Θα κάνουμε χρήση του εξής Θεωρήματος (που θα αποδείξουμε αργότερα):

<u>Θεώρημα</u>

Έστω $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$

ρόλο W στο Παρ1

$\forall\ \varepsilon > 0$ ορίζουμε

$$\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Κλίμακα

Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$.

Διατηρεί $\int$

$$(f*\phi_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x-y) f(y)\,dy$$

$$\downarrow$$

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_x(y) f(y)\,dy = f(x)$$

(α) $p < \infty$

$$f*\phi_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f \quad \text{στην } L^p \text{ τοπολογία}$$

(β) $p = \infty$ και f ομοιόμορφα συνεχής στο ανοιχτό V

Τότε

$$f*\phi_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f \quad \text{ομοιόμορφα στο } V$$

$\square$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα με

$$\phi(y) = \frac{2}{n\alpha(n)} \frac{1}{y^2+1}, \quad \left(\begin{array}{l} n\alpha(n) = 2\pi \\ \text{για } n=2 \end{array}\right)$$

και παίρνουμε το (iii)

Η Απόδειξη του Τύπου του Poisson για την Χώρα ολοκληρώθηκε για $n=2$. Για $n \ge 3$ βλέπε φυλλάδιο 2 Ασκήσεων.

$\square$

Προσεγγισεις της δ – Συνελιξεις – Ομαλοποιηση

1. <u>Ορ</u> (δ-ακολουθια)

Μια ακολουθια $\{W_\varepsilon\}$ λεγεται <u>δ-ακολουθια</u> εαν

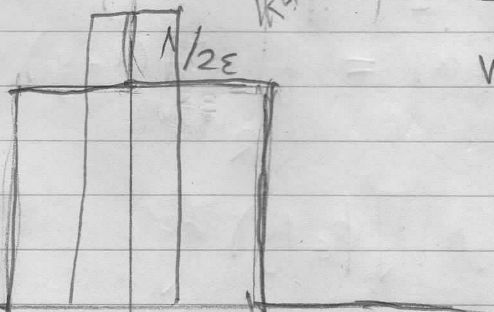
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} W_\varepsilon(x-y)f(y)\,dy = f(x) \quad \forall f \in C_c(\mathbb{R})$$

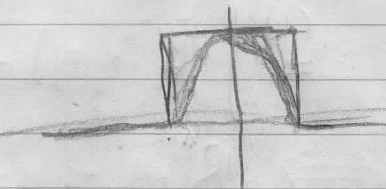
Φορμαλιστικα $W_\varepsilon(x-\cdot) \to \delta_x(\cdot)$, $\int_{\mathbb{R}^n} W_\varepsilon(x-y)f(y)\,dy \to \int_{\mathbb{R}^n}\delta_x(y)f(y)\,dy$

Παραδειγμα 1

$$W_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |x|<\varepsilon \\ 0, & |x|>\varepsilon \end{cases}$$

$\int W_\varepsilon(x-y)f(y)\,dy$
$= \int W_\varepsilon(y)f(x-y)\,dy$





$\left(\int \theta(x-y)W_\varepsilon(y)\,dy \approx \sum_k \theta(x-y_k)\,W_\varepsilon(y_k)\,\Delta y, \quad \sum_k W_\varepsilon(y_k)\,\Delta y = 1\right.$ Μεσος ορος$\left.\right)$

<u>Παραδειγμα 2</u>

Εστω $\int_{\mathbb{R}} w(x)\,dx = 1$, $w \in L^1(\mathbb{R})$, $f \in C_c(\mathbb{R})$

$$\boxed{W_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\,w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}$$

. Η $\{W_\varepsilon\}$ ειναι δ-ακολουθια

<u>Απ</u>

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} w\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)f(y)\,dy - f(x) = (W_\varepsilon * f)(x) - f(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} w(z)\,[f(x-\varepsilon z) - f(x)]\,dz$$

$$= \varphi(x) + \int_{\mathbb{R}} w(\zeta)\left[\varphi(x-\zeta) - \right]$$

Θα εφαρμόσουμε Lebesgue:

$$\left| w(\zeta)\left[f(x-\varepsilon\zeta) - f(x)\right]\right| \le 2(\max|f|)\,|w(\zeta)|$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} w(\zeta)\left[f(x-\varepsilon\zeta) - f(x)\right] = 0.$$

□

<u>Λήμμα 2</u>

Για $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f = f(y)$, κάθε x φιξαρισμένο, ορίζουμε την μεταφορά

$$y \to f_x(y) := f(x+y)$$

Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$.

Τότε $$\lim_{x\to 0} \| f_x - f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

<u>Απ</u>

1. Έστω g συνεχής με συμπαγή φορέα
$\Rightarrow$ g ομοιόμορφα συνεχής

$$\lim_{x\to 0} \int_{\mathbb{R}} |g(x+y) - g(y)|^p dx = 0$$

μέσω Lebesgue. (γιατί;)

61

2. Δοθεισης $f \in L^p$ και $\varepsilon > 0$ $\exists$ g, συνεχης, με συμπαγη φορεα

$$\| f - g \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon/3$$

Luzin

(Θεωρημα πυκνοτητας – Luzin)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f - g|^p \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f_x - g_x|^p \, dy$$

$\therefore$ $$\| f_x - g_x \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon/3$$

Κατα συνεπεια

$$\| f_x - f \|_{L^p} \leq \| f_x - g_x \|_{L^p} + \| g_x - g \|_{L^p} + \| g - f \|_{L^p}$$

$$\leq 2\varepsilon/3 + \| g_x - g \|_{L^p}$$

Κανοντας χρηση του 1. $\| g_x - g \|_{L^p} < \varepsilon/3$ για $|x|$ μικρο.

$\therefore$ $$\| f_x - f \|_{L^p} < \varepsilon.$$

ΟΕΔ.

<u>Απ</u> <u>Θεωρήματος 1, σ 58</u> $\qquad \phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

(1) $$\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(x)\,dx = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) d\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 1$$

(2) $$(f*\phi_\varepsilon)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,\phi_\varepsilon(y)\,dy - f(x)$$

$$\overset{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-y) - f(x)]\,\phi_\varepsilon(y)\,dy \qquad \left(z = \frac{y}{\varepsilon}\right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-\varepsilon z) - f(x)]\,\phi(z)\,dz$$

(α) <u>$p<\infty$</u>

(3) $$\| f*\phi_\varepsilon - f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} =$$

$$= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-\varepsilon z) - f(x)]\,\phi(z)\,dz \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} f_k \right\|_{L^p} \le \sum_{k=1}^{N} \|f_k\|_{L^p} \qquad \text{(Τριγωνική ανισότητα}$$

Θεωρωντας το ολοκληρωμα σαν οριο αθροισματος, Riemann

$$\int_{\mathbb{R}^n} [f(x-\varepsilon z) - f(x)]\,\phi(z)\,dz$$

$$\sim \sum_k [f(x-\varepsilon z_k) - f(x)]\,\phi(z_k)\,\Delta z$$

$\Rightarrow$

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} [f(x-\varepsilon z) - f(x)]\,\phi(z)\,dz \right\|_{L^p}$$

$$\left\| \sum_k [f(\cdot-\varepsilon z_k) - f(\cdot)]\,\phi(z_k)\,\Delta z \right\|_{L^p}$$

$$\leq \sum_k \| f(\cdot - \varepsilon z_k) - f(\cdot) \|_{L^p}\, |\phi(z_k)|\, \Delta z$$

$$\sim \int_{\mathbb{R}^n} \| f_{-\varepsilon z} - f \|_{L^p}\, |\phi(z)|\, dz$$

$\therefore$

$$(4) \quad \| f * \phi_\varepsilon - f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \| f_{-\varepsilon z} - f \|_{L^p}\, |\phi(z)|\, dz$$

Εφαρμόζουμε ξανά το Θεώρημα του Lebesgue

$$|\phi(z)|\,\|f_{-\varepsilon z} - f\|_{L^p} \le 2\|f\|_{L^p}\,|\phi(z)|$$ ως προς z

και επομένως $\int \| f$.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f_{-\varepsilon z} - f\|_{L^p} = 0 \qquad \text{(Λήμμα 2)}$$

$$\therefore \quad \|f * \phi_\varepsilon - f\|_{L^p} \longrightarrow 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

(β) Έστω $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ και f ομοιόμορφα συνεχής στο V

Δοθέντος $\delta > 0$ επιλέγουμε συμπαγές σύνολο $W \subset \mathbb{R}^n$

τ.ω. $$\int_{\mathbb{R}^n - W} |\phi|\, dx < \delta$$

(ιδιότητα $\int$ - απόλυτη συνέχεια, $\int_{\mathbb{R}^n} |\phi| < \infty$)

Κατά συνέπεια

$$\sup_{x \in V} |(f * \phi_\varepsilon)(x) - f(x)|$$

$$\le \sup_{x \in V, y \in W} |f(x - \varepsilon z) - f(x)| \int_W |\phi| + 2\|f\|_{L^\infty}\, \delta$$

ΟΕΔ.