1 Το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz

Έχουμε δεί ότι αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε η μεγιστική συνάρτηση $Hf = f^*$ της f δεν είναι γενικά ολοκληρώσιμη, ικανοποιεί όμως την εξής ανισότητα ασθενούς τύπου: για κάθε $\lambda > 0$,

$$m(\{x : Hf(x) > \lambda\}) \leqslant \frac{c}{\lambda} \|f\|_1, \tag{1}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά (ανεξάρτητη από την f και την τιμή του λ). Είναι επίσης εύκολο να δούμε ότι ο μεγιστικός τελεστής $f \mapsto Hf$ απεικονίζει τον $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ στον $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Πράγματι, για κάθε ανοικτή μπάλα B με $x \in B$ έχουμε

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|\, dy \leqslant \frac{1}{m(B)} \int_B \|f\|_\infty dy = \|f\|_\infty,$$

συνεπώς

$$|Hf(x)| = \sup_{x \in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|\, dy \leqslant \|f\|_\infty. \tag{2}$$

Έπεται ότι

$$\|Hf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty. \tag{3}$$

Ένα ερώτημα που προκύπτει είναι τι μπορούμε να πούμε για την συμπεριφορά της Hf αν υποθέσουμε ότι $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ για κάποιο $1 < p < \infty$. Θα μελετήσουμε αυτό το πρόβλημα στο γενικότερο πλαίσιο των υπογραμμικών τελεστών.

Ορισμός 1.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Ένας τελεστής $f \mapsto Tf$ λέγεται υπογραμμικός αν για κάθε f_1 και f_2 για τις οποίες οι Tf_1 και Tf_2 ορίζονται καλά, οι $T(f_1 + f_2)$ και $T(af_1)$, $a \in \mathbb{K}$, ορίζονται καλά και ικανοποιούν τις

$$|T(f_1 + f_2)(x)| \leqslant |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)| \ \text{ σχεδόν παντού} \tag{4}$$

και

$$|T(af_1)(x)| \leqslant |a|\, |Tf_1(x)| \ \text{ σχεδόν παντού} \tag{5}$$

Λέμε ότι ένας υπογραμμικός τελεστής είναι (ισχυρού) τύπου (p, p) για κάποιο $1 \leqslant p \leqslant \infty$ αν ορίζεται καλά σαν τελεστής από τον $L^p(\mu)$ στον $L^p(\mu)$ και υπάρχει σταθερά $A_p > 0$ ώστε

$$\|Tf\|_p \leqslant A_p \|f\|_p \tag{6}$$

για κάθε $f \in L^p(\mu)$. Όμοια, λέμε ένας υπογραμμικός τελεστής είναι ασθενούς τύπου (p, p) για κάποιο $1 \leqslant p < \infty$ αν ορίζεται καλά για κάθε $f \in L^p(\mu)$ και υπάρχει σταθερά $A_p > 0$ ώστε

$$\lambda^p m(\{x : |Tf(x)| > \lambda\}) \leqslant A_p^p \|f\|_p^p \tag{7}$$

για κάθε $f \in L^p(\mu)$ και για κάθε $\lambda > 0$.

Συνήθως, θα θεωρούμε τελεστές T οι οποίοι ορίζονται φυσιολογικά σε ένα ζεύγος χώρων $L^{p_0}(\mu)$ και $L^{p_1}(\mu)$. Είναι βολικό να θεωρήσουμε τον χώρο $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ όλων των συναρτήσεων f οι οποίες γράφονται στη μορφή $f = f_0 + f_1$ για κάποιες $f_0 \in L^{p_0}(\mu)$ και $f_1 \in L^{p_1}(\mu)$. Ο $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ γίνεται χώρος Banach με νόρμα την

$$\|f\|_{L^{p_0}+L^{p_1}} = \inf\{\|f_0\|_{p_0} + \|f_1\|_{p_1} : f_i \in L^{p_i}, f = f_0 + f_1\}. \tag{8}$$

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz. Με $L(\mu)$ συμβολίζουμε τις μετρήσιμες συναρτήσεις.

Θεώρημα 1.2 (Marcinkiewicz). *Έστω $0 < p_0 < p_1 \leqslant \infty$ και έστω $T : L^{p_0}(\mu)+L^{p_1}(\mu) \to L(\mu)$ υπογραμμικός τελεστής, ο οποίος είναι ασθενούς τύπου (p_0, p_0) με σταθερά A_0 και ισχυρού τύπου (p_1, p_1) με σταθερά A_1. Τότε, για κάθε $p_0 < p < p_1$ ο T είναι ισχυρού τύπου (p, p) με σταθερά*

$$A_p = 2\left(\frac{p}{p-p_0} + \frac{p}{p_1-p}\right)^{1/p} A_0^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}} A_1^{\frac{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}}$$

αν $p_1 < \infty$, και

$$A_p = 2\left(\frac{p}{p-p_0}\right)^{1/p} A_0^{\frac{p_0}{p}} A_1^{1-\frac{p_0}{p}}$$

αν $p_1 = \infty$.

Απόδειξη. Εξετάζουμε χωριστά τις περιπτώσεις $p_1 < \infty$ και $p_1 = \infty$.

(α) **Η περίπτωση** $0 < p_0 < p < p_1 < \infty$. Έστω $f \in L^p(\mu)$ και $\delta > 0$ το οποίο θα επιλεγεί αργότερα. Για κάθε $\lambda > 0$ ορίζουμε

$$f_0^\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } |f(x)| > \delta\lambda \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και

$$f_1^\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } |f(x)| \leqslant \delta\lambda \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $f_0^\lambda \in L^{p_0}(\mu)$, $f_1^\lambda \in L^{p_1}(\mu)$ και $f = f_1 + f_2$. Για τον πρώτο ισχυρισμό, παρατηρούμε ότι $p_0 - p < 0$ και γράφουμε

$$\begin{aligned} \|f_0^\lambda\|_{p_0}^{p_0} &= \int_{\{x:|f(x)|>\delta\lambda\}} |f(x)|^p |f(x)|^{p_0-p} d\mu \leqslant (\delta\lambda)^{p_0-p} \int_{\{x:|f(x)|>\delta\lambda\}} |f(x)|^p d\mu \\ &\leqslant (\delta\lambda)^{p_0-p} \|f\|_p^p < \infty. \end{aligned} \tag{9}$$

Για τον δεύτερο ισχυρισμό, αφού $p_1 - p > 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} \|f_1^\lambda\|_{p_1}^{p_1} &= \int_{\{x:|f(x)|\leqslant\delta\lambda\}} |f(x)|^p |f(x)|^{p_1-p} dx \leqslant (\delta\lambda)^{p_1-p} \int_{\{x:|f(x)|\leqslant\delta\lambda\}} |f(x)|^p d\mu \\ &\leqslant (\delta\lambda)^{p_1-p} \|f\|_p^p < \infty. \end{aligned} \tag{10}$$

Τέλος, από τον ορισμό των f_0^λ και f_1^λ είναι φανερό ότι $f = f_0^\lambda + f_1^\lambda$.

Στη συνέχεια, για ευκολία στον συμβολισμό θέτουμε $m_g(s) = m(\{x : |g(x)| > s\})$. Από την υπογραμμικότητα του T έχουμε $|Tf| \leqslant |Tf_0^\lambda| + |Tf_1^\lambda|$ σχεδόν παντού, άρα

$$\{x : |Tf(x)| > \lambda\} \subseteq \{x : |Tf_0^\lambda(x)| > \lambda/2\} \cup \{x : |Tf_1^\lambda(x)| > \lambda/2\},$$

και αυτό μας δίνει

$$m_{Tf}(\lambda) \leqslant m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2) + m_{Tf_1^\lambda}(\lambda/2). \tag{11}$$

Από τις υποθέσεις μας έχουμε

$$m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2) \leqslant A_0^{p_0} \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{p_0} \int_{\{x:|f(x)|>\delta\lambda\}} |f(x)|^{p_0} dx \tag{12}$$

και

$$m_{Tf_1^\lambda}(\lambda/2) \leqslant A_1^{p_1} \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{p_1} \|f_1^\lambda\|_{p_1}^{p_1} = A_1^{p_1} \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{p_1} \int_{\{x:|f(x)|\leqslant\delta\lambda\}} |f(x)|^{p_1} dx. \tag{13}$$

Τώρα, γράφουμε

$$\begin{aligned}\|Tf\|_p^p &= \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_{Tf}(\lambda)\,d\lambda \\ &\leqslant \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2)\,d\lambda + \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_{Tf_1^\lambda}(\lambda/2)\,d\lambda,\end{aligned} \tag{14}$$

και χρησιμοποιούμε τις (11) και (12) για να φράξουμε τα δύο ολοκληρώματα. Έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2)\,d\lambda &\leqslant p(2A_0)^{p_0}\int_0^\infty \lambda^{p-1}\lambda^{-p_0}\int_{\{x:|f(x)|>\delta\lambda\}}|f(x)|^{p_0}dx \\ &= p(2A_0)^{p_0}\int |f(x)|^{p_0}\int_0^{|f(x)|/\delta}\lambda^{p-p_0-1}d\lambda\,dx \\ &= \frac{p}{p-p_0}\,\frac{(2A_0)^{p_0}}{\delta^{p-p_0}}\int |f(x)|^p dx \\ &= \frac{p}{p-p_0}\,\frac{(2A_0)^{p_0}}{\delta^{p-p_0}}\,\|f\|_p^p\end{aligned} \tag{15}$$

και

$$\begin{aligned}\int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_{Tf_1^\lambda}(\lambda/2)\,d\lambda &\leqslant p(2A_1)^{p_1}\int_0^\infty \lambda^{p-1}\lambda^{-p_1}\int_{\{x:|f(x)|\leqslant\delta\lambda\}}|f(x)|^{p_1}dx \\ &= p(2A_1)^{p_1}\int |f(x)|^{p_1}\int_{|f(x)|/\delta}^\infty\lambda^{p-p_1-1}d\lambda\,dx \\ &= \frac{p}{p_1-p}\,\frac{(2A_1)^{p_1}}{\delta^{p-p_1}}\int |f(x)|^p dx \\ &= \frac{p}{p_1-p}\,\frac{(2A_1)^{p_1}}{\delta^{p-p_1}}\,\|f\|_p^p.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\|Tf\|_p \leqslant \left(\frac{p}{p-p_0}\,\frac{(2A_0)^{p_0}}{\delta^{p-p_0}} + \frac{p}{p_1-p}\,\frac{(2A_1)^{p_1}}{\delta^{p-p_1}}\right)^{1/p}\|f\|_p \tag{16}$$

για κάθε $\delta > 0$. Επιλέγουμε το δ να ικανοποιεί την

$$\delta^{p_1-p_0} = \frac{(2A_0)^{p_0}}{(2A_1)^{p_1}},$$

και αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση έχουμε το συμπέρασμα.

(β) **Η περίπτωση** $1 \leqslant p_0 < p < p_1 = \infty$. Έστω $f \in L^p(\mu)$. Επιλέγουμε από την αρχή $\delta = \frac{1}{2A_1}$. Για κάθε $\lambda > 0$ ορίζουμε τις f_0^λ και f_1^λ όπως και στην προηγούμενη περίπτωση. Παρατηρήστε ότι

$$\|Tf_1^\lambda\|_\infty \leqslant A_1\|f_1^\lambda\|_\infty \leqslant A_1\delta\lambda = \lambda/2. \tag{17}$$

Συνεπώς, από την

$$\{x : |Tf(x)| > \lambda\} \subseteq \{x : |Tf_0^\lambda(x)| > \lambda/2\} \cup \{x : |Tf_1^\lambda(x)| > \lambda/2\},$$

παίρνουμε

$$m_{Tf}(\lambda) \leqslant m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2) + m_{Tf_1^\lambda}(\lambda/2) = m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2). \tag{18}$$

Από τις υποθέσεις μας έχουμε

$$m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2) \leqslant A_0^{p_0}\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{p_0}\int_{\{x:|f(x)|>\delta\lambda\}}|f(x)|^{p_0}dx. \tag{19}$$

Άρα, χρησιμοποιώντας και την $2A_1 = 1/\delta$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p &\leqslant \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m_{Tf_0^\lambda}(\lambda/2)\, d\lambda \qquad (20) \\
&\leqslant p(2A_0)^{p_0} \int_0^\infty \lambda^{p-1}\lambda^{-p_0} \int_{\{x:|f(x)|>\delta\lambda\}} |f(x)|^{p_0} dx \\
&= p(2A_0)^{p_0} \int |f(x)|^{p_0} \int_0^{|f(x)|/\delta} \lambda^{p-p_0-1} d\lambda\, dx \\
&= \frac{p}{p-p_0}\, \frac{(2A_0)^{p_0}}{\delta^{p-p_0}} \int |f(x)|^p dx \\
&= \frac{p}{p-p_0}\, \frac{(2A_0)^{p_0}}{\delta^{p-p_0}}\, \|f\|_p^p \\
&= \frac{p}{p-p_0}\, (2A_0)^{p_0} (2A_1)^{p-p_0}\, \|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\|Tf\|_p \leqslant 2 \left(\frac{p}{p-p_0}\right)^{1/p} A_0^{\frac{p_0}{p}} A_1^{1-\frac{p_0}{p}} \|f\|_p.$$

Δηλαδή, ο T είναι (ισχυρού) τύπου (p,p). □

Ειδικότερα, στην περίπτωση $p_0 = 1$ και $p_1 = \infty$ το Θεώρημα 1.2 παίρνει την εξής απλούστερη μορφή.

Θεώρημα 1.3. *Έστω $T : L^1(\mu) + L^\infty(\mu) \to L(\mu)$ υπογραμμικός τελεστής, ο οποίος είναι ασθενούς τύπου $(1,1)$ με σταθερά A και ισχυρού τύπου (∞,∞) με σταθερά B. Τότε, για κάθε $1 < p < \infty$ ο T είναι ισχυρού τύπου (p,p) με σταθερά*

$$A_p = 2\left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p} A^{\frac{1}{p}} B^{1-\frac{1}{p}}.$$

Το Θεώρημα 1.3 εφαρμόζεται για τον μεγιστικό τελεστή $f \mapsto Hf$. Όπως είδαμε στην εισαγωγή αυτής της παραγράφου, ο H είναι ασθενούς τύπου $(1,1)$ με σταθερά c και ισχυρού τύπου (∞,∞) με σταθερά 1. Από τον ορισμό του H βλέπουμε εύκολα ότι είναι υπογραμμικός τελεστής. Συνεπώς, από το Θεώρημα 1.3 παίρνουμε αμέσως το εξής.

Θεώρημα 1.4. *Έστω $1 < p < \infty$. Για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ έχουμε $Hf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ και*

$$\|Hf\|_p \leqslant 2\left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p} C_n^{\frac{1}{p}} \|f\|_p,$$

όπου $C_n = 3^n$.

Παρατηρήστε ότι

$$2\left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p} C_n^{\frac{1}{p}} = O\left(\frac{1}{p-1}\right)$$

καθώς το $p \to 1+$.