Ανάλυση I – Ασκήσεις

1. Μια οικογένεια $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ λέγεται **δακτύλιος** αν είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες ενώσεις και διαφορές (αν $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{R}$ τότε $E_1 \cup \ldots \cup E_n \in \mathcal{A}$, και αν $E, F \in \mathcal{R}$ τότε $E \setminus F \in \mathcal{R}$). Ένας δακτύλιος που είναι κλειστός ως προς αριθμήσιμες ενώσεις λέγεται **σ-δακτύλιος**. Αποδείξτε ότι:

(α) Οι δακτύλιοι (αντίστοιχα, οι σ-δακτύλιοι) είναι κλειστοί ως προς πεπερασμένες (αντίστοιχα, αριθμήσιμες) τομές.

(β) Αν $\mathcal{R}$ είναι ένας δακτύλιος (αντίστοιχα, σ-δακτύλιος), τότε ο $\mathcal{R}$ είναι άλγεβρα (αντίστοιχα, σ-άλγεβρα) αν και μόνο αν $X \in \mathcal{R}$.

(γ) Αν ο $\mathcal{R}$ είναι σ-δακτύλιος, τότε το $\{E \subseteq X : E \in \mathcal{R} \text{ ή } E^c \in \mathcal{R}\}$ είναι σ-άλγεβρα.

(δ) Αν ο $\mathcal{R}$ είναι σ-δακτύλιος, τότε το $\{E \subseteq X : E \cap F \in \mathcal{R} \text{ για κάθε } F \in \mathcal{R}\}$ είναι σ-άλγεβρα.

2. Έστω $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Αποδείξτε ότι

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcup \big\{\sigma(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}\ ,\ \mathcal{F} \text{ αριθμήσιμο}\big\}.$$

[*Υπόδειξη:* Αποδείξτε ότι η οικογένεια στο δεξιό μέλος είναι σ-άλγεβρα.]

3. Έστω $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στο X που έχει άπειρα στοιχεία. Αποδείξτε ότι:

(α) Η $\mathcal{A}$ περιέχει μια άπειρη ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων.

(β) Η $\mathcal{A}$ έχει υπεραριθμήσιμα το πλήθος στοιχεία.

4. (α) Έστω $\mathcal{A}$ μια σ–άλγεβρα στο X και $f : X \to Y$. Αποδείξτε ότι η οικογένεια

$$\{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

είναι σ–άλγεβρα στο Y.

(β) Έστω $\mathcal{C}$ μια σ–άλγεβρα στο Y και $\mathcal{E}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του Y για την οποία ισχύει $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{C}$. Αποδείξτε ότι αν $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε $B \in \mathcal{E}$, τότε $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε $B \in \mathcal{C}$.

(γ) Έστω (X, d) και (Y, τ) μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής. Αποδείξτε ότι: αν το B είναι Borel σύνολο στον Y, τότε το $f^{-1}(B)$ είναι Borel σύνολο στον X.

5. (α) Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο του X είναι G_δ σύνολο και κάθε ανοικτό υποσύνολο του X είναι F_σ σύνολο.

(β) Δώστε παράδειγμα συνόλου Borel που δεν είναι G_δ-σύνολο ούτε F_σ-σύνολο.

(γ) Έστω A και B κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$ δεν είναι απαραίτητα κλειστό. Αποδείξτε όμως ότι είναι πάντα F_σ-σύνολο.

6. (α) Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το $\{x \in \mathbb{R}^n\ :\ \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } x\}$ είναι G_δ σύνολο.

(β) Έστω $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις $(k = 1, 2, \ldots)$. Αποδείξτε ότι το

$$\{x \in \mathbb{R}^n\ :\ \text{υπάρχει το } \lim_{k\to\infty} f_k(x)\}$$

είναι $F_{\sigma\delta}$ σύνολο, δηλαδή, αριθμήσιμη τομή F_σ συνόλων.

7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αν $(E_n)_n$ είναι μια ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$, ορίζουμε

$$\limsup_n E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n,$$

$$\liminf_n E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n.$$

(α) Αποδείξτε ότι

$$\limsup_n E_n = \{x \in X : x \in E_n \text{ για άπειρα } n\},$$
$$\liminf_n E_n = \{x \in X : x \in E_n \text{ για όλα εκτός από πεπερασμένα } n\}.$$

(β) Αποδείξτε ότι:

(i) $\mu\left(\liminf_n A_n\right) \leqslant \liminf_n \mu(A_n)$.

(ii) Αν $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$ τότε $\limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)$.

(iii) (Λήμμα Borel-Cantelli) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ τότε $\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0$.

8. Έστω $\{\mu_n\}$ μια αύξουσα ακολουθία μέτρων στον $(X, \mathcal{A})$: δηλαδή, για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\mu_n(A) \leqslant \mu_{n+1}(A)$. Ορίζουμε

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A) \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Αποδείξτε ότι το μ είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$.

9. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ πεπερασμένος χώρος μέτρου.

(α) Αν $E, F \in \mathcal{A}$ και $\mu(E \triangle F) = 0$, αποδείξτε ότι $\mu(E) = \mu(F)$.

(β) Λέμε ότι $E \sim F$ αν $\mu(E \triangle F) = 0$. Αποδείξτε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στη $\mathcal{A}$.

(γ) Αν $E, F \in \mathcal{A}$, ορίζουμε $\rho(E, F) = \mu(E \triangle F)$. Αποδείξτε ότι $\rho(E, G) \leqslant \rho(E, F) + \rho(F, G)$, άρα η ρ ορίζει μια μετρική στο χώρο $\mathcal{A}/\sim$ των κλάσεων ισοδυναμίας.

10. Έστω $\mathcal{F}$ μια άλγεβρα στο X και έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \sigma(\mathcal{F}))$. Αποδείξτε ότι για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{F})$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F \in \mathcal{F}$ ώστε $\mu(A \triangle F) < \varepsilon$, όπου $A \triangle F = (A \setminus F) \cup (F \setminus A)$ είναι η συμμετρική διαφορά των A και F.

11. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ πεπερασμένος χώρος μέτρου. Υποθέτουμε ότι το σύνολο τιμών του μ είναι άπειρο.

(α) Για κάθε $E \in \mathcal{A}$ ορίζουμε

$$G(E) = \{\mu(F) : F \in \mathcal{A}, F \subseteq E\}.$$

Αποδείξτε ότι αν το $G(E)$ είναι άπειρο και $A \in \mathcal{A}$, $A \subseteq E$, τότε είτε το $G(A)$ ή το $G(E \setminus A)$ είναι άπειρο.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει άπειρη ακολουθία (E_n) ξένων ανά δύο συνόλων στη $\mathcal{A}$, με $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$ και $\mu(E_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $E \in \mathcal{A}$ με $0 < \mu(E) < \varepsilon$.

(δ) Αντίστροφα, αποδείξτε ότι αν για κάποιον πεπερασμένο χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ισχύει το (γ), τότε το σύνολο τιμών του μ είναι άπειρο.

12. Έστω μ ένα μέτρο στην Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ του $\mathbb{R}$ με $\mu(\mathbb{R}) = 1$. Αποδείξτε ότι υπάρχει κλειστό υποσύνολο F του $\mathbb{R}$ με $\mu(F) = 1$ και την εξής ιδιότητα: για κάθε κλειστό σύνολο E που περιέχεται γνήσια στο F ισχύει $\mu(F) < 1$. [*Υπόδειξη:* Αν θέλετε, χρησιμοποιήστε το λήμμα του Zorn.]

13. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου.

(α) Αν $\{A_i\}_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια ξένων στοιχείων της $\mathcal{A}$, αποδείξτε ότι για κάθε $E \in \mathcal{A}$ το σύνολο $\{i \in I : \mu(E \cap A_i) > 0\}$ είναι αριθμήσιμο.

(β) Αν $\mathcal{F}$ είναι υποοικογένεια της $\mathcal{A}$ ξένων ανά δύο συνόλων ώστε $\mu(F) > 0$ για κάθε $F \in \mathcal{F}$, αποδείξτε ότι η $\mathcal{F}$ είναι αριθμήσιμη.

14. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αν το μ είναι ημιπεπερασμένο, αποδείξτε ότι για κάθε $C > 0$ και κάθε $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) = \infty$ υπάρχει $F \subset E$, $F \in \mathcal{A}$, τέτοιο ώστε $C < \mu(F) < \infty$.

15. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Ορίζουμε μ_0 στη $\mathcal{A}$, θέτοντας

$$\mu_0(E) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq E \text{ και } \mu(F) < \infty\}.$$

Αποδείξτε ότι:

(α) Το μ_0 είναι ημιπεπερασμένο μέτρο (το «ημιπεπερασμένο μέρος» του μ).

(β) Αν το μ είναι ημιπεπερασμένο, τότε $\mu_0 = \mu$.

(γ) Υπάρχει μέτρο ν στη $\mathcal{A}$ που παίρνει μόνο τις τιμές 0 και ∞, τέτοιο ώστε $\mu = \mu_0 + \nu$.

16. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Λέμε ότι το $E \subseteq X$ είναι *τοπικά μετρήσιμο* αν $E \cap A \in \mathcal{A}$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \infty$. Ορίζουμε

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{E \subseteq X \mid E \text{ τοπικά μετρήσιμο}\}.$$

(α) Αποδείξτε ότι $\tilde{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$ και ότι η $\tilde{\mathcal{A}}$ είναι σ–άλγεβρα. Αν $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ τότε λέμε ότι ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι *κορεσμένος χώρος μέτρου.*

(β) Αποδείξτε ότι αν το μ είναι σ–πεπερασμένο τότε $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.

(γ) Ορίζουμε $\tilde{\mu}$ στην $\tilde{\mathcal{A}}$ θέτοντας $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ αν $A \in \mathcal{A}$ και $\tilde{\mu}(A) = \infty$ αν $A \in \tilde{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A}$. Αποδείξτε ότι ο $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ είναι κορεσμένος χώρος μέτρου.

17. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ πλήρης χώρος μέτρου. Αν για κάποια $A \in \mathcal{A}$ και $B \subseteq X$ έχουμε $A \triangle B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A \triangle B) = 0$, αποδείξτε ότι $B \in \mathcal{A}$ και $\mu(B) = \mu(A)$.

18. Έστω X μη κενό σύνολο. Ορίζουμε $\mu^*(\emptyset) = 0$ και $\mu^*(E) = 1$ για κάθε μη κενό $E \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο στο X και βρείτε όλα τα μ^*–μετρήσιμα υποσύνολα του X.

19. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{C}$ που αποτελείται από το κενό σύνολο και από όλα τα δισύνολα φυσικών αριθμών. Ορίζουμε $\tau(\emptyset) = 0$ και $\tau(\{m, n\}) = 2$ για κάθε $\{m, n\} \in \mathcal{C}$. Η $\mathcal{C}$ είναι σ–κάλυψη του $\mathbb{N}$, οπότε η τ επάγει ένα εξωτερικό μέτρο μ^* στο $\mathbb{N}$. Υπολογίστε το $\mu^*(E)$ για κάθε $E \subseteq \mathbb{N}$ και βρείτε όλα τα μ^*–μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{N}$.

20. Για κάθε $E \subseteq \mathbb{N}$ ορίζουμε $\varphi(E) = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\mathrm{card}(E \cap \{1, \ldots, n\})$ (όπου $\mathrm{card}(A)$ είναι ο πληθάριθμος του A). Εξετάστε αν η φ είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{N}$.

21. Έστω μ^* εξωτερικό μέτρο στο X. Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία μ^*–μετρήσιμων υποσυνόλων του X, αποδείξτε ότι για κάθε $E \subseteq X$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n \cap E) = \mu^*\big(\cup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E)\big).$$

22. Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ μια άλγεβρα. Γράφουμε $\mathcal{A}_\sigma$ για την οικογένεια όλων των αριθμήσιμων ενώσεων στοιχείων της $\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ για την οικογένεια όλων των αριθμήσιμων τομών στοιχείων της $\mathcal{A}_\sigma$. Έστω μ_0 ένα προμέτρο στην $\mathcal{A}$ και μ^* το αντίστοιχο εξωτερικό μέτρο. Αποδείξτε τα εξής.

(α) Για κάθε $E \subseteq X$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}_\sigma$ τέτοιο ώστε $E \subseteq A$ και $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(E) + \varepsilon$.

(β) Αν $\mu^*(E) < \infty$, τότε το E είναι μ^*-μετρήσιμο αν και μόνο αν υπάρχει $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ τέτοιο ώστε $E \subseteq B$ και $\mu^*(B \setminus E) = 0$.

(γ) Αν το μ_0 είναι σ-πεπερασμένο, τότε στο (β) δεν χρειάζεται να κάνουμε την υπόθεση $\mu^*(E) < \infty$.

23. Έστω μ^* το εξωτερικό μέτρο που επάγεται στο X από το **πεπερασμένο** προμέτρο μ_0. Για κάθε $E \subseteq X$ ορίζουμε το εσωτερικό μέτρο $\mu_*(E)$ του E από τη σχέση

$$\mu_*(E) = \mu_0(X) - \mu^*(E^c).$$

Αποδείξτε ότι το E είναι μ^*-μετρήσιμο αν και μόνο αν $\mu^*(E) = \mu_*(E)$.

24. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Για κάθε $E \subseteq X$ ορίζουμε

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(A) \mid A \in \mathcal{A},\, E \subseteq A\}.$$

(α) Αποδείξτε ότι το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο στο X.

(β) Έστω $\overline{\mu}$ το μέτρο που επάγεται από το μ^* στη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}_{\mu^*}$ των μ^*-μετρήσιμων συνόλων. Αν το αρχικό μέτρο μ είναι σ–πεπερασμένο, αποδείξτε ότι ο $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \overline{\mu})$ είναι η πλήρωση του $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

25. Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ και μ^* το εξωτερικό μέτρο που επάγεται από το μ στο $\mathcal{P}(X)$. Υποθέτουμε ότι $\mu^*(E) = \mu^*(X)$ για κάποιο $E \subseteq X$ (αυτό δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι $E \in \mathcal{A}$).

(α) Αποδείξτε ότι αν $A, B \in \mathcal{A}$ και $A \cap E = B \cap E$, τότε $\mu(A) = \mu(B)$.

(β) Θέτουμε $\mathcal{A}_E = \{A \cap E : A \in \mathcal{A}\}$, και ορίζουμε $\nu : \mathcal{A}_E \to [0, \infty]$ με $\nu(A \cap E) = \mu(A)$. Αποδείξτε ότι η $\mathcal{A}_E$ είναι σ-άλγεβρα στο E και ότι το ν είναι (καλά ορισμένο) μέτρο στην $\mathcal{A}_E$.

26. Έστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα και δεξιά συνεχής συνάρτηση. Αν μ_F είναι το αντίστοιχο Borel μέτρο, αποδείξτε ότι: για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, $\mu_F(\{a\}) = F(a) - F(a-)$, $\mu_F([a, b)) = F(b-) - F(a-)$, $\mu_F([a, b]) = F(b) - F(a-)$, και $\mu_F((a, b)) = F(b-) - F(a)$.

27. Έστω μ^* ένα εξωτερικό μέτρο στο X και έστω μ το επαγόμενο μέτρο στη σ–άλγεβρα $\mathcal{A}_{\mu^*}$ των μ^*–μετρήσιμων συνόλων. Αν $E, G \subseteq X$ τότε λέμε ότι το G είναι μ^*–**μετρήσιμο κάλυμα** του E αν:

$E \subseteq G$, $G \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ και για κάθε $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ με $A \subseteq G \setminus E$ ισχύει $\mu(A) = 0$.

(α) Αποδείξτε ότι αν G_1, G_2 είναι δύο μ^*–μετρήσιμα καλύματα του ιδίου $E \subseteq X$, τότε $\mu(G_1 \triangle G_2) = 0$, και συνεπώς, $\mu(G_1) = \mu(G_2)$.

(β) Υποθέτουμε ότι $E \subseteq G$, $G \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ και $\mu^*(E) = \mu(G) < +\infty$. Αποδείξτε ότι το G είναι μ^*–μετρήσιμο κάλυμα του E.

28. Λέμε ότι ένα $E \subseteq \mathbb{R}$ έχει *σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο* αν για κάθε $\alpha > 0$ το σύνολο $\{x \in E : |x| > \alpha\}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Ορίζουμε $\mu^*(E) = 0$ αν το E είναι αριθμήσιμο, $\mu^*(E) = 1$ αν το E είναι υπεραριθμήσιμο αλλά δεν έχει σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο, και $\mu^*(E) = \infty$ αν το E έχει σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο. Αποδείξτε ότι το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{R}$ και ότι

$$\mathcal{A}_{\mu^*} = \{A \subseteq \mathbb{R} \,|\, A \text{ αριθμήσιμο ή } A^c \text{ αριθμήσιμο}\}.$$

Είναι σωστό ότι κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ έχει μετρήσιμο κάλυμα;

29. (α) Έστω E Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $m(E) > 0$. Αποδείξτε ότι το E περιέχει ένα μη μετρήσιμο σύνολο.

(β) Έστω E Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $m(E) > 0$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\alpha \in (0, 1)$ υπάρχει ανοιχτό διάστημα I τέτοιο ώστε $m(E \cap I) > \alpha m(I)$.

(γ) Έστω E Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $m(E) > 0$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $E - E := \{x - y : x, y \in E\}$ περιέχει ένα διάστημα με κέντρο το 0. [*Υπόδειξη:* Από την προηγούμενη άσκηση, υπάρχει ανοιχτό διάστημα I τέτοιο ώστε $m(E \cap I) > 3m(I)/4$.]

(δ) Έστω $N \subset \mathbb{R}$ με $m(N) = 0$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $Z = \{x^2 : x \in N\}$ έχει μέτρο $m(Z) = 0$.

30. (α) Έστω $X \neq \emptyset$. Έστω $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στο X και $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ πεπερασμένα προσθετική συνάρτηση (παρατηρήστε ότι $\mu(X) < \infty$ από την υπόθεση). Αποδείξτε ότι η μ είναι αριθμήσιμα προσθετική αν και μόνο αν ισχύει το εξής: αν (A_n) είναι φθίνουσα ακολουθία συνόλων της $\mathcal{A}$ με $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ τότε $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

(β) Έστω (X, d) τοπικά συμπαγής μετρικός χώρος και $\mathcal{B}(X)$ η Borel σ-άλγεβρα του X. Έστω $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, \infty)$ πεπερασμένα προσθετική συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq B, K \text{ συμπαγές}\}$$

για κάθε $B \in \mathcal{B}(X)$. Αποδείξτε ότι η μ είναι αριθμήσιμα προσθετική.

31. Έστω μ μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες: (α) $\mu([0,1]) = 1$ και (β) $\mu(E) = \mu(x+E)$ για κάθε $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $x \in \mathbb{R}$. Είναι σωστό ότι το μ συμπίπτει με το μέτρο Lebesgue;

32. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ πεπερασμένος χώρος μέτρου με την εξής ιδιότητα: αν $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) > 0$ τότε υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ με $B \subset A$ και $0 < \mu(B) < \mu(A)$. Αποδείξτε ότι το σύνολο τιμών του μ είναι το $[0, \mu(X)]$. Δηλαδή, για κάθε $t \in [0, \mu(X)]$ υπάρχει $C \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $\mu(X) = t$.

33. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Ένα εξωτερικό μέτρο μ_* στο $\mathcal{P}(X)$ λέγεται **μετρικό εξωτερικό μέτρο** αν ικανοποιεί το εξής: αν $E_1, E_2 \subseteq X$ και $\mathrm{dist}(E_1, E_2) > 0$, τότε $\mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2)$. Αποδείξτε ότι, τότε, κάθε $B \in \mathcal{B}(X)$ είναι μ^*-μετρήσιμο. Συνεπώς, ο περιορισμός του μ^* στην $\mathcal{B}(X)$ είναι μέτρο.

34. Έστω $\alpha > 0$. Για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\mu_\alpha^*(E) = \lim_{\delta \to 0^+} \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{diam}(F_k))^\alpha : E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k, \mathrm{diam}(F_k) \leqslant \delta \ \text{ για κάθε } k \geqslant 1 \right\}.$$

Αποδείξτε ότι το μ_α^* είναι εξωτερικό μέτρο και ικανοποιεί το εξής: αν E_1, E_2 είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $\mathrm{dist}(E_1, E_2) > 0$, τότε $\mu_\alpha^*(E_1 \cup E_2) = \mu_\alpha^*(E_1) + \mu_\alpha^*(E_2)$.

35. Έστω E και F δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $E \subset F$ και $m(E) < m(F)$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\alpha \in \big(m(E), m(F)\big)$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές σύνολο K ώστε $E \subset K \subset F$ και $m(K) = \alpha$.

36. Έστω E και F δύο Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $m(E) > 0$ και $m(F) > 0$. Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$E + F = \{x + y : x \in E, \, y \in F\}$$

περιέχει διάστημα.

37. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < m(E) < \infty$.

(α) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{t \to 0} m(E \cap (E + t)) = m(E).$$

(β) Αποδείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $x, s \in \mathbb{R}$ ώστε

$$x, x + s, x + 2s, \ldots, x + (k-1)s \in E.$$

38. Έστω $A \subset \mathbb{R}$ με $m(A) > 0$. Αποδείξτε ότι

$$m\big(\mathbb{R} \setminus (A + \mathbb{Q})\big) = 0.$$

39. Αποδείξτε ότι το σύνολο των $x \in [0, 2\pi)$ για τα οποία η ακολουθία $\{\sin(2^n x)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει έχει μηδενικό μέτρο Lebesgue.

40. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι: αν $m(E) > 0$ και για κάθε $x, y \in E$ έπεται ότι $\frac{1}{2}(x + y) \in E$, τότε το E έχει μη κενό εσωτερικό.

41. Κατασκευάστε ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq [0,1]$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε διάστημα $J \subseteq [0,1]$,

$$m(J \cap E) > 0 \quad \text{και} \quad m(J \setminus E) > 0.$$

42. Έστω $\{J_1, \ldots, J_N\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο φραγμένων ανοικτών διαστημάτων στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $s_1, \ldots, s_n \in \{1, \ldots, N\}$ τέτοια ώστε τα $J_{s_1}, \ldots, J_{s_n}$ να είναι ξένα ανά δύο και

$$m(J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_N) \leqslant 2m(J_{s_1} \cup J_{s_2} \cup \cdots \cup J_{s_n}).$$

43. Έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία διακεκριμένων Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$. Για κάθε $k \geqslant 1$ θεωρούμε το σύνολο G_k των $x \in \mathbb{R}$ τα οποία ανήκουν σε ακριβώς k από τα σύνολα A_n. Αποδείξτε ότι κάθε G_k είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο, και ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} km(G_k) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

44. Έστω $A \subset [0,1]$ τέτοιο ώστε $m^*(A) + m^*([0,1] \setminus A) = 1$. Αποδείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο.

45. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ υπάρχει ανοικτό πυκνό $U \subset [0,1]$ με $m(U) < \varepsilon$ και $m(\partial(U)) > 1 - \varepsilon$, όπου $\partial(U)$ είναι το σύνορο του U.

46. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και $E \subseteq [0,1]$ το σύνολο των x στα οποία υπάρχει η παράγωγος $f'(x)$. Αποδείξτε ότι αν $m(E) = 0$ τότε $m(f(E)) = 0$.

47. Για κάθε $A \in \mathcal{M}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\rho(A,x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{m(A \cap (x-t, x+t))}{2t},$$

αν αυτό το όριο υπάρχει. Ο $\rho(A,x)$ είναι η *μετρική πυκνότητα* του A στο σημείο x.

(α) Αποδείξτε ότι $\rho(\mathbb{Q}, x) = 0$ και $\rho(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Έστω $0 < \alpha < 1$. Κατασκευάστε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\rho(A, 0) = \alpha$.

48. Έστω $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$. Θεωρούμε το σύνολο A των $x \in (0,1)$ για τα οποία η ανισότητα $\left|x - \frac{m}{n}\right| < \frac{a_n}{n}$ έχει άπειρες λύσεις $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $m(A) = 0$.

49. Σωστό ή λάθος; Μπορούμε να βρούμε υπεραριθμήσιμα το πλήθος ξένα ανά δύο Lebesgue μετρήσιμα σύνολα $A_i \subset \mathbb{R}$, $i \in I$, με $m(A_i) > 0$ για κάθε $i \in I$.

50. Έστω $\mathcal{A}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) Αν $A \subset \mathbb{N}$ και τα A και $\mathbb{N} \setminus A$ είναι και τα δύο άπειρα σύνολα, τότε $A \in \mathcal{A}$ αν και μόνο αν $\mathbb{N} \setminus A \notin \mathcal{A}$.

(β) Αν $A \in \mathcal{A}$ και B είναι πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$, τότε $A \cup B \in \mathcal{A}$ και $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Αποδείξτε ότι το σύνολο $E = \left\{ \sum_{k \in A} \frac{1}{2^k} : A \in \mathcal{A} \right\}$ δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Επίσης, αν θέλετε, αποδείξτε ότι υπάρχει οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ που ικανοποιεί τα (α) και (β).

51. Έστω $(X, \mathcal{M})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Αν $f^{-1}((r, \infty]) \in \mathcal{M}$ για κάθε $r \in \mathbb{Q}$, αποδείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

52. Έστω $(X, \mathcal{M})$ μετρήσιμος χώρος. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ μας δίνεται ένα σύνολο $E_\alpha \in \mathcal{M}$, έτσι ώστε:

1. $\alpha < \beta \Longrightarrow E_\alpha \subseteq E_\beta$.
2. $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} E_\alpha = X$.
3. $\bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} E_\alpha = \emptyset$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ να ισχύουν τα εξής: αν $x \in E_\alpha$ τότε $f(x) \leqslant \alpha$, και αν $x \in E_\alpha^c$ τότε $f(x) \geqslant \alpha$.

53. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η f είναι Borel μετρήσιμη.

54. Αποδείξτε ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη αν και μόνο αν υπάρχει Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $m(\{f \neq g\}) = 0$.

55. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση και $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ακόλουθη ιδιότητα: αν $N \subseteq \mathbb{R}$ και $m(N) = 0$ τότε το $\varphi^{-1}(N)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Αποδείξτε ότι η $f \circ \varphi$ είναι Lebesgue μετρήσιμη.

56. Αν $f_n, g_n, f, g \in L^1(\mu)$, $f_n \to f$ σχεδόν παντού, $g_n \to g$ σχεδόν παντού, $|f_n| \leqslant g_n$ και $\int g_n \to \int g$, τότε

$$\int f_n \to \int f.$$

[*Υπόδειξη:* Μιμηθείτε την απόδειξη του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης.]

57. Υποθέτουμε ότι $f_n, f \in L^1(\mu)$ και $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Τότε,

$$\int |f_n - f| \to 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \int |f_n| \to \int |f|.$$

58. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ένας σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου και έστω $g : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $f \in L^1(\mu)$ ισχύει $f \cdot g \in L^1(\mu)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιος ώστε

$$\mu(\{x \in X : |g(x)| > \alpha\}) = 0.$$

59. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f \in L^1(\mu)$ με $\|f_n - f\|_1 \to 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι $A_n, A \in \mathcal{M}$ και $\mu(A_n \triangle A) \to 0$. Αποδείξτε ότι

$$\int_{A_n} f_n d\mu \to \int_A f d\mu.$$

60. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f \in L_1(X, \mu)$ με $\|f\|_1 = 1$. Αποδείξτε ότι

$$\int_E \ln |f| \, d\mu \leqslant -\mu(E) \ln \mu(E)$$

για όλα τα σύνολα $E \in \mathcal{A}$ με $0 < \mu(E) < \infty$.

61. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f \in L_1(X, \mu)$. Αν $E_n = \{x : |f(x)| \geqslant n\}$ αποδείξτε ότι $n\mu(E_n) \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

62. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου και έστω $f \in L_1(\mu)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά C ώστε $\int_E f \, d\mu \leqslant C$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο E πεπερασμένου μέτρου. Δείξτε ότι $\int_X f \, d\mu \leqslant C$. Ισχύει το συμπέρασμα χωρίς την υπόθεση $f \in L_1(\mu)$;

63. Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < m(A) < \infty$. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μια γνησίως θετική μετρήσιμη συνάρτηση, αποδείξτε ότι: για κάθε $t > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν E είναι Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του A με $m(E) > t$, τότε

$$\int_E f \, dm \geqslant \delta.$$

64. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση, η οποία είναι γνήσια θετική σχεδόν παντού. Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0, 1]$ με την ιδιότητα

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f \, dm = 0.$$

Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} m(A_n) = 0$.

65. (α) Έστω $f \in L_1(\mathbb{R})$. Αν $\int_U f \, dm = 0$ για κάθε ανοικτό σύνολο U με $m(U) = 1$, αποδείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού.

(β) Έστω $f \in L_1(\mathbb{R})$. Αν $\int_G f \, dm = \int_{\bar{G}} f \, dm$ για κάθε ανοικτό σύνολο G, αποδείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού.

66. Δίνεται μια ακολουθία $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες: (α) $m(A_k) > \frac{1}{2}$ για κάθε k και (β) $m(A_k \cap A_s) \leqslant \frac{1}{4}$ αν $k \neq s$. Δείξτε ότι

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geqslant 1.$$

67. Έστω $f(x) = ae^{-nax} - be^{-nbx}$, όπου $0 < a < b$. Αποδείξτε ότι:

(α) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n|\, dm = \infty$.

(β) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n\, dm = 0$.

(γ) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in L^1([0,\infty), m)$ και $\int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)\, dm = \ln(b/a)$.

68. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια και αιτιολογήστε τον υπολογισμό τους:

(α) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\infty} (1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n)\, dx$.

(β) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{1} (1 + nx^2)(1 + x^2)^{-n}\, dx$.

(γ) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\infty} n \sin(x/n)[x(1 + x^2)]^{-1}\, dx$.

(δ) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^{\infty} n(1 + nx^2)^{-1}\, dx$. Εξετάστε χωριστά τις περιπτώσεις $a > 0$, $a = 0$ και $a < 0$.

69. Κατασκευάστε μια μη αρνητική Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ να ισχύει $\int_a^b f\, dm = \infty$.

70. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^{-1/2}$ αν $0 < x < 1$, $f(x) = 0$ αλλιώς. Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ των ρητών, και θέτουμε

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x - r_n)}{2^n}.$$

(α) Αποδείξτε ότι $g \in L^1(m)$. Ειδικότερα, $|g| < \infty$ σχεδόν παντού.

(β) Αποδείξτε ότι η g είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο και δεν είναι φραγμένη σε κανένα διάστημα. Τα παραπάνω ισχύουν ακόμα κι αν αλλάξουμε τις τιμές της g σε οποιοδήποτε σύνολο μηδενικού μέτρου Lebesgue.

(γ) Αποδείξτε ότι $g^2 < \infty$ σχεδόν παντού, αλλά η g^2 δεν είναι ολοκληρώσιμη σε κανένα διάστημα.

71. Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ των ρητών του $I = [0, 1]$, και θέτουμε

$$f(x) = \sum_{\{n : x > r_n\}} \frac{1}{2^n}.$$

Υπολογίστε το $\int_I f\, dm$.

72. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση.

(α) Αποδείξτε ότι αν η $g(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x + n)$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε $f = 0$ σχεδόν παντού.

(β) Αποδείξτε ότι αν η f είναι ολοκληρώσιμη τότε η $\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2^n x + 1/n)$ είναι πεπερασμένη σχεδόν παντού και ολοκληρώσιμη, και

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\, dm = \int_{\mathbb{R}} f\, dm.$$

73. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$. Αν f και g είναι δύο μετρήσιμες συναρτήσεις στο X, ορίζουμε

$$\rho(f, g) = \int \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} d\mu.$$

(Είναι εύκολο να δείτε ότι η ρ είναι μετρική στο χώρο των μετρήσιμων συναρτήσεων αν ταυτίσουμε συναρτήσεις που είναι ίσες σχεδόν παντού). Δείξτε ότι $\rho(f_n, f) \to 0$ αν και μόνο αν $f_n \to f$ κατά μέτρο.

74. Υποθέτουμε ότι $|f_n| \leqslant g$, $g \in L^1$, και $f_n \to f$ κατά μέτρο. Δείξτε ότι

$$\int f_n \to \int f$$

και $f_n \to f$ στον L^1.

75. Δείξτε ότι $f_n \to f$ κατά μέτρο αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) < \varepsilon$$

για κάθε $n \geqslant N$.

76. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ κατά μέτρο και $g_n \to g$ κατά μέτρο.

(α) Δείξτε ότι $f_n + g_n \to f + g$ κατά μέτρο.

(β) Δείξτε ότι $f_n g_n \to fg$ κατά μέτρο αν $\mu(X) < \infty$, όχι όμως απαραίτητα αν $\mu(X) = \infty$.

77. Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα συμπαγές $E \subset [a, b]$ που ικανοποιεί τα εξής: $m([a, b] \setminus E) < \varepsilon$ και η $f|_E$ είναι συνεχής. (Αυτό είναι το Θεώρημα του Lusin. Για να το αποδείξετε, χρησιμοποιήστε το Θεώρημα του Egoroff και το Θεώρημα 2.26).

78. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ένας πεπερασμένος χώρος μέτρου. Αν οι $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, f : X \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες, δείξτε ότι $f_n \to f$ κατά μέτρο αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία της $\{f_n\}$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει στην f σχεδόν παντού.

79. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και f, g μη αρνητικές Lebesgue ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο E. Δείξτε ότι

$$\int_E f \cdot g \, dm = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\{x \in E : g(x) \geqslant y\}} f(x) dm(x) \right) dm(y).$$

80. Έστω μ και ν δύο σ-πεπερασμένα μέτρα στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, τα οποία είναι αναλλοίωτα ως προς μεταφορές (δηλαδή, αν E είναι Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και αν $x \in \mathbb{R}^n$, τότε $\mu(E+x) = \mu(E)$ και $\nu(E+x) = \nu(E)$). Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει Borel σύνολο $B \subset \mathbb{R}^n$ για το οποίο $0 < \mu(B) = \nu(B) < +\infty$. Δείξτε ότι $\mu \equiv \nu$.

81. Αν ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ έχει μία από τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) είναι σύνολο Borel,

(ii) είναι σύνολο Borel με μέτρο Lebesgue μηδέν,

(iii) είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με μέτρο Lebesgue μηδέν,

(iv) είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο,

αποδείξτε ότι και το σύνολο $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in A\}$ έχει την αντίστοιχη ιδιότητα στον $\mathbb{R}^2$.

[*Υπόδειξη.* Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι το μέτρο Lebesgue είναι η πλήρωση του μέτρου Lebesgue στα σύνολα Borel.]

82. Έστω $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμη συνάρτηση, $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με $f(x, y) = g(x) - g(y)$ για κάθε $x, y \in [0, 1]$, και μ μέτρο Borel πιθανότητας στο $[0, 1]$. Αποδείξτε ότι:

(α) Η f είναι Borel μετρήσιμη συνάρτηση.

(β) Η f είναι ολοκληρώσιμη ως προς $\mu \times \mu$ αν και μόνο αν η g είναι ολοκληρώσιμη ως προς μ. Στην περίπτωση που η f είναι ολοκληρώσιμη, υπολογίστε το $\int_{[0,1]\times[0,1]} f \, d(\mu \times \mu)$.

83. Έστω μ μέτρο Borel στον $\mathbb{R}$.

(α) Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς μ συνάρτηση και $\int_{(-\infty,t)} f \, d\mu = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $f = 0$ μ-σχεδόν παντού.

(β) Αν το μ είναι σ-πεπερασμένο, $\mu \neq 0$, και B είναι σύνολο Borel στον $\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι: $m(B) = 0$ αν και μόνο αν $\mu(B+y) = 0$ m-σχεδόν για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

[*Υπόδειξη.* Για το (β) παρατηρήστε ότι έχει νόημα το $(\mu \times m)(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in B\})$ και υπολογίστε το.]

84. Έστω ν πεπερασμένο μέτρο και μ μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$. Αποδείξτε ότι $\nu \ll \mu$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{E_n\} \subset \mathcal{M}$ με $\mu(E_n) \to 0$ ισχύει $\nu(E_n) \to 0$.

85. Έστω μ και ν δύο σ-πεπερασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{M})$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

1. Το ν είναι απολύτως συνεχές ως προς το μ και το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το ν.
2. Τα μ και ν έχουν τα ίδια σύνολα μηδενικού μέτρου.
3. Υπάρχει $g : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη με $0 < g(x) < \infty$ για κάθε $x \in X$, τέτοια ώστε $\nu(A) = \int_A g d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{M}$.

86. Έστω μ ένα σ-πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$. Δείξτε ότι υπάρχει πεπερασμένο μέτρο ν στον $(X, \mathcal{M})$ τέτοιο ώστε: το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το ν και το ν είναι απολύτως συνεχές ως προς το μ.

87. Για $j = 1, 2$, θεωρούμε σ-πεπερασμένα μέτρα μ_j, ν_j στον $(X_j, \mathcal{M}_j)$ τέτοια ώστε $\nu_j \ll \mu_j$. Δείξτε ότι $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$ και

$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x_1, x_2) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x_1)\frac{d\nu_2}{d\mu_2}(x_2).$$

88. Έστω μ, ν δύο σ-πεπερασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{M})$ με $\nu \ll \mu$. Ορίζουμε $\lambda = \mu + \nu$. Αν $f = d\nu/d\lambda$, δείξτε ότι $0 \leq f < 1$ σχεδόν παντού ως προς το μ, και

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{f}{1-f}.$$

89. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ένας σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου, $\mathcal{N}$ μια υπο-σ-άλγεβρα της $\mathcal{M}$, και $\nu = \mu|_{\mathcal{N}}$. Δείξτε ότι αν $f \in L^1(\mu)$, τότε υπάρχει $g \in L^1(\nu)$ τέτοια ώστε

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\nu$$

για κάθε $E \in \mathcal{N}$. Δείξτε επίσης ότι αν g' είναι μια άλλη τέτοια συνάρτηση, τότε $g' = g$ σχεδόν παντού ως προς το ν. (Η g είναι η «δεσμευμένη μέση τιμή» της f στην $\mathcal{N}$.)

90. (α) Έστω μ, ν δύο σ-πεπερασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{M})$. Υποθέτουμε ότι το $\mu - \nu$ είναι μέτρο και $\nu \ll \mu - \nu$. Αποδείξτε ότι $\nu(\{d\nu/d\mu = 1\}) = 0$.

(β) Έστω μ, ν δύο σ-πεπερασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{M})$. Υποθέτουμε ότι $\nu \ll \mu$. Αποδείξτε ότι $\nu(\{d\nu/d\mu = 0\}) = 0$.

91. Έστω μ σ-πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$. Ορίζουμε $\nu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ με $\nu(E) = 0$ αν $\mu(E) = 0$ και $\nu(E) = \infty$ αν $\mu(E) > 0$. Αποδείξτε ότι το ν είναι μέτρο και $\nu \ll \mu$. Ποιά είναι η $d\nu/d\mu$;

92. Έστω λ, μ πεπερασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{M})$. Αποδείξτε ότι υπάρχει διαμέριση $\{A_1, A_2, A_3\}$ του X σε μετρησιμα σύνολα, τέτοια ώστε (α) $\lambda(A_1) = 0$, (β) $\mu(A_2) = 0$ και (γ) στο A_3 έχουμε $\lambda \ll \mu$ και $\mu \ll \lambda$. Επίσης, αποδείξτε ότι υπάρχει πεπερασμένη θετική συνάρτηση h στο A_3 τέτοια ώστε, για κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση f στο A_3,

$$\int_{A_3} f\, d\lambda = \int_{A_3} fh\, d\mu \qquad \text{και} \qquad \int_{A_3} f\, d\mu = \int_{A_3} (f/h)\, d\lambda.$$

93. Σωστό ή λάθος; Υπάρχει μη μηδενικό προσημασμένο μέτρο μ στο $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ τέτοιο ώστε $\mu \ll m$ και $\mu([0,a]) = 0$ για κάθε $a \in [0,1]$.

94. Σωστό ή λάθος; Αν μ, ν είναι πεπερασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{M})$ και ισχύουν οι $\mu \ll \nu$, $\nu \ll \mu$ και $d\mu/d\nu \in L^\infty(\nu)$ τότε $d\nu/d\mu \in L^\infty(\mu)$.

95. Έστω μ πεπερασμένο μέτρο στην $\mathcal{B}([0,1])$ τέτοιο ώστε $\mu \ll m$. Αποδείξτε ότι το

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\mu([0,1]\cap(x-t,x+t))}{m([0,1]\cap(x-t,x+t)}$$

υπάρχει m σχεδόν παντού.

96. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι

$$\int f(x)dm(x) = \int f(x+t)dm(x)$$

για κάθε $t\in\mathbb{R}$.

(β) Αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\lim_{t\to 0}\int \big|g(x)\cdot[f(x)-f(x+t)]\big|dm(x) = 0.$$

[*Υπόδειξη:* Δείξτε το πρώτα στην περίπτωση που η f είναι συνεχής και μηδενίζεται έξω από κάποιο διάστημα $[-A,A]$, όπου $A>0$.]

97. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) Η f είναι φραγμένη και συνεχής.

(β) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

(γ) Για κάθε $p>0$, $f\notin L^p((0,+\infty))$.

98. Έστω $p_1,\dots,p_k,r\geq 1$ με $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_k}=\frac{1}{r}$. Αν $f_i\in L^{p_i}(\mu)$, $i=1,\dots,k$, δείξτε ότι

$$\|f_1f_2\dots f_k\|_r \leq \|f_1\|_{p_1}\dots\|f_k\|_{p_k}.$$

99. Υποθέτουμε ότι $0<p<q<\infty$. Δείξτε ότι ο L^p δεν περιέχεται στον L^q αν και μόνο αν ο X έχει υποσύνολα οσοδήποτε μικρού θετικού μέτρου, και ότι ο L^q δεν περιέχεται στον L^p αν και μόνο αν ο X έχει υποσύνολα οσοδήποτε μεγάλου πεπερασμένου μέτρου. (Για τη μία κατεύθυνση: δείξτε ότι στην πρώτη περίπτωση υπάρχει ακολουθία $\{E_n\}$ ξένων υποσυνόλων του X με $0<\mu(E_n)<2^{-n}$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση υπάρχει ακολουθία $\{E_n\}$ ξένων υποσυνόλων του X με $1\leq\mu(E_n)<\infty$. Κατόπιν, θεωρήστε συναρτήσεις της μορφής $f=\sum a_n\chi_{E_n}$ για κατάλληλη επιλογή των a_n).

Τι μπορείτε να πείτε αν $q=\infty$;

100. Υποθέτουμε ότι $0<p_0<p_1\leq\infty$. Δώστε παραδείγματα συναρτήσεων f στο $(0,\infty)$ (με το μέτρο Lebesgue) που ικανοποιούν τα εξής:

(α) $f\in L^p$ αν και μόνο αν $p_0<p<p_1$.

(β) $f\in L^p$ αν και μόνο αν $p_0\leq p\leq p_1$.

(γ) $f\in L^p$ αν και μόνο αν $p=p_0$.

[*Υπόδειξη:* Δοκιμάστε συναρτήσεις της μορφής $f(x)=x^{-a}|\log x|^b$.]

101. Έστω $f:X\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε σαν «ουσιώδες πεδίο τιμών» της f το σύνολο R_f όλων των $a\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει το εξής: για κάθε $\varepsilon>0$,

$$\mu(\{x\in X:|f(x)-a|<\varepsilon\})>0.$$

(α) Δείξτε ότι το R_f είναι κλειστό σύνολο.

(β) Αν $f\in L^\infty$, δείξτε ότι το R_f είναι συμπαγές και ότι $\|f\|_\infty=\max\{|a|:a\in R_f\}$.

102. Έστω $0<p<1$. Ορίζουμε πάλι τον (αρνητικό αυτή τη φορά) συζυγή εκθέτη q του p από την $(1/p)+(1/q)=1$. Αν $f,g\in L^+(\mu)$, δείξτε ότι

$$\int fg d\mu \geq \left(\int f^p d\mu\right)^{1/p}\left(\int g^q d\mu\right)^{1/q}$$

και
$$\left(\int (f+g)^p d\mu\right)^{1/p} \geq \left(\int f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int g^p d\mu\right)^{1/p}.$$

103. Δίνεται μια φραγμένη Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που μηδενίζεται έξω από το $[-1,1]$. Για κάθε $h>0$ ορίζουμε τη συνάρτηση $\varphi_h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με
$$\varphi_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dm(t).$$
Δείξτε ότι: $\|\varphi_h\|_2 \leq \|f\|_2$ και $\|\varphi_h - f\|_2 \to 0$ όταν $h\to 0^+$.

104. Έστω $r>0$ και $f_n:(0,1)\to\mathbb{R}$ με $\|f_n\|_r \leq M$ για κάθε n. Υποθέτουμε ότι $f_n\to f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι: για κάθε $0<p<r$, $\|f_n - f\|_p \to 0$ όταν $n\to\infty$.

105. Έστω $(X,\mathcal{M},\mu)$ πεπερασμένος χώρος μέτρου και έστω $f_n\in L^2(\mu)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M>0$ τέτοιος ώστε $\|f_n\|_2\leq M$ για κάθε n, και ότι $f_n\to 0$ κατά μέτρο. Δείξτε ότι
$$\int f_n g d\mu \to 0 \quad \text{για κάθε } \; g\in L^2(\mu).$$

106. (α) Έστω $(X,\mathcal{M},\mu)$ χώρος πιθανότητας. Αποδείξτε ότι αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι κυρτή και $g:X\to(a,b)$, $g\in L^1(\mu)$ τότε
$$F\Big(\int_X g\,d\mu\Big) \leqslant \int_X F\circ g\,d\mu.$$
[*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $F(g(x)) - F(t_0) \geqslant F'(t_0)(g(x)-t_0)$ όπου $t_0 = \int_X g\,d\mu$ και ολοκληρώστε.]

(β) Έστω $f\in L^p(\mu)$ για κάποιον $p>0$. Αποδείξτε ότι:

(i) $f\in L^q(\mu)$ για κάθε $0<q<p$.

(ii) $\log\|f\|_q \geqslant \int_X \log|f|\,d\mu$ για κάθε $0<q<p$. [*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε το (α) για την $F(t)=e^t$.]

(iii) $(\int_X |f|^q - 1)/q \geqslant \log\|f\|_q$ και $(\int_X |f|^q - 1)/q \to \int_X \log|f|$ όταν $q\to 0^+$.

(iv) $\lim_{q\to 0^+}\|f\|_q = \exp(\int_X \log|f|)$.

107. (α) Έστω $(X,\mathcal{M},\mu)$ χώρος μέτρου. Μια ακολουθία $\{f_n\}\subset L^1(\mu)$ λέγεται ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε n και κάθε $E\in\mathcal{M}$ με $\mu(E)<\delta$ ισχύει $\left|\int_E f_n\,d\mu\right|<\varepsilon$. Αποδείξτε ότι αν $f_n, f\in L^1(\mu)$ και $\|f_n - f\|_1\to 0$ τότε η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

(β) Έστω $1\leqslant p<\infty$ και $\{f_n\}\subset L^p(\mu)$. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) η $\{f_n\}$ είναι βασική ακολουθία στον $L^p(\mu)$.

(ii) η $\{|f_n|^p\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

(iii) για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $E\in\mathcal{M}$ ώστε $\mu(E)<\infty$ και $\int_{X\setminus E}|f_n|^p d\mu<\varepsilon$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

108. Έστω $(X,\mathcal{M},\mu)$ χώρος μέτρου και $1<p<\infty$. Αν οι $f_n, f\in L^p(\mu)$ ικανοποιούν τις $\sup_n \|f_n\|_p<\infty$ και $f_n\to f$ σχεδόν παντού, αποδείξτε ότι $\int_X f_n g\,d\mu \to \int_X fg\,d\mu$ για κάθε $g\in L^q(\mu)$, όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p.

109. Έστω $(X,\mathcal{M},\mu)$ πεπερασμένος χώρος μέτρου και έστω $f:X\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $p>0$ και σταθερά $C>0$ τέτοια ώστε $\mu(\{x\in X: |f(x)|\geq t\})\leq C/t^p$ για κάθε $t>0$. Δείξτε ότι $f\in L^r(\mu)$ για κάθε $0<r<p$.

Υπόδειξη: Γνωρίζουμε ότι
$$\int |f|^r = \int_0^\infty rt^{r-1}\mu(\{|f|\geq t\})dt.$$

110. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$ με $m(E)>0$.

1. Δείξτε ότι η $\chi_E * \chi_E$ είναι συνεχής συνάρτηση.
2. Δείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: αν $|x| < \varepsilon$ τότε $m(E \cap (E+x)) > 0$.

111. Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_n μηδενίζεται έξω από το $[0, 1/n]$ και

$$\int_0^{1/n} f_n(t)\, dt = 1.$$

Έστω $g \in L^1(\mathbb{R})$. Ορίζουμε

$$g_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n(t) g(x-t)\, dt, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Δείξτε ότι $g_n \in L^1(\mathbb{R})$ και

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_{L^1} = 0.$$

112. (α) Έστω $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int g(x)\, dx = \int_0^\infty m(\{x : g(x) \geq t\})\, dt.$$

(β) Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $C_1 > 0$ ώστε, για κάθε $t > 0$,

$$m(\{x : |f(x)| \geq t\}) \leq \frac{C_1}{t^2}.$$

Δείξτε ότι: υπάρχει $C_2 > 0$ ώστε, για κάθε μετρήσιμο E με $0 < m(E) < \infty$,

$$\int_E |f(x)|\, dx \leq C_2 \sqrt{m(E)}.$$

113. Έστω $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y)\, dy$ η συνέλιξη των f και g. Σταθεροποιούμε $g \in L^1(\mathbb{R})$ και ορίζουμε

$$A_g(f) = g * f.$$

(α) Δείξτε ότι ο $A_g : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ είναι φραγμένος τελεστής.

(β) Αν επιπλέον $g \geq 0$, υπολογίστε τη νόρμα $\|A_g\|$ του A_g.

(γ) Δείξτε ότι η μοναδική $f \in L^1(\mathbb{R})$ για την οποία $f * f = f$ είναι η $f \equiv 0$.

114. Έστω E, F Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και έστω χ_E, χ_F οι χαρακτηριστικές τους συναρτήσεις.

(i) Δείξτε ότι η

$$(\chi_E * \chi_F)(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_E(y) \chi_F(x-y)\, dy$$

είναι συνεχής συνάρτηση.

(ii) Δείξτε ότι

$$n\left(\chi_E * \chi_{[0,1/n]}\right) \to \chi_E$$

σχεδόν παντού, καθώς $n \to \infty$.