Ανάλυση Ι – 4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Παραδίδετε 12 από τις ασκήσεις (ημερομηνία παράδοσης: 24-1-2021)

---

1. Αν ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ έχει μία από τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) είναι σύνολο Borel,

(ii) είναι σύνολο Borel με μέτρο Lebesgue μηδέν,

(iii) είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με μέτρο Lebesgue μηδέν,

(iv) είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο,

αποδείξτε ότι και το σύνολο $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in A\}$ έχει την αντίστοιχη ιδιότητα στον $\mathbb{R}^2$.

[*Υπόδειξη.* Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι το μέτρο Lebesgue είναι η πλήρωση του μέτρου Lebesgue στα σύνολα Borel.]

2. Έστω $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμη συνάρτηση, $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με $f(x,y) = g(x) - g(y)$ για κάθε $x, y \in [0,1]$, και μ μέτρο Borel πιθανότητας στο $[0,1]$. Αποδείξτε ότι:

(α) Η f είναι Borel μετρήσιμη συνάρτηση.

(β) Η f είναι ολοκληρώσιμη ως προς $\mu \times \mu$ αν και μόνο αν η g είναι ολοκληρώσιμη ως προς μ. Στην περίπτωση που η f είναι ολοκληρώσιμη, υπολογίστε το $\int_{[0,1]\times[0,1]} f \, d(\mu \times \mu)$.

3. Έστω μ μέτρο Borel στον $\mathbb{R}$.

(α) Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς μ συνάρτηση και $\int_{(-\infty,t)} f \, d\mu = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $f = 0$ μ-σχεδόν παντού.

(β) Αν το μ είναι σ-πεπερασμένο, $\mu \neq 0$, και B είναι σύνολο Borel στον $\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι: $m(B) = 0$ αν και μόνο αν $\mu(B + y) = 0$ m-σχεδόν για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

[*Υπόδειξη.* Για το (β) παρατηρήστε ότι έχει νόημα το $(\mu \times m)(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in B\})$ και υπολογίστε το.]

4. Έστω μ πεπερασμένο μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\ln|x-t|}{\sqrt{|x-t|}} \, d\mu(t), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι $|f(x)| < \infty$ m-σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.

5. Έστω μ και ν δύο σ-πεπερασμένα μέτρα στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, τα οποία είναι αναλλοίωτα ως προς μεταφορές (δηλαδή, αν E είναι Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και αν $x \in \mathbb{R}^n$, τότε $\mu(E+x) = \mu(E)$ και $\nu(E+x) = \nu(E)$). Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει Borel σύνολο $B \subset \mathbb{R}^n$ για το οποίο $0 < \mu(B) = \nu(B) < +\infty$. Δείξτε ότι $\mu \equiv \nu$.

6. Έστω μ και ν δύο σ-πεπερασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{M})$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) Το ν είναι απολύτως συνεχές ως προς το μ και το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το ν.

(ii) Τα μ και ν έχουν τα ίδια σύνολα μηδενικού μέτρου.

(iii) Υπάρχει $g : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη με $0 < g(x) < \infty$ για κάθε $x \in X$, τέτοια ώστε $\nu(A) = \int_A g d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{M}$.

7. Έστω μ ένα σ-πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$. Δείξτε ότι υπάρχει πεπερασμένο μέτρο ν στον $(X, \mathcal{M})$ τέτοιο ώστε: το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το ν και το ν είναι απολύτως συνεχές ως προς το μ.

8. Για $j = 1, 2$, θεωρούμε σ-πεπερασμένα μέτρα μ_j, ν_j στον $(X_j, \mathcal{M}_j)$ τέτοια ώστε $\nu_j \ll \mu_j$. Δείξτε ότι $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$ και

$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x_1, x_2) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x_1)\frac{d\nu_2}{d\mu_2}(x_2).$$

9. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ένας χώρος πιθανότητας, $\mathcal{N}$ μια υπο-σ-άλγεβρα της $\mathcal{M}$, και $\nu = \mu|_{\mathcal{N}}$. Δείξτε ότι αν $f \in L^1(\mu)$, τότε υπάρχει $g \in L^1(\nu)$ τέτοια ώστε

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\nu$$

για κάθε $E \in \mathcal{N}$. Δείξτε επίσης ότι αν g' είναι μια άλλη τέτοια συνάρτηση, τότε $g' = g$ σχεδόν παντού ως προς το ν. (Η g είναι η «δεσμευμένη μέση τιμή» της f στην $\mathcal{N}$.)

10. Έστω λ, μ πεπερασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{M})$. Αποδείξτε ότι υπάρχει διαμέριση $\{A_1, A_2, A_3\}$ του X σε μετρησιμα σύνολα, τέτοια ώστε (α) $\lambda(A_1) = 0$, (β) $\mu(A_2) = 0$ και (γ) στο A_3 έχουμε $\lambda \ll \mu$ και $\mu \ll \lambda$. Επίσης, αποδείξτε ότι υπάρχει πεπερασμένη θετική συνάρτηση h στο A_3 τέτοια ώστε, για κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση f στο A_3,

$$\int_{A_3} f\, d\lambda = \int_{A_3} fh\, d\mu \qquad \text{και} \qquad \int_{A_3} f\, d\mu = \int_{A_3} (f/h)\, d\lambda.$$

11. Έστω μ πεπερασμένο μέτρο στην $\mathcal{B}([0,1])$ τέτοιο ώστε $\mu \ll m$. Αποδείξτε ότι το

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\mu([0,1] \cap (x-t, x+t))}{m([0,1] \cap (x-t, x+t)}$$

υπάρχει m σχεδόν παντού.

12. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μη μηδενική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε

$$Hf(x) \geqslant \frac{c}{|x|^n} \quad \text{για κάθε } |x| \geqslant 1,$$

και συμπεράνατε ότι η Hf δεν είναι ολοκληρώσιμη.

13. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{1}{|x|(\ln 1/|x|)^2} \quad \text{αν } |x| \leqslant 1/2$$

και $f(x) = 0$ αλλιώς. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Δείξτε επίσης ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε

$$Hf(x) \geqslant \frac{c}{|x|(\ln 1/|x|)} \quad \text{για κάθε } |x| \leqslant 1/2,$$

και συμπεράνατε ότι η Hf δεν είναι τοπικά ολοκληρώσιμη.

14. (α) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 0$,

$$m(\{x : Hf(x) > \alpha\}) \leqslant \frac{C}{\alpha} \int_{\{|f| > \alpha/2\}} |f(x)|\, dx.$$

Υπόδειξη. Γράψτε $f = g + h$, όπου $g = f \cdot \chi_{\{|f| \leqslant \alpha/2\}}$ και $h = f \cdot \chi_{\{|f| > \alpha/2\}}$.
(β) Έστω $B = \{x : |x| \leqslant 1\}$ και έστω $f \in L^1(B)$ τέτοια ώστε $|f| \ln(1 + |f|) \in L^1(B)$. Δείξτε ότι $Hf \in L^1(B)$. Θα βοηθήσει να γράψετε

$$\int_B Hf(x)\, dx = \int_0^1 m(B \cap \{Hf \geqslant \alpha\})\, d\alpha + \int_1^\infty m(B \cap \{Hf \geqslant \alpha\})\, d\alpha.$$

15. Έστω λ και μ θετικά μέτρα Borel στον $\mathbb{R}^n$ με $\lambda \perp \mu$. Αν το $\lambda + \mu$ είναι κανονικό αποδείξτε ότι τα λ και μ είναι επίσης κανονικά.

16. Έστω $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $F\in NBV$. Ορίζουμε $G(x)=|\mu_F|((-\infty,x])$. Αποδείξτε ότι:

(α) $T_F \leqslant G$.

(β) Για κάθε διάστημα I του $\mathbb{R}$, $|\mu_F(I)| \leqslant \mu_{T_F}(I)$.

(γ) Για κάθε Borel σύνολο $E\subseteq\mathbb{R}$, $|\mu_F(E)| \leqslant \mu_{T_F}(E)$.

(δ) $|\mu_F| \leqslant \mu_{T_F}$.

(ε) $G \leqslant T_F$, άρα $G = T_F$.

17. Κατασκευάστε αύξουσα συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που έχει ως σύνολο σημείων ασυνέχειας ακριβώς το $\mathbb{Q}$.

18. Έστω $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Αποδείξτε ότι για κάθε $a<b$ στο $\mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_a^b F'(t)\,dt \leqslant F(b)-F(a).$$

19. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\int_a^b g^2\,dm<\infty$ και

$$f(x)=\int_a^x g\,dm, \qquad x\in[a,b].$$

(β) Υπάρχει $M>0$ ώστε

$$\sum_{k=1}^n \frac{|f(x_k)-f(x_{k-1})|^2}{x_k-x_{k-1}} \leqslant M$$

για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ του $[a,b]$.

Να βρείτε τη μικρότερη σταθερά M για την οποία ισχύει το (β).

20. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά M αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $|f_n'(x)|\leqslant M$ για κάθε $x\in[0,1]$ και $f_n(x)\to f(x)$ για κάθε $x\in[0,1]$.