ΜΑΠ. Ασφάλειες Ζωής

Εξέταση 4 Απριλίου 2019

1. (15 βαθμοί) Ο χρόνος θανάτου ενός ατόμου που γενιέται σήμερα είναι μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής $F(t) = (1 - e^{-\lambda t})\mathbf{1}_{t>0}$, όπου $\lambda \in (0, \infty)$ είναι δεδομένη σταθερά. Για κάθε $x > 0$ να δειχθεί ότι
(α) $\mu_x = \lambda$,
(β) $\mathring{e}_x := \mathbf{E}(T_x) = 1/\lambda$,
(γ) $e_x := \mathbf{E}([T_x]) = (e^{\lambda} - 1)^{-1}$.

2. (15 βαθμοί) Δίνονται οι πιθανότητες $q_{70}, q_{71}, q_{72}, q_{73}$. Να υπολογιστούν με τη βοήθειά τους οι πιθανότητες: p_{71}, ${}_3p_{71}$, ${}_{2|2}q_{70}$. Δώστε λεπτομερή δικαιολόγηση.

3. (25 βαθμοί) (α) Να δειχθεί ότι για κάθε $x, n, s \geq 0$ ισχύει $f_{T_x}(n + s) = {}_np_x f_{T_{x+n}}(s)$ όπου για κάθε $y \geq 0$, f_{T_y} είναι η πυκνότητα της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής $T_y = X - y \mid X > y$.
(β) Να δειχθεί ότι για κάθε $x, n \geq 0$ ισχύει ${}_{n|}\bar{A}_x = v^n \, {}_np_x \bar{A}_{x+n}$ όπου $v = 1/(1 + i)$ είναι ο παράγοντας προεξόφλησης.
(γ) Να περιγραφεί με λόγια μια ασφάλιση της οποίας η παρούσα αξία ισούται με

$$Z := \begin{cases} 20v^{T_x} & \text{αν } T_x \leq 8, \\ 10v^{T_x} & \text{αν } T_x > 8. \end{cases}$$

(δ) Δίνονται οι ποσότητες $\bar{A}_{x:\overline{8}|}, \bar{A}_{x+8}, v, {}_8p_x$. Με τη βοήθειά τους να υπολογιστεί η αναλογιστική παρούσα αξία της ασφάλισης του προηγούμενου ερωτήματος.

4. (15 βαθμοί) Να δειχθεί ότι για κάθε $x, u \geq 0$ ισχύει

$$\bar{A}_{x:\overline{u}|} + \delta \bar{a}_{x:\overline{u}|} = 1$$

όπου $\delta := \log(1 + i)$. [Υπόδειξη: Ισχύει $\bar{a}_{x:\overline{u}|} = \mathbf{E}(\bar{a}_{\overline{T_x \wedge u}|})$.]

5. (20 βαθμοί) Θεωρούμε ράντα ζωής που πληρώνει συνεχώς με ρυθμό 1 στον (x) το χρονικό διάστημα $[u, \infty)$ από σήμερα κατα το οποίο ο (x) ζει $(u > 0)$.
(α) Πώς ονομάζεται αυτή η ράντα και ποιο είναι το αναλογιστικό σύμβολο για την αναλογιστική παρούσα της αξία, V;
(β) Να δειχθεί ότι

$$V = \int_u^{\infty} {}_sp_x v^s ds.$$

(γ) Να δειχθεί ότι

$$V = {}_up_x \, v^u \bar{a}_{x+u} = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{u}|}.$$

6. (15 βαθμοί) Θεωρούμε άτομο (50) που ασφαλίζεται ώστε να πάρει ποσό 20000 ευρώ όταν είναι 70 ετών αν επιβιώσει ως τότε ενώ σε αντίθετη περίπτωση να πάρουν 12000 ευρώ οι κληρονόμοι του τη στιγμή του θανάτου του. Σκοπεύει να αποπληρώσει αυτή την ασφάλεια πληρώνοντας ποσό P στο τέλος καθενός από τα ερχόμενα 10 χρόνια κατά το οποίο ζει.

(α) Ποια η συνάρτηση απώλειας του ασφαλιστή;

(β) Αν η τιμολόγηση της ασφάλισης γίνεται με την αρχή της ισοσυναμίας, να βρεθεί το P ως συνάρτηση συνηθισμένων αναλογιστικών συναρτήσεων.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.

Καλή επιτυχία!

Απαντήσεις

1. (α) Η συνάρτηση επιβίωσης ισούται με

$$s(x) = 1 - F(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x} & \text{αν } x > 0, \\ 0 & \text{αν } x \le 0. \end{cases}$$

Για $x > 0$, $\log s(x) = -\lambda x$, και $\mu_x = -s'(x)/s(x) = -(\log s(x))' = \lambda$.

(β) Η T_x έχει πυκνότητα $f_{T_x}(t) = \frac{s(x+t)}{s(x)}\mu_{x+t} = \lambda e^{-\lambda t}$ για $t > 0$ και $f_{T_x}(t) = 0$ για $t \le 0$. Άρα

$$\mathbf{E}(T_x) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_{T_x}(t)\, dt = \int_0^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t}\, dt = ... = \frac{1}{\lambda}.$$

[Η T_x ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ, οπότε αν το θυμάται κανείς, μπορεί να πει αμέσως ότι έχει μέση τιμή $1/\lambda$]

(γ) Χρησιμοποιούμε τον γνωστό τύπο για τη μέση τιμή τυχαίας μεταβλητής με τιμές στο $\{0, 1, \ldots\}$ και τον $\mathbf{P}(T_x \ge t) = e^{-\lambda t}$ για κάθε $t > 0$ (που προκύπτει από την πυκνότητα της T_x).

$$e_x = \mathbf{E}([T_x]) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}([T_x] \ge k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(T_x \ge k) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda k} = e^{-\lambda}\frac{1}{1 - e^{-\lambda}} = \frac{1}{e^{\lambda} - 1}.$$

Στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον τύπο για το άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου.

2. $p_{71} = 1 - q_{71}$. Έπειτα χρησιμοποιούμε δύο φορές τον τύπο ${}_{k+l}p_x = {}_kp_x\, {}_lp_{x+k}$ και έχουμε

$${}_3p_{71} = {}_1p_{71}\, {}_2p_{72} = p_{71}p_{72}p_{73} = (1 - q_{71})(1 - q_{72})(1 - q_{73}).$$

Τέλος

$$\begin{aligned} {}_{2|2}p_{70} &= {}_2p_{70}\, {}_2q_{72} = p_{70}p_{71}(1 - {}_2p_{72}) = (1 - q_{70})(1 - q_{71})(1 - p_{72}p_{73}) \\ &= (1 - q_{70})(1 - q_{71})\{1 - (1 - q_{72})(1 - q_{73})\}. \end{aligned}$$

3. (α) Χρησιμοποιούμε τον τύπο για την f_{T_x} από το τυπολόγιο.

$$f_{T_x}(n + s) = {}_{n+s}p_x\, \mu_{x+n+s} = {}_np_x\, {}_sp_{x+n}\, \mu_{x+n+s} = {}_np_x f_{T_{x+n}}(s)$$

(β)

$${}_{n|}\bar{A}_x = \int_n^{\infty} v^t f_{T_x}(t)\, dt \overset{t=s+n}{=} \int_0^{\infty} v^{s+n} f_{T_x}(s + n)\, ds = v^n\, {}_np_x \int_0^{\infty} v^s f_{T_{x+n}}(s)\, ds = v^n\, {}_np_x \bar{A}_{x+n}.$$

(γ) Αυτή η ασφάλιση δίνει ποσό 20 τη στιγμή του θανάτου αν ο θάνατος συμβεί στα επόμενα 8 χρόνια από σήμερα ενώ δίνει ποσό 10 τη στιγμή του θανάτου αν αυτός συμβεί μετά τα 8 χρόνια από σήμερα.

(δ) Επειδή $Z = 20v^{T_x}\mathbf{1}_{T_x \le 8} + 10v^{T_x}\mathbf{1}_{T_x > 8}$, χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα της μέσης τιμής, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Z) &= 20\mathbf{E}(v^{T_x}\mathbf{1}_{T_x \le 8}) + 10\mathbf{E}(v^{T_x}\mathbf{1}_{T_x > 8}) = 20\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{8}|} + 10\,{}_{8|}\bar{A}_x \\ &= 20(\bar{A}_{x:\overline{8}|} - v^8\, {}_8p_x) + 10v^8\, {}_8p_x \bar{A}_{x+8}. \end{aligned}$$

4. Χρησιμοποιούμε τον τύπο $\bar{a}_{\overline{y}|} = (1 - v^y)/\delta$ για κάθε $y > 0$.

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \mathbf{E}(\bar{a}_{\overline{T_x \wedge n}|}) = \mathbf{E}\left(\frac{1 - v^{T_x \wedge n}}{\delta}\right) = \frac{1 - \mathbf{E}(v^{T_x \wedge n})}{\delta} = \frac{1 - \bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta}.$$

5. (α) Ονομάζεται ισόβια συνεχής αναβαλλόμενη ράντα. Το σύμβολο για την αναλογιστική παρούσα της αξία είναι ${}_{u|}\bar{a}_x$.

(β) Η παρούσα αξία της ράντας είναι $\int_u^\infty v^t \mathbf{1}_{T_x>t}\, dt$ και η μέση τιμή αυτής της τυχαίας μεταβλητής είναι η αναλογιστική παρούσα αξία της ράντας. Δηλαδή

$$_u\bar{a}_x = \mathbf{E}\left(\int_u^\infty v^t \mathbf{1}_{T_x>t}\, dt\right) = \int_u^\infty v^t \mathbf{E}(\mathbf{1}_{T_x>t})\, dt = \int_u^\infty v^t \mathbf{P}(T_x > t)\, dt = \int_u^\infty v^t\, {}_tp_x\, dt.$$

(γ) Αλλάζοντας μεταβλητή ($t = u + s$) στο τελευταίο ολοκλήρωμα, έχουμε

$$V = \int_0^\infty v^{u+s}\, {}_{u+s}p_x\, ds = v^u\, {}_up_x \int_0^\infty v^s\, {}_sp_{x+u}\, ds = v^u\, {}_up_x \bar{a}_{x+u}.$$

Επίσης

$$V = \int_0^\infty v^t\, {}_tp_x\, dt - \int_0^u v^t\, {}_tp_x\, dt = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{u}|}.$$

6. (α) Θέτουμε $x = 50$. Η συνάρτηση απώλειας του ασφαλιστή είναι

$$L = 20000 \cdot \mathbf{1}_{T_x>20} v^{20} + 12000 \cdot \mathbf{1}_{T_x\le 20} v^{T_x} - P a_{\overline{K_x \wedge 10}|}.$$

(β) Πρέπει $\mathbf{E}(L) = 0$. Υπολογίζουμε

$$\mathbf{E}(L) = 20000\, v^{20}\, {}_{20}p_x + 12000\, A^{\ 1}_{x:\overline{20}|} - P a_{x:\overline{10}|},$$

άρα

$$P = \frac{20000\, v^{20}\, {}_{20}p_x + 12000\, A^{\ 1}_{x:\overline{20}|}}{a_{x:\overline{10}|}}.$$