i : πραγματικό ετήσιο επιτόκιο

δ : ένταση επιτοκίου

$$1+i = e^{\delta}$$

$A \to A e^{\delta t}$ σε χρόνο t

$$v = \frac{1}{1+i} = e^{-\delta}$$

$$e^{-\delta}A \xrightarrow[\text{1 χρόνος}]{} A$$

$$d = \frac{i}{1+i}$$

Ποσό A που γίνεται σε χρόνο t

$$e^{-\delta t}A \underset{t}{\longleftrightarrow} A$$

παρούσα αξία του A

$$e^{-\delta t} = v^t \qquad v = e^{-\delta}$$

Αναλογιστική παρούσα αξία

ποσό A που γίνεται σε χρόνο T ← τυχαίος χρόνος
από τώρα.

Α.Π.Α. του A είναι ο $E\left(e^{-rT} A \cdot 1_{\{\text{το ποσό γίνεται}\}}\right)$

Τιμή ασφάλισης $=$ E(παρούσα αξία της παροχής)

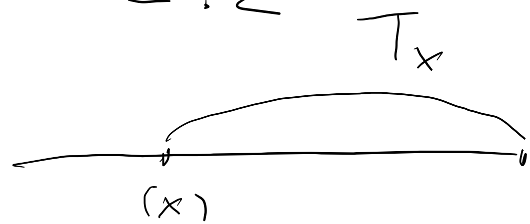
$=$ αναμ. παρ. αξία της παροχής

Ισόβια ασφάλιση

α) Δίνει 1 τη στιγμή του θανάτου

Παρούσα αξία $= 1 \cdot v^{T_x} =: Z$

$$T_x = X - x \mid X > x$$



$$\text{Τιμή} = EZ = E(v^{T_x})$$

$$= \int_0^a v^t f_{T_x}(t)\,dt$$

$$Var(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$$

$$E(Z^2) = E(v^{2T_x}) = E(e^{-2\delta T_x})$$

$$E(Z) = E(e^{-\delta T_x}) =: \bar{A}_x$$

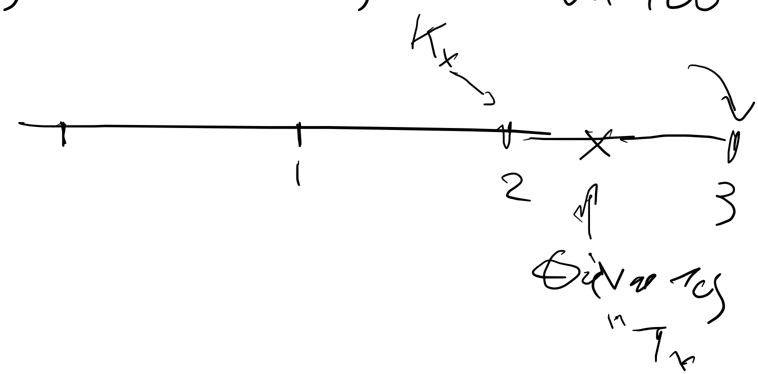
$$Var(Z) = {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2$$

$${}^2\bar{A}_x$$

β) πληρωμή στο τέλος του έτους θανάτου

$$K_x = [T_x]$$

$$E(\underbrace{v^{K_x+1}}_{Z}) = A_x$$



Ασφάλιση επιβίωσης

$n \in \mathbb{N}^*$

πληρώνει 1 σε n χρόνια από τώρα

αν τότε ο (x) είναι ζωντανός

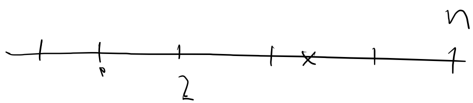
$$Z = \begin{cases} v^n & \text{αν } T_x > n \\ 0 & \text{αν } T_x \le n \end{cases} = v^n \mathbb{1}_{T_x > n}$$

$$\text{Τιμή} = A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = E(Z) = v^n E(\mathbb{1}_{T_x > n})$$

$$= v^n P(T_x > n)$$

Προσωρινή ασφάλιση

$n \in \mathbb{N}^+$



για πληρωμή 1 τον χρόνο T_x αν $T_x<n$

$$Z = v^{T_x} 1_{T_x<n}$$

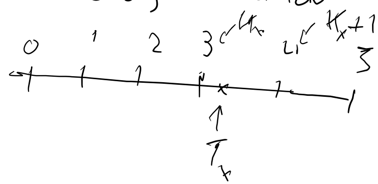
$$\text{Τιμή} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = E(Z) = \int_0^n v^t f_{T_x}(t)\,dt$$

$$\int_0^\infty v^t 1_{t<n} f_{T_x}(t)\,dt =$$

Y με πυκνότητα $f_Y(s)$

$$E\,h(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s) f_Y(s)\,ds$$

(B) πληρωμή 1 στο τέλος του έτους θανάτου αν $T_x<n$



$$Z = v^{K_x+1} 1_{T_x<n}$$

$$\text{Τιμή} = A^{1}_{x:\overline{n}|} = E\left(v^{K_x+1} 1_{K_x \le n-1}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} 1_{k \le n-1} f_{K_x}(k) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} f_{K_x}(k)$$

A_x, $\bar{A}_x$

$A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$

$A^1_{x:\overline{n}|}$, $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$

$x \wedge y = \min\{x, y\}$

Μεικτή:

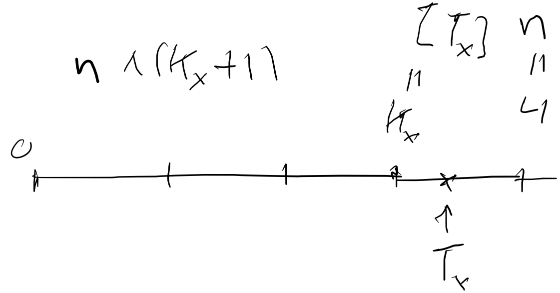
(α) πληρωμή 1 τη στιγμή $T_x \wedge n$

$$Z = v^{T_x \wedge n} = v^n 1_{T_x > n} + v^{T_x} 1_{T_x \leq n}$$

$$\text{Τιμή} = \bar{A}_{x:\overline{n}|} = EZ = A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} + \bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$$

(β) πληρωμή 1 τη στιγμή $n \wedge (K_x + 1)$

$$Z = v^{n \wedge (K_x+1)}$$



$$A_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} + A^1_{x:\overline{n}|}$$

3. (30 βαθμοί) Έστω ότι η συνάρτηση επιβίωσης για τα άτομα ενός πληθυσμού είναι $s(x) = 1 - (x/100)$ για $x \in [0, 100]$ (και προφανώς ισούται με 0 για $x > 100$) ενώ το ετήσιο επιτόκιο είναι $i = 0.04$.

(α) Ποια η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής T_{40} και ποια η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής K_{40};

(β) Να υπολογιστεί το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο για ένα άτομο ηλικίας 40 για την ασφάλιση που πληρώνει 1 Ευρώ τη στιγμή του θανάτου μόνο αν αυτή συμβεί ως τα 75 χρόνια του ατόμου. Ποιο είναι το σύμβολο για αυτό το ασφάλιστρο;

(γ) Να υπολογιστεί το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο για ένα άτομο ηλικίας 40 για την ασφάλιση που πληρώνει 1 Ευρώ στο τέλος του έτους θανάτου μόνο αν αυτό συμβεί ως τα 75 χρόνια του ατόμου. Ποιο είναι το σύμβολο για αυτό το ασφάλιστρο;

(δ) Ποιο από τα ασφάλιστρα των ερωτημάτων (β), (γ) είναι μεγαλύτερο; Δώστε αλγεβρική απόδειξη ή οικονομικό επιχείρημα.

(α) $f_{T_{40}}(t) = {}_tp_{40}\,\mu_{40+t} \qquad t>0$

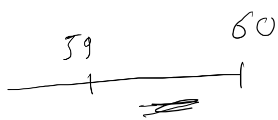
$= \frac{s(40+t)}{s(40)}\left(-\frac{s'(40+t)}{s(40+t)}\right) = -\frac{s'(40+t)}{s(40)}$

$=0$ αν $40+t \geq 100$ για $t \geq 60$

ενώ αν $0<t<60$

$f_{T_{40}}(t) = \frac{-\left(-\frac{1}{100}\right)}{\frac{60}{100}} = \frac{1}{60}$

$K_{40} \in \{0, 1, \dots, 59\}$



$f_{K_{40}}(k) = P(T_{40} \in [k, k+1))$

$= \int_k^{k+1} f_{T_{40}}(t)\,dt = \frac{1}{60}, \quad k=0,1,\dots,59$

(β) $\bar{A}^{1}_{40:\overline{35}|} = E\left(v^{T_{40}} 1_{T_{40} < 35} \right)$

$= \int_0^{35} v^t f_{T_{40}}(t)\,dt = \int_0^{35} v^t \frac{1}{60}\,dt$

$= \frac{1}{60} \int_0^{35} e^{t \log v}\,dt = \frac{1}{60} \frac{e^{35 \log v} - 1}{\log v}$

$= \frac{1}{60} \frac{v^{35} - 1}{\log v} \wedge X \quad ; \quad v = \frac{1}{1+0.01}$

(γ) $A^{1}_{40:\overline{35}|} = E\left(v^{K_{40}+1} 1_{K_{40} < 35} \right)$

$= \sum_{k=0}^{59} v^{k+1} 1_{k<35} f_{K_{40}}(k) = \sum_{k=0}^{34} v^{k+1} \frac{1}{60}$

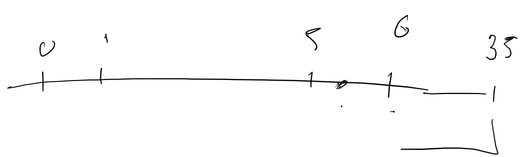
$= \frac{1}{60} v \frac{v^{35} - 1}{v - 1} = \frac{1}{60} v \frac{1 - v^{35}}{1 - v} = Y$

Μεγαλύτερο του (β) $\quad -\frac{1}{\log v} > \frac{v}{1 - v}$

$X > Y$

$-\log v < \frac{1 - v}{v} = \frac{1}{v} - 1$

$\log \frac{1}{v} < \frac{1}{v} - 1 \qquad\qquad \log x \leq x - 1$



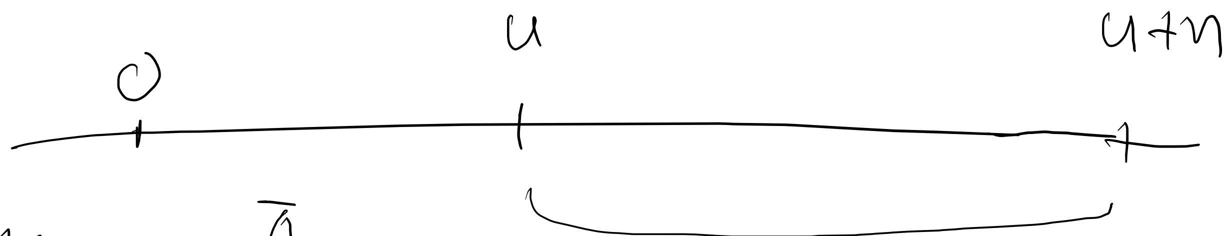
Αναβαλλόμενες

λειτουργούν μετά χρόνων u

π.χ.

Πρόσκαιρη με αναβολή u ετών

$$_{u|}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = E\left(v^{T_x} 1_{u<T_x<u+n}\right)$$



Ισοδύναμες: $_{u|}\bar{A}_x$,

$$_{u|}A_x = E\left(v^{K_x+1} 1_{K_x \geq u}\right)$$

Άσκηση:

i) $_{n|}A_x = v^n \, _np_x \, A_{x+n}$

ii) $\bar{A}^{1}_{x:\overline{u+n}|} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{u}|} + {}_{u|}A^{1}_{x:\overline{n}|}$

Λύση

i) $_{n|}A_x = E(v^{K_x+1} 1_{K_x \geq n}) =$

$= \sum_{k=n}^{\infty} v^{k+1} f_{K_x}(k) = \sum_{k=n}^{\infty} v^{k+1} \, _{k|}q_x =$

$\overset{r=k-n}{=} \sum_{r=0}^{\infty} v^{r+n+1} \, _{r+n|}q_x \overset{*}{=} \sum_{r=0}^{\infty} v^{r+n+1} \, _np_x \, _{r|}q_{x+n}$

$= v^n \, _np_x \sum_{r=0}^{\infty} v^{r+1} \underbrace{_{r|}q_{x+n}}_{= f_{K_{x+n}}(r)} = v^n \, _np_x E(v^{K_{x+n}+1})$

$= \underbrace{v^n \, _np_x}_{_nE_x = A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}} A_{x+n}$

$E(v^n 1_{T_x > n})$
$v^n P(T_x > n)$
$= v^n \, _np_x$

$*$ $_{r+n|}q_x = {}_{r+n}p_x \cdot q_{x+r+n}$
$= \overbrace{_np_x \; _rp_{x+n}} \; q_{x+n+r}$
$= {}_np_x \; _{r|}q_{x+n}$

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{u+n}} = E\left(v^{T_x} 1_{T_x < u+n}\right)$$

$$= E\left(v^{T_x} 1_{T_x < u}\right) +$$

$$E\left(v^{T_x} 1_{u \le T_x < u+n}\right)$$

$$= \bar{A}^{1}_{x:\overline{u}} + {}_{u|}\bar{A}_{x:\overline{n}}$$

Ασφάλιση κυμαινόμενης παροχής

Αύξουσα ισόβια ασφάλιση

πληρώνει K_x+1 τον χρόνο K_x+1

παρούσα αξία $Z = (K_x+1)\, v^{K_x+1}$

$$\text{Τιμή} = (IA)_x = EZ = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, v^{k+1} f_{K_x}(k)$$

$$(IA)^{1}_{x:\overline{n}}$$

Αν πληρώνει τη στιγμή του θανάτου $(I\bar{A})_x$

Άσκηση Δίνονται τα

$l_x, A_x \quad x = 35, 36, \ldots, 40$

και $i = 0.06 \quad v = \frac{1}{1+i}$ $\quad l_x = l_0 s(x)$

α) $${}_5E_{35} = v^5 \, {}_5p_{35} = v^5 \frac{s(40)}{s(35)} = v^5 \frac{l_{40}}{l_{35}}$$

β) $$A^1_{35:\overline{5}|}$$

Ξέρουμε ότι $$\bar{A}^1_{x:\overline{u+n}|} = \bar{A}^1_{x:\overline{u}|} + {}_{u|}\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$$

$$A_x = A^1_{x:\overline{n}|} + {}_{n|}A_x$$

$$A_{35} = A^1_{35:\overline{5}|} + {}_{5|}A_{35} = A^1_{35:\overline{5}|} + v^5 \, {}_5p_{35} A_{40}$$