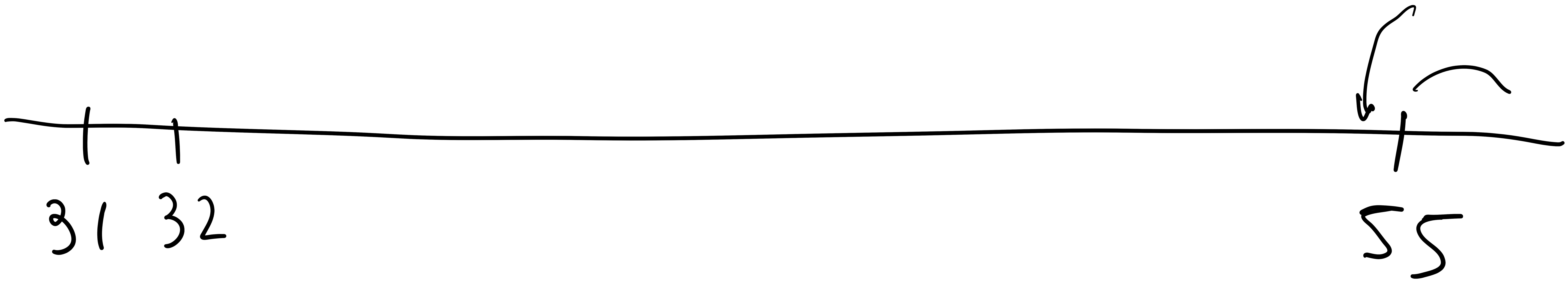
Άσκηση Ο (31) αγοράζει ισόβια ασφάλιση που πληρώνει $C = 100{,}000$ στο τέλος του έτους θανάτου.
Έχει την επιλογή να πληρώνει ενιαίο ασφάλιστρο 22,000 ή ετήσιο ασφάλιστρο 1200 για όσο ζει.
Κάνει το δεύτερο αλλά στο τέλος του 24ου έτους ασφάλισης και πριν δώσει το 25ο ασφάλιστρο ζητά το ποσό της ασφάλισης να γίνει $C' = 2C$ με κατάλληλη αλλαγή στα ασφάλιστρα. Πόσο είναι το νέο ασφάλιστρο;
Δίνεται ότι το απόθεμα στο τέλος

Του $24^{ου}$ έτους είναι 32000

λύση



Γνωρίζουμε ότι 1) $C \cdot A_{31} = 22,000$

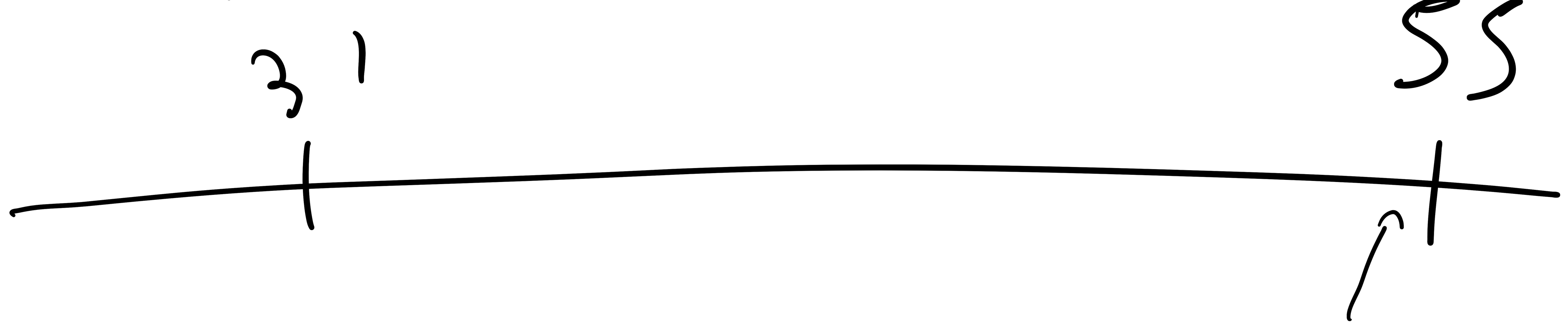
$\Rightarrow \quad A_{31} = 0.22$

[illegible] ράντα

2) $22,000 = \underbrace{P}_{1200} \cdot \ddot{a}_{31}$

$\Rightarrow \quad \ddot{a}_{31} = \frac{22000}{1200} = \frac{55}{3}$

3) $C \; {}_{24}V_{31} = 32000$



$\Rightarrow \quad {}_{24}V_{31} = 0.32$

Τη στιγμή που αλλάζουν οι όροι

πρέπει να ισχύει

$$C\,{}_{24}V_{31} = 2CA_{55} - P'\ddot{a}_{55}$$

$$\Rightarrow P' = \frac{C\left(2A_{55} - {}_{24}V_{31}\right)}{\ddot{a}_{55}}$$

$${}_{24}V_{31} = \frac{A_{55} - A_{31}}{1 - A_{31}} \Rightarrow A_{55} = 0.4696$$

$$= 1 - \frac{\ddot{a}_{55}}{\ddot{a}_{31}} \Rightarrow \ddot{a}_{55} = 12,466$$

$$P' = 4,966.84$$

1)

Για ένα χαρτοφυλάκιο 250 ατόμων ηλικίας xδίνεται:

i. Οι χρόνοι μελλοντικής ζωής τωνατόμων είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους.

ii. Σε κάθε άτομο καταβάλλεται 500 στην αρχή κάθε έτους, εφόσον βρίσκεται εν ζωή.

iii. $A_x = 0{,}369131$

iv. ${}^2A_x = 0{,}1774113$

v. $i = 0{,}06$

Χρησιμοποιώντας προσέγγιση με τη βοήθεια της κανονικής κατανομής, να υπολογιστεί το κεφάλαιο που πρέπει να σχηματίσειο ασφαλιστής κατά την έναρξη του προγράμματος των ως άνω ασφαλίσεων, προκειμένου να είναι κατά 90% βέβαιος ότι θα μπορεί να ανταπεξέλθει στις ασφαλιστικές υποχρεώσεις που θα προκύψουν από το σύνολο του χαρτοφυλακίου.

Δίνεται ότι $P(Z \leq 1{,}28) = 0{,}90$, όπου $Z \sim N(0, 1)$.

(Α) 1,43 εκατ. (Β) 1,53 εκατ. (Γ) 1,63 εκατ. (Δ) 1,73 εκατ.

(Ε) 1,83 εκατ.

Λύση

$C = 500$

$X_i =$ παρούσα αξία της ασφαλιστικής υποχρέωσης για το άτομο i

Ζητάμε το K ώστε

$$P\left(\sum_{i=1}^{250} X_i < K\right) = 0.9 \quad (*)$$

Οι X_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες.

Έστω $K_x = [T_x]$, T_x ο χρόνος υπολοίπου ζωής του $i=1$.

$$X_1 = C\, \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} = C\, \frac{1-v^{K_x+1}}{1-v}$$

$$\Rightarrow EX_1 = C\, \ddot{a}_x$$

$$= C\, \frac{1-A_x}{d} = C\, \frac{1-A_x}{i}(1+i)$$

$$Var(X_1) = C^2 \frac{1}{d^2} Var\left(v^{K_x+1}\right)$$

$$= \frac{C^2}{d^2}\left({}^2A_x - A_x^2\right)$$

$$\circledast \Leftrightarrow \Phi(1.28) = P\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{250} X_i}_{S_{250}} < K\Big)$$

$$= P\left(\frac{S_{250} - 250\, EX_1}{\sqrt{250 \cdot Var(X_1)}} < \frac{K - 250\, EX_1}{\sqrt{250\, Var(X_1)}}\right)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{K - 250\, EX_1}{\sqrt{250\, Var(X_1)}} \right)$$

$$\Rightarrow 1.28 = \frac{K - 250\, EX_1}{\sqrt{250\, Var(X_1)}}$$

$$\Rightarrow$$

$$K \simeq 1.43 \cdot 10^6$$

3)

Δίνεται ότι $\mu(t) = \mu,\ t \geq 0$και $Var(T) = 100$. Να υπολογιστεί η προσδοκώμενη ζωή του (x) μέσα στα επόμενα 10 έτη.

(Α) 2,6 (Β) 5,4 (Γ) 6,3 (Δ) 9,5 (Ε) 10

$$\mathring{e}_{x:\overline{n}|} = E(T(x) \wedge n)$$

n-ετής προσωρινή πλήρης προσδοκώμενη ζωή του (x).

Ζητάμε την $\mathring{e}_{x:\overline{10}|}$

Βρίσκουμε την κατανομή του T_x

$${}_tp_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu(s)\,ds} = e^{-t\mu}$$

$$f_{T_x}(t) = {}_tp_x\, \mu_{x+t} = \mu e^{-t\mu}\, 1_{t>0}$$

Άρα $\mathring{e}_{x:\overline{10}|} = E(T_x \wedge 10)$

$$= \int_0^{\infty} (t \wedge 10)\, \mu e^{-\mu t}\, dt$$

$$= \int_0^{10} t \mu e^{-\mu t} dt + \int_{10}^{\infty} 10 \mu e^{-\mu t} dt$$

$$= \ldots \qquad 10 e^{-10 \cdot \mu}$$

$$Var(T_x) = \frac{1}{\mu^2} = 100 \Rightarrow \mu = \frac{1}{10}$$

Βρίσκουμε $\quad \mathring{e}_{x:\overline{10}|} = 6.32121$

<u>Άσκηση</u> $\quad \mathring{e}_{x:\overline{4}|} = \int_0^4 {}_tp_x \, dt$

λύση

$$\mathring{e}_{x:\overline{4}|} = E(T_x \wedge 4) = \int_0^{\infty} P(\underline{T_x \wedge 4} > t) dt$$

$$\int_0^4 P(T_x > t) \, dt = \int_0^4 {}_tp_x \, dt$$

6)

Για μία ειδική πρόσκαιρη ασφάλιση θανάτου διάρκειας 3-ετών στον (x), δίνεται:

i. Η τ.μ. Z υποδηλώνει την παρούσα αξία των ασφαλιστικών παροχών αυτής της ασφάλισης.

ii. $q_{x+k} = 0{,}02(k+1),\ \ k = 0{,}1{,}2$

iii. Η ασφαλιστική παροχή θανάτου, η οποία θα καταβληθεί στο τέλος του έτους θανάτου, έχει ως ακολούθως:

k	b_{k+1}
0	300
1	350
2	400

iv. $i = 0{,}06$.

Να υπολογιστεί η Var(Z).

(A) 9602 (B) 10013 (Γ) 10419 (Δ) 10805

(E) 11206

0 1 2

λύση

$$Z = v^{K_x+1}\, b_{K_x+1}\, 1_{K_x \le 2}$$

$$Var(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$$

$$EZ = v\, b_1\, P(K_x=0) + v^2\, b_2\, P(K_x=1) + v^3\, b_3\, P(K_x=2)$$

$q_x = 0.02$ $\qquad$ $q_{x+2} = 0.06$

$q_{x+1} = 0.04$

$$P(K_x = 0) = q_x = 0.02$$

$$P(K_x = 1) = p_x \, q_{x+1} = 0.98 \cdot 0.04$$

$$P(K_x = 2) = {}_2p_x \, q_{x+2} = p_x \, p_{x+1} \, q_{x+2}$$

$$= 0.98 \cdot 0.96 \cdot 0.06$$

$$E(Z^2) = v^2 b_1^2 P(K_x = 0)$$

$$+ v^4 b_2^2 P(K_x = 1)$$

$$+ v^6 b_3^2 P(K_x = 2)$$

8)

Για μία πλήρως συνεχή ισόβια ασφάλιση ασφαλισμένου κεφαλαίου 1στον (30), δίνεται:

i. Η ένταση θνησιμότητας είναι 0,05 κατά τα πρώτα 10 έτη και 0,08 στη συνέχεια.

ii. $\delta = 0{,}08$

Να υπολογιστεί το μαθηματικό απόθεμα στο τέλος του 10ου έτους ασφάλισης.

(A) 0,14375 (B) 0,15587 (Γ) 0,16661 (Δ) 0,17742

(E) 0,18819

Ισχύει

Ισχύει $\quad 1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x$

$$ {}_{10}\bar{V}_x = \bar{A}_{x+10} - \bar{P}\,\bar{a}_{x+10} $$

$$ \bar{P} = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} = \frac{\delta \bar{A}_x}{\delta \bar{a}_x} = \frac{\delta \bar{A}_x}{1-\bar{A}_x} $$

Άρα $\quad {}_{10}\bar{V}_x = \bar{A}_{x+10} - \frac{\bar{A}_x}{1-\bar{A}_x}\,\delta \bar{a}_{x+10}$

$$ = \bar{A}_{x+10} - \frac{\bar{A}_x}{1-\bar{A}_x}\left(1-\bar{A}_{x+10}\right) $$

$$= \frac{\bar{A}_{x+10} - \bar{A}_x}{1 - \bar{A}_x}$$

Θα βρούμε τα $\bar{A}_x$, $\bar{A}_{x+10}$

$$\bar{A}_x = E(v^{T_x})$$

Πυκνότητα της T_x.

$\mu = 0.05$

$\tilde{\mu} = 0.08$

$$f_{T_x}(t) = {}_tp_x \, \mu_{x+t}$$

- Αν $t \in [0,10)$ τότε $\mu_{x+t} = \mu$

$$ {}_tp_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu_s \, ds} = e^{-\mu t}$$

Άρα $f_{T_x}(t) = \mu e^{-\mu t}$

- Αν $t > 10$

$$ {}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = e^{-\int_x^{x+t} \mu_s \, ds}$$

$$= e^{-10\mu - (t-10)\tilde{\mu}}$$

$\mu_{x+t} = \tilde{\mu}$

Aeq $\quad f_{T_x}(t) = e^{-10\mu - (t-10)\tilde{\mu}}\tilde{\mu}$

$$f_{T_x}(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu t} & t \in [0,10) \\ e^{-10\mu - (t-10)\tilde{\mu}}\tilde{\mu} & t > 10 \end{cases}$$

$v = e^{-\delta}$

$$A_x = E[v^{T_x}] = \int_0^{10} e^{-\delta t} \mu e^{-\mu t} dt$$

$$+ \int_{10}^{\infty} e^{-\delta t} e^{-10\mu - (t-10)\tilde{\mu}} \tilde{\mu}\, dt$$

$$= \ldots = \frac{\mu}{\delta+\mu}\left(1 - e^{-(\delta+\mu)10}\right) +$$

$$+ e^{-10(\delta+\mu)} \frac{\tilde{\mu}}{\delta+\tilde{\mu}}$$

$$f_{T_{x+10}}(t) = {}_tp_{x+10}\,\mu_{x+10+t} =$$

$$= e^{-\tilde{\mu}t}\,\tilde{\mu} \qquad t>0$$

$$A_{x+10} = E(v^{T_{x+10}}) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\,\tilde{\mu}\,e^{-\tilde{\mu}t}\,dt$$

$$= \tilde{\mu}\int_0^\infty e^{-(\delta+\tilde{\mu})t}\,dt = \tilde{\mu}\left.\frac{e^{-(\delta+\tilde{\mu})t}}{-(\delta+\tilde{\mu})}\right|_0^\infty$$

$$= \frac{\tilde{\mu}}{\delta+\tilde{\mu}}$$

$$\ldots \quad {}_{10}\bar{V}_x = 0.143746$$

13)

Z είναι η τυχαία μεταβλητή της παρούσας αξίας της παροχής μιας ισόβιας ασφάλισης που καταβάλλεικεφάλαιο bκατά τη χρονική στιγμή θανάτου του (x). Δίνεται:

i. δ=0,04

ii. $\mu_x(t) = 0{,}02,\ t \geq 0$

iii. Το Ενιαίο Καθαρό Ασφάλιστρο αυτής της ασφάλισης είναι ίσο με $Var(Z)$.

Να υπολογιστεί το b.

(A) 2,75 (B) 3,00 (Γ) 3,25 (Δ) 3,50

(E) 3,75

Λύση

$T_x \sim \exp(\mu)$, $\mu = 0.02$

$Z = b\,v^{T_x}$

Δίνεται ότι $E(Z) = Var(Z)$

Όπ $b\,E(v^{T_x}) = b^2\,Var(v^{T_x})$

$\iff \bar{A}_x = b\left({}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^{\,2}\right)$

$\Rightarrow b = \dfrac{\bar{A}_x}{{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^{\,2}}$

$$A_x = E(v^{T_x}) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \mu e^{-\mu t} dt$$

$$= \frac{\mu}{\delta + \mu} = \frac{0.02}{0.06} = \frac{1}{3}$$

$${}^2A_x = \frac{\mu}{2\delta + \mu} = \frac{0.02}{0.1} = \frac{1}{5}$$

$$b = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{9}} = \frac{15}{4} = 3.75$$

12)

Για τις ανεξάρτητες ζωές (35) και (45), δίνεται:

i. $\ _5p_{35} = 0{,}90$

ii. $\ _5p_{45} = 0{,}80$

iii. $q_{40} = 0{,}03$

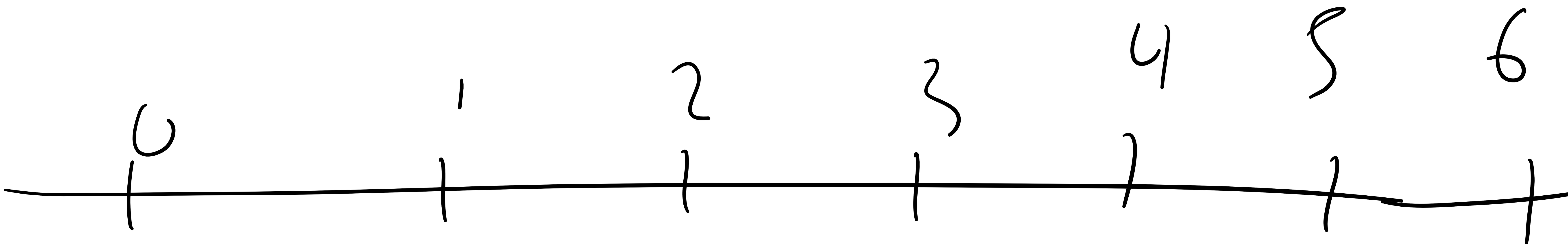
iv. $q_{50} = 0{,}05$

Να υπολογιστεί η πιθανότητα ο τελευταίος θάνατος να συμβεί κατά το 6ο έτος.

(A) 0,00951 (B) 0,01048 (Γ) 0,01157 (Δ) 0,01230

(E) 0,01369

Λύση



Έστω $Y_1 = K_{35} = [T_{35}]$, $Y_2 = K_{45}$

Ζητάμε την $P(Y_1 \vee Y_2 = 5)$

$= P(\underline{Y_1 \vee Y_2 \leq 5}) - P(\underline{Y_1 \vee Y_2 \leq 4})$

$\left(P(A \setminus B) = P(A) - P(B) \text{ για } B \subset A \right)$

$= P(Y_1 \leq 5, Y_2 \leq 5) - P(Y_1 \leq 4, Y_2 \leq 4)$

$$= P(Y_1 \le 5)\,P(Y_2 \le 5) - P(Y_1 \le 4)\,P(Y_2 \le 4)$$

$$P(Y_1 \le 5) = 1 - P(Y_1 \geq 6) =$$

$$= 1 - {}_5p_{35} \cdot p_{40} = 1 - {}_5p_{35}(1 - q_{40})$$

$$P(Y_1 \le 4) = 1 - P(Y_1 \geq 5) = 1 - {}_5p_{35}$$

$$P(Y_2 \le 5) = \ldots = 1 - {}_5p_{45}(1 - q_{50})$$

$$P(Y_2 \le 4) = 1 - {}_5p_{45}$$

Βρίσκεις

$$P(Y_1 \vee Y_2 = 5) = 0.01048$$

18)

Δίνεται:

i. $\overset{\circ}{e}_{30:\overline{40|}} = 27{,}692$

ii. $S(x) = 1 - \frac{x}{\omega},\ 0 \le x \le \omega$

Να υπολογιστεί η $Var(T_{30})$.

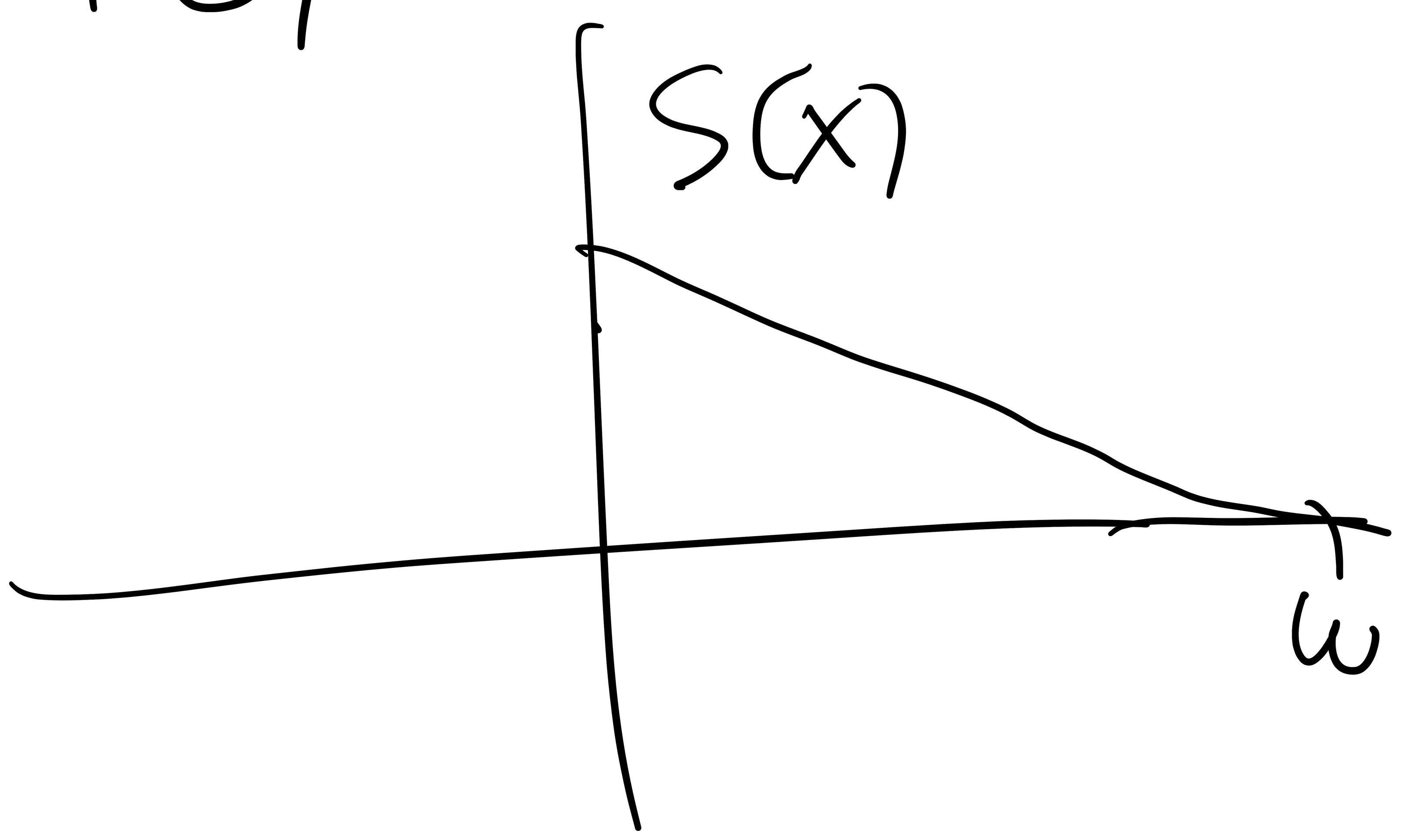
(A) 332 (B) 352 (Γ) 372 (Δ) 392

(E) 412

Λύση

$$\overset{\circ}{e}_{30:\overline{40|}} = E(T_{30} \wedge 40)$$

$x = 30 \ (< \omega)$



Πυκνότητα της T_x

$$f_{T_x}(t) = {}_tP_x\, \mu_{x+t} = \frac{\cancel{S(x+t)}}{S(x)}\left(-\frac{S'(x+t)}{\cancel{S(x+t)}}\right)$$

αυτό $= 0$ ω $x+t > \omega$.

Για $0 < t < \omega - x$

$$f_{T_x}(t) = \frac{1}{1-\frac{x}{\omega}} \cdot \left(-\left(-\frac{1}{\omega}\right)\right) = \frac{1}{\omega - x}$$

$T_x \sim U(0, \omega - x)$ $\quad$ $1 \sim 100$ 이기 $x+40<\omega$

$$\mathring{e}_{x:\overline{40}|} = \int_0^{40} {}_tp_x \, dt = \int_0^{40} \frac{s(x+t)}{s(x)} \, dt$$

$$= \int_0^{40} \frac{1 - \frac{x+t}{\omega}}{1 - \frac{x}{\omega}} \, dt = \frac{1}{\omega - x} \int_0^{40} (\omega - x - t) \, dt$$

$$= 40 - \frac{1}{\omega - x} \frac{1600}{2} = 40 - \frac{800}{\omega - 30}$$

$$= 27.692$$

$$\omega = \frac{800}{40 - 27.692} + 30$$

$X \sim U(0, \theta)$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$Var(T_{30}) = \frac{(\omega - x)^2}{12}$$

$$= \frac{1}{12}\frac{800^2}{(40-27.692)^2} = 352.066$$

4)

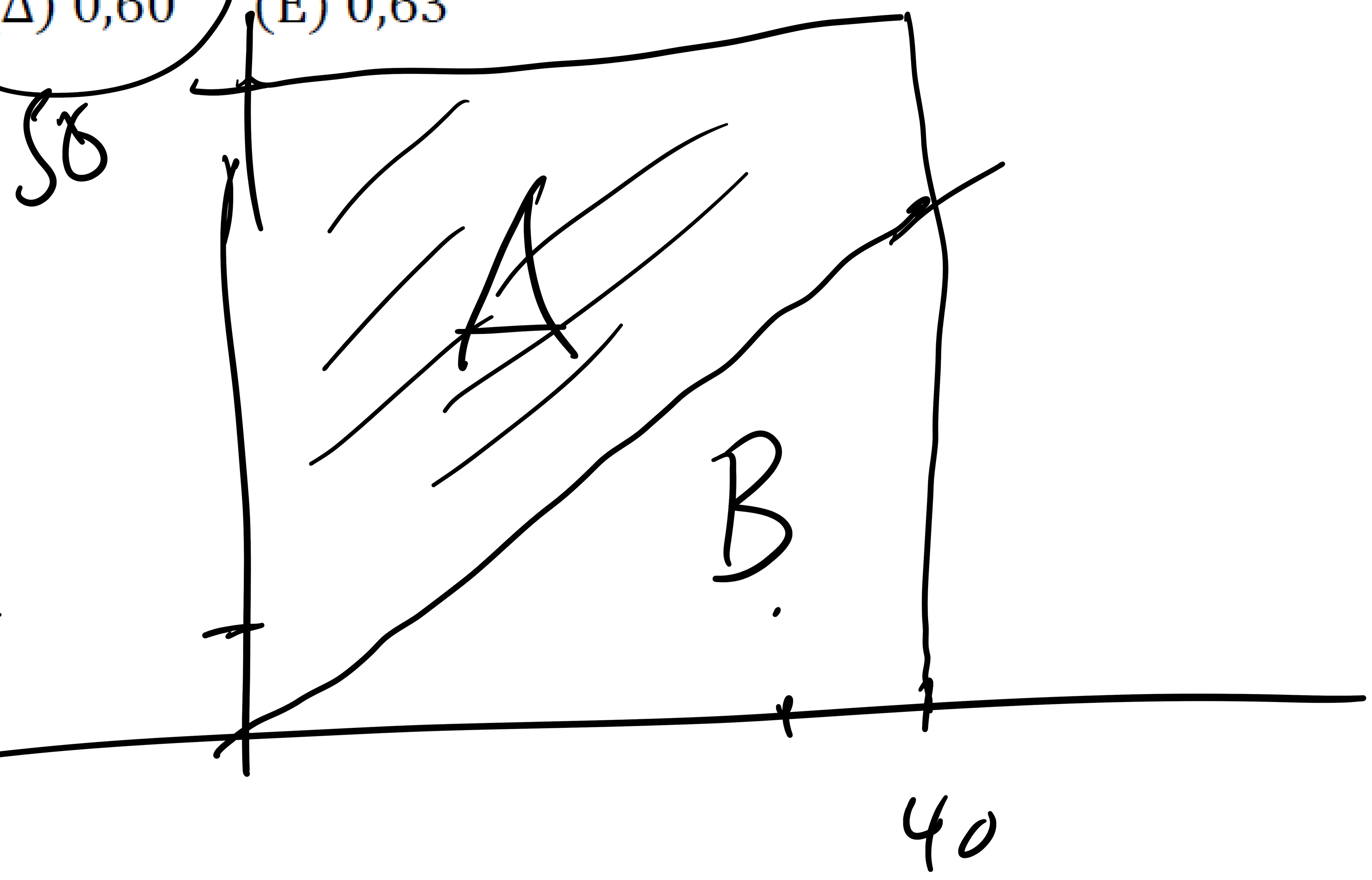
Για τον (x)και τον (y)δίνεται:

i. Οι μελλοντικοί χρόνοι ζωής τους είναι ανεξάρτητοι.

ii. $f_{T_x,T_y}(t,s) = 0{,}0005,\ \ 0<t<40,\ \ 0<s<50.$

Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(T_x<T_y)$.

(A) 0,50 (B) 0,53 (Γ) 0,57 (Δ) 0,60 (E) 0,63



$$P(T_x<T_y) = \iint_A f_{T_x,T_y}(t,s)\,dt\,ds$$

$$= 0.0005\ \text{εμβαδόν}(A) = 0.0005 \cdot \frac{(50+10)40}{2} = 0.0005 \cdot 1200 = 0.6$$

$${}_{s+t}p_x = {}_sp_x\ {}_tp_{x+s}$$