Προσέγγιση γραμμικών συνδυασμών χαρακτηριστικών συναρτήσεων ορθογωνίων με πλευρές ανοικτά διαστήματα από συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα

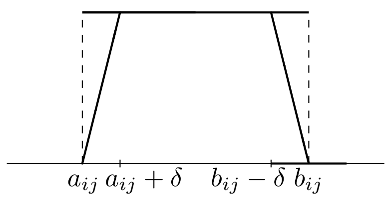
Έστω $\varphi = \sum_{i=1}^{m} b_i \mathbf{1}_{R_i}$, όπου κάθε R_i είναι ένα ανοικτό ορθογώνιο:

$$R_i = (a_{i1}, b_{i1}) \times \cdots \times (a_{in}, b_{in}), \qquad i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Έστω $\varepsilon > 0$ και θεωρούμε ένα $\delta > 0$ με

$$\delta \leqslant \tfrac{1}{2} \min_{\substack{i \in \{1,\ldots,m\} \\ j \in \{1,\ldots,n\}}} (b_{ij} - a_{ij}),$$

το οποίο θα επιλεγεί αργότερα.



Ορίζουμε $g_{ij} \colon \mathbb{R} \to [0,1]$ όπως στο παραπάνω σχήμα:

$$g_{ij}(t) := \begin{cases} 1 & \text{για } t \in (a_{ij} + \delta, b_{ij} - \delta) \\ 0 & \text{για } t \notin [a_{ij}, b_{ij}] \\ \delta^{-1}(t - a_{ij}) & \text{για } t \in [a_{ij}, a_{ij} + \delta] \\ \delta^{-1}(b_{ij} - t) & \text{για } t \in [b_{ij} - \delta, b_{ij} + \delta], \end{cases}$$

για κάθε $i \in \{1, \ldots, m\}$ και $j \in \{1, \ldots, n\}$. Κάθε g_{ij} είναι προφανώς συνεχής· επίσης

$$\int_{\mathbb{R}} g_{ij} \, \mathrm{d}\lambda_1 = b_{ij} - a_{ij} - \delta,$$

για όλα τα $i \in \{1, \ldots, m\}$ και $j \in \{1, \ldots, n\}$. Ορίζουμε και $g_i \colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ με

$$g(x_1, \ldots, x_n) := \prod_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j) \qquad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Κάθε g_i είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Επίσης

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

αν $x_j \notin (a_{ij}, b_{ij})$ για κάποιο $j \in \{1, \dots, n\}$, οπότε $g_i(x) = 0$ για $x \notin R_i$, $i \in \{1, \dots, m\}$. Τέλος ορίζουμε $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ να είναι η

$$g := \sum_{i=1}^{m} b_i g_i.$$

Η g είναι συνεχής ως γραμμικός συνδυασμός συνεχών και $g(x) = 0$ αν $x \notin R_1 \cup \cdots \cup R_m$, δηλαδή έξω από ένα φραγμένο σύνολο. Τέλος

$$\begin{aligned}
\|\varphi - g\|_1 &= \left\| \sum_{i=1}^{m} b_i (\mathbf{1}_{R_i} - g_i) \right\|_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{i=1}^{m} b_i (\mathbf{1}_{R_i} - g_i) \right| \mathrm{d}\lambda_n \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m} |b_i| \int_{\mathbb{R}^n} (\mathbf{1}_{R_i} - g_i) \,\mathrm{d}\lambda_n \\
&= \sum_{i=1}^{m} |b_i| \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \left(\prod_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{(a_{ij}, b_{ij})}(x_j) - \prod_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j) \right) \mathrm{d}\lambda_1(x_1) \cdots \mathrm{d}\lambda_1(x_n) \\
&= \sum_{i=1}^{m} |b_i| \left(\int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{(a_{ij}, b_{ij})}(x_j) \,\mathrm{d}\lambda_1(x_1) \cdots \mathrm{d}\lambda_1(x_n) - \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j) \,\mathrm{d}\lambda_1(x_1) \cdots \mathrm{d}\lambda_1(x_n) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} |b_i| \left(\prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(a_{ij}, b_{ij})}(x_j) \,\mathrm{d}\lambda_1(x_j) - \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} g_{ij}(x_j) \,\mathrm{d}\lambda_1(x_j) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} |b_i| \left(\prod_{j=1}^{n} (b_{ij} - a_{ij}) - \prod_{j=1}^{n} (b_{ij} - a_{ij} - \delta) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} |b_i| \prod_{j=1}^{n} (b_{ij} - a_{ij}) \left[1 - \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{\delta}{b_{ij} - a_{ij}} \right) \right] \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m} |b_i| \prod_{j=1}^{n} (b_{ij} - a_{ij}) \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta}{b_{ij} - a_{ij}} \\
&= \sum_{i=1}^{m} |b_i| \lambda_n(R_i) \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta}{b_{ij} - a_{ij}},
\end{aligned}$$

η τελευταία ανισότητα από το Λήμμα που ακολουθεί. Επομένως, επιλέγοντας

$$\delta < \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^{m} |b_i| \lambda_n(R_i) \sum_{j=1}^{n} (b_{ij} - a_{ij})^{-1}},$$

παίρνει κανείς ότι $\|\varphi - g\|_1 < \varepsilon$. $\square$

Λήμμα. *Αν* $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in [-1, 1]$, *τότε*

$$|a_1 \cdots a_n - b_1 \cdots b_n| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_j - b_j|.$$

Απόδειξη. Με επαγωγή:

$$|a_1 \cdots a_n a_{n+1} - b_1 \cdots b_n b_{n+1}| \leqslant |a_1 \cdots a_n||a_{n+1} - b_{n+1}| + |a_1 \cdots a_n - b_1 \cdots b_n||b_{n+1}|.$$

□

Η παρακάτω εικόνα είναι η γραφική παράσταση μίας $g_i(x_1, x_2) = g_{i1}(x_1) g_{i2}(x_2)$ $(n = 2)$.