηλεκτρονικό περιβάλλον μέσω χρήσης padlet.

Στο μάθημα της Γεωμετρίας : Διδασκαλία με καθοδηγούμενη διερεύνηση από τους μαθητές για τον υπολογισμό της γωνίας που σχηματίζουν δύο τόποι που βρίσκονται στον ίδιο μεσημβρινό, με το κέντρο της γης, με τη βοήθεια των γωνιών πρόσπτωσης των ακτίνων του ηλίου. Σύνδεση του προβλήματος αυτού με το πρόβλημα που έθεσε ο Ερατοσθένης, μέσα από εκφραστική ανάγνωση διαλόγων από το μυθιστόρημα του Denis Guedj “Τα αστέρια της Βερενίκης” από τρεις μαθητές και την εκπαιδευτικό.

Στο μάθημα της Αγγλικής γλώσσας: Νοητικός χάρτης με έννοιες και όρους από τη Γεωμετρία και τη Γεωγραφία. Μελέτη κειμένων σχετικά με τον Ερατοσθένη, παρουσίαση σχετικού εκπαιδευτικού βίντεο, και ενός padlet (διαδικτυακή εφαρμογή με τη μορφή ηλεκτρονικού ‘τοίχου’). Μέτρηση από τους μαθητές, την ημέρα της εαρινής ισημερίας της γωνίας πρόσπτωσης των ακτίνων του ηλίου στο προαύλιο του σχολείου τους και στη συνέχεια με τη βοήθεια κατάλληλων προγραμμάτων στον υπολογιστή, υπολογισμός της περιμέτρου της γης. Παρουσίαση στην Αγγλική γλώσσα της μέτρησης της γης από τον Ερατοσθένη από τους μαθητές της Α Λυκείου σε μαθητές της Β τάξης Λυκείου, μέσα από τεχνικές Δραματικής τέχνης στην Εκπαίδευση.

Αποτελέσματα: Η προσέγγιση CLIL αποτέλεσε μια εναλλακτική διδακτική προσέγγιση προς την αναίρεση τυποποιημένων πρακτικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών οι οποίες επέτρεψαν στους μαθητές να επικοινωνήσουν μαθηματικά μέσα από τη Αγγλική Γλώσσα, να προσεγγίσουν τις μαθηματικές έννοιες βιωματικά, δίνοντας ταυτόχρονα ισχυρά κίνητρα για μια ενεργή συμμετοχή τους στα μαθήματα αυτά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Hofmannová, M., & Novotná, J. (2003). Attitudes towards teaching mathematics in English in the Czech Republic. In *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education*. Eds. A. Gagatsis and S. Papastavridis. Athens: Hellenic Mathematical Society, Cyprus Mathematical Society (pp. 371-375).

Mehisto, P., Marsh, D., & Frigols, M. J. (2008). *Uncovering CLIL: Content and language integrated learning in bilingual and multilingual education*. Oxford, UK: Macmillan.

Ouazizi, K. (2016). The Effects of CLIL Education on the Subject Matter (Mathematics) and the Target Language (English). *Latin American Journal of Content & Language Integrated Learning, 9*(1), 110-137.

Surmont, J., Struys, E., Van Den Noort, M. & Van De Craen, P. (2016) The effects of CLIL on mathematical content learning: A longitudinal study. *Studies in Second Language Learning and Teaching*, *6*(2), 319-337.

ΞΕΦΕΥΓΟΝΤΑΣ ΑΠΟ ΤΟ ΠΑΡΑΔΟΣΙΑΚΟ ΜΑΘΗΜΑ

Κούκιου Αλέκα, Σωτηροπούλου Δήμητρα

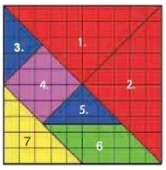
1ο Γυμνάσιο Νέας Ιωνίας,7ο Γυμνάσιο Αμαρουσίου

kalex@math.uoa, sotiropouloudimitra1@gmail.com

Η μάθηση μέσω δραστηριοτήτων έχει απασχολήσει αρκετά την μαθηματική κοινότητα. Στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών (2011) η έννοια της δραστηριότητας χαρακτηρίζεται ως μια έννοια που περιλαμβάνει την ενεργό δράση των εμπλεκόμενων ατόμων τα οποία έχουν ένα κίνητρο και ένα στόχο να πραγματοποιήσουν. Το παιχνίδι θα μπορούσε να θεωρηθεί επίσης ένα είδος δραστηριότητας που επιφέρει θετικά αποτελέσματα. Σύμφωνα με τον Feldman (2009), το παιχνίδι συνεισφέρει στην κοινωνική, συναισθηματική και γνωστική ανάπτυξη των μαθητών. Επιπλέον, προκαλεί το ενδιαφέρον προσφέροντας συγχρόνως νόημα και, μάλιστα, δια μέσου δράσης και άμεσης εφαρμογής (Ball, 1992). Η ενασχόληση με παιχνίδια στα μαθηματικά επιτρέπει στα παιδιά να αντιμετωπίσουν και να υπερνικήσουν τους φόβους τους για τα μαθηματικά, υιοθετώντας θετική στάση προς αυτά. Οι παρεμβάσεις που πραγματοποιήσαμε στα σχολεία μας, στηρίχθηκαν στην ομαδοσυνεργατική μάθηση η οποία επιφέρει θετικές επιπτώσεις στον κοινωνικό, ψυχολογικό και γνωστικό τομέα της ανάπτυξης των παιδιών (Ματσαγγούρας, 2001).

Ακολουθούν μερικές από τις δραστηριότητες που εφαρμόσαμε στην τάξη.

-Τάγκραμ . Οι μαθητές δημιουργούν το διπλανό τετράγωνο σε χαρτί μιλιμετρέ, στην συνέχεια το κόβουν σε κομμάτια και δημιουργούν με τα κομμάτια διάφορα σχέδια. Αναπτύσσουν έτσι ικανότητες παρατηρητικότητας, αντίληψης χώρου.



1	2	3	4	α
3	5	7	;	;

-Το παιχνίδι «μάντεψε τον χαμένο αριθμό». Πώς θα βρω τον επόμενο αριθμό, ποιος κανόνας παράγει αυτή την διαδικασία; Πώς θα γενικεύσω; Όλο το παιχνίδι είναι μια προετοιμασία για το πέρασμα στην αλγεβρική αναπαράσταση και στην συνάρτηση.

-Το παιχνίδι με τα ζάρια. Με την ένδειξη του μπλε ζαριού η κάθε ομάδα κερδίζει πόντους και με την ένδειξη του κίτρινου ζαριού η κάθε ομάδα χάνει πόντους. Κερδίζει η ομάδα με τους περισσότερους πόντους. Το «+» και το «-» δεν είναι δύο αφηρημένα μαθηματικά σύμβολα αλλά δηλώνουν κερδισμένους και χαμένους πόντους αντίστοιχα. Οι μαθητές οδηγούνται μέσα από το παιχνίδι στη διατύπωση κανόνων που ορίζουν τον τρόπο με τον οποίο βρίσκεται το άθροισμα των ρητών.

-<u>Εύρεση αξόνων συμμετρίας και κέντρου συμμετρίας σε σημαίες κρατών</u>. Οι μαθητές τμήματος Α΄ γυμνασίου χωρίζονται σε δύο ομάδες και παρουσιάζουν στην τάξη σημαίες που έχουν άξονες και κέντρο συμμετρίας. Κερδίζει η ομάδα με τα περισσότερα ευρήματα. Οι μαθητές αναπτύσσουν την δεξιότητα της αναγνώρισης σχημάτων με άξονες – κέντρο συμμετρίας

-<u>Κατασκευή με κύβους και ορθογώνια παραλληλεπίπεδα</u> ζωντανεύοντας την ταυτότητα $(α+β)^3=α^3+3\ α^2\ β+3αβ^2\ +β^3$.Δύο ομάδες μαθητών φτιάχνουν από χαρτόνι κύβους 10x15cm, τρία ορθογώνια παραλληλεπίπεδα 10x10x15cm καθώς και τρία ορθογώνια παραλληλεπίπεδα 10cm,15cm,15cm. Κερδίζει η ομάδα που θα «στήσει» πιο γρήγορα τον κύβο της με ακμή 25cm!

-<u>Συμμετοχή σε πανελλήνιους διαγωνισμούς και αγώνες</u>. Μαθητές και από τα δυο σχολεία συμμετείχαν στο «μαθηματικό διαγωνισμό» που διοργάνωσαν τα Αρσάκεια σχολεία, μια ημερήσια εκδήλωση που περιείχε αγωνίσματα με γρίφους, με κλασικά μαθηματικά, παιχνίδια-μετρήσεις στην ύπαιθρο. Οι μαθητές ξεφεύγουν από τα στενά όρια του σχολείου, και μέσα από την συνεργασία και την άμιλλα τα μαθηματικά γίνονται γιορτή.

-<u>Κατασκευή με σπίρτα εμβαδών</u> που να έχουν συγκεκριμένες τιμές με μονάδα μέτρησης το ένα τετραγωνάκι. Η ομάδα που θα φτιάξει τα περισσότερα σχήματα κερδίζει. Στόχος είναι να κατανοήσουν την έννοια του εμβαδού και ότι αυτό εξαρτάται από την μονάδα μέτρησης κάθε φορά.

Οι παρεμβάσεις που αναπτύξαμε είχαν στόχο να συμβάλλουν στην εξάσκηση της μνήμης, στην ικανότητα πρόβλεψης και εύρεσης σχέσεων, στην όξυνση της συγκέντρωσης της προσοχής και της παρατηρητικότητας, στην αντίληψη του χώρου, στην υπολογιστική ικανότητα. Κυρίως όμως θέλαμε να κεντρίσουμε το ενδιαφέρον των μαθητών και μέσα από παιγνιώδεις διαδικασίες να «κάνουν» μαθηματικά και τελικά να αγαπήσουν τα μαθηματικά. Πιστεύουμε ότι η συνεργασία και το παιχνίδι είναι ένας πολύ καλός τρόπος ώστε ο μαθητής να κατανοεί και να εμπεδώνει τη μαθηματική γνώση. Ένας τρόπος να φέρουμε τους μαθητές πίσω στο «παιχνίδι» της μάθησης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ball, D.L. (1992). Magical hopes: manipulatives and the reform of math education. *American Educator*, *16*, 14-18.

Feldman, R. S. (2009). *Εξελικτική Ψυχολογία: Δια βίου Μάθηση*. Θεσσαλονίκη: Gutenberg.

Ματσαγγούρας Η. (2001). *Στρατηγικές διδασκαλίας: η κριτική σκέψη στη διδακτική πράξη.* Αθήνα: Gutenberg.

Η ΣΚΑΛΑ ΠΟΥ ΓΛΙΣΤΡΑ

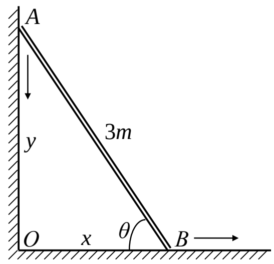
Κουλούρης Ανδρέας

3ο Γενικό Λύκειο Γαλατσίου

akoulouris13@gmail.com

Η παρούσα διδακτική πρόταση αναφέρεται σε μια ωριαία διδασκαλία στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου, στο σχολικό εργαστήριο με τη βοήθεια του λογισμικού GeoGebra. Το συγκεκριμένο μάθημα αφορά σε μια άσκηση του σχολικού βιβλίου (σελ. 127, άσκ. 7) στην ενότητα του ρυθμού μεταβολής:

Μία σκάλα μήκους 3m είναι τοποθετημένη σ' έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλιστράει στο δάπεδο με ρυθμό 0,1 m/sec. Τη χρονική στιγμή t_0, που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 2,5m, να βρείτε:
***i)** Τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ.*
***ii)** Την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή Α της σκάλας.*



Η διδασκαλία υλοποιήθηκε τον Ιανουάριο του 2017 στο εργαστήριο των υπολογιστών του 3ου Λυκείου Γαλατσίου, σε δύο τμήματα, ένα του Θετικού και ένα του Οικονομικού Προσανατολισμού, με 13 και 23 μαθητές αντίστοιχα, στο πλαίσιο επιμορφωτικών συναντήσεων, παρουσία της σχολικής συμβούλου και μαθηματικών των όμορων σχολείων.

Δόθηκε στους μαθητές ένα αρχείο του λογισμικού GeoGebra με την προσομοίωση της κίνησης της σκάλας, το οποίο είναι διαθέσιμο στο διαδίκτυο στην ηλεκτρονική διεύθυνση https://ggbm.at/gf8Turj8 και φύλλο εργασίας, διαθέσιμο στην ηλεκτρονική διεύθυνση https://drive.google.com/open?id=0B_U2mv4I9W2bY29TR0lSR0xJUFU
Οι μαθητές εργάστηκαν σε ομάδες των δύο με έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή, χειριζόμενοι οι ίδιοι το αρχείο του λογισμικού, διερευνώντας το φαινόμενο και απαντώντας στις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας. Ο εκπαιδευτικός, σε μια τέτοια διδακτική προσέγγιση, εγκαταλείπει τον ρόλο της αυθεντίας και γίνεται συνεργάτης με τους μαθητές του στην κατάκτηση της γνώσης, περνώντας από τις ομάδες, διευκολύνοντας και ενθαρρύνοντας τους μαθητές, όπου και όταν χρειάζεται (Κυνηγός, 2010).

Η διδασκαλία του ρυθμού μεταβολής με τον παραδοσιακό τρόπο δεν είναι δυνατόν να παρουσιάσει τη δυναμική εξέλιξη της κίνησης της σκάλας, αλλά τη μελετά στατικά, μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, ενώ το λογισμικό GeoGebra δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να παρατηρήσουν τη δυναμική εξέλιξη του φαινομένου και τους ρυθμούς μεταβολής των μεγεθών καθ' όλη τη χρονική διάρκεια της κίνησης της σκάλας. Οι μαθητές, σύμφωνα με το φύλλο εργασίας, καλούνται να διατυπώσουν μια εικασία για το είδος των κινήσεων των άκρων της σκάλας, αρχικά δίχως να τους δοθεί η εκφώνηση της άσκησης και δίχως τη βοήθεια των μετρήσεων που παρέχει το λογισμικό. Στη συνέχεια καλούνται να αξιοποιήσουν τα εργαλεία μέτρησης του λογισμικού και να ελέγξουν την εικασία τους. Ακόμη τους ζητείται να απαντήσουν στην άσκηση του σχολικού βιβλίου παρατηρώντας τις μετρήσεις που παρουσιάζονται στην οθόνη του λογισμικού όταν μετακινούν το δρομέα του χρόνου. Τέλος, τους ζητείται να συμπληρώσουν έναν πίνακα με τις τιμές των ρυθμών μεταβολής των μεγεθών ανά 5 δευτερόλεπτα κατά τη διάρκεια της κίνησης της σκάλας έτσι, ώστε να διαπιστώσουν, με βάση τις μετρήσεις, ότι το άνω άκρο κινείται με επιτάχυνση, η οποία όμως δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται με έναν μη κανονικό-ομαλό τρόπο, κίνηση την οποία συναντούν για πρώτη φορά.

Στη συνέχεια η άσκηση επιλύθηκε με τον παραδοσιακό τρόπο και, σε συνδυασμό με την πρότερη διερεύνηση των μαθητών, διαπιστώθηκε ότι πέρα από την ποιοτική εκτίμηση της αύξησης ή της μείωσης ενός μεγέθους (αργή ή γρήγορη), ο υπολογισμός της παραγώγου δίδει με απόλυτη ακρίβεια τον ρυθμό αύξησης ή μείωσης όλων των μεγεθών για κάθε χρονική στιγμή κατά τη διάρκεια της δυναμικής εξέλιξης ενός φαινομένου.

Εκτός από τη δυνατότητα παρατήρησης και διερεύνησης της δυναμικής εξέλιξης του φαινομένου που παρέχει το λογισμικό, ένα εξίσου σημαντικό πλεονέκτημα του παρόντος διδακτικού σχεδιασμού είναι η δυνατότητα που δίδεται σε κάθε μαθητή *να ανταλλάσσει απόψεις με τον συμμαθητή του και να διατυπώνει τις σκέψεις και τους προβληματισμούς του καθ' όλη τη διάρκεια της διδακτικής ώρας,* δίχως να είναι υποχρεωμένος να παρακολουθεί παθητικά την παρουσίαση του φαινομένου από τον εκπαιδευτικό και να περιμένει τη σειρά του, σηκώνοντας το χέρι και παίρνοντας άδεια, για να απαντήσει σε κάποιο από τα ερωτήματα που τίθενται. Η όλη δραστηριότητα είναι ιδιαίτερα επωφελής για τη διαδικασία της μάθησης, ενώ ταυτόχρονα βελτιώνεται η ικανότητά των μαθητών για συνεργασία, καθώς και η στάση τους για τα Μαθηματικά και το σχολείο γενικότερα (Κυνηγός, 2010).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Κυνηγός, Χ. (Επιμ.) (2010). Υλικό για την Επιμόρφωση των Εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης. Τεύχος 4, Κλάδος ΠΕ03 (2η έκ.). Πάτρα: ΙΤΥ

Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟΥΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ

Κωνσταντινίδου Παναγιώτα[1],Ρουσίδου Αθανασία[2]

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

[1]Penyk1@teemail.gr, [2]arousido@eled.duth.gr

ΠΡΟΤΑΣΗ/ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗ

Σκοπός της παρέμβασης ήταν να διερευνηθούν οι ιδέες των μαθητών του δημοτικού σχολείου για τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, εστιάζοντας στον τρόπο που εξελίσσεται ο μαθηματικός τους λόγος μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες. Επίσης, αναζητήθηκε ο ρόλος των χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων, σε αυτή την εξελικτική διαδικασία. Οι μετασχηματισμοί φαίνεται να καλλιεργούν σημαντικές χωρικές δεξιότητες (Ng & Sinclair, 2015). Ωστόσο, λόγω του δυναμικού τους χαρακτήρα, είναι δύσκολα κατανοητές για τους μικρούς μαθητές. Για να διερευνηθεί η δυναμική φύση των μετασχηματισμών δημιουργήθηκαν κατάλληλες δραστηριότητες και επιλέχθηκαν εργαλεία, όπως το Geometer's Sketchpad. Επιπρόσθετα, η παρέμβαση πλαισιώθηκε με έργα τέχνης, καθώς οι μετασχηματισμοί συνδέονται με την τέχνη και νοηματοδοτούνται μέσα από αυτήν. Το θεωρητικό πλαίσιο στηρίχτηκε σε δύο θεωρητικές προσεγγίσεις. Την *επικοινωνιογνωστική* προσέγγιση (Sfard, 2008), σύμφωνα με την οποία ο λόγος δεν εκλαμβάνεται ως τρόπος έκφρασης της σκέψης, αλλά αποτελεί την ίδια τη διαδικασία της σκέψης και τη σημειωτική διαμεσολάβηση, που περιγράφει το ρόλο των εργαλείων στην εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης (Bussi & Mariotti, 2008).

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Η παρέμβαση υλοποιήθηκε στον όμιλο μαθηματικών του 7^{ου} Δημοτικού Σχολείου Αλεξανδρούπολης. Συμμετείχαν 8 μαθητές Ε' και ΣΤ' τάξης. Οι μαθητές είχαν έρθει σε επαφή με την έννοια του μοτίβου και την κατοπτρική συμμετρία, μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια των προηγούμενων τάξεων, στα οποία ωστόσο δεν διερευνάται η δυναμική τους φύση. Η παρέμβαση υλοποιήθηκε σε 7 συναντήσεις διάρκειας 1,5 ώρας η κάθε μία. Χωρίστηκε σε 3 φάσεις. Η φάση Α ολοκληρώθηκε σε τρεις συναντήσεις ενώ οι φάσεις Β και Γ σε δύο συναντήσεις η κάθε μία. Σε όλες τις δραστηριότητες οι μαθητές δούλεψαν σε ομάδες. Ο ρόλος των δύο ερευνητών ήταν εκπαιδευτικός και ερευνητικός ταυτόχρονα. Διευκόλυναν τη διαδικασία, παρεμβαίνοντας όπου ήταν αναγκαίο για να βοηθήσουν τους μαθητές να επικοινωνήσουν τις ιδέες τους. Στη φάση Α, στόχος ήταν να διερευνηθούν οι αρχικές ιδέες των μαθητών αναφορικά με τις συμμετρίες μέσα από εικόνες των Ξυστών στο Πυργί της Χίου. Στην επόμενη συνάντηση, στόχος ήταν να στραφεί η προσοχή των μαθητών στους μετασχηματισμούς και στις παραμέτρους τους. Δόθηκε διάστικτο χαρτί που απεικόνιζε ένα σπίτι και τη σκιά του και τους ζητήθηκε να περιγράψουν τον τρόπο που θα μετακινηθεί το σπίτι για να πέσει επάνω στη σκιά του. Στην τρίτη συνάντηση οι μαθητές κλήθηκαν να αναπαραγάγουν τα μοτίβα των Ξυστών στο περιβάλλον του GSP, ώστε να διαπιστωθεί εάν θα άλλαζε ο λόγος τους στο δυναμικό περιβάλλον. Στη φάση Β, οι μαθητές αναζήτησαν τους μετασχηματισμούς και τις παραμέτρους τους στα έργα του Escher και εξοικειώθηκαν με την τεχνική του, ώστε να τη χρησιμοποιήσουν στα δικά τους σχέδια. Στην φάση Γ, οι μαθητές κλήθηκαν να εφαρμόσουν τις ιδέες τους για τους μετασχηματισμούς κατασκευάζοντας τα δικά τους σχέδια στο GSP.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ο λόγος των μαθητών για τους μετασχηματισμούς που αρχικά υποδήλωνε στατικότητα, φάνηκε να γίνεται περισσότερο δυναμικός. Οι δραστηριότητες με το χειραπτικό υλικό αποκάλυψε την ανάγκη τους να χρησιμοποιήσουν το σώμα τους και εργαλεία, όπως διαφανές χαρτί, για να διαχειριστούν τη δυναμική φύση των μετασχηματισμών, ενώ χρησιμοποίησαν ατομικούς τρόπους έκφρασης που συνδέονταν με τον τρόπο που αλληλεπιδρούσαν με το εργαλεία. Το περιβάλλον του GSP, τους βοήθησε να εμπλουτίσουν το λόγο τους με περισσότερες τυπικές μαθηματικές εκφράσεις και να επικεντρώνονται περισσότερο στους μετασχηματισμούς και τις παραμέτρους τους. Τέλος, η πλαισίωση της τέχνης φάνηκε να κινητοποιεί τους μαθητές ειδικά στο τέλος όπου δημιούργησαν τα δικά τους σχέδια.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bussi, M.B., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, M.Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, & D. Tirosh (Eds.). *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp.746-783). New York: Routledge.

Ng, O. L., & Sinclair, N. (2015). Young children reasoning about symmetry in a dynamic geometry environment. *ZDM*, 47(3), 421-434.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕ ΕΜΠΝΕΥΣΗ ΙΒ

Λιανaντωνάκης Νικόλαος

Γενικό Λύκειο Διεθνούς Κέντρου Σπουδών Σχολής Μωραΐτη

NLianantonakis@moraitis.edu.gr

Η παρουσίαση αφορά τις ερευνητικές εργασίες της Α΄ Λυκείου του Διεθνούς Κέντρου Σπουδών της Σχολής Μωραΐτη την χρονιά 2016 - 2017. Στο Α΄τετράμηνο εκπονήθηκαν εργασίες στο πλαίσιο της Στατιστικής. Στο δεύτερο τετράμηνο, με αφετηρία το προσδοκώμενο κέρδος στα τυχερά παιχνίδια, αναζητήθηκαν οι συνδέσεις με το χώρο των Πιθανοτήτων. Το ερευνητικό εγχείρημα του δευτέρου τετραμήνου καταγράφηκε σε video το οποίο επιμελήθηκαν εξ ΄ολοκλήρου οι μαθητές.

Οι βασικοί στόχοι που τέθηκαν εξ' αρχής συνοψίζονται ως εξής:

α) Δημιουργία ερευνητικών εργασιών **εντός τάξης** με **πρωτογενείς διαδικασίες** (Ματσαγγούρας, 2011), β) Γνωριμία με τη Στατιστική Μοντελοποίηση (Gal, & Garfield, 1997) και τις Πιθανότητες, γ) Ορολογία στα αγγλικά και συγγραφή της εργασίας στα αγγλικά, δ) Χρήση λογισμικού για μαθηματικά (Excel, Graph).

Οι έννοιες που συζητήσαμε με τα παιδιά, ώστε να εφοδιαστούν με το απαραίτητο θεωρητικό κομμάτι, αφορούσαν τρόπους συλλογής και οργάνωσης δεδομένων, μέτρα κεντρικής τάσης μέτρα διασποράς και γραμμές τάσης (Cirrito, 1997). Επίσης, συζητήθηκαν και διαδικασίες ελέγχου υποθέσεων (Στατιστικός έλεγχος του χ^2). Η έμφαση ήταν στις ερμηνείες και λιγότερο στα υπολογιστικά κομμάτια. Σε επίπεδο διαγραμμάτων ασχοληθήκαμε με διαγράμματα τύπου Pie chart, Boxplot και διαγράμματα διασποράς. Επίσης, αφιερώσαμε ένα δίωρο για μια πρώτη επαφή με το Microsoft excel ως υπολογιστικό εργαλείο για όλα τα παραπάνω. Το σύνολο των παιδιών χωρίστηκε σε τρείς ομάδες. Επέλεξαν να ερευνήσουν και ολοκλήρωσαν με επιτυχία εργασίες στις εξής τρείς θεματικές, εκ των οποίων η πρώτη εγκρίθηκε και κατόπιν αξιολόγησης **παρουσιάστηκε στην ημερίδα ερευνητικών εργασιών της σχολής Μωραΐτη**:

α) Χαρτζιλίκι και ιδιωτικά σχολεία: Υπάρχει συσχέτιση ανάμεσα στο χαρτζιλίκι και στο ύψος των διδάκτρων? Υπάρχει συσχέτιση ανάμεσα στο φύλο και στο χαρτζιλίκι? Υπάρχει συσχέτιση ανάμεσα στην ηλικία και στο χαρτζιλίκι?, β) Συσχέτιση ανάμεσα σε ώρες ύπνου και ώρες χρήσης ηλεκτρονικών συσκευών, γ) Ύψος, Ηλικία, Φύλο: Μεταβολή Ύψους σε σχέση με την ηλικία.

Στο δεύτερο τετράμηνο τα παιδιά επέλεξαν ως θεματική το προσδοκώμενο κέρδος στα τυχερά παιχνίδια. Η προσέγγιση της εν λόγω θεματικής έγινε στα πλαίσια παραλλαγών του ακόλουθου παιχνιδιού:

Ρίχνουμε ένα ζάρι κ φορές εμείς και λ φορές ο dealer. Αν το δικό μας αποτέλεσμα στο ζάρι είναι μεγαλύτερο από το αποτέλεσμα του dealer τότε κερδίζουμε α ευρώ. Αν φέρουμε αριθμό μικρότερο η ίσο του αριθμού του dealer τότε χάνουμε και καταβάλουμε β ευρώ. Με δεδομένο ότι κάθε φορά που παίζουμε το παιχνίδι καταβάλουμε αντίτιμο φ ευρώ ποιο είναι το προσδοκώμενο κέρδος μας, αν παίξουμε το παιχνίδι α) 60 φορές β) 1 φορά?

Το θεωρητικό υπόβαθρο αναζητήθηκε στις ακόλουθες έννοιες: α) Ορισμός πιθανοτήτων (Ανδρεαδάκης κ.α., 1991), β) Νόμος των μεγάλων αριθμών, γ) Ανεξάρτητα ενδεχόμενα, δ) Προσθετικός νόμος (Bedding, 2007). Επίσης παίξαμε το παιχνίδι 560 φορές, και καταγράψαμε την απόκλιση ανάμεσα στο πραγματικό κέρδος και το θεωρητικό υπολογισμό του προσδοκώμενου κέρδους. Τα παιδιά κατέγραψαν τις διαδοχικές φάσεις του εγχειρήματος σε βίντεο τ**ο οποίο αναρτήθηκε στο website της σχολής Μωραΐτη κατόπιν αξιολόγησης**.

Η **γραπτή ενδοσχολική αξιολόγηση** από τα παιδιά για τους διδάσκοντες και τη διδακτέα ύλη ανέδειξε το μάθημα του ερευνητικού δίωρου ως ιδιαίτερα δημοφιλές. Επίσης, κατά τη **διάρκεια συναντήσεων καθηγητών - γονέων** υπήρξαν πολλά θετικά σχόλια από τη πλευρά των γονέων για τη μαθησιακή προσέγγιση που ακολουθήθηκε στο δίωρο της ερευνητικής εργασίας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΊΑ

Gal, I. & Garfield, J. B. (ed.) (1997). T*he Assessment Challenge in Statistics Education*. IOS Press

Ματσαγγούρας Η. (επιστ. Υπεύθ.) (2011). *Η καινοτομία των ερευνητικών εργασιών στο νέο λύκειο*. Αθήνα: ΟΕΔΒ

Cirrito, F. (1st published in 1997). *Mathematics Higher Level, (For use with the I.B. programme) 4th edition*. Australia: IBID Press

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α., (1991). *Άλγεβρα και Στοιχείων Πιθανοτήτων Α΄ Λυκείου.* Αθήνα: Διόφαντος

Bedding, S. (2007). *Mathematical Studies Course Companion*. Oxford, UK.

Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΜΙΑΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ MASCIL ΩΣ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΣΤΗΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΑΚΤΙΚΗ

Μαναρίδης Αλέξανδρος[1], Σιώπη Καλλιόπη[2] ,Χατζηγούλα Αγορίτσα[3],

Κολλέγιο Αθηνών[1], Ευαγγελική Σχολή[2] , Εκπαιδευτήρια «Θεομήτωρ»[3]

almanaridis@gmail.com[1] , kalsiopi@gmail.com[2] , aghatzig@gmail.com[3]

Η οργάνωση της διδασκαλίας στοχεύει στη δημιουργία κατάλληλου κλίματος που να επιτρέπει την συνεχή αλληλεπίδραση μεταξύ του περιεχομένου-μαθητών-εκπαιδευτικού. Με βάση την οπτική αυτή η διδασκαλία είναι μια διαρκής διαδικασία προσαρμογής και ανάπτυξης.

Οι Watson & Mason (2007) επιχειρώντας να αποσαφηνίσουν την έννοια «δραστηριότητα» αναφέρουν ότι σε αυτήν περικλείονται όλες οι ενέργειες που κάνουν οι μαθητές καθώς αλληλεπιδρούν είτε μεταξύ τους είτε με τον εκπαιδευτικό. Συνεπώς, μια κατάλληλα επιλεγμένη δραστηριότητα θα πρέπει να δομείται έτσι ώστε να εμπλέκει τους μαθητές σε μία «ανώτερης» μορφής μαθηματική σκέψη παρέχοντας τους τη δυνατότητα να αξιοποιήσουν το σύνολο σχεδόν των γνώσεών τους. Το πλαίσιο αυτό παρέχει την ευκαιρία στον εκπαιδευτικό να τροποποιήσει ή να επαναπλαισιώσει το μαθησιακό περιβάλλον της δραστηριότητας και να βοηθήσει τους μαθητές του να διευρύνουν τον μαθηματικό τους ορίζοντα.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Τα χαρακτηριστικά μιας δραστηριότητας του προγράμματος Mascil (Mathematics and Science for Life) και στοιχεία από την εφαρμογή της σε σχολική τάξη αποτέλεσαν αντικείμενο αναστοχαστικού τύπου συζήτησης μεταξύ των μελών μιας ομάδας τριών εκπαιδευτικών, οι οποίοι συνεργάζονται για ζητήματα διδακτικής πρακτικής πλέον μιας δεκαετίας.

Η δραστηριότητα αναφέρονταν σε μια αυθεντική πρακτική που αφορούσε την επιλογή της βέλτιστης διάταξης δενδροφύτευσης κτήματος με συγκεκριμένους περιορισμούς, η μαθηματική της ιδέα σχετίζονταν με την έννοια και τις ιδιότητες των εφαπτόμενων κύκλων και η υλοποίησή της απαιτούσε τροποποίηση της συνήθους διδακτικής πρακτικής.

Αναπτύχθηκε έντονος προβληματισμός κατά πόσο είναι εφικτός ο μετασχηματισμός της σε δραστηριότητα ενταγμένη στη διδασκαλία μιας έννοιας σε συνάφεια με το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών στο λύκειο και υλοποιήσιμη από άλλους εκπαιδευτικούς. Ένας εκ των εκπαιδευτικών αναφέρει χαρακτηριστικά *«προσπαθώ να σκεφτώ κάποια* *μετατροπή της ιδέας της εκπαιδευτικού, προκειμένου να την εντάξω σε ένα από τα καθημερινά μου μαθήματα».*

Η ενότητα που επιλέχθηκε ήταν στην μέτρηση του κύκλου, στο μάθημα της γεωμετρίας που διδάσκεται στη Β λυκείου. Στους 24 μαθητές ενός τμήματος, δόθηκε ένα ορθογώνιο πλακάκι σε πραγματικές διαστάσεις και τους ζητήθηκε να το διακοσμήσουν με σειρές κύκλων πετυχαίνοντας όμως την μεγαλύτερη δυνατή κάλυψη της επιφάνειάς του, να βρούν το μέγιστο πλήθος των κύκλων αυτών και το μέρος από το πλακάκι που δεν καλύπτεται από τους αντίστοιχους κυκλικούς δίσκους. Στόχος ήταν η διερεύνηση των γνώσεων και της μαθητικής σκέψης των μαθητών αναφορικά με τα στοιχεία μέτρησης του κύκλου (θέση των κέντρων των κύκλων, υπολογισμός της ακτίνας, εύρεση του εμβαδού του κυκλικού δίσκου).

Οι μαθητές εργάστηκαν σε ομάδες, επιλέγοντας μάλιστα διαφορετικό πλήθος σειρών κύκλων στο πλακάκι. Άμεσα συμπέραναν ότι για την μέγιστη κάλυψη οι κύκλοι θα πρέπει να είναι εφαπτόμενοι και τα κέντρα τους συνευθειακά σε κάθε σειρά. Δύο ομάδες προσπάθησαν να τοποθετήσουν τους κύκλους έτσι ώστε ανά τρεις να έχουν κέντρα που να σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο. Μια διάταξη που τους απασχόλησε αρκετά. Άλλη ομάδα έκανε χρήση της συμμετρίας του διακοσμητικού σχεδίου και εργάστηκε μόνο με ένα μέρος από το πλακάκι γενικεύοντας στη συνέχεια τα συμπεράσματά της. Κοινός προβληματισμός όλων υπήρξε το μέρος απο το πλακάκι που δεν καλύπτεται από τους κυκλικούς δίσκους.

Μετά την παρουσίαση των αποτελεσμάτων της κάθε ομάδας, η συζήτηση που ακολούθησε οδήγησε στη διατύπωση επιπλέον ερωτημάτων όπως « *από τι εξαρτάται το πλήθος των κύκλων*», « *τι συμβαίνει με το μέρος που δεν καλύπτεται από το πλακάκι καθώς το πλήθος των κύκλων αυξάνεται*», ερωτήσεις δηλαδή που αφορούν στην έννοια του ορίου.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Η κατασκευή μιας δραστηριότητας απαιτεί από τους εκπαιδευτικούς μια ολιστική αντιμετώπιση των δυσκολιών και αντιξοοτήτων που εμφανίζονται κατά την εφαρμογή τους στις τάξεις άλλων εκπαιδευτικών. Ο αναστοχασμός που ακολουθεί μπορεί να οδηγήσει στην τροποποίηση των δραστηριοτήτων και την ένταξή τους σε διαφορετικές γνωστικές περιοχές.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Watson, A., Mason, J. (2007) Taken-as-Shared: A review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4), 205-2015.

ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Μανωλοπούλου Κατερίνα

Δημοτικό Σχολείο Αγίου Θωμά Βοιωτίας

katmanolo@hotmail.com

Η παρούσα εργασία συνιστά μια καινοτόμο διδακτική πρόταση, σχετικά με τα Ρεαλιστικά Μαθηματικά και την αξιοποίησή τους σε ορισμένες ενότητες του σχολικού εγχειριδίου της Γ' τάξης δημοτικού. Αφορά μια διδακτική παρέμβαση που πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο πρακτικής άσκησης του ΠΜΣ «Διδακτική των Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών» του ΔΠΘ.

ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.

Η θεωρία των Ρεαλιστικών Μαθηματικών βασίζεται σε κάποιες αρχές, μία από τις οποίες είναι η αρχή της «καθοδηγούμενης επανεφεύρευσης» (Freudenthal,1973). Ο όρος αυτός υποννοεί ότι η διδασκαλία έχει ως στόχο την «επανεφεύρεση» από τους μαθητές της έννοιας ή της διαδικασίας που θέλουμε να διδάξουμε και ακολουθεί κάποια συγκεκριμένα βήματα , που καθορίζουν τη διδασκαλία (Κολέζα, 2009).

Σύμφωνα με τους Κωλέττη και Ψωμά (2012), η ρεαλιστική εκπαίδευση βασίζεται: α) στην οικοδόμηση της γνώσης με βαση τα άτυπα μοντέλα που διαθέτουν ήδη οι μαθητές, β) στην καθοδηγούμενη προσωπική ανακάλυψη των μαθηματικών εννοιών και δομών από τους μαθητές, γ) στην ομαδική διδασκαλία και αλληλεπίδραση στην τάξη και δ) στον εκπαιδευτικό που έχει τον ρόλο του καθοδηγητή και όχι του παντογνώστη.

Η παρέμβαση

Η παρέμβαση έλαβε χώρα στη Γ΄τάξη του δημοτικού σχολείου Αγίου Θωμά Βοιωτίας. Συμμετείχαν 17 μαθητές και ολοκληρώθηκε σε διάστημα 5 μηνών. Για την παρέμβαση επιλέχθηκαν ενότητες που αφορούν προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης με τριψήφιους αριθμούς, την εισαγωγή στον αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού, την εισαγωγή στη διαίρεση και την έννοια των κλασμάτων. Θεωρήθηκε πως η προσέγγισή τους μέσω της ΡΜΕ θα μπορούσε να βοηθήσει τους μαθητές να επεξεργαστούν αποδοτικότερα τις συγκεκριμένες έννοιες, που φαίνεται πως τους δυσκολεύουν.

Κατά την παρέμβαση, δόθηκαν αρκετές δραστηριότητες με χειραπτικά υλικά όπως χάρτινο ρολόι, καραμέλες, σοκολάτα. Οι μαθητές καλούνταν είτε ατομικά, είτε ομαδικά να εμπλακούν, να τις επεξεργαστούν ελεύθερα και αυτόνομα, να φανταστούν την κατάσταση που περιγράφεται και σταδιακά να τη λύσουν.

Χαρακτηριστική δραστηριότητα για την ανάδειξη των αρχικών ιδεών των μαθητών γύρω από την έννοια του κλάσματος και τη σύνδεσή του με εκφράσεις της καθημερινής ζωής, είναι ο σχεδιασμός ενός κύκλου, ο χωρισμός του σε τέσσερα ίσα κομμάτια, η εύρεση του ενός τετάρτου και τέλος η σύγκρισή του με το τέταρτο της ώρας. Οι μαθητές σχεδίασαν, κατέγραψαν τις σκέψεις τους, αντάλλαξαν τις απόψεις τους και κατέληξαν από κοινού στον σωστό τρόπο χωρισμού ενός κύκλου σε τέταρτα. Στη συνέχεια, μέσω συζήτησης, οι μαθητές αναγνώρισαν τη σύνδεση του τέταρτου του κύκλου με το τέταρτο της ώρας.

Αξιολόγηση

Φάνηκε πως η πλειοψηφία των μαθητών κατανόησε τις έννοιες που διαπραγματεύτηκε η παρέμβαση. Το γεγονός αυτό τεκμαίρεται και από τη συμπεριφορά των μαθητών κατά την εκτέλεση των δραστηριοτήτων αλλά και μετέπειτα, από την απόδοσή τους στις αντίστοιχες ενότητες του σχολικού βιβλίου. Επιπλέον, η μάθηση πραγματοποίηθηκε σε κλίμα συνεργασίας και αλληλεπίδρασης. Ένα παράδειγμα, γόνιμου διαλόγου μεταξύ των μαθητών είναι το παρακάτω, που αφορά δραστηριότητα στα ισοδύναμα κλάσματα.

Μαθητής1: Όλοι θα πάρουν ίσα κομμάτια!

Μαθητής2: Όχι, αφού είναι πολύ μικρά τα όγδοα.

Μαθητής1: Όμως είναι η ίδια τούρτα και στις ομάδες είναι δύο παιδιά!

Μαθητής2: ...(παύση)... Συμφωνώ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των Μαθηματικών.* Αθήνα: Εκδόσεις Τόπος.

Κωλέττη, Ε., & Ψωμά, Β. (2012). Ρεαλιστική θεώρηση των μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο: Η σημασία της οργάνωσης και της αναπαράστασης μιας προβληματικής κατάστασης για τη διατύπωση μαθηματικών συλλογισμών και τη δημιουργία μοντέλου επίλυσής της. Στο Α. Παπάς (Επιμ.), *Πρακτικά του Ελληνικού Ινστιτούτου Εφαρμοσμένης Παιδαγωγικής και Εκπαίδευσης (ΕΛΛ.Ι.Ε.Π.ΕΚ.), 6ο Πανελλήνιο Συνέδριο*, 5-7 Οκτωβρίου 2012. Αθήνα.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht - Holland: Reidel Publishing Company.

ΤΟ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑ ΜΑΣ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΠΕΔΟΝΗ

Μαραγκού Γεωργία

1ο Γυμνάσιο Σκάλας Ωρωπού Αττικής

geomar1712@yahoo.gr

Στην ευρύτερη προσπάθεια της ερευνητικής εκπαιδευτικής κοινότητας να αναπτυχθεί η σύνδεση μεταξύ Μαθηματικών και Τέχνης με εναλλακτικές μεθόδους διδασκαλίας παράλληλα με τη διδασκαλία του μαθήματος έστησα στο 1ο Γυμνάσιο Σκάλας Ωρωπού τα έξι τελευταία συνεχή σχολικά έτη κι ένα Μαθηματικό Εργαστήρι. Σε αυτό οι μαθητές σχεδίασαν και στη συνέχεια κατασκεύασαν διάφορα αντικείμενα εμπνευσμένα από τα Μαθηματικά, τα οποία και παρουσίασαν οι ίδιοι σαν μικροί ερευνητές επιστήμονες στις έξι Εκθέσεις Μαθηματικών, που έλαβαν χώρα. Για να κατασκευάσουν τα έργα τους οι μαθητές όλα αυτά τα χρόνια άντλησαν ιδέες από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, τη Χρυσή τομή, το τρίγωνο του Pascal, τα fractals «The Pythagorean tree» και το «Τρίγωνο Sierpinski» αλλά και από τις γενικότερες συζητήσεις που γίνονταν για τα Μαθηματικά στην τάξη με αφορμή τα ιστορικά σημειώματα ή τις εφαρμογές τους στη φύση και στην Τέχνη.

Οι στόχοι ήταν με τις κατασκευές τους αυτές οι μαθητές να μπορούν μπροστά στο κοινό, που τους παρακολουθούσε, να αποδεικνύουν για παράδειγμα μεταξύ άλλων το Πυθαγόρειο Θεώρημα, τις αξιοσημείωτες ταυτότητες που αφορούν το τετράγωνο αθροίσματος και τον κύβο αθροίσματος. Άλλοτε σχεδιάζοντας αρχικά σε χαρτί με τα γεωμετρικά όργανα ώστε να σχηματίσουν ένα «ΔΕΝΤΡΟ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΑ», τη μία φορά ξεκινώντας με ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο και μετά με ορθογώνιο και σκαληνό, κατέληξαν υπολογίζοντας και μετρώντας να κόψουν ξύλα, να τα βάψουν και να παρουσιάσουν τις σχετικές κατασκευές που εκτός από πλούτο γεωμετρικών δομών που έκρυβαν είχαν και αξιοσημείωτο αισθητικό ενδιαφέρον. Όλα αυτά οι μαθητές τα ξανασχεδίαζαν στο μαυροπίνακα την ημέρα της παρουσίασης ενώπιον των επισκεπτών μας αποκαλύπτοντας τους κρυμμένες ομορφιές των Μαθηματικών.

Όλους τους μήνες της μελέτης και των προετοιμασιών, που έγιναν με την καθοδήγηση και επίβλεψη της διδάσκουσας χωρίς να χαθεί ωστόσο ούτε ώρα μαθήματος, οι μαθητές αντιλήφθηκαν το γνωστικό αντικείμενο, ανέπτυξαν ερευνητική διάθεση, ενδυνάμωσαν την παρατηρητικότητά τους, καλλιέργησαν τη στοχαστική τους ικανότητα, την κριτική και δημιουργική σκέψη τους και εξέλιξαν την αισθητική τους αντίληψη.

Έτσι στο Μαθηματικό μας Εργαστήρι οι μαθητές μέσα από την ομορφιά της Τέχνης και την αυστηρότητα των Μαθηματικών είχαν την ευκαιρία να εποπτεύσουν, να διαχειριστούν, να κρίνουν και να θεμελιώσουν έννοιες με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι προϊόν δικής τους δημιουργίας. Με όχημα τη «γλώσσα» της Τέχνης και τις οπτικές μεταφορές που απορρέουν από τις ποικίλες της μορφές και με μεθοδολογικά εργαλεία την ομαδοσυνεργατική ερευνητική μάθηση, τον καταιγισμό ιδεών, το παιχνίδι ρόλων επιτεύχθηκε σε σημαντικό βαθμό να επουλωθούν τα «Μαθηματικά τραύματα» των μαθητών και να τονωθεί η αυτοεκτίμησή τους. Επιπροσθέτως αν αναλογιστούμε το γενικότερο στόχο του σχολείου για την ολόπλευρη ανάπτυξη της προσωπικότητας των μαθητών μέσα από τη διαθεματική προσέγγιση των γνωστικών αντικειμένων κι αν στηριχτούμε παράλληλα στη θεωρία πολλαπλής νοημοσύνης του Gardner (1993) μπορούμε να αντιληφθούμε πόσο σημαντική είναι η ένταξη των ποικίλων μορφών Τέχνης στη μαθησιακή διαδικασία προκειμένου να ικανοποιηθούν τόσο οι γενικοί όσο και οι ειδικοί στόχοι της διδασκαλίας μας ανά ενότητα του σχολικού εγχειριδίου. Οι μαθητές με καταμερισμό έργου και σε ομάδες συνεργάστηκαν με τη διακριτική καθοδήγηση και ενθάρρυνση της διδάσκουσας (scaffolding) ώστε να αναλάβουν στη συνέχεια πρωτοβουλίες και να οικοδομήσουν και νέες γνώσεις μέσω της κοινωνικής αλληλεπίδρασης.

Έγινε λοιπόν διδακτική αξιοποίηση των μαθηματικών κατασκευών μας και αναπτύχθηκαν από τους ίδιους τους μαθητές κριτήρια και μέθοδοι κριτικής και αυτοκριτικής ώστε να εθιστούν σε διαδικασίες αυτοελέγχου. Στην τελευταία φάση που έχει ολιστικό χαρακτήρα οι μαθητές χωρισμένοι σε ομάδες κλήθηκαν να παρουσιάσουν αυτά για τα οποία εργάστηκαν αξιοποιώντας δυναμικά λογισμικά Γεωμετρίας κι έτσι ασκήθηκαν στη χρήση των εργαλείων τους και των δυνατοτήτων που προσφέρουν οι νέες τεχνολογίες. Είχαμε λοιπόν γεωμετρικές έννοιες που έγιναν ορατές, εύληπτες, απτές και πιο ελκυστικές στα παιδιά. Εν τέλει με το να υπάρξουν από τη διδάσκουσα εναλλαγές στη διδακτική πρακτική και με το να αξιοποιηθεί η Τέχνη ως αρωγός για τη συγκρότηση της γνώσης είχαμε ελπιδοφόρα αποτελέσματα αφού καταδείχτηκε πόσο απαραίτητη είναι η σύνδεση των Μαθηματικών με τη ζωή και τις καθημερινές πρακτικές των μαθητών. Η αξιολόγηση ως μια ανατροφοδοτική διαδικασία υφίστατο σε όλη τη διάρκεια της οργάνωσης και εκτέλεσης του όλου έργου και τελικά αφέθηκε και στους ίδιους τους μαθητές, που είδαν τις πολύχρονες δράσεις μας να δημοσιεύονται από την Ε.Μ.Ε (Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Gardner, H. (1993). *Multiple intelligences* (Vol. 5, No. 7). New York: Basic Books.

ΤΟ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ: «ΒΡΕΣ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ»

Μαρσέλλος Πέτρος-Στυλιανός

ΕΚΠΑ Μαθηματικός MSc

petros.marsellos@gmail.com

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η χρήση του υπολογιστή στην εκπαίδευση έχει εμπλουτίσει τη διδασκαλία με εικόνα, κίνηση, ήχο και με τη δυνατότητα της διάδρασης. Τα στοιχεία αυτά κάνουν το περιβάλλον της μάθησης πιο ελκυστικό για το μαθητή και τον βοηθούν να κατανοήσει δύσκολες κι αφηρημένες έννοιες (Papastergiou, 2009). Προσδίδουν στο μάθημα μια πιο ευχάριστη και ρεαλιστική μορφή κι έτσι κεντρίζουν την προσοχή και το ενδιαφέρον των μαθητών (Tüzün κ.α., 2009). Ο υπολογιστής συμβάλλει, δηλαδή, στο να οπτικοποιηθεί το διδακτέο αντικείμενο κι έτσι προωθεί την παρακίνηση μερίδας μαθητών που δεν παρακινούνται με την παραδοσιακή διδασκαλία (Burguillo, 2010). Τέλος, ο υπολογιστής δίνει τη δυνατότητα της αυτοαξιολόγησης, του πειραματισμού και της ανάπτυξης της κριτικής σκέψης (Sunet κ.α., 2008). Θετική είναι η συμβολή των ηλεκτρονικών παιχνιδιών στη βελτίωση της επίδοσης στο μάθημα των μαθηματικών (Kebritchi κ.α., 2010).

Η ΠΡΟΤΑΣΗ

Η πρόταση αναφέρεται σε ένα εκπαιδευτικό παιχνίδι http://findf.gr/ που σχεδιάστηκε από τον γράφοντα και γράφτηκε στον υπολογιστή σε περιβάλλον JavaScript. Αφορά μαθητές Γ' λυκείου που έχουν διδαχθεί τα δυο πρώτα κεφάλαια της κατεύθυνσης και κυρίως την παράγραφο "μελέτη και χάραξη γραφικής παράστασης". Οι παραστάσεις έχουν επιλεγεί μια προς μια, για να φέρουν το μαθητή αντιμέτωπο με κάποια παρανόηση και, σε συνεργασία με το συμπαίκτη τους ή τον επιβλέποντα καθηγητή, να την επιλύσουν. Πιο συγκεκριμένα, η επιλογή γραφημάτων έχει γίνει με βάση εκφράσεις μαθητών όπως «συνεχής είναι η συνάρτηση όταν τη σχεδιάζεις χωρίς να σηκώσεις το μολύβι» ή «οι ασύμπτωτες πλησιάζουν συνέχεια αλλά ποτέ δε συναντιούνται», και η επιλογή ερωτήσεων έχει γίνει με τέτοιο τρόπο, ώστε να μην είναι πάντα προφανής η ιδιότητα, «συνάρτηση που είναι ίση με την αντίστροφή της».

Σκοπός της παρούσας παρέμβασης είναι να μελετηθούν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τρεις μαθητές της Γ’ γενικού λυκείου στη μελέτη και χάραξη γραφικής παράστασης συνάρτησης. Ακολουθεί απόσπασμα από μια δοκιμή. Οι μαθητές, όταν κλήθηκαν να απαντήσουν αν η δική τους «sinx/x» έχει ασύμπτωτες, απάντησαν «όχι» κι έχασαν.

M1,2,3: Τι; Ε; γιατί; Αφού τέμνονται συνέχεια.

Εγώ: Και;

M1: Οι ασύμπτωτες πλησιάζουν και δεν ακουμπάνε.

Εγώ: Ποιος το λέει αυτό;

M1: Δείτε το βιβλίο.

Εγώ: Δεν το βλέπω πουθενά… εσείς;

M2: Εεε… Να! δείτε τις εικόνες.

Εγώ: Τις βλέπω, αλλά αυτό μας απαγορεύει να είναι και αλλιώς;

M2: Όχι αλλά (…)

Εγώ: Το βιβλίο τι λέει; Για διαβάστε λίγο!

M1,2: Μετά από λίγα λεπτά: «η γραφική παράσταση της f τείνει να συμπέσει με την ψ=0». Όπως εδώ δηλαδή, ε;

M3: Ρε κορίτσια αφού αυτή δεν πλησιάζει! (…) Πάει κι έρχεται

M1: Όντως… οπότε;

Εγώ: Μια ακόμα γνωστή παρανόηση είναι ότι η σύγκλιση είναι μονότονη (…)

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Burguillo, J. C. (2010). Using game theory and competition-based learning to stimulate student motivation and performance. *Computers & Education*, *55*(2), 566-575.

Kebritchi, M., Hirumi, A., & Bai, H. (2010). The effects of modern mathematics computer games on mathematics achievement and class motivation. *Computers & education*, *55*(2), 427-443.

Papastergiou, M. (2009). Digital game-based learning in high school computer science education: Impact on educational effectiveness and student motivation. *Computers & Education*, *52*(1), 1-12.

Sun, P. C., Tsai, R. J., Finger, G., Chen, Y. Y., & Yeh, D. (2008). What drives a successful e-Learning? An empirical investigation of the critical factors influencing learner satisfaction. *Computers & education*, *50*(4), 1183-1202.

Tüzün, H., Yılmaz-Soylu, M., Karakuş, T., İnal, Y., & Kızılkaya, G. (2009). The effects of computer games on primary school students'achievement and motivation in geography learning. *Computers& Education*, *52*(1), 68-77.

ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΛΟΓΟΤΕΧΝΙΑΣ, ΤΗΣ ΤΕΧΝΗΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΠΑΙΧΝΙΔΙΟΥ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΧΩΡΙΚΩΝ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

[1]Πετρίδου Αντωνία και [2]Βασιλούδη Βασιλική

[1]1ο Πειραματικό Δ.Σ. Αλεξανδρούπολης, [2]Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

pantonia65@gmail.com, fruitcorner@hotmail.com

Η προτεινόμενη διδακτική παρέμβαση υλοποιήθηκε στο πλαίσιο του ομίλου Μαθηματικών και Λογοτεχνίας, ο οποίος λειτούργησε στο 1ο Πειραματικό Δ.Σ. Αλεξανδρούπολης (2016-2017), με τη συμμετοχή 19 μαθητών από την Δ΄, Ε΄ και ΣΤ΄ τάξη του σχολείου. Σκοπός των δραστηριοτήτων που ενδεικτικά παρουσιάζονται εδώ ήταν να προσεγγίσουν οι μαθητές μέσω της λογοτεχνίας, της τέχνης και του παιχνιδιού την έννοια της διάστασης και να μεταβούν λογικά από τον μονοδιάστατο στον δισδιάστατο και κατόπιν στον τρισδιάστατο χώρο, να οπτικοποιήσουν την έννοια των γεωμετρικών σχημάτων, να αναπτύξουν χωρικές ικανότητες που αφορούν την κατασκευή, τη διατήρηση και τον μετασχηματισμό γεωμετρικών σχημάτων και οπτικών εικόνων, εν γένει να αναπτύξουν τον *χωρικό*, *γεωμετρικό* και *οπτικοποιημένο* συλλογισμό (ΙΕΠ, 2014).

Η διδακτική πρόταση βασίστηκε στην άποψη των Van Hiele (όπ. αναφ. στο Van de Walle, 2007) για τη διδασκαλία της γεωμετρίας, οι οποίοι προτείνουν την οργάνωση δραστηριοτήτων που αφορούν στην αναγνώριση και διάκριση των γεωμετρικών σχημάτων, και την κίνηση στον χώρο: περιστροφή, μετατόπιση, προβολή από τον χώρο στο επίπεδο, καλύψεις του επιπέδου. Για την κινητοποίηση του ενδιαφέροντος των μαθητών και τη σύνδεση των γεωμετρικών εννοιών με τις εμπειρίες τους, αξιοποιήθηκαν λογοτεχνικά κείμενα, τα οποία είτε αποτέλεσαν αφορμή, για να εμπλακούν αυτοί σε διερευνητικές δραστηριότητες δόμησης του χώρου είτε πλαισιώθηκαν με δραστηριότητες γεωμετρικού περιεχομένου (Κολέζα, 2009).

Παρακάτω παρουσιάζονται ενδεικτικά ορισμένες δραστηριότητες: Α. *Flatland* και *The dot and the line: Η έννοια της διάστασης στη γεωμετρία*. Αφού προβλήθηκαν οι παραπάνω ταινίες, οι μαθητές επεξεργάστηκαν ομαδικά ένα φύλλο εργασίας και προχώρησαν σε αναπαράσταση της χώρας τους, η οποία αντιστοιχούσε σε μία διάσταση (μηδενική, 1η, 2η κ.λπ.), αναπτύσσοντας παράλληλα διαλόγους γύρω από την έννοια της διάστασης. Επίσης, συμπλήρωσαν ένα comic strip με διαλόγους μεταξύ του παππού (τετραγώνου) και της Χεξ (εξαγώνου).

Β. Οι δραπέτες της Σκακιέρας και το καρτεσιανό επίπεδο. Με αφορμή το γνωστό graphic novel του Τριβιζά, οι μαθητές προσέγγισαν την έννοια του καρτεσιανού επιπέδου και το συνέκριναν με τον ευκλείδειο χώρο. Έπαιξαν επιτραπέζια παιχνίδια (σκάκι και ναυμαχία) που βασίζονται σε αυτή την έννοια, ενώ προσέγγισαν διαισθητικά τις έννοιες της τεταγμένης και της τετμημένης.

Γ. *Γεωμετρικός περίπατος-Αναζήτηση των γεωμετρικών σχημάτων στο ανθρωπογενές και φυσικό περιβάλλον-Ιδιότητες παραλληλόγραμμων σχημάτων*. Χωρισμένοι σε 4 ομάδες, οι μαθητές φωτογράφισαν κτήρια, ενώ αναγνώρισαν σχήματα εντός και εκτός του σχολείου. Αφού μελέτησαν τις ιδιότητες των σχημάτων, έπαιξαν το παιχνίδι «Βρες το σχήμα».

Δ. *Επικάλυψη επίπεδου – Το πάπλωμα της Παπλωματούς*. Εκκινώντας από έργο του Τζεφ Μπριμπό, *Το δώρο της παπλωματούς*, οι μαθητές κατασκεύασαν ένα χάρτινο πάπλωμα για την ηρωίδα. Αφού ετοίμασαν μοτίβα διαφορετικού σχήματος (τετράγωνα, ορθογώνια, εξάγωνα, πεντάγωνα), επιχείρησαν να απαντήσουν στα ερωτήματα: Με ποια πολύγωνα μπορεί να καλυφθεί το επίπεδο; Με ποια πολύγωνα δημιουργούνται κενά; Σε ποιες περιπτώσεις δεν είναι δυνατή η κάλυψη του επιπέδου; Μέσα από τη διερεύνηση των δυνατοτήτων κάλυψης του επίπεδου, προσέγγισαν τις έννοιες του εμβαδού και της τυπικής μονάδας μέτρησης.

Η αξιολόγηση των μαθητών έγινε μέσω των έργων που αυτοί παρήγαγαν στο πλαίσιο διερευνητικών δραστηριοτήτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια εκπαίδευση, Οδηγός για τον εκπαιδευτικό. Εργαλεία διδακτικών προσεγγίσεων, Αθήνα (2014): http://ebooks.edu.gr/new/ps.php (ανακτήθηκε 7/7/2017)

Κολέζα, Ε. (2006). «Τα Μαθηματικά μέσα από τον καθρέφτη της Λογοτεχνίας: ένα ταξίδι στη χώρα των θαυμάτων». *Πρακτικά 6ου διημέρου για τη διδασκαλία των Μαθηματικών,* σ. 27-48. Θεσσαλονίκη: City Published

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Τόπος.

Μητακίδου Σ. & Τρέσσου Ε. (2005). *Διδάσκοντας Γλώσσα και Μαθηματικά με τη Λογοτεχνία*. Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο.

Van de Walle, J. (2007). *Διδάσκοντας Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια Αναπτυξιακή Διαδικασία*. Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο.

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΗΣ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

Σαράφης Ιωάννης

Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί

jsaraf@hotmail.gr

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

Τόνωση του ενδιαφέροντος για το μάθημα.

Να μάθουν οι μαθητές/τριες να λειτουργούν και να συνεργάζονται στο πλαίσιο μιας ομάδας.

Να δημιουργούν εργασία σε word με κανόνες που ισχύουν σε συνέδρια (περιθώρια, γραμματοσειρά).

Να δημιουργούν Power Point και να το παρουσιάζουν σε κοινό (συμμαθητές τους, διδάσκοντα καθηγητή, σχολικό σύμβουλο).

Να μάθουν να δέχονται κριτική ώστε να βελτιώσουν στην επόμενη εργασία το γνωστικό αντικείμενο και την παρουσίαση.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΣΤΗ ΣΧΟΛΙΚΗ ΤΑΞΗ

Θεωρώντας ότι μια μετωπική διδασκαλία και ειδικά στο μάθημα της Γεωμετρίας της Α Λυκείου δεν είναι πάντα αποτελεσματική δόθηκε η δυνατότητα στους μαθητές/τριες να έχουν και έναν διαφορετικό τρόπο ενασχόλησης με το μάθημα. Στην αρχή της σχολικής χρονιάς 2016-2017 σε 2 τμήματα της Α Λυκείου προτάθηκε να εκπονήσουν εργασίες, σε μορφή word, με θέματα που άπτονται της Γεωμετρίας και να τις παρουσιάσουν σε Power Point. Τα θέματα δόθηκαν από το βιβλίο, Θωμαΐδη – Πούλου (2000) *Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*, Θεσσαλονίκη: Ζήτη. Οι μαθητές σε ομάδες δύο-τριών ατόμων επέλεξαν τα θέματα , και μια ομάδα επέλεξε τις Μεθόδους απόδειξης στα Μαθηματικά. Οι μαθητές παρουσίασαν σε μορφή Power Point την εργασία τους και το χρονικό περιθώριο που είχαν ήταν 15 λεπτά. Η ομάδα που επέλεξε τις Μεθόδους απόδειξης στα Μαθηματικά παρουσίασε όλες τις μεθόδους και σε πολλές περιπτώσεις έδειχνε και αντίστοιχο παράδειγμα.

Οι παρουσιάσεις πραγματοποιήθηκαν σε 5 διδακτικές ώρες με την παρουσία του Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ - ΠΙΘΑΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΟΦΕΛΗ

Μετά το τέλος κάθε παρουσίασης οι υπόλοιποι μαθητές έκαναν κριτική για τον τρόπο παρουσίασης (εμφάνιση διαφανειών, τρόπος παρουσίασης, εξήγηση μαθηματικών εννοιών). Ορισμένες μέθοδοι (μαθηματική επαγωγή, συνδυαστική απόδειξη) δεν έγιναν κατανοητές από τους μαθητές. Έδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την εις Άτοπο απαγωγή και τα Αντιπαραδείγματα. Στις περιπτώσεις που δεν γινόταν κατανοητή κάποια μέθοδος την εξηγούσαμε με το Σχολικό Σύμβουλο. Μερικές εκφράσεις μαθητών:

Τόσες πολλές μέθοδοι υπάρχουν ; Πόσες από αυτές θα διδαχθούμε ;

Δύσκολη η Μαθηματική Επαγωγή. Που εφαρμόζεται ;

Ακολούθησε συζήτηση για τα οφέλη από τη συγκεκριμένη διαδικασία. Όλοι οι μαθητές/τριες (ανεξάρτητα από την επίδοση) δήλωσαν ότι αποκόμισαν γνώσεις που ίσως μόνο από το μάθημα να μην τις ανακάλυπταν και έμαθαν να κατασκευάζουν και να παρουσιάζουν Power Point. Ο ενθουσιασμός τους ήταν τέτοιος που ζητήσανε να το επαναλάβουμε και στη Β' Λυκείου

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Θωμαΐδης, Γ., Πούλος, Α. (2000). *Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*, Θεσσαλονίκη: Ζήτη.

ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΕΝΟΣ ΠΑΝΤΟΓΡΑΦΟΥ ΓΙΑ ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑ

Σιώπη Καλλιόπη, Πολάκη Πέρσα

Πρότυπο Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

kalsiopi@gmail.com

ΠΡΟΤΑΣΗ/ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗ

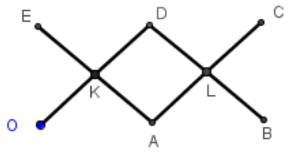
Η ενσωμάτωση τεχνημάτων (artifacts), ιδιαίτερα εκείνων που αποτελούν μέρος της ιστορίας της γεωμετρίας όπως οι παντογράφοι (μηχανισμοί σχεδίασης -drawing machines) σε δραστηριότητες στη σχολική τάξη και ο διαμεσολαβητικός τους ρόλος σε γνωστικές διαδικασίες αποτελεί αντικείμενο ερευνητικών μελετών στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης (Maschietto, 2005; Bussi & Maschietto, 2008).

Η πρόταση αφορά τη διδακτική αξιοποίηση ενός ειδικού παντογράφου για ομοιοθεσία σε διερευνητικές δραστηριότητες σχετικές με την έννοια της ομοιότητας και των ιδιοτήτων της. Η ιδέα του παντογράφου ως εργαλείο σχεδίασης εικόνων σε διαφορετική κλίμακα είναι πολύ παλιά (17ος αιώνας). Τα δομικά του στοιχεία είναι ζεύγη συνδέσμων (ράβδοι) που συνδέονται με αρθρώσεις με τέτοιο τρόπο ώστε οι λόγοι των αποστάσεων των σημείων σύνδεσης στην κάθε ράβδο να είναι ίσοι μεταξύ τους.

Η καινοτομία της πρότασης έγκειται στο ότι ένας τέτοιος μηχανισμός μπορεί να εξυπηρετήσει τη διδασκαλία της γεωμετρίας ως ένα αυθεντικό πλαίσιο που ενσωματώνει στη δομή του γεωμετρική θεωρία, παρέχει πληροφορίες για το μαθηματικό νόμο/έννοια που περιγράφει τη λειτουργία του και μπορεί να χρησιμοποιηθεί πριν ή μετά τη διδασκαλία της αντίστοιχης γεωμετρικής έννοιας αλλά και ως αυθεντικό πλαίσιο που ενισχύει διαδικασίες μάθησης καθώς παρέχει ευκαιρίες για πειραματισμό, ανάλυση και ερμηνεία δεδομένων, εξερεύνηση μαθηματικών ιδεών και ανακάλυψη μαθηματικών νόμων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ/ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Η διδακτική παρέμβαση ήταν διάρκειας 4 διδακτικών ωρών (2 δίωρα) και υλοποιήθηκε σε ένα τμήμα 26 μαθητών της Β λυκείου στο μάθημα της γεωμετρίας. Οι συμμετέχοντες μαθητές εργάστηκαν σε έξι ομάδες (4 ομάδες των 4 ατόμων και 2 ομάδες των 5 ατόμων). Ο παντογράφος που χρησιμοποιήθηκε ήταν μια εκδοχή παντογράφου του Scheiner (1603). Τη μορφή του συνέθεταν ζεύγη τεσσάρων ξύλινων ίσων ράβδων συνδεδεμένων με αφαιρούμενες βίδες, δυο δε ζεύγη ράβδων συνδέονταν



Εικόνα 11

στο μέσο τους σχηματίζοντας διπλό χιαστί (Εικόνα 1), έφερε δυο γραφίδες (A και B) και ήταν τοποθετημένο σε ένα ξύλινο ταμπλό. Οι ράβδοι είχαν εγκοπές προκειμένου να είναι δυνατή η επανασυναρμολόγηση του εργαλείου και να διατηρούνται οι γεωμετρικές ιδιότητες της δομής του. Με δεδομένο ότι οι μαθητές δεν είχαν καμιά εμπειρία με άλλο μηχανισμό σχεδίασης εκτός του χάρακα και του διαβήτη, κλήθηκαν να εξερευνήσουν τη δομή και λειτουργία του μηχανισμού με πλαίσιο τα ερωτήματα πώς έχει κατασκευαστεί, πώς λειτουργεί, τι μπορεί να κάνει και γιατί, με στόχο να ανακαλύψουν τη σχέση των ιδιοτήτων που απορρέουν λόγω της δομής του μηχανισμού και του μαθηματικού νόμου που υλοποιείται μέσω της χρήσης του, χρησιμοποιώντας επιχειρήματα βασισμένα στην ήδη γνωστή τους γεωμετρική θεωρία.

Οι μαθητές ανέπτυξαν μια σημαντική ποικιλία στρατηγικών διαχείρισης του μηχανισμού και αντιμετώπισης του προβλήματος (μέσω της παραλληλίας των ράβδων να δείξουμε ότι μεταφέρονται γωνίες ίσες), διατύπωσαν υποθέσεις (αυτά τα τρία [O,A,B] βρίσκονται στην ίδια ευθεία σε κάθε περίπτωση) και παρείχαν εξηγήσεις για τα μαθηματικά που ενσωματώνει η δομή του (οι ράβδοι σχηματίζουν το γεωμετρικό σχήμα του ρόμβου γιατί έχει πλευρές ίσες ως μέσα [μισά] ίσων τμημάτων), για τις ιδιότητες που διατηρούνται ή μεταβάλλονται όταν μετασχηματίζεται η μορφή του (κάθε στιγμή ανά δύο [οι απέναντι ράβδοι] είναι παράλληλες) και τη σχέση τους με την έννοια και τις ιδιότητες της ομοιότητας (αυτός ο λόγος [OK/KD] είναι 1:1 άρα, αυτό [OB] θα είναι το διπλάσιο από αυτό [OA] και από αυτό [AB]).

Η σκόπιμη χρήση του παντογράφου για την ομοιοθεσία σε διερευνητικές δραστηριότητες στην τάξη των μαθηματικών μπορεί να γεφυρώσει βασικές ιδέες και ιδιότητες της γεωμετρικής θεωρίας και φαίνεται να οδηγεί σε ανιχνεύσιμες διαδικασίες μάθησης εμπλέκοντας τους μαθητές σε πρακτικές ανάλυσης και ερμηνείας δεδομένων, χρήσης γεωμετρικής θεωρίας, διατύπωσης επιχειρημάτων, σχεδιασμού λύσεων και παροχής εξηγήσεων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Bussi, M. G. B. & Maschietto, M. (2008). Machines as tools in teacher education. Στο D. Tirosh & T. Wood (Eds) *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education*, *Rotterdam* pp. 183–208. Rotterdam Sense Publisher.

Maschietto, M. (2005). The laboratory of mathematical machines of Modena. *Newsletter of the European Mathematical* Society, 57, 34-37.

ΧΑΡΤΙΝΑ ΧΕΙΡΟΠΟΙΗΤΑ ΚΟΥΤΙΑ

Σούφαρη Αθανασία

2ο Γυμνάσιο Αλμυρού

asoufari@gmail.com

Στα πλαίσια του Ευρωπαϊκού προγράμματος Mascil (mathematics and Science for life), σχεδιάστηκε και εφαρμόστηκε στη Β' τάξη του 2ου Γυμνασίου Αλμυρού μια πρωτότυπη διδασκαλία με βασικούς άξονες: 'Διερευνητικές δραστηριότητες' και 'Χώρος εργασίας'. Οι μαθητές ανέλαβαν ρόλο σχεδιαστή σε βιοτεχνία κυτιοποιίας, δεδομένου ότι τους ζητήθηκε να σχεδιάσουν χάρτινα κουτιά, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, για να συσκευάσουν χάντρες. Σε συνεργατικό περιβάλλον, με τη βοήθεια χειραπτικών μέσων και ψηφιακών εργαλείων διερεύνησαν καταστάσεις, ερμήνευσαν αποτελέσματα, ανακάλυψαν σχέσεις, δημιούργησαν (κουτιά) και επιχειρηματολόγησαν ώστε να τεκμηριώσουν τις επιλογές τους.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΟΧΟΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Το πρόγραμμα Mascil (http://www.mascil-project.eu/, http://noether.math.uoa.gr/mascil/gr/html/index.html) στοχεύει στη διάχυση της διερευνητικής διδασκαλίας και της μάθησης μέσα από τη σύνδεση της διδασκαλίας των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών με το χώρο εργασίας. Η διδασκαλία υλοποιήθηκε στο εργαστήριο Η/Υ και βιντεοσκοπήθηκε. Συμμετείχαν 21 μαθητές από δυο τμήματα της Β΄ Γυμνασίου που χωρίστηκαν σε 7 ομάδες των 3 ατόμων η καθεμιά. Ο χρόνος υλοποίησης ήταν 3 διδακτικές ώρες. Γνωστικό αντικείμενο: Στερεομετρία-Συναρτήσεις. Αρχικά δίνονται στους μαθητές δυο φύλλα χαρτιού (ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο) και τους ζητείται να κατασκευάσουν ένα κουτί κάνοντας κατάλληλες διπλώσεις. Στόχος της δραστηριότητας οι μαθητές να ανακαλύψουν ότι από ένα επίπεδο σχήμα (φύλλο χαρτιού) φτάνουμε σε ένα στερεό σχήμα (ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο) και τους τρόπους που επιτυγχάνεται αυτό. Κατόπιν, δίνεται στους μαθητές ένα τετράγωνο χαρτόνι διαστάσεων 24cm x 24cm και τους ζητείται να κατασκευάσουν κουτιά στα οποία θα συσκευάζονται χάντρες μικρών μεγεθών. Η λύση που προτείνεται από τους μαθητές, είναι να διπλωθούν και οι τέσσερις πλευρές του τετράγωνου φύλλου με ίδιο πλάτος που οδηγεί σε κουτί με βάση τετράγωνο. Το πλάτος της δίπλωσης δίνει το μήκος του ύψους ενώ η πλευρά της βάσης προσδιορίζεται συνάρτηση του ύψους. Η κάθε ομάδα αποφασίζει για το ύψος του κουτιού και παρουσιάζει την κατασκευή στην ολομέλεια της τάξης. Στόχος της δραστηριότητας είναι ο πειραματισμός των μαθητών με την κατασκευή κουτιών διαφόρων υψών, ώστε να κατανοήσουν το πρόβλημα. Κρίσιμη είναι η 3η δραστηριότητα στην εξέλιξη της διδασκαλίας. Οι μαθητές συζητούν και καταλήγουν ότι πρέπει το κουτί που θα κατασκευάσουν να χωράει όσο το δυνατόν περισσότερες χάντρες (μέγιστος όγκος). Συνεργάζονται οι ομάδες και συμπληρώνουν έναν πίνακα με το ύψος του κάθε κουτιού, την πλευρά της βάσης του, το εμβαδόν και τον όγκο του. Μεταφέρουν τα ζεύγη (ύψος - όγκος) σε σύστημα συντεταγμένων και με τη βοήθεια ψηφιακών εργαλείων, παρατηρούν τη γραφική παράσταση ύψους - όγκου του κουτιού, επαληθεύουν τα αποτελέσματα του πίνακα που είχαν συμπληρώσει ερμηνεύοντας τη γραφική παράσταση και βγάζουν τα πρώτα συμπεράσματα. Έχει ενδιαφέρον ότι με την επίδειξη δυο κουτιών, ένα ρηχό και ένα βαθύ, πολλοί μαθητές πίστευαν ότι όσο πιο ψηλό είναι ένα κουτί τόσο ποιο μεγάλο όγκο έχει. Ο Νίκος είχε την ιδέα να γεμίσουμε το ένα κουτί (ρηχό) με κατάλληλο υλικό και να το μεταφέρουμε στο άλλο (βαθύ). Έτσι διαπίστωσαν οι μαθητές ότι ο όγκος δεν εξαρτάται μόνο από το ύψος του κουτιού, αφού το ρηχό χωρούσε περισσότερο υλικό από το βαθύ. Αν το χαρτόνι είχε διαστάσεις α x α τότε ποιο θα ήταν το ύψος x του κουτιού με το μεγαλύτερο όγκο; Δίνοντας διαφορετικές τιμές στην πλευρά α του τετράγωνου χαρτονιού με τη βοήθεια αρχείου λογισμικού, κατέγραψαν τις τιμές του ύψους όταν ο όγκος γίνονταν μέγιστος και ανακάλυψαν ότι το κουτί με το μέγιστο όγκο ήταν αυτό που είχε ύψος $x=α/6$. Στόχος της δραστηριότητας είναι οι μαθητές να έρθουν σε επαφή με την έννοια της συνάρτησης μέσα από ένα πρόβλημα εργασίας, ένα πρόβλημα που να πείθει, και να ερμηνεύουν τη γραφική παράστασή της για να επιλύσουν ένα πρόβλημα μεγίστου. Στην 4η δραστηριότητα οι μαθητές κατασκευάζουν το καπάκι του κουτιού με χαρτόνι 24cm x 24cm που πρέπει να διαμορφώσουν κατάλληλα, ώστε να καλύπτει το κουτί ως τη μέση. Η κατασκευή αυτή δυσκόλεψε κάποιες ομάδες. Στην 5η δραστηριότητα, η κάθε ομάδα γράφει εισήγηση προς την διοίκηση της βιοτεχνίας την οποία παρουσιάζει στην ολομέλεια της τάξης.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Το φύλλο εργασίας, τα ψηφιακά εργαλεία και η δημιουργία κατάλληλων συνθηκών για εργασία σε μικρές ομάδες από την διδάσκουσα βοήθησαν στην επιτυχία της διδασκαλίας. Οι μαθητές ενθουσιάστηκαν με τα κουτιά που κατασκεύασαν. Διαπίστωσαν ότι η χρήση των σχολικών μαθηματικών σε συνδυασμό με τα ψηφιακά εργαλεία και χειραπτικά μέσα έδωσε λύση σ’ ένα πρόβλημα από το χώρο εργασίας. Αυτό τους προκάλεσε το έντονο ενδιαφέρον και ενίσχυσε τη θέση των μαθηματικών στη σκέψη τους.

ΝΟΕΡΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΛΟΓΟΣ

Συμεωνίδης Νικόλαος, Καλδρυμίδου Μαρία, Τάτσης Κωνσταντίνος

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

nsimeon@cc.uoi.gr, mkaldrim@uoi.gr, ktatsis@uoi.gr

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

Οι αντωνυμίες στο διάλογο κωδικοποιούν τη διαδραστική λειτουργία της γλώσσας και βοηθούν τον εκπαιδευτικό με το κύρος του και την διδακτική του επιρροή να καθοδηγήσει τους μαθητές σε μαθηματικές γενικεύσεις, μέσα από τη διδακτική διαδικασία (Rowland, 1999). Οι μαθητές με τη βοήθεια του διαλόγου μπορούν να αναπτύξουν λεξιλόγιο και να το χρησιμοποιήσουν με πολλαπλούς τρόπους, για παράδειγμα για να καταφέρουν να εισέλθουν σε ευρύτερες γνωστικές κοινότητες (Mercer, 2000).

ΚΕΝΤΡΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

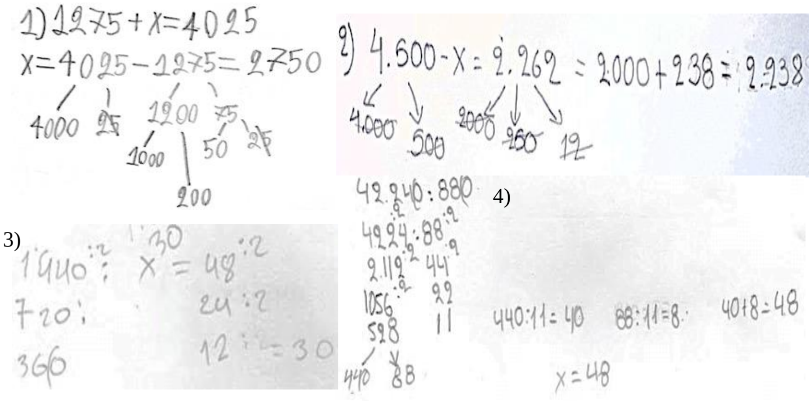
Λαμβάνοντας υπόψη τα στοιχεία της βιβλιογραφίας για τις αντωνυμίες, επιδιώχθηκε να απαντηθεί αν εγείρουν τις στρατηγικές νοερών υπολογισμών και αν αναδεικνύεται η συμβολή των νοερών υπολογισμών στις πράξεις μέσω της γενίκευσης που προήλθε από τον διάλογο.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΥ ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΘΗΚΑΝ

Μοιράστηκε στους μαθητές της Στ’ τάξης φύλλο αξιολόγησης με τέσσερα προβλήματα εξισώσεων, ένα για κάθε πράξη, παραλλαγές αντίστοιχων προβλημάτων του τετραδίου εργασιών. Το ενδιαφέρον για αυτά έγκειται στο γεγονός ότι προσέφεραν τη δυνατότητα χρήσης νοερών στρατηγικών. Ο δάσκαλος προέτρεψε τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν *«μερικούς από τους δικούς τους υπολογισμούς, τους εύκολους, τους γρήγορους στο νου, τις έξυπνες λύσεις, τις εύκολες πράξεις που μπορούσαν να τους βοηθήσουν»*. Στο συγκεκριμένο τμήμα από την αρχή του διδακτικού έτους, μέχρι και μέσα Ιανουαρίου, γινόταν δεκάλεπτη διδασκαλία νοερών υπολογισμών πριν την έναρξη του μαθήματος Μαθηματικών, με αλληλεπιδραστική προφορική εργασία με ολόκληρη την τάξη (Qualifications and Curriculum Authority, 1999).

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Οι μαθητές χρησιμοποίησαν στρατηγικές νοερών υπολογισμών αλλά και κάθετο αλγόριθμο. Στην διπλανή εικόνα (Εικ. 1), παρατίθενται αποσπασματικά στρατηγικές νοερών υπολογισμών και στα τέσσερα προβλήματα.



Εικ. 1: Στρατηγικές νοερών υπολογισμών

Στην προσπάθεια γενίκευσης της χρήσης των νοερών υπολογισμών μέσω του διαλόγου, οι μαθητές έθεσαν όρια και προϋποθέσεις. Σε ερώτηση αν μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι στρατηγικές παντού ή σε πράξεις που τις προκαλούν, οι μαθητές απάντησαν πως οι υπολογισμοί θα πρέπει να περιέχουν χαρακτηριστικά που να προκαλούν την χρήση των νοερών στρατηγικών, «*να έχουν εύκολους και όχι δύσκολους αριθμούς, να τελειώνουν σε 0 ή 5, να έχουν εύκολα κριτήρια διαιρετότητας, να σπάζουν εύκολα σε μικρότερους αριθμούς για ενδιάμεσες πράξεις*». Η παρούσα πρόταση φαίνεται να ενισχύει το υπάρχον θεωρητικό πλαίσιο. Το γλωσσικό εργαλείο που επιλέχθηκε ήταν οι αντωνυμίες, οι οποίες μαζί με την ανάπτυξη και τη χρήση του λεξιλογίου που μπορεί να περιλαμβάνει επίθετα (εύκολους, γρήγορους, έξυπνους), ουσιαστικά (νου, πράξεις), φαίνεται να συμβάλλουν στην ενεργοποίηση στρατηγικών υπολογισμών και στην ελεγχόμενη γενίκευσή τους. Πρόταση αποτελεί να διερευνηθούν ακόμα περισσότερο τα γλωσσικά εργαλεία μέσω του διαλόγου για μια ποιοτικότερη μαθησιακή διαδικασία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Mercer, N. (2000). *Words and Minds:How we use language to think together*. London: Routledge.

Qualifications and Curriculum Authority. (1999). Teaching Mental Calculation Strategies: guidance for teachers at key stages 1 and 2. London: QCA.

Rowland, T. (1999). Pronouns in mathematical talk: Power, vagueness, and generalisation. *For the Learning of Mathematics 19*(2), 19-26.

ΕΡΕΥΝΑ ΔΡΑΣΗΣ ΣΕ ΔΥΟ ΠΟΛΥΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΚΑΙ ΜΙΚΡΟΠΕΙΡΑΜΑΤΩΝ ΣΕ ΣΥΝΕΡΓΑΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Φακούδης Ευάγγελος

Γυμνάσιο Σουφλίου

fakoudis@sch.gr

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια πολλοί ερευνητές προτείνουν την εισαγωγή των αφηρημένων μαθηματικών εννοιών με χρήση μεταφορών (Lakoff & Núñes, 2000). Η χρησιμοποίηση μεταφορών για την εισαγωγή των αρνητικών αριθμών και των πράξεών τους, δημιουργεί πολλές φορές προβλήματα και παρανοήσεις. Αυτό που προτείνεται τα τελευταία χρόνια είναι η χρήση της αριθμογραμμής σε ένα αλγεβρικό πλαίσιο ή η χρήση διακριτών μοντέλων (Κολέζα, Φακούδης, 2009).

Κοινωνικοεποικοδομητικές και κοινωνικοπολιτισμικές προσεγγίσεις υποστηρίζουν πως η μάθηση εμπεριέχει κοινωνικές και πολιτισμικές διεργασίες . Η Sfard (1998), υποστηρίζει ότι όταν μελετούμε τις συνθήκες διδασκαλίας και μάθησης στη μαθηματική εκπαίδευση είναι απαραίτητο να εστιάζουμε στην ατομική κατανόηση αλλά ταυτόχρονα στα κοινωνικά πλαίσια και τις πρακτικές που αυτή λαμβάνει χώρα.

ΕΡΕΥΝΑ ΔΡΑΣΗΣ

Για τη διεξαγωγή της έρευνας υιοθετήθηκε η μεθοδολογία της έρευνας δράσης (Newman, 1998). Το βασικό χαρακτηριστικό της έρευνας δράσης είναι ότι έχει δυο διαλεκτικά αλληλοσχετιζόμενους στόχους. Την ανάπτυξη κατανόησης των τρεχουσών εκπαιδευτικών πρακτικών και το μετασχηματισμό των πρακτικών αυτών. Δύο πολυπολιτισμικά τμήματα με 30% και 50% μουσουλμάνους μαθητές αντίστοιχα, χωρίστηκαν για 26 διδακτικές ώρες σε ανομοιογενείς ομάδες (ως προς το φύλο, την επίδοση, το θρήσκευμα) των 4-5 ατόμων, μετά από κοινωνιόγραμμα. Οι μαθητές συμμετείχαν ενεργά στην έρευνα δράσης, αναφέροντας την άποψή τους και τις σκέψεις τους για την ποιότητα της συνεργασίας τους αλλά και τη συνολική πορεία της παρέμβασης. Χρησιμοποιήθηκαν πρωτότυπα φύλλα δραστηριοτήτων (https://goo.gl/92rtBt, 13/7/17) με την υποστήριξη ψηφιακών εργαλείων, στη λογική του νέου προγράμματος σπουδών. Τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν ήταν: (α) Ποιο ήταν το γνωστικό αποτέλεσμα της διδακτικής μας παρέμβασης σε σύγκριση με προηγούμενες επιδόσεις; (β) Ποιες ήταν οι απόψεις των μαθητών της πειραματικής μεθόδου διδασκαλίας για τον τρόπο που εργάστηκαν στη διάρκεια της έρευνας; Μετασχηματίστηκε και σε ποιο βαθμό η στάση τους για τα μαθηματικά;

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Από την ανάλυση των ερευνητικών εργαλείων (μαγνητοφωνήσεις, ερωτηματολόγια, ημερολόγιο καθηγητή, συνεντεύξεις, παρατήρηση μέσα στην τάξη) διαπιστώσαμε ότι: (α) υπήρξε σημαντική βελτίωση στην ενεργή συμμετοχή όλων των μαθητών στη διαδικασία της μάθησης, στην αλληλοβοήθεια και την υποστήριξη, στις επιδόσεις ιδίως των χαμηλής επίδοσης έως τότε μαθητών, και (β) οι μαθητές αναφέρουν προβλήματα στη μεταξύ τους συνεργασία η οποία όμως προοδευτικά και μετά από συνεχείς παρεμβάσεις γινόταν ολοένα και καλύτερη. Η στάση τους επίσης ως προς τα μαθηματικά φαίνεται να μετασχηματίζεται και να τα θεωρούν πιο ελκυστικά και ενδιαφέροντα.

Η μετάβαση από την παραδοσιακή προς μία συμμετοχική, συνεργατική, διερευνητική τάξη διαπιστώσαμε ότι δεν είναι εύκολη ούτε προφανής. Η οργάνωση της τάξης σε πραγματικά συνεργατικές ομάδες είναι μια επίπονη και συνεχής διαδικασία που έχει όμως σημαντικά θετικές επιπτώσεις σε γνωστικό, συναισθηματικό και ψυχολογικό επίπεδο. Η χρήση μοντέλων και μεταφορών, όταν λαμβάνει υπόψη τη διεθνή έρευνα, μπορεί να βοηθήσει σημαντικά στην εννοιολογική κατανόηση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Newman, J. (1998) *Tensions of Teaching: Beyond Tips to Critical Reflection*. Toronto/New York: Canadian Scholars' Press/Teachers College Press.

Lakoff, G., & Núñes, R. E. (2000). *Where mathematics comes from*. New York: Basic Books.

Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, *27*(2), 4-13.

Κολέζα, Ε. & Φακούδης, Ε. (2009). Το πρόβλημα της επιλογής πλαισίου για την εισαγωγή μαθηματικών εννοιών. Η περίπτωση της πρόσθεσης και αφαίρεση ρητών αριθμών στα νέα σχολικά εγχειρίδια. *Πρακτικά 3ου Πανελληνίου Συνεδρίου Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών: Μαθηματικής Εκπαίδευση και Διδακτικές Πρακτικές* (σελ. 373-382). Αθήνα: Νέες Τεχνολογίες.

ΕΡΕΥΝΑ ΔΡΑΣΗΣ ΣΕ ΕΝΑ ΣΥΝΕΡΓΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ

Φακούδης Ευάγγελος

Γυμνάσιο Σουφλίου

fakoudis@sch.gr

ΑΞΟΝΕΣ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Οι κοινωνικοπολιτισμικές θεωρήσεις αναγνωρίζουν πως οι παραδοσιακές ατομικές προσεγγίσεις είναι προσπάθειες μετάδοσης προς τους μαθητές της επιστημονικής κουλτούρας. Όμως, μια μετωπική -ατομικιστικής φύσης- πολιτισμική μετάδοση μπορεί να είναι υποστηρικτική για κάποιους, μάλλον λίγους μαθητές και να επιφέρει αντίθετα, μη επιθυμητά αποτελέσματα για όλους τους άλλους ιδιαίτερα αυτούς που δε διαθέτουν το απαραίτητο πολιτισμικό κεφάλαιο (Giroux, 1992).

Η έννοια της συνάρτησης δημιουργεί ένα πλούσιο πεδίο αναπαραστάσεων, ενοποιεί πολλές περιοχές των μαθηματικών, αλλά και άλλων γνωστικών πεδίων. Στα νέα Προγράμματα Σπουδών και τον Οδηγό του Εκπαιδευτικού (2010-14) όπως και στον εξορθολογισμό της σχολικής ύλης του 2016-17, για τη διδασκαλία της συνάρτησης στο Γ΄ κύκλο, έχει κεντρικό ρόλο η μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων, η διερεύνηση των διαφορετικών τρόπων αναπαράστασής της και η μετάβαση από μία μορφή σε άλλη (Οδηγός Γ΄ κύκλου για τον εκπαιδευτικό; 2012). Το υπάρχον σχολικό βιβλίο δεν μπορεί να υποστηρίξει κατά την άποψή μας τα νέα προγράμματα σπουδών, γι αυτό κατασκευάσαμε φύλλα εργασιών – δραστηριοτήτων (Φακούδης, Ε.; 2017) με την υποστήριξη ψηφιακών εργαλείων από το Φωτόδεντρο και το GeogebraTube, για τις ανάγκες της διδακτικής παρέμβασης.

ΕΡΕΥΝΑ ΔΡΑΣΗΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Για τη διεξαγωγή της έρευνας υιοθετήθηκε η μεθοδολογία της έρευνας δράσης (Newman, 1998) που έχει δύο αλληλοσχετιζόμενους στόχους, την ανάπτυξη κατανόησης των τρεχουσών εκπαιδευτικών πρακτικών και το μετασχηματισμό των πρακτικών αυτών. Η έρευνα δράσης εφαρμόστηκε σε ένα πολυπολιτισμικό τμήμα της Β΄ Γυμνασίου (63% χριστιανοί-37% μουσουλμάνοι) για 22 διδακτικές ώρες στο κεφάλαιο των συναρτήσεων. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε ανομοιογενείς ομάδες (ως προς το φύλο, την επίδοση, το θρήσκευμα) των 4-5 ατόμων, μετά από κοινωνιόγραμμα και είχαν ενεργή συμμετοχή στις αποφάσεις σχετικά με την πορεία της έρευνας δράσης. Τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν ήταν: (α) Θα υπάρχει διαφορά ως προς τη γνωστική επίτευξη σε σχέση με προηγούμενες επιδόσεις; (β) Θα υπάρχουν αλλαγές ως προς τη συμμετοχή των μαθητών, ως προς τις μεταξύ τους σχέσεις, ως προς το πόσο ικανοί αισθάνονται στα μαθηματικά και πόσο ενδιαφέροντα τους φαίνονται;

Η ανάλυση των απομαγνητοφωνήσεων, των γραπτών ερωτηματολογίων, του ημερολόγιου του καθηγητή, των συγκριτικών τεστ –διαγωνισμάτων και των συνεντεύξεων από τους μαθητές, μας έδειξε ότι: (α) οι μαθητές είχαν καλύτερα αποτελέσματα σε δύο γραπτές δοκιμασίες σε σύγκριση με επτά προηγούμενες και βελτιώθηκαν οι επιδόσεις των χαμηλής επίδοσης μαθητών, αλλά η διαφορά μεταξύ χριστιανών – μουσουλμάνων παρέμεινε στατιστικά σημαντική, (β) για πρώτη φορά πήραν το λόγο στην ολομέλεια της τάξης μαθητές που δεν είχαν μιλήσει ποτέ στο παραδοσιακό μάθημα, βελτιώθηκαν σταδιακά (μετά από δράσεις) οι κοινωνιογνωστικοί τους ρόλοι. Οι ίδιοι αναφέρουν ότι βελτιώθηκαν οι μεταξύ τους σχέσεις, ότι αισθάνονται πιο ικανοί και τους φαίνονται πιο ενδιαφέροντα στα μαθηματικά και επιθυμούν να συνεχιστεί αυτός ο τρόπος οργάνωσης της τάξης..

Παρ' όλα αυτά, υπήρχαν ομάδες που δεν κατάφεραν να λειτουργήσουν στο επιθυμητό επίπεδο, κάτι που θα επιχειρήσουμε να αντιμετωπίσουμε με τη συμμετοχή των μαθητών την επόμενη σχολική χρονιά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Giroux, H. (1992). *Border crossings: Cultural workers and the politics of education.* New York: Routledge.

Newman, J. (1998) *Tensions of Teaching: Beyond Tips to Critical Reflection.* Toronto/New York: Canadian Scholars' Press/Teachers College Press.

Οδηγός Γ΄ κύκλου για τον εκπαιδευτικό (2012). *Ψηφιακό σχολείο* http://ebooks.edu.gr/new/ps.php (προσπέλαση 14/7/17).

Φακούδης, Ε. (2017), *Διδακτικό υλικό που χρησιμοποιήθηκε στη ΔΠ και αναρτήθηκε στο Φωτόδεντρο e-yliko χρηστών* http://photodentro.edu.gr/ugc/(έξι μαθησιακά αντικείμενα στο https://goo.gl/92rtBt, προσπέλαση 14/7/17).

ΣΧΕΔΙΑΖΟΝΤΑΣ ΣΥΝΕΡΓΑΤΙΚΑ ΕΝΑ ΥΠΑΙΘΡΙΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΠΑΡΚΙΝΓΚ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΕΡΓΑΛΕΙΩΝ

Φακούδης Ευάγγελος

Γυμνάσιο Σουφλίου

fakoudis@sch.gr

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στα πλαίσια του προγράμματος "Ανακαλύπτοντας τα Μαθηματικά και τις Φυσικές επιστήμες στη καθημερινή ζωή και στους χώρους εργασίας" (Mascil http://noether.math.uoa.gr/mascil/gr/html/index.html) συμμετείχαμε εκπαιδευτικοί σε μία εξ' αποστάσεως ομάδα, μια από τις ομάδες επιμόρφωσης του έργου. Οι δράσεις περιελάμβαναν συνεργασία στον σχεδιασμό δραστηριοτήτων, εφαρμογή στην τάξη και συζήτηση/ αναστοχασμό σχετικά με την εμπειρία εφαρμογής. Η έρευνα θεωρεί ως κρίσιμο το ζήτημα της ιδιοποίησης του υλικού από τον εκπαιδευτικό, που περιλαμβάνει την ενεργό εμπλοκή του σε διαδικασίες προσαρμογής, τροποποιήσεων και μετασχηματισμών, ανάλογα με το διδακτικό του σχεδιασμό, τις επαγγελματικές του εμπειρίες (π.χ. συμμετοχή σε κοινότητες) και την εμπειρία της χρήσης του υλικού στην διδασκαλία (Laborde, 2001).

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ

Η διδακτική παρέμβαση εφαρμόστηκε για 7 διδακτικές ώρες σε ένα τμήμα της Β΄ Γυμνασίου. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε ανομοιογενείς ομάδες (ως προς το φύλο και την μέχρι τότε επίδοση στα μαθηματικά) των πέντε ατόμων, όπου καταγράφονταν (ήχος, εικόνα) η εργασία τους στον υπολογιστή και βιντεοσκοπούνταν ταυτόχρονα το σύνολο της τάξης. Χρησιμοποιήθηκε ο διαδραστικός πίνακας της τάξης και οι υπολογιστές της κάθε ομάδας με ψηφιακό υλικό που κατασκευάστηκε από τον εκπαιδευτικό ή διαμορφώθηκε από το υλικό που κατατέθηκε στην ομάδα του Mascil. Τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν ήταν: (i) ποια θα είναι η ανταπόκριση των μαθητών σε ένα ομαδοσυνεργατικό περιβάλλον που τα μαθηματικά προβλήματα θα προέρχονται από την πραγματική ζωή και το χώρο εργασίας; και (ii) θα μπορέσουν να ερμηνεύσουν σωστά τα αποτελέσματα των ψηφιακών εργαλείων, για να απαντήσουν στις ερωτήσεις των δραστηριοτήτων;

ΟΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΦΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Η διδακτική παρέμβαση χωρίστηκε σε 4 διακριτές φάσεις. Η 1η φάση ήταν εισαγωγική για την κατανόηση της φύσης του προβλήματος. Στη 2η φάση διερεύνησαν οι μαθητές τον αριθμό των θέσεων στάθμευσης που χωρούν κατά πλάτος στα άκρα του οικοπέδου (θέσεις μονές). Στην 3η φάση διερεύνησαν τις συνολικές θέσεις ενός παρκινγκ όταν έχει δύο μονές θέσεις στα άκρα και στο εσωτερικό διπλές θέσεις. Στην 4η φάση διερευνήθηκαν οι αποδοτικότερες θέσεις για πλάτος χ και μήκος μ και στη συνέχεια την αποδοτικότερη λύση όταν το εμβαδόν του ορθογώνιου οικοπέδου είναι σταθερό (Φακούδης, 2017).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από την παρατήρηση στην τάξη, το βίντεο, τις καταγραφές οθόνης εικόνας και ήχου των υπολογιστών που είχε η κάθε ομάδα και τις απόψεις των μαθητών για τη διδακτική παρέμβαση, έγινε σαφές ότι η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών κατανοούσε τα προβλήματα, σκεφτόταν και αλληλεπιδρούσε πάνω σ' αυτά και οικειοποιούνταν τις μαθηματικές λύσεις που έδινε η ομάδα τους. Παρ' ότι το μέσο γνωστικό επίπεδο των μαθητών ήταν χαμηλό και τα μαθηματικά προβλήματα ιδιαίτερα δύσκολα γι αυτήν την ηλικία όπως και η χρήση και ερμηνεία των αποτελεσμάτων των ψηφιακών εργαλείων, θεωρούμε ότι οι μαθητές ανταποκρίθηκαν πολύ θετικά. Σημαντικό ρόλο σε όλο το σχεδιασμό και την εφαρμογή της παρέμβασης αποτέλεσε η αλληλεπίδραση μεταξύ των εκπαιδευτικών που αναπτύχθηκε μέσα στην εξ' αποστάσεως ομάδα. Η εμπειρία αυτή ενίσχυσε την άποψή μας, ότι η συνεργασία μεταξύ των εκπαιδευτικών και η συμμετοχή τους σε κοινότητες υπό την εποπτεία ενός καθοδηγητή – εμψυχωτή μπορεί να προσφέρει σημαντικά στην αλλαγή κατεύθυνσης της μαθηματικής εκπαίδευσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Laborde, C. (2001). The use of new technologies as a vehicle for restructuring teachers' mathematics. Στο T. Cooney & F. L. Lin (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (σσ. 87-109). London: Kluwer Academic Publishers.

MASCIL Project. (2013). *Ψηφιακή πλατφόρμα του ΕΚΠΑ για το Mascil και οδηγός για τους εκπαιδευτικούς*. Ανάκτηση από: http://noether.math.uoa. gr/mascil/gr/html/, και http://noether.math.uoa.gr/mascil/gr/docs/ guidelines.doc , 10/07/2017)

Φακούδης Ε. (2017). *Ψηφιακό αποθετήριο με το υλικό της διδακτικής παρέμβασης* (Διαθέσιμο: https://www.dropbox.com/s/3301wkj58itlku3/ Dimotikoparking-Fakoudis.rar?dl=0, 10/07/2017).

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

Ο

Π

Ρ

Σ

Τ

Φ

Χ

Ψ