Ανάλυση Ι – 7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Παραδίδετε 6 από τις ασκήσεις (ημερομηνία παράδοσης: 15-1-2019)

1. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) Η f είναι φραγμένη και συνεχής.

(β) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

(γ) Για κάθε $p > 0$, $f \notin L^p((0, +\infty))$.

2. Υποθέτουμε ότι $0 < p < q < \infty$. Αποδείξτε ότι ο L^p δεν περιέχεται στον L^q αν και μόνο αν ο X έχει υποσύνολα οσοδήποτε μικρού θετικού μέτρου, και ότι ο L^q δεν περιέχεται στον L^p αν και μόνο αν ο X έχει υποσύνολα οσοδήποτε μεγάλου πεπερασμένου μέτρου. (Για τη μία κατεύθυνση: αποδείξτε ότι στην πρώτη περίπτωση υπάρχει ακολουθία $\{E_n\}$ ξένων υποσυνόλων του X με $0 < \mu(E_n) < 2^{-n}$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση υπάρχει ακολουθία $\{E_n\}$ ξένων υποσυνόλων του X με $1 \leqslant \mu(E_n) < \infty$. Κατόπιν, θεωρήστε συναρτήσεις της μορφής $f = \sum a_n \chi_{E_n}$ για κατάλληλη επιλογή των a_n).

3. Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε σαν «ουσιώδες πεδίο τιμών» της f το σύνολο R_f όλων των $a \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - a| < \varepsilon\}) > 0.$$

(α) Αποδείξτε ότι το R_f είναι κλειστό σύνολο.

(β) Αν $f \in L^\infty$, αποδείξτε ότι το R_f είναι συμπαγές και ότι $\|f\|_\infty = \max\{|a| : a \in R_f\}$.

4. Δίνεται μια φραγμένη Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που μηδενίζεται έξω από το $[-1, 1]$. Για κάθε $h > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση $\varphi_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\varphi_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)dm(t).$$

Αποδείξτε ότι: $\|\varphi_h\|_2 \leqslant \|f\|_2$ και $\|\varphi_h - f\|_2 \to 0$ όταν $h \to 0^+$.

5. Έστω $r > 0$ και $f_n : (0, 1) \to \mathbb{R}$ με $\|f_n\|_r \leqslant M$ για κάθε n. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Αποδείξτε ότι: για κάθε $0 < p < r$, $\|f_n - f\|_p \to 0$ όταν $n \to \infty$.

6. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ πεπερασμένος χώρος μέτρου και έστω $f_n \in L^2(\mu)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|f_n\|_2 \leqslant M$ για κάθε n, και ότι $f_n \to 0$ κατά μέτρο. Αποδείξτε ότι

$$\int f_n g d\mu \to 0 \quad \text{για κάθε} \;\; g \in L^2(\mu).$$

7. (α) Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος πιθανότητας. Αποδείξτε ότι αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή και $g : X \to (a, b)$, $g \in L^1(\mu)$ τότε

$$F\Big(\int_X g\, d\mu\Big) \leqslant \int_X F \circ g\, d\mu.$$

[*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $F(g(x)) - F(t_0) \geqslant F'(t_0)(g(x) - t_0)$ όπου $t_0 = \int_X g\, d\mu$ και ολοκληρώστε.]

(β) Έστω $f \in L^p(\mu)$ για κάποιον $p > 0$. Αποδείξτε ότι:

(i) $f \in L^q(\mu)$ για κάθε $0 < q < p$.

(ii) $\log \|f\|_q \geqslant \int_X \log |f|\, d\mu$ για κάθε $0 < q < p$. [*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε το (α) για την $F(t) = e^t$.]

(iii) $(\int_X |f|^q - 1)/q \geqslant \log \|f\|_q$ και $(\int_X |f|^q - 1)/q \to \int_X \log|f|$ όταν $q \to 0^+$.

(iv) $\lim_{q\to 0^+} \|f\|_q = \exp(\int_X \log|f|)$.

8. (α) Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου. Μια ακολουθία $\{f_n\} \subset L^1(\mu)$ λέγεται ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε n και κάθε $E \in \mathcal{M}$ με $\mu(E) < \delta$ ισχύει $\left|\int_E f_n\, d\mu\right| < \varepsilon$. Αποδείξτε ότι αν $f_n, f \in L^1(\mu)$ και $\|f_n - f\|_1 \to 0$ τότε η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

(β) Έστω $1 \leqslant p < \infty$ και $\{f_n\} \subset L^p(\mu)$. Αποδείξτε ότι η $\{f_n\}$ είναι βασική ακολουθία στον $L^p(\mu)$ αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής:

(i) η $\{f_n\}$ είναι βασική κατά μέτρο.

(ii) η $\{|f_n|^p\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

(iii) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $E \in \mathcal{M}$ ώστε $\mu(E) < \infty$ και $\int_{X\setminus E} |f_n|^p d\mu < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

9. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου και $1 < p < \infty$. Αν οι $f_n, f \in L^p(\mu)$ ικανοποιούν τις $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$ και $f_n \to f$ σχεδόν παντού, αποδείξτε ότι $\int_X f_n g\, d\mu \to \int_X fg\, d\mu$ για κάθε $g \in L^q(\mu)$, όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p.

10. Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ πεπερασμένος χώρος μέτρου και έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $p > 0$ και σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $\mu(\{x \in X : |f(x)| \geqslant t\}) \leqslant C/t^p$ για κάθε $t > 0$. Αποδείξτε ότι $f \in L^r(\mu)$ για κάθε $0 < r < p$.

Υπόδειξη: Γνωρίζουμε ότι

$$\int |f|^r = \int_0^\infty r t^{r-1} \mu(\{|f| \geqslant t\}) dt.$$

11. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$ με $m(E) > 0$.

(i) Αποδείξτε ότι η $\chi_E * \chi_E$ είναι συνεχής συνάρτηση.

(ii) Αποδείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: αν $|x| < \varepsilon$ τότε $m(E \cap (E + x)) > 0$.

12. Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_n μηδενίζεται έξω από το $[0, 1/n]$ και

$$\int_0^{1/n} f_n(t)\, dt = 1.$$

Έστω $g \in L^1(\mathbb{R})$. Ορίζουμε

$$g_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n(t) g(x - t)\, dt, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Αποδείξτε ότι $g_n \in L^1(\mathbb{R})$ και

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_{L^1} = 0.$$