Ασφαλίσεις ζωής. Τυπολόγιο

$$1+i = \frac{1}{\upsilon} = e^{\delta}$$
$$d = 1-\upsilon = \frac{i}{1+i}$$

$T_x = X - x \mid X > x$. Πυκνότητα της T_x

$$f_{T_x}(t) = {}_t p_x \mu_{x+t} \text{ για κάθε } t > 0$$

$K_x = [T_x]$ με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_{K_x}(k) = {}_{k|}q_x = {}_k p_x \, q_{x+k} \text{ για } k = 0, 1, 2, \ldots$$

$s(x) = \mathbf{P}(X > x)$ συνάρτηση επιβίωσης. Η S_0 στον Dickson.

$$
\begin{aligned}
{}_t q_x &:= \mathbf{P}(T_x \le t) \\
{}_t p_x &:= \mathbf{P}(T_x > t) = \frac{s(x+t)}{s(x)} = e^{-\int_x^{x+t} \mu_r \, dr} \\
{}_{t|u} q_x &:= \mathbf{P}(t < T_x \le t+u) = {}_t p_x \, {}_u q_{x+t} \\
\mu_x &:= -\frac{s'(x)}{s(x)} \qquad \text{ένταση θνησιμότητας} \\
s(x) &:= e^{-\int_0^x \mu_r \, dr} \\
\ell_x &:= \ell_0 s(x) \\
\mathring{e}_x &= \mathbf{E}(T_x) = \int_0^\infty t f_{T_x}(t) \, dt \\
{}_{k+\ell} p_x &= {}_k p_x \, {}_\ell p_{x+k}
\end{aligned}
$$

Ασφαλίσεις ζωής

Πληρωμή τη στιγμή του θανάτου	**Ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο**
1 τη στιγμή T_x	$\bar{A}_x = \mathbf{E}(\upsilon^{T_x}) = \int_0^\infty \upsilon^t f_{T_x}(t)\, dt$
1 τη στιγμή T_x αν $T_x \le n$	$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}\vert} = \mathbf{E}(\upsilon^{T_x} \mathbf{1}_{T_x \le n}) = \int_0^n \upsilon^t f_{T_x}(t)\, dt$
1 τη στιγμή n αν $T_x > n$	$A_{x:\overline{n}\vert}^{\;\;1} = \mathbf{E}(\upsilon^n \mathbf{1}_{T_x > n}) = {}_n E_x = {}_n p_x \upsilon^n$
1 τη στιγμή $T_x \wedge n$	$\bar{A}_{x:\overline{n}\vert} = \mathbf{E}(\upsilon^{T_x \wedge n}) = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}\vert} + A_{x:\overline{n}\vert}^{\;\;1}$
1 τη στιγμή T_x αν $T_x > u$	${}_{u\vert}\bar{A}_x = \mathbf{E}(\upsilon^{T_x} \mathbf{1}_{T_x > u}) = \int_u^\infty \upsilon^t f_{T_x}(t)\, dt$
1 τη στιγμή T_x αν $u < T_x \le u+n$	${}_{u\vert}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}\vert} = \mathbf{E}(\upsilon^{T_x} \mathbf{1}_{u < T_x \le u+n}) = \int_u^{u+n} \upsilon^t f_{T_x}(t)\, dt$
Πληρωμή στο τέλος του έτους θανάτου	
1 τη στιγμή $K_x + 1$	$A_x = \mathbf{E}(\upsilon^{K_x+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon^{k+1} f_{K_x}(k)$
1 τη στιγμή $K_x + 1$ αν $T_x < n$	$A^{1}_{x:\overline{n}\vert} = \mathbf{E}(\upsilon^{K_x+1} \mathbf{1}_{K_x < n}) = \sum_{k=0}^{n-1} \upsilon^{k+1} f_{K_x}(k)$
1 τη στιγμή $(K_x + 1) \wedge n$	$A_{x:\overline{n}\vert} = \mathbf{E}(\upsilon^{n \wedge (K_x+1)})$

Βέβαιες ράντες	**Παρούσα αξία**
1 στην αρχή κάθε περιόδου για n περιόδους. Προκαταβλητέα	$\ddot{a}_{\overline{n}\rceil} = 1 + \upsilon + \cdots + \upsilon^{n-1} = \frac{\upsilon^n - 1}{\upsilon - 1}$
1 στο τέλος κάθε περιόδου για n περιόδους. Ληξιπρόθεσμη	$a_{\overline{n}\rceil} = \upsilon + \upsilon^2 + \cdots \upsilon^n = \upsilon\frac{\upsilon^n - 1}{\upsilon - 1}$
Συνεχής με ρυθμό 1 στο $[0, y]$	$\bar{a}_{\overline{y}\rceil} = \int_0^y e^{-\delta t}\, dt = \frac{1-\upsilon^y}{\delta}$
Ράντες ζωής	**Αναλογιστική παρούσα αξία**
Συνεχής με ρυθμό 1 ως τον χρόνο T_x	$\bar{a}_x = \int_0^\infty {}_sp_x \upsilon^s\, ds$
Συνεχής με ρυθμό 1 ως τον χρόνο $n \wedge T_x$	$\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil} = \int_0^n {}_sp_x \upsilon^s\, ds$
Διακριτή προκαταβλητέα 1 στην αρχή κάθε χρόνου που ο (x) είναι ζωντανός	$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^\infty \upsilon^k\, {}_kp_x$
Διακριτή ληξιπρόθεσμη 1 στο τέλος κάθε χρόνου που ο (x) είναι ζωντανός	$a_x = \sum_{k=1}^\infty \upsilon^k\, {}_kp_x$
Διακριτή προκαταβλητέα n περιόδων 1 τις στιγμές $0, 1, \ldots, (n-1) \wedge K_x$	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil} = \sum_{j=0}^{n-1} {}_jp_x \upsilon^j$
Διακριτή ληξιπρόθεσμη n περιόδων 1 τις στιγμές $1, 2, \ldots, n \wedge K_x$	$a_{x:\overline{n}\rceil} = \sum_{j=1}^{n} {}_jp_x \upsilon^j$
Αναβαλλόμενη διακριτή ισόβια προκαταβλητέα 1 τις στιγμές $u, u+1, \ldots,$ κατά τις οποίες ο (x) είναι ζωντανός	${}_{u\rvert}\ddot{a}_x = \sum_{j=u}^\infty {}_jp_x \upsilon^j$

$$1 = \delta\bar{a}_x + \bar{A}_x$$
$$1 = d\ddot{a}_x + A_x$$

Ασφάλιστρα

Συνολική συνάρτηση απώλειας

$$L := \text{παρούσα αξία παροχής του ασφαλιστή} - \text{παρούσα αξία ασφαλίστρων}$$

Η δόση ή ρυθμός ασφαλίστρου υπολογίζεται από τη σχέση $\mathbf{E}(L) = 0$ (αρχή της ισοδυναμίας).

Παραδείγματα

$\bar{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$	$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}}{\bar{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$	${}_h\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}) = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}}{\bar{a}_{x:\overline{h}\rceil}}$
$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$	$P_{x:\overline{n}\rceil} = \frac{A_{x:\overline{n}\rceil}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rceil}}$	${}_hP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{h}\rceil}}$

Η παύλα στο $\bar{P}$ δηλώνει ότι η ασφάλιση πληρώνεται με συνεχή τρόπο και με ρυθμό $\bar{P}$.
Το σύμβολο μέσα στην παρένθεση δηλώνει ποια ασφάλιση αγοράζουμε.
Όταν λείπει η παύλα, έχουμε αγορά του προϊόντος με διακριτή προκαταβλητέα ράντα και το P δηλώνει τη δόση που πληρώνεται στην αρχή κάθε χρονιάς. Τότε δεν βάζουμε παρένθεση αλλά οι δείκτες στο P περιγράφουν την ασφάλιση που αγοράζουμε.
Το h που προηγείται του P στην ${}_hP$ ή στην ${}_h\bar{P}$ δηλώνει ότι πληρώνουμε την ασφάλιση σε χρονικό διάστημα h (με διακριτό ή συνεχή τρόπο αντίστοιχα).

Αποθέματα

Προοπτική ολική απώλεια του ασφαλιστή σε χρόνο t από σήμερα για ασφάλιση ατόμου ηλικίας x

$${}_tL := \text{παρούσα αξία τον χρόνο } x+t \text{ των μελλοντικών παροχών του ασφαλιστή}$$
$$- \text{ παρούσα αξία τον χρόνο } x+t \text{ των μελλοντικών ασφαλίστρων}$$

Απόθεμα τον χρόνο t:

$${}_tV := \mathbf{E}({}_tL \mid T > t)$$

Παραδείγματα:

Για $k \in \mathbb{N}$ και $t \in [0, \infty)$,

$$\begin{aligned}
{}_kV_x &= A_{x+k} - P_x\, \ddot{a}_{x+k} \\
{}_kV_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} &= A_{\overset{1}{x+k}:\overline{n-k}|} - P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} \\
{}_t\bar{V}(\bar{A}_x) &= \bar{A}_{x+t} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t}
\end{aligned}$$

με $P_x := A_x/\ddot{a}_x$, $P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}/\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, $\bar{P}(\bar{A}_x) = \bar{A}_x/\bar{a}_x$.

Τύποι για το ${}_kV_x$

$$\begin{aligned}
{}_kV_x &= 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x} = \frac{A_{x+k} - A_x}{1 - A_x} \\
&= \left(1 - \frac{P_x}{P_{x+k}}\right) A_{x+k} = (P_{x+k} - P_x)\ddot{a}_{x+k} = \frac{P_{x+k} - P_x}{P_{x+k} + d}.
\end{aligned}$$

Αναδρομική σχέση (σχέση μεταξύ ${}_kV$ και ${}_{k+1}V$) για διακριτή ασφάλιση

$${}_kV + \Pi_k = \upsilon(q_{x+k}c_{k+1} + p_{x+k}\,{}_{k+1}V)$$

για $k \in \mathbb{N}$.