Το Μέτρο Lebesgue m^N στον $\mathbb{R}^N$

Το m^N είναι εξ ορισμού η πλήρωση του μέτρου γινόμενο $m \times \cdots \times m$ που ορίζεται στην $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Δηλαδή για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$ ορίζουμε (επαγωγικά)

$$(m^N)^*(A) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} m^{N-1}(E_i)m(F_i) : E_i \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{N-1}}, F_i \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, A \subseteq \bigcup_i E_i \times F_i\}$$

και όταν το A είναι μετρήσιμο [1] ορίζουμε $m^N(A) := (m^N)^*(A)$.

Κάθε ορθογώνιο $R := E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_N$ (όπου $E_i \subseteq \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμα σύνολα) είναι μετρήσιμο και $m^N(R) = m(E_1)m(E_2)\ldots m(E_N) := \prod_{k=1}^N m(E_k)$. Επομένως,

$$(m^N)^*(A) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} m^N(R_i) : R_i \text{ Borel μετρήσιμα ορθογώνια}, A \subseteq \bigcup_i R_i\}\,. \qquad (*)$$

Στα επόμενα, με τον όρο *«φραγμένο ορθογώνιο διάστημα»* εννοούμε ένα σύνολο $T \subseteq \mathbb{R}^N$ της μορφής $T = \prod_{i=1}^N I_i$ όπου κάθε $I_i \subseteq \mathbb{R}$ είναι φραγμένο διάστημα.

Λήμμα 1 *Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^N$,*

$$(m^N)^*(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} m^N(T_i) : T_i \text{ φραγμένα ορθογώνια διαστήματα}, A \subseteq \bigcup_i T_i\}\,.$$

Απόδειξη Για απλότητα, δίνουμε την απόδειξη για $N = 2$. Η γενική περίπτωση αποδεικνύεται όμοια, ή με επαγωγή.

Αν $(m^N)^*(A) = +\infty$, το ζητούμενο προκύπτει από την μονοτονία και την σ-υποπροσθετικότητα του μέτρου. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $(m^N)^*(A) < +\infty$. Για κάθε $\epsilon > 0$, το A καλύπτεται από μια αριθμήσιμη ένωση $\bigcup_i R_i$ από *μετρήσιμα* ορθογώνια $\{R_i\}$ ώστε $\sum_{i=1}^{\infty} m^2(R_i) < m^2(A) + \epsilon$. Θα αντικαταστήσουμε κάθε R_i από μια αριθμήσιμη ένωση φραγμένων ορθογώνιων *διαστημάτων*, με τον εξής τρόπο:

Αν $R = E \times F$ είναι μετρήσιμο ορθογώνιο πεπερασμένου μέτρου στον $\mathbb{R}^2$, για κάθε $\epsilon > 0$, από την (εξωτερική) κανονικότητα του μέτρου Lebesgue στο $\mathbb{R}$, επιλέγοντας $\delta > 0$ αρκετά μικρό ώστε $\delta(m(E) + m(F) + \delta) < \epsilon$, βρίσκουμε ανοικτά σύνολα V, W στον $\mathbb{R}$ με $E \subseteq V,\ F \subseteq W$ και $m(V) < m(E) + \delta,\ m(W) < m(F) + \delta$, οπότε

$$m(V)m(W) < m(E)m(F) + \delta(m(E) + m(F) + \delta) \leq m(E)m(F) + \epsilon\,.$$

Τα ανοικτά σύνολα V, W στον $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμες ενώσεις ξένων ανά δύο ανοικτών φραγμένων διαστημάτων: $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,\ W = \bigcup_{j=1}^{\infty} J_j$, οπότε έχουμε

$$R = E \times F \subseteq V \times W = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} I_i \times J_j$$

$$\text{και}\ \ m^2(R) \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} m(I_i)m(J_j) = m(V)m(W) < m(E)m(F) + \epsilon = m^2(R) + \epsilon\,.$$

Επομένως, κάθε μετρήσιμο ορθογώνιο R πεπερασμένου μέτρου καλύπτεται, για κάθε $\delta > 0$, από μια αριθμήσιμη ένωση $\bigcup_k T_k = \bigcup_{i,j} I_i \times J_j$ από φραγμένα ορθογώνια διαστήματα $\{T_k\}$ ώστε $\sum_k m^2(T_k) < m^2(R) + \delta$. Εφαρμόζοντας την παρατήρηση αυτή σε καθένα απο τα ορθογώνια R_i στην (*) με $\delta = \frac{\epsilon}{2^i}$, καταλήγουμε ότι το A καλύπτεται από μια αριθμήσιμη ένωση $\bigcup_k T_k$ από φραγμένα ορθογώνια διαστήματα $\{T_k\}$ ώστε $\sum_{k=1}^{\infty} m^2(T_k) < m^2(A) + \epsilon$, όπως θέλαμε. □

Στο εξής, θα γράφουμε συχνά m αντί για m^N για το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^N$.

Λήμμα 2 *Αν $A \in \mathcal{L}$ (:Lebesgue μετρήσιμο), για κάθε $\epsilon > 0$*

(α) υπάρχει ανοικτό *σύνολο G με $G \supseteq A$ και $m(G \setminus A) < \epsilon$ και*

(β) υπάρχει κλειστό *σύνολο $F \subseteq A$ ώστε $m(A \setminus F) < \epsilon$.*

[1] δηλ. όταν ικανοποιεί $(m^N)^*(X) = (m^N)^*(X \cap A) + (m^N)^*(X \cap A^c)$ για κάθε $X \in \mathbb{R}^N$

Απόδειξη (α) Αφού το A είναι μετρήσιμο,

$$m(A) = m^*(A) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} m(T_j) : T_j \text{ φραγμ. ορθογώνιο διάστημα, } A \subseteq \bigcup_j T_j \right\}$$

(από το Λήμμα 1). Υποθέτουμε πρώτα ότι $m(A) < \infty$. Τότε, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει κάλυψη $A \subseteq \bigcup_j T_j$ του A με $\sum_{j=1}^{\infty} m(T_j) < m(A) + \epsilon/2$. Επεκτείνοντας κατάλληλα τις πλευρές κάθε T_j, [2] μπορούμε να βρούμε *ανοικτά* φραγμένα ορθογώνια διαστήματα $\tilde{T}_j \supseteq T_j$ ώστε $\sum_{j=1}^{\infty} m(\tilde{T}_j) < m(A) + \epsilon$.

Το σύνολο $G := \bigcup_j \tilde{T}_j$ είναι ανοικτό, περιέχει το A και

$$m(G \backslash A) = m(G) - m(A) = m(\bigcup_j \tilde{T}_j) - m(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(\tilde{T}_j) - m(A) < \epsilon$$

όπως θέλαμε.

Αν $m(A) = \infty$, εφαρμόζοντας αυτό που μόλις αποδείξαμε στο σύνολο $A_k := A \cap \bar{B}(0,k)$ (όπου $k \in \mathbb{N}$), για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ανοικτό $G_k \supseteq A_k$ με $m(G_k \backslash A_k) < \frac{\epsilon}{2^k}$. Έχουμε τότε

$$m(G \backslash A) = m(\bigcup_k (G_k \backslash A_k) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(G_k \backslash A_k) < \epsilon \,.$$

(β) Εφαρμόζοντας το (α) στο A^c, για κάθε $\epsilon > 0$ βρίσκουμε ανοικτό σύνολο G με $G \supseteq A^c$ και $m(G \backslash A^c) < \epsilon$, οπότε το κλειστό σύνολο $F := G^c$ περιέχεται στο A και ικανοποιεί $m(A \backslash F) < \epsilon$, γιατί $A \backslash F = A \cap F^c = G \backslash A^c$. □

Παρατήρηση *Κάθε συμπαγές $K \subseteq \mathbb{R}^N$ έχει $m(K) < \infty$.*

Πράγματι, κάθε συμπαγές σύνολο είναι φραγμένο, συνεπώς υπάρχει φραγμένο ορθογώνιο διάστημα R ώστε $K \subseteq R$. Έπεται ότι $m(K) \leq m(R) < \infty$.

Θεώρημα 1 (Κανονικότητα του μέτρου Lebesgue) *Για κάθε $A \in \mathcal{L}$ έχουμε*

$$\begin{aligned} m(A) &= \inf\{m(G) : G \text{ ανοικτό και } G \supseteq A\} \\ &= \sup\{m(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq A\} \,. \end{aligned}$$

Απόδειξη Έστω $A \in \mathcal{L}$. Από τη μονοτονία του m, έχουμε

$$\sup\{m(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq A\} \leq m(A) \leq \inf\{m(G) : G \text{ ανοικτό και } G \supseteq A\} \,.$$

Για να δείξουμε ότι

$$m(A) \geq \inf\{m(G) : G \text{ ανοικτό και } G \supseteq A\} \tag{*}$$

μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m(A) < \infty$ (αλλιώς δεν έχουμε τίποτε ν' αποδείξουμε).

Για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε δείξει ότι υπάρχει ανοικτό σύνολο G με $G \supseteq A$ και $m(G \backslash A) < \epsilon$, και άρα $m(G) < m(A) + \epsilon$ (επειδή $m(A) < \infty$). Έτσι αποδείξαμε την (*).

Να δείξουμε ότι

$$m(A) \leq \sup\{m(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq A\} \,. \tag{**}$$

Ειδική περίπτωση. Υποθέσουμε πρώτα ότι το A είναι *φραγμένο*. Έχουμε δείξει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει *κλειστό* σύνολο $F \subseteq A$ ώστε $m(A \backslash F) < \epsilon$. Έπεται ότι $m(A) < m(F) + \epsilon$ (γιατί το A είναι φραγμένο, οπότε $m(A) < \infty$). Αλλά το F είναι επίσης *φραγμένο* (αφού $F \subseteq A$) υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$, άρα είναι *συμπαγές*. Δείξαμε την (**) για φραγμένο A.

Γενική περίπτωση. Αν $A \in \mathcal{L}$ ορίζουμε $A_k := A \cap \bar{B}(0,k)$ όπου $k \in \mathbb{N}$. Τότε η (A_k) είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων με $\bigcup_k A_k = A$, συνεπώς

$$m(A) = \lim_k m(A_k) = \sup_k m(A_k) \,.$$

[2] δηλ. $\tilde{T}_j = (T_j)_\delta := \{x \in \mathbb{R}^N : \text{dist}(x, T_j) < \delta\}$ όπου $\delta = \frac{\epsilon}{n 2^j}$

Αλλά, αφού κάθε A_k είναι φραγμένο, από την ειδική περίπτωση ξέρουμε ότι

$$m(A_k) = \sup\{m(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq A_k\}\,.$$

Όμως, $\{m(K) : K$ συμπαγές και $K \subseteq A_k\} \subseteq \{m(K) : K$ συμπαγές και $K \subseteq A\}$ για κάθε k (αφού $A_k \subseteq A$) και συνεπώς

$$\begin{aligned}\lambda(A) = \sup_k m(A_k) &= \sup_k \sup\{m(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq A_k\} \\ &\leq \sup\{m(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq A\}\,.\end{aligned}$$

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη της (**). □

Πόρισμα 1 *Κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \in \mathcal{L}$ γράφεται*

$$A = F \cup N_1 = G \backslash N_2$$

όπου το F είναι σύνολο F_σ, το G είναι σύνολο G_δ και τα N_1, N_2 είναι σύνολα μέτρου μηδέν. Επομένως κάθε μετρήσιμο σύνολο διαφέρει από ένα σύνολο Borel κατά ένα σύνολο μέτρου μηδέν.

Απόδειξη Από το Θεώρημα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν K_n συμπαγές και G_n ανοικτό ώστε $K_n \subseteq A \subseteq G_n$ και $m(G_n \backslash A) < 1/n$ και $m(A \backslash K_n) < 1/n$. Θέτουμε $F = \bigcup K_n$ και $G = \bigcap G_n$, οπότε $F \subseteq A \subseteq G$, το F είναι F_σ, το G είναι G_δ και

$$m(G \backslash F) \leq m(G_n \backslash K_n) < 2/n \quad \forall n$$

άρα $m(A \backslash F) \leq m(G \backslash F) = 0$ και ομοίως $m(G \backslash A) = 0$. Θέτουμε λοιπόν $N_1 = A \backslash F$ και $N_2 = G \backslash A$. □

Πρόταση 1 *Αν $E \subseteq \mathbb{R}^N$ είναι μετρήσιμο με $m(E) < \infty$, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $F \subseteq \mathbb{R}^N$ πεπερασμένη ένωση από φραγμένα ορθογώνια διαστήματα, ώστε*

$$m(E \triangle F) < \epsilon\,.$$

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Από το Λήμμα 1, υπάρχει ακολουθία $\{T_k\}$ από φραγμένα ορθογώνια διαστήματα ώστε $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$ και

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(T_k) < m(E) + \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Αφού η σειρά των $m(T_k)$ συγκλίνει, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} m(T_k) < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Ορίζουμε $F = T_1 \cup \cdots \cup T_n$. Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} m(F \setminus E) &\leq m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k \setminus E\right) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k\right) - m(E) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} m(T_k) - m(E) < \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

και

$$E \setminus F = E \setminus (T_1 \cup \cdots \cup T_n) \subseteq \bigcup_{k=n+1}^{\infty} T_k,$$

άρα

$$m(E \setminus A) \leq m\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} T_k\right) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} m(T_k) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Έπεται ότι

$$m(E \triangle F) = m(E \setminus F) + m(F \setminus E) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \varepsilon,$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Λήμμα 3 *Αν $E \subseteq \mathbb{R}^N$ είναι μετρήσιμο με $m(E) < \infty$, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\phi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{T_k}$, όπου T_k φραγμένα ορθογώνια διαστήματα, ώστε*

$$\|\chi_E - \phi\|_1 := \int |\chi_E - \phi| dm < \epsilon \,.$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 1, υπάρχει $F \subseteq \mathbb{R}^N$, πεπερασμένη ένωση από φραγμένα ορθογώνια διαστήματα, ώστε $m(E \triangle F) < \epsilon$.

Αν παρατηρήσουμε ότι $|\chi_E - \chi_F| = \chi_{E\triangle F}$ (διότι ένα $x \in \mathbb{R}^N$ ανήκει στο $E\triangle F$ αν-ν ανήκει ή στο E ή στο F αλλά όχι και στα δύο), έχουμε

$$\|\chi_E - \chi_F\|_1 = \int |\chi_E - \chi_F| dm = \int \chi_{E\triangle F} dm = m(E\triangle F) < \epsilon.$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θα δείξουμε ότι υπάρχουν ξένα ανά δύο φραγμένα ορθογώνια διαστήματα $\{T_1, \ldots, T_n\}$ ώστε αν $\phi = \sum_{k=1}^n \chi_{T_k}$ να έχουμε $\chi_F(x) = \phi(x)$ σχεδόν για κάθε x οπότε

$$\|\chi_E - \phi\|_1 \le \|\chi_E - \chi_F\|_1 + \|\chi_F - \phi\|_1 < \epsilon \,.$$

Πράγματι: Αν $F = \bigcup_{k=1}^m R_k$ όπου τα R_k είναι φραγμένα ορθογώνια διαστήματα, επεκτείνοντας τις πλευρές όλων των R_k σχηματίζω μια οικογένεια $\{S_k : k = 1, \ldots, n\}$ από φραγμένα ορθογώνια διαστήματα με $\bigcup_{k=1}^n S_k = F$ τα οποία επιπλέον είναι *σχεδόν ξένα* δηλαδή $S_k^o \cap S_j^o = \emptyset$ όταν $k \neq j$, [3] άρα $m(S_k \cap S_j) = 0$. Επομένως, θέτοντας $T_k = S_k^o$, τα $\{T_1, \ldots, T_n\}$ είναι πράγματι ξένα ανά δύο φραγμένα ορθογώνια διαστήματα, και η διαφορά $F \setminus \bigcup_{k=1}^n T_k$ περιέχεται στην ένωση των συνόρων των T_k, που είναι (μετρήσιμα) σύνολα μέτρου μηδέν, δηλαδή $m(F \setminus \bigcup_{k=1}^n T_k) = 0$ και συνεπώς $\chi_F(x) - \sum_{k=1}^n \chi_{T_k}(x) = 0$ σχεδόν για κάθε x, οπότε $\|\chi_F - \phi\|_1 = 0$. □

Είναι γνωστό (και θα το αποδείξουμε αμέσως) ότι ο γραμμικός χώρος των απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι πυκνός στον $L^1(\mathbb{R}^N)$. Θα δείξουμε κάτι ισχυρότερο:

Πρόταση 2 *Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\phi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{T_k}$, όπου T_k φραγμένα ορθογώνια διαστήματα, ώστε*

$$\|f - \phi\|_1 < \epsilon \,.$$

Σημείωση. Συναρτήσεις όπως η ϕ ονομάζονται *κλιμακωτές συναρτήσεις (step functions)*.

Απόδειξη. Είναι γνωστό ότι υπάρχει ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $\psi_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ που συγκλίνει στην f κατά σημείο και

$$|\psi_n| \le |\psi_{n+1}| \le |f| \,.$$

Έπεται ότι $\int |\psi_n| dm \le \int |f| dm < \infty$ αφού $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, και συνεπώς $\psi_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Επίσης από την ίδια ανισότητα έχουμε

$$|\psi_n - f| \le 2|f|$$

επομένως από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε

$$\lim_n \int |\psi_n - f| dm = 0 \,.$$

Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει λοιπόν μια απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση $\psi = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{E_k}$ ώστε $\|f - \psi\|_1 < \epsilon/2$. Αφού η ψ είναι ολοκληρώσιμη, κάθε $E_k \in \mathcal{L}$ έχει πεπερασμένο μέτρο. Από το Λήμμα 3, υπάρχουν κλιμακωτές στυναρτήσεις ϕ_k ώστε

$$\|\chi_{E_k} - \phi_k\|_1 < \frac{\epsilon}{2\sum_k |a_k|} \; k = 1, \ldots, n.$$

Θέτοντας $\phi = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k$ έχουμε

$$\|f - \phi\|_1 \le \|f - \psi\|_1 + \|\psi - \phi\|_1 < \frac{\epsilon}{2} + \sum_k |a_k| \, \|\chi_{E_k} - \phi_k\|_1 < \epsilon$$

όπως θέλαμε. □

[3] δηλ. αν $S_k = \prod_{i=1}^n I_i$ όπου το I_i έχει άκρα $a_i < b_i$ και $S_j = \prod_{i=1}^n J_i$ όπου το J_i έχει άκρα $c_i < d_i$ τότε τα ανοικτά ορθογώνια διαστήματα $\prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$ και $\prod_{i=1}^n (c_i, d_i)$ είναι ξένα

Λήμμα 4 *Αν $T \subseteq \mathbb{R}^N$ είναι φραγμένο ορθογώνιο διάστημα, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συνεχής $g : \mathbb{R}^N \to [0,1]$ με συμπαγή φορέα ώστε*

$$\|\chi_I - g\|_1 < \epsilon\,.$$

Μάλιστα η g μπορεί να επιλεγεί της μορφής $g(x_1,\dots,x_n) = g_1(x_1)g_2(x_2)\dots g_n(x_n)$ όπου $g_k \in C_c(\mathbb{R})$.

Απόδειξη. Ειδική περίπτωση: $N = 1$. Έστω ότι το διάστημα $T \subseteq \mathbb{R}$ έχει άκρα $a < b$. Αν το $\delta > 0$ είναι μικρότερο από $\frac{b-a}{2}$, ονομάζουμε $g_\delta : \mathbb{R} \to [0,1]$ την συνάρτηση που είναι ίση με 1 στο διάστημα $[a+\delta, b-\delta]$, μηδενίζεται έξω απ' το (a,b) και είναι γραμμική στα $[a, a+\delta)$ και $(b-\delta, b]$. Έχουμε ότι $g_\delta \in C_c(\mathbb{R})$ και εύκολα υπολογίζουμε ότι

$$\|\chi_I - g_\delta\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |\chi_T - g_\delta| dm = \int_{\mathbb{R}} (\chi_T - g_\delta) dm = (b-a) - \int_a^b g_\delta dm = (b-a) + (b-a-\delta) = \delta$$

οπότε αρκεί να πάρουμε $\delta < \epsilon$.

Γενική περίπτωση. Έστω το ορθογώνιο διάστημα $T = \prod_{j=1}^N T_j \subseteq \mathbb{R}^N$ όπου κάθε $T_j \subseteq \mathbb{R}$ έχει άκρα $a_j < b_j$. Θεωρούμε ένα θετικό αρκετά μικρό δ, συνεχείς συναρτήσεις $g_j : \mathbb{R} \to [0,1]$ (που εξαρτώνται απ' το δ) όπως στην ειδική περίπτωση και θέτουμε $g_\delta := g_1 g_2 \dots g_N : \mathbb{R}^N \to [0,1]$. Η g_δ είναι συνεχής συνάρτηση με συμπαγή φορέα (μηδενίζεται έξω απ' το $\overline{T}$) και $\chi_T \ge g_\delta \ge 0$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\|\chi_T - g_\delta\|_1 = \int_{\mathbb{R}^N} |\chi_T - g_\delta| dm^N &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\prod_{j=1}^N \chi_{T_j} - \prod_{j=1}^N g_j \right) dm^N \\
&\overset{(F)}{=} \prod_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}} \chi_{T_j} dm - \prod_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}} g_j dm \\
&= \prod_{j=1}^N (b_j - a_j) - \prod_{j=1}^N (b_j - a_j - \delta)
\end{aligned}$$

όπου η ισότητα (F) είναι (τετριμμένη) συνέπεια του Θεωρήματος Tonelli. Παίρνοντας όριο [4] καθώς $\delta \to 0$, βλέπουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|\chi_T - g_\delta\|_1 < \epsilon$, όπως θέλαμε. □

Πρόταση 3 *Ο γραμμικός χώρος $C_c(\mathbb{R}^N)$ των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα είναι πυκνός στον $L^1(\mathbb{R}^N)$: Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ ώστε*

$$\|f - g\|_1 < \epsilon\,.$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\phi = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{T_k}$, όπου T_k φραγμένα ορθογώνια διαστήματα, ώστε $\|f - \phi\|_1 < \frac{\epsilon}{2}$.
Για κάθε $k = 1, \dots, n$ από το Λήμμα 4 υπάρχει $g_k \in C_c(\mathbb{R}^N)$ ώστε $\|\chi_{T_k} - g_k\|_1 < \frac{\epsilon}{2\sum |a_k|}$.
Θέτοντας $g = \sum_{k=1}^n a_k g_k$, έχουμε $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ και

$$\|f - g\|_1 \le \|f - \phi\|_1 + \|\phi - g\|_1 < \frac{\epsilon}{2} + \sum_{k=1}^n |a_k| \, \|\chi_{T_k} - g_k\|_1 < \epsilon,$$

όπως θέλαμε. □

Πρόταση 4 *Αν $a \in \mathbb{R}^N$ θέτουμε $\tau_a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N : x \mapsto x = a$.*
(α) Αν $E \in \mathcal{L}^N$, τότε $\tau_a(E) \in \mathcal{L}^N$ και $m(\tau_a(E)) = m(E)$.
(β) Αν $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμη, τότε και η $f \circ \tau_a$ είναι μετρήσιμη. Αν επιπλέον $f \in L^1(m)$ ή $f \ge 0$, τότε $\int (f \circ \tau_a) dm = \int f dm$.

Απόδειξη. (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι το E είναι σύνολο Borel. Αφού ο μετασχηματισμός τ_a και ο αντίστροφός του (που είναι ο τ_{-a}) είναι συνεχείς, το σύνολο $\tau_a(E)$ είναι επίσης Borel.

[4] Ευχαριστώ, Σ.Π.

Για την ισότητα $m(\tau_a(E)) = m(E)$: υποθέτουμε πρώτα ότι το E είναι ορθογώνιο διάστημα, $E = \prod_{i=1}^N I_i$. Τότε, αν $a = (a_1, \ldots, a)$, έχουμε $\tau_a(E) = \prod_{i=1}^N (I_i + a_i)$ άρα $m(\tau_a(E)) = \prod_{i=1}^N m(I_i + a_i)$ από τον ορισμό του μέτρου γινόμενο. Αλλά το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}$ είναι αναλλοίωτο ως προς μεταφορές, άρα $m(I_i + a_i) = m(I_i)$ για κάθε i και συνεπώς $m(\tau_a(E)) = \prod_{i=1}^N m(I_i) = m(E)$.

Αν λοιπόν ονομάσουμε $\nu(E) := m(\tau_a(E))$, το μέτρο ν ορίζεται στην σ-άλγεβρα $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^N} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ και ικανοποιεί $\nu(E) = \mu^N(E)$ όταν το E είναι ορθογώνιο διάστημα. Από τη μοναδικότητα του μέτρου γινόμενο, έπεται ότι $\nu(E) = \mu^N(E)$, δηλαδή $m(\tau_a(E)) = m^N(E)$ για κάθε $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$.

Τέλος, αν $E \in \mathcal{L}^N$, τότε από το Πόρισμα 1 το E γράφεται $E = F \cup M$ όπου F Borel και M μηδενικό. Όμως ο τ_a διατηρεί τα μηδενικά σύνολα: πράγματι αν D είναι σύνολο Borel με $m(D) = 0$ έχουμε $m(\tau_a(D)) = m(D) = 0$. Έπεται λοιπόν ότι το $\tau(M)$ είναι μηδενικό σύνολο και επομένως

$$m(\tau_a(E)) = m(\tau_a(F \cup M)) = m(\tau_a(F) \cup \tau_a(M)) = m(\tau_a(F)) = m(F) = m(E).$$

(β) Έστω $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, για κάθε Borel υποσύνολο $B \subseteq \mathbb{C}$, έχουμε $f^{-1}(B) \in \mathcal{L}^N$, συνεπώς $f^{-1}(B) = F \cup M$ όπου F Borel και M μηδενικό. Επομένως

$$(f \circ \tau_a)^{-1}(B) = \tau_a^{-1}(F \cup M) = \tau_{-a}(F \cup M)$$

που είναι μετρήσιμο από το (α).

Επομένως η $f \circ \tau_a$ είναι Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση.

Για την ισότητα $\int (f \circ \tau_a) dm = \int f dm$: υποθέτουμε πρώτα ότι $f = \chi_E$ όπου E είναι μετρήσιμο. Τότε $\int (f \circ \tau_a) dm = m(\tau_{-a}(E)) = m(E)$ (από το (α)) $= \int f dm$.

Από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος, η ισότητα ισχύει όταν η f είναι απλή μετρήσιμη μη αρνητική. Κατά συνέπεια ισχύει όταν η f είναι μη αρνητική μετρήσιμη, από τον ορισμό του ολοκληρώματος.

Τέλος, αν η $f \in L^1(m)$ και παίρνει (σχεδόν παντού) πραγματικές τιμές, η ισότητα έπεται γράφοντας $f = f_+ - f_-$ όπου οι $f_\pm$ είναι μη αρνητικές μετρήσιμες. Όταν η f ανήκει στον $L^1(m)$ και παίρνει μιγαδικές τιμές, η ισότητα έπεται θεωρώντας τις Ref και Imf. □

Πρόταση 5 *Έστω $T \in GL(n, \mathbb{R})$ δηλαδή, $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ γραμμικός και αντιστρέψιμος μετασχηματισμός.*

(α) Αν $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμη, τότε και η $f \circ T$ είναι μετρήσιμη. Αν επιπλέον $f \in L^1(m)$ ή $f \geq 0$, τότε $|\det T| \int (f \circ T) dm = \int f dm$.

(β) Αν $E \in \mathcal{L}^N$, τότε $T(E) \in \mathcal{L}^N$ και $m(T(E)) = |\det T| m(E)$.

Απόδειξη. (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι Borel μετρήσιμη. Αφού ο μετασχηματισμός T και ο αντίστροφός του είναι συνεχείς, έπεται ότι η $f \circ T$ είναι Borel μετρήσιμη.

Για την απόδειξη της ισότητας

$$|\det T| \int (f \circ T) dm = \int f dm \qquad (**)$$

παρατηρούμε πρώτα ότι, όπως γνωρίζουμε από τη γραμμική άλγεβρα, κάθε $T \in GL(n, \mathbb{R})$ είναι σύνθεση μετασχηματισμών των ακόλουθων τριών τύπων:

$$\begin{aligned} T_1 &: (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N) \mapsto (x_1, \ldots, cx_i, \ldots, x_N) \qquad (c \neq 0) \\ T_2 &: (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N) \mapsto (x_1, \ldots, x_i + cx_k, \ldots, x_N) \qquad (k \neq i) \\ T_3 &: (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_i, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι αν η (**) ισχύει για δύο μετασχηματισμούς T και S, τότε ισχύει και για τη σύνθεση $S \circ T$. Πράγματι:

$$\begin{aligned} |\det(T \circ S)| \int (f \circ (T \circ S)) dm &= |\det(T) \det(S)| \int ((f \circ T) \circ S)) dm \\ &\overset{(!)}{=} |\det(T)| \int (f \circ T)) dm = \int f dm \end{aligned}$$

όπου στην (!) εφαρμόσαμε την (**) για τη συνάρτηση $f \circ T$.

Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι η (**) αληθεύει για καθέναν από τους τρεις τύπους. Για τον πρώτο τύπο, επειδή $\det T_1 = c$, από το Θεώρημα Fubini έχουμε

$$\begin{aligned} |\det T_1| \int (f \circ T_1)(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N) dm^N(x) &= |c| \int_{\mathbb{R}^N} f(x_1, \ldots, cx_i, \ldots, x_N) dm^N(x) \\ &= |c| \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, cx_i, \ldots, x_N) dx_1 \ldots dx_i \ldots dx_N \\ &\overset{(!)}{=} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_N) dx_1 \ldots dy_i \ldots dx_N \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f dm^N \end{aligned}$$

όπου στην (!) εφαρμόσαμε τον τύπο [5] αλλαγής μεταβλητής $|c| \int_{\mathbb{R}} g(ct)dt = \int g(s)ds$ στη συνάρτηση $g(t) := f(x_1, \ldots, t, \ldots, x_N)$.

Για τον δεύτερο τύπο, επειδή $\det T_2 = 1$, πάλι από το Θεώρημα Fubini έχουμε

$$\begin{aligned} |\det T_2| \int (f \circ T_2)(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N) dm^N(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x_1, \ldots, x_i + cx_k, \ldots, x_N) dm^N(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_i + cx_k, \ldots, x_N) dx_1 \ldots dx_i \ldots dx_N \\ &\overset{(!)}{=} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N) dx_1 \ldots dx_i \ldots dx_N \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f dm^N \end{aligned}$$

όπου στην (!) ολοκληρώσαμε πρώτα ως προς x_i και εφαρμόσαμε τον τύπο $\int_{\mathbb{R}} g(t+cx_k)dt = \int g(t)dt$ στη συνάρτηση $g(t) := f(x_1, \ldots, t, \ldots, x_N)$ (αναλλοίωτο του μέτρου Lebesgue (στο $\mathbb{R}$) ως προς μεταφορές). [6]

Για τον τρίτο τύπο το συμπέρασμα είναι άμεσο από το Θεώρημα Fubini για την εναλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης:

$$\begin{aligned} \int (f \circ T_3)(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k, \ldots, x_N) dm^N(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_i, \ldots, x_N) dm^N(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_i, \ldots, x_N) dx_1 \ldots dx_i \ldots dx_k \ldots dx_N \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_i, \ldots, x_N) dx_1 \ldots dx_k \ldots dx_i \ldots dx_N \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f dm^N \end{aligned}$$

Έχουμε δείξει το (α) για συναρτήσεις Borel. Αν λοιπόν $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$ εφαρμόζοντας το (α) στη συνάρτηση χ_E συμπεραίνουμε ότι για κάθε $T \in GL(n, \mathbb{R})$ έχουμε $T(E) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^N}$ και $m(T(E)) = |\det T| m(E)$. Ειδικότερα αν $m(E) = 0$ τότε $m(T(E)) = 0$. Επομένως ο T διατηρεί τα μηδενικά σύνολα.

Έπεται όπως στην προηγούμενη απόδειξη ότι ισχύει το (β).

Έστω τέλος $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, για κάθε Borel υποσύνολο $B \subseteq \mathbb{C}$, έχουμε $f^{-1}(B) \in \mathcal{L}^N$, συνεπώς $f^{-1}(B) = F \cup M$ όπου F Borel και M μηδενικό. Επομένως

$$(f \circ T)^{-1}(B) = T^{-1}(F \cup M))$$

που είναι μετρήσιμο όπως μόλις δείξαμε.

Επομένως η $f \circ T$ είναι Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Η ισότητα (**) έπεται τώρα όπως στην απόδειξη της προηγούμενης Πρότασης (από χαρακτηριστικές σε απλές, μετά σε μη αρνητικές μετρήσιμες και μετά σε συναρτήσεις στον L^1). □

Πόρισμα 2 *Το μέτρο και το ολοκλήρωμα Lebesgue είναι αναλλοίωτα από ορθογώνιους μετασχηματισμούς.*

... γιατί ικανοποιούν $|\det T| = 1$.

[5] που αποδεικνύεται πολύ εύκολα, πρώτα για χαρακτηριστικές, μετά για απλές κ.λπ. κατά τα γνωστά

[6] $\int_{\mathbb{R}^N} f(x_1, \ldots, x_i + cx_k, \ldots, x_N) dm^N(x) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_i + cx_k, \ldots, x_N) dx_i) dm^{N-1}(x_1 \ldots x_{i-1}, x_{i+1} \ldots x_N) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N) dx_i) dm^{N-1}(x_1 \ldots x_{i-1}, x_{i+1} \ldots x_N) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_N) dm^N(x)$.