Αυτοσυσχέτιση

Κάτω από τις κλασσικές υποθέσεις είχαμε θεωρείται ότι οι διαταρακτικοί όροι αποτελούν ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και έτσι, η μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης του διανύσματος των διαταρακτικών όρων δίδεται ως

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) \equiv \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 \mathbf{I},$$

Πολλές φορές όμως στην πράξη η υπόθεση αυτή δεν ισχύει ειδικά για γραμμικά υποδείγματα χρονολογικών σειρών, πχ.

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t, \quad t=1,2,...,T,$$

όπου οι διαταρακτικοί όροι μπορεί να συσχετίζονται από παρατήρηση σε παρατήρηση, δηλ

$$\mathrm{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t\text{-}j}) \neq 0 \quad \text{για } j=1,2,3,.....$$

Η συσχέτιση αυτή αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως **αυτοσυσχέτιση**, καθώς αφορά την αλληλεξάρτηση των διαταρακτικών όρων διαχρονικά.

<u>Ένα παραμετρικό υπόδειγμα αυτοσυσχέτισης</u> μεταξύ των παρατηρήσεων του διαταρακτικού όρου ε_t είναι το αυτοπαλίνδρομο (autoregressive) υπόδειγμα (σχήμα) πρώτου βαθμού (AR(1)):

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + e_t, \quad \text{με} \quad e_t \sim \mathrm{IID}\ (0, \sigma_e^2),$$

όπου

ρ αναφέρεται ως συντελεστής αυτοπαλινδρόμησης και

e_t αποτελεί μια τυχαία μεταβλητή, που ονομάζεται ως "**λευκός θόρυβος**" (ή **διαταραχή**), και κατανέμεται ανεξάρτητα ως $e_t \sim$ IID $(0, \sigma_e^2)$; η e_t πιάνει τις τυχαίες μεταβολές του ε_t και, από εδώ, της εξαρτημένης μεταβλητής y_t.

Ιδιότητες του AR(1) υποδείγματος:

- **Δυναμικοί πολλαπλασιαστές των διαταραχών e_t** (στασιμότητα / μη στασιμότητα του AR(1) υποδείγματος):

Λύνοντας αναδρομικά το υπόδειγμα AR(1) για το διαταρακτικό όρο ε_t προς τα πίσω έχουμε:

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \rho\varepsilon_{t-1} + e_t \\ &= \rho(\rho\varepsilon_{t-2} + e_{t-1}) + e_t = \rho^2\varepsilon_{t-2} + (e_t + \rho e_{t-1}) \\ &= .... \\ &= \rho^t\varepsilon_0 + (e_t + \rho e_{t-1} + \rho^2 e_{t-2} + ... + \rho^{t-1} e_1)\end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτουν οι εξής **δυναμικοί πολλαπλασιαστές** μιας διαταραχής τη στιγμή t-j (δηλαδή η e_{t-j}) στο διαταρακτικό ε_t και την εξαρτημένη μεταβλητή y_t:[1]

$$\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial e_{t\text{-}j}} = \rho^j \quad \text{και} \quad \frac{\partial y_t}{\partial e_{t\text{-}j}} = \frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_t}\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial e_{t\text{-}j}} = \rho^j, \quad \text{καθώς} \;\; y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$$

Οι παραπάνω πολλαπλασιαστές δείχνουν ότι

(i) Αν ρ=1 (δηλ. $\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1} + e_t$ που αναφέρεται ως **τυχαίος περίπατος**)[2], τότε οι πολλαπλασιαστικές επιδράσεις των διαταραχών είναι μόνιμες (κρατούν για πάντα), δηλ. $\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial e_{t\text{-}j}} = 1$ και $\frac{\partial y_t}{\partial e_{t\text{-}j}} = \frac{\partial y_t}{\partial \varepsilon_t}\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial e_{t\text{-}j}} = 1$.

[1] Οι πολλαπλασιαστές αυτοί μπορούν να γραφούν και για j-περιόδους προς τα εμπρός, δηλ. την περίοδο t+j, ως

$$\frac{\partial y_{t+j}}{\partial e_t} = \frac{\partial y_{t+j}}{\partial \varepsilon_{t+j}}\frac{\partial \varepsilon_{t+j}}{\partial e_t} = \rho^j .$$

[2] Το υπόδειγμα αυτό αποτελεί μια **μη στάσιμη χρονολογική σειρά**. Σε αντίθεση με τις στάσιμες, οι σειρές αυτές έχουν διακύμανση που τείνει στο άπειρο όταν $t \to \infty$. Αυτό αποδεικνύεται λύνοντας το υπόδειγμα του τυχαίου περιπάτου προς τα πίσω ως εξής:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_0 + (e_t + e_{t-1} + e_{t-2} + ... + e_1) = \varepsilon_0 + \sum_{s=1}^{t} e_s , \qquad \text{όταν } \rho=1.$$

Παίρνοντας τη διακύμανση της τελευταίας σχέσης αυτής συνεπάγεται ότι:

(ii) Αν |ρ|<1 (δηλ. $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + e_t$, που σημαίνει ε_t αποτελεί **στάσιμη χρονολογική σειρά**)[3], τότε οι επιδράσεις των διαταραχών αμβλύνονται στο χρόνο (παύουν να υπάρχουν), δηλ. $\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial e_{t\text{-}j}} = \rho^j \to 0$ και $\frac{\partial y_t}{\partial e_{t\text{-}j}} = \rho^j \to 0$, καθώς |ρ|<1.

- **Η διακύμανση του** ε_t (σ^2_ε=Var(ε_t)): Δεδομένου ότι, όταν ε_t αποτελεί στάσιμη σειρά, η διακύμανση είναι σταθερή για όλες τις παρατηρήσεις t, αυτή μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\sigma^2_\varepsilon = E(\varepsilon_t^2), \qquad \text{καθώς } E(\varepsilon_t)=0, \forall t,$$

$$= E(\rho\varepsilon_{t-1}+e_t)^2 = \rho^2 E(\varepsilon_{t-1})^2 + E(e_t)^2$$

$$= \rho^2\sigma^2_\varepsilon + \sigma^2_e, \qquad \text{καθώς } \sigma^2_\varepsilon = E(\varepsilon_t)^2, \forall t, \text{όταν}$$

αν $-1 < \rho < 1$

$$\Rightarrow \quad \sigma^2_\varepsilon = \frac{\sigma^2_e}{1-\rho^2}, \forall t$$

- **Η συνδιακύμανση του** ε_t με το $\varepsilon_{t\text{-}j}$ **(**$\sigma_{tt\text{-}j} \equiv Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t\text{-}j})$: Για j=1 και j=2 αντίστοιχα περιόδους, αυτή βρίσκεται ως εξής:

$$Var(\varepsilon_t) = Var(\varepsilon_0) + Var\left(\sum_{s=1}^{t} e_s\right) = \sigma^2_{\varepsilon_0} + t\sigma^2_e \ \to \infty, \text{όταν } t \to \infty .$$

[3] Η διακύμανση του ε_t στην περίπτωση στασιμότητας του υποδείγματος θεωρείται ότι είναι σταθερή για κάθε περίοδο t. Λύνοντας το υπόδειγμα $\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1} + e_t$ προς τα πίσω, δηλ.

$$\varepsilon_t = \rho^t\varepsilon_0 + (e_t + \rho e_{t-1} + \rho^2 e_{t-2} + ... + \rho^{t-1}e_1),$$

αυτή βρίσκεται ως

$$Var(\varepsilon_t) = \rho^{2t}Var(\varepsilon_0) + Var(e_t + \rho e_{t-1} + \rho^2 e_{t-2} + ... + \rho^{t-1}e_1)$$

$$= \rho^{2t}Var(\varepsilon_0) + \sigma^2_e(1+\rho^2+\rho^4+...+\rho^{2(t\text{-}1)}) = \frac{\sigma^2_e}{1-\rho^2},$$

καθώς οι διαταραχές e_t θεωρούνται ως ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές μεταξύ τους και ισχύουν τα αποτελέσματα $\rho^{2t} \to 0$ και $(1+\rho^2+\rho^4+...+\rho^{2(t\text{-}1)}) = \frac{1}{1-\rho^2}$, όταν |ρ|<1 και $t \to \infty$.

$$\sigma_{\text{tt-1}} \equiv \text{Cov}(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1}) = \text{E}(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) = \text{E}\left[(\rho\varepsilon_{t-1} + e_t)\varepsilon_{t-1}\right], \quad \text{καθώς } \text{E}(e_t\varepsilon_{t-1}) = 0, \forall t$$

$$= \rho\text{E}(\varepsilon_{t-1})^2 \;=\; \rho\sigma_\varepsilon^2 = \rho\left(\frac{\sigma_e^2}{1-\rho^2}\right), \quad \text{καθώς } \sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_e^2}{1-\rho^2}$$

$$\sigma_{\text{tt-2}} \equiv \text{Cov}(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-2}) \;= \text{E}(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}) = \text{E}\left[(\rho\varepsilon_{t-1} + e_t)\varepsilon_{t-2}\right]$$

$$= \text{E}\left[\left[\rho(\rho\varepsilon_{t-2} + e_{t-1}) + e_t\right]\varepsilon_{t-2}\right]$$

$$= \rho^2\text{E}(\varepsilon_{t-2}^2) = \rho^2\left(\frac{\sigma_e^2}{1-\rho^2}\right), \text{καθώς } \text{E}(e_{t-1}\varepsilon_{t-2}) = \text{E}(e_t\varepsilon_{t-2}) = 0, \forall t$$

Συνεχίζοντας κατά τον ίδιο τρόπο, μπορεί να βρεθεί η συνδιακύμανση μεταξύ των όρων ε_t και ε_{t-j} ως[4]

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{tt-j}} \equiv \text{Cov}(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-j}) &= \text{E}(\varepsilon_t\varepsilon_{t-j}) = \text{E}\left[(\rho\varepsilon_{t-1} + e_t)\varepsilon_{t-j}\right] \\ &= \ldots.. \\ &= \rho^j\text{E}(\varepsilon_{t-j}^2), \quad \text{καθώς } \text{E}(e_t\varepsilon_{t-j}) = \text{E}(e_{t-1}\varepsilon_{t-j}) = \ldots = \text{E}(e_{t-j+1}\varepsilon_{t-j}) = 0, \\ &= \rho^j\left(\frac{\sigma_e^2}{1-\rho^2}\right).\end{aligned}$$

<u>**Η μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης**</u> $\boldsymbol{\Omega} \equiv \text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) \equiv \text{E}(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')$, όταν η αυτοσυσχέτιση περιγράφεται από το υπόδειγμα AR(1) γράφεται ως εξής:[5]

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv \text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} \text{E}(\varepsilon_1^2) & \text{E}(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \text{E}(\varepsilon_1\varepsilon_3) & \cdots & \text{E}(\varepsilon_1\varepsilon_T) \\ \text{E}(\varepsilon_2\varepsilon_1) & \text{E}(\varepsilon_2^2) & \text{E}(\varepsilon_2\varepsilon_3) & \cdots & \text{E}(\varepsilon_2\varepsilon_T) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{E}(\varepsilon_T\varepsilon_1) & \text{E}(\varepsilon_T\varepsilon_2) & \text{E}(\varepsilon_T\varepsilon_3) & \cdots & \text{E}(\varepsilon_T^2) \end{bmatrix}$$

[4] Σημειώστε ότι, χρησιμοποιώντας τους παραπάνω τύπους, εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι η συνδιακύμανση της παρατήρησης του διαταρακτικού όρου ε_t με την ε_{t+j} είναι ίδια με εκείνη ανάμεσα στην ε_t και ε_{t-j}, δηλαδή ισχύει $\sigma_{\text{tt-j}} = \sigma_{\text{tt+j}}$. Προφανώς αυτό ισχύει ως συνέπεια της ιδιότητας των στάσιμων χρονολογικών σειρών που αναφέρει ότι οι συνδιακυμάνσεις μεταξύ οποιωνδήποτε παρατηρήσεων θα εξαρτάται από την απόσταση j μεταξύ τους και όχι από τα χρονικά σημεία τους.

[5] Αυτή προκύπτει άμεσα αν αντικαταστήσουμε στα στοιχεία της $\boldsymbol{\Omega}$ με τα ακόλουθα:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \text{E}(\varepsilon_t^2) = \frac{\sigma_e^2}{1-\rho^2}, \forall t \quad \text{και} \quad \sigma_{\text{tt-j}} = \text{E}(\varepsilon_t\varepsilon_{t-j}) = \rho^j\left(\frac{\sigma_e^2}{1-\rho^2}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sigma_e^2}{1-\rho^2} & \frac{\rho}{1-\rho^2}\sigma_e^2 & \frac{\rho^2}{1-\rho^2}\sigma_e^2 & \cdots & \frac{\rho^{T-1}}{1-\rho^2}\sigma_e^2 \\ \frac{\rho}{1-\rho^2}\sigma_e^2 & \frac{\sigma_e^2}{1-\rho^2} & \frac{\rho}{1-\rho^2}\sigma_e^2 & \cdots & \frac{\rho^{T-2}}{1-\rho^2}\sigma_e^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\rho^{T-1}}{1-\rho^2}\sigma_e^2 & \frac{\rho^{T-2}}{1-\rho^2}\sigma_e^2 & \frac{\rho^{T-3}}{1-\rho^2}\sigma_e^2 & \cdots & \frac{\sigma_e^2}{1-\rho^2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sigma_e^2}{1-\rho^2}\begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{T-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \cdots & \rho^{T-3} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \rho^{T-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \sigma_e^2\mathbf{V},$$

όπου

$$\mathbf{V} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & .. & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho & .. & \rho^{T-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & .. & \rho^{T-3} \\ : & : & : & & : \\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \rho^{T-3} & .. & 1 \end{bmatrix}.$$

Α. Συνέπειες της αυτοσυσχέτισης στον εκτιμητή $\hat{\beta}$

Αμεροληψία και συνέπεια (ισχύει για το υπόδειγμα $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$) (απόδ. όπως και στην ετεροσκεδαστικότητα)[6]

Διακύμανση – αποτελεσματικότητα (δεν ισχύει): Η μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης δίδεται ως

$$\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \text{E}\left[(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\right] = \text{E}\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right]$$

[6] Η μόνη περίπτωση που οι ιδιότητες αυτές δεν ισχύουν είναι όταν το υπόδειγμα συμπεριλαμβάνει και την εξαρτημένη μεταβλητή με υστέρηση ως ανεξάρτητη, δηλ.

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 y_{t-1} + \beta_3 x_t + \varepsilon_t, ,$$

καθώς το y_{t-1} συσχετίζεται με το διαταρακτικό όρο $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + e_t$, λόγω του όρου ε_{t-1}.

$$= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$
$$= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \sigma_e^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1},$$

καθώς $\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \boldsymbol{\Omega} = \sigma_e^2\mathbf{V}$ λόγω αυτοσυσχέτισης. Η μήτρα αυτή διαφέρει της μήτρας διακύμανσης-συνδιακύμανσης του LS εκτιμητή $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, που δίδεται ως $\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$. Όπως και στην ετεροσκεδαστικότητα, αυτό σημαίνει ότι , η χρήση της τελευταίας θα οδηγήσει σε λάθος στατιστική συμπερασματολογία. Ο *εκτιμητής* $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ *δεν είναι BLUE (δεν ισχύει το θεώρημα Gauss-Markov).*

Β. Διαγνωστικοί έλεγχοι για την ύπαρξη αυτοσυσχέτισης

Έλεγχος Durbin-Watson (DW) (*): Ο έλεγχος αυτός προτάθηκε για το υπόδειγμα αυτοσυσχέτισης $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + e_t$ και στηρίζεται στο ακόλουθο στατιστικό κριτήριο:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{T}(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T}\hat{\varepsilon}_t^2}$$

$$= \frac{\sum_{t=2}^{T}\hat{\varepsilon}_t^2 + \sum_{t=2}^{T}\hat{\varepsilon}_{t-1}^2 - 2\sum_{t=2}^{T}\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T}\hat{\varepsilon}_t^2} \approx 1 + \frac{\sum_{t=2}^{T}\hat{\varepsilon}_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^{T}\hat{\varepsilon}_t^2} - 2\frac{\sum_{t=2}^{T}\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T}\hat{\varepsilon}_t^2}$$

$$\approx 1 + 1 - 2\hat{\rho} = 2(1-\hat{\rho}),$$

καθώς $\frac{\sum_{t=2}^{T}\hat{\varepsilon}_t^2}{\sum_{t=1}^{T}\hat{\varepsilon}_t^2} \approx 1$, $\frac{\sum_{t=2}^{T}\hat{\varepsilon}_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^{T}\hat{\varepsilon}_t^2} \approx 1$ και $\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{T}\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T}\hat{\varepsilon}_t^2}$.[7]

[7] $\hat{\rho}$ αποτελεί το συντελεστή κλίσης ρ του βοηθητικού αυτοπαλίνδρομου σχήματος $\hat{\varepsilon}_t = \rho\hat{\varepsilon}_{t-1} + e_t$, όπου $\hat{\varepsilon}_t$ αποτελούν τα κατάλοιπα του γραμμικού υποδείγματος που προκύπτουν από την εκτίμηση αυτού με τη μέθοδο LS σε πρώτο στάδιο.

Με βάση την τελευταία σχέση (3) μπορούν να ταξινομηθούν οι ακόλουθες **περιπτώσεις τιμών του κριτηρίου d** σε σχέση με τις τιμές του συντελεστή ρ:

(i) Για ρ = 0 (μηδενική αυτοσυσχέτιση) $\Rightarrow \quad d \approx 2$.

(ii) Για ρ = 1 (τέλεια θετική αυτοσυσχέτιση) $\Rightarrow \quad d \approx 0$ (αποτελεί την κατώτερη τιμή του d, που συμβολίζεται ως d_L).

(iii) Για ρ = -1 (τέλεια αρνητική αυτοσυσχέτιση) $\Rightarrow \quad d \approx 4$ (αποτελεί την ανώτερη τιμή του d, που συμβολίζεται ως d_U.

Η υπόθεση μηδενικής αυτοσυσχέτισης H_0: d = 2 μπορεί να ελεγχθεί έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης θετικής αυτοσυσχέτισης:

$$H_\alpha: d < 2$$

με το κριτήριο d. Αν $d < d_{LC}$ (όπου d_{LC} αποτελεί κριτική τιμή της κατανομής της κατώτερης τιμής του d, d_L), τότε η μηδική υπόθεση απορρίπτεται και γίνεται δεκτή η εναλλακτική υπόθεση ύπαρξης θετικής αυτοσυσχέτισης. Αντίθετα, αν $d > d_{UC}$ (όπου d_{UC} αποτελεί κριτική τιμή της κατανομής της ανώτερης τιμής του d, d_U), τότε η μηδενική υπόθεση δε θα απορρίπτεται. Σημειώστε ότι αν έχουμε $d_{LC} \leq d \leq d_{UC}$, τότε η κατανομή του κριτηρίου d εξαρτάται από τις τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών του γραμμικού υποδείγματος που μπορούν να αλλάζουν τυχαία και έτσι, ο έλεγχος DW δε μπορεί να δώσει σαφή απάντηση αν ισχύει η μηδενική υπόθεση, ή όχι. Για το λόγο αυτό, δεν μπορεί να καταλήξει σε κάποιο συμπέρασμα.

Η υπόθεση μηδενικής αυτοσυσχέτισης H_0: d = 2 μπορεί επίσης να ελεγχθεί έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης αρνητικής αυτοσυσχέτισης:

$$H_\alpha: d > 2$$

με το κριτήριο d. Αν $d > 4 - d_{LC}$, τότε η μηδική υπόθεση απορρίπτεται και γίνεται δεκτή η εναλλακτική υπόθεση ύπαρξης αρνητικής αυτοσυσχέτισης. Αντίθετα, αν $d < 4 - d_{UC}$, τότε η μηδενική δεν θα απορρίπτεται. Σημειώστε ότι αν έχουμε $4 - d_{UC} \leq d \leq$

$4–d_{LC}$, τότε ο έλεγχος DW δεν παρέχει κανένα συμπέρασμα για την ύπαρξη ή όχι αρνητικής αυτοσυσχέτισης.

Έλεγχος Breusch-Godfrey (BG): Ο έλεγχος αυτός είναι ασυμπτωτικός και καλύπτει ελέγχους για αυτοσυσχέτιση για πολλά οικονομετρικά υποδείγματα, όπως αυτά τα οποία περιλαμβάνουν εξαρτημένες μεταβλητές με υστέρηση (πχ.,y_{t-1}-δυναμικά υποδείγματα) ως ανεξάρτητες (ερμηνευτικές) μεταβλητές. Για να παρουσιάσουμε τον έλεγχο BG, θεωρήστε το πολλαπλό υπόδειγμα

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + ... + \beta_K x_{tK} + \varepsilon_t,$$

όπου ο διαταρακτικός όρος ε_t θεωρείται ότι ακολουθεί το αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα p-τάξης:

$$\varepsilon_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + ... + \rho_p \varepsilon_{t-p} + e_t.$$

Ο έλεγχος των BG περιλαμβάνει τα ακόλουθα στάδια:

<u>Στάδιο 1^ο:</u> Εκτίμηση του γραμμικού υποδείγματος με τη μέθοδο LS αποταμίευση των καταλοίπων $\hat{\varepsilon}_t$.

<u>Στάδιο 2^ο:</u> Εκτίμηση της ακόλουθης βοηθητικής παλινδρόμησης των καταλοίπων $\hat{\varepsilon}_t$:[8]

$$\hat{\varepsilon}_t = \gamma_1 + \gamma_2 x_{t2} + \gamma_3 x_{t3} + ... + \gamma_K x_{tK} + \delta_1 \hat{\varepsilon}_{t-1} + \delta_2 \hat{\varepsilon}_{t-2} + ... + \delta_\rho \hat{\varepsilon}_{t-P} + v_t.$$

και υπολογισμός του συντελεστή R^2. Με βάση το συντελεστή αυτό, στη συνέχεια υπολογίζουμε το ακόλουθο στατιστικό κριτήριο:

[8] Σημειώστε ότι η βοηθητική παλινδρόμηση αυτή περιλαμβάνει όλες τις ανεξάρτητες μεταβλητές του πολλαπλού γραμμικού υποδείγματος στο δεξί μέρος της. Η προσθήκη των μεταβλητών αυτών έχει ως αποτέλεσμα το κριτήριο που χρησιμοποιείται για τη διεξαγωγή του ελέγχου BG να γίνεται ανεξάρτητο των τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών του υποδείγματος.

$$LM_{BG} \equiv (T-p)\cdot R^2 .$$

Κάτω από τη μηδενική υπόθεση μηδενικής αυτοσυσχέτισης (δηλ. H_0: $\delta_1 = \delta_2 = ... = \delta_\rho = 0$), το κριτήριο αυτό έχει την ακόλουθη ασυμπτωτική κατανομή:

$$LM_{BG} \equiv (T-p)\cdot R^2 \sim \chi^2{}_{(p)} ,$$

όπου p αποτελούν τους βαθμούς ελευθερίας της χ^2-κατανομής, που ισούνται με τη μέγιστη τάξη του AR υποδείγματος p που θεωρείται ότι ακολουθεί ο διαταρακτικός όρος ε_t. Αν η τιμή του κριτηρίου είναι μεγαλύτερη της κριτικής τιμής της κατανομής, τότε η μηδενική υπόθεση μη ύπαρξης αυτοσυσχέτισης απορρίπτεται και γίνεται δεκτή η εναλλακτική.

Γ. Εκτίμηση γραμμικού υποδείγματος κάτω από αυτοσυσχέτιση – ο GLS εκτιμητής

Ο εκτιμητής αυτός αποτελεί τον LS εκτιμητή των συντελεστών του γραμμικού υποδείγματος το οποίο έχει μετασχηματιστεί σε ένα του οποίου ο διαταρακτικός όρος δεν παρουσιάζει πλέον αυτοσυσχέτιση. Για την καλύτερη κατανόηση του, θεωρήστε το απλό γραμμικό υπόδειγμα:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t ,$$

όπου ο διαταρακτικός όρος ακολουθεί το AR(1) υπόδειγμα:

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + e_t , \; e_t \sim IID\,(0, \sigma_e^2).$$

Αν θεωρήσουμε το υπόδειγμα αυτό για την παρατήρηση της περιόδου t-1 και πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη του με ρ, τότε έχουμε

$$\rho y_{t-1} = \rho\beta_1 + \rho\beta_2 x_{t-1} + \rho\varepsilon_{t-1}$$

Αν αφαιρέσουμε την τελευταία σχέση από την προηγούμενη έχουμε:

$$y_t - \rho y_{t-1} \ = \ \beta_1 - \rho\beta_1 + \beta_2 x_t - \rho\beta_2 x_{t-1} + e_t = \ \beta_1(1-\rho) + \beta_2(x_t - \rho x_{t-1}) + e_t \,,$$

ή

$$y_t^* = \beta_1^* + \beta_2 x_t^* + e_t \,, \quad t \ = \ 2,3,\ldots,T$$

όπου $\quad y_t^* = y_t - \rho y_{t-1}$, $\quad x_t^* = x_t - \rho x_{t-1}$ και $\quad \beta_1^* = \beta_1(1-\rho)$

<u>Σημειώστε</u> ότι ο διαταρακτικός όρος του τελευταίου (μετασχηματισμένου) υποδείγματος αποτελεί εκείνον των τυχαίων διαταραχών e_t του AR(1) υποδείγματος, που ορίζεται ως $e_t \sim$ IID $(0, \sigma_e^2)$. Αυτό σημαίνει ότι το υπόδειγμα αυτό δεν παρουσιάζει πλέον πρόβλημα αυτοσυσχέτισης του διαταρακτικού όρου και επομένως, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση των συντελεστών του υποδείγματος β_1 και β_2 με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. **Ο εκτιμητής αυτός των ελαχίστων τετραγώνων αποτελεί τον GLS εκτιμητή. Αυτός είναι BLUE, όταν ο συντελεστής ρ του αυτοπαλίνδρομου υποδείγματος είναι γνωστός.** Όμως, η τελευταία υπόθεση αυτή δεν είναι ρεαλιστική. Η τιμή του συντελεστή ρ δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων και επομένως, θα πρέπει να εκτιμηθεί, οπότε στην περίπτωση αυτή ισχύουν μόνο ασυμπτωτικές ιδιότητες για τον GLS εκτιμητή, που πλέον αναφέρεται ως εφικτός (feasible) GLS (FGLS). Η εκτίμηση του ρ γίνεται χρησιμοποιώντας τη βοηθητική παλινδρόμηση:

$$\hat{\varepsilon}_t = \rho\hat{\varepsilon}_{t-1} + e_t \,.$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος για να εκτιμηθούν οι συντελεστές του γραμμικού υποδείγματος και ο συντελεστής ρ χωρίς να στηριχθούμε στον FGLS εκτιμητή, είναι να στηριχθούμε στην ακόλουθη μορφή ου μετασχηματισμένου υποδείγματος:

$$y_t \ = \beta_1(1-\rho) + \rho y_{t-1} + \beta_2 x_t - \rho\beta_2 x_{t-1} + e_t$$

$$= \beta_1^* + \rho y_{t-1} + \beta_2 x_t + \gamma x_{t-1} + e_t, \qquad t = 2,3,\ldots,T$$

όπου $\beta_1^* = (1-\rho)\beta_1$ και $\gamma = -\beta_2\rho$. Η εκτίμηση του υπόδειγματος αυτού με τη μέθοδο των LS δίνει εκτιμήσεις των συντελεστών β_1^*, ρ, β_2 και γ κατευθείαν. Από αυτές μπορούμε να πάρουμε τις εκτιμήσεις του συντελεστή β_1 χρησιμοποιώντας τη σχέση $\beta_1^* = (1-\rho)\beta_1$.

Οι παραπάνω μέθοδοι εκτίμησης των συντελεστών του γραμμικού υποδείγματος στηρίζονται σε λιγότερες κατά μια παρατηρήσεις (t=2,3,…,T), λόγω του μετασχηματισμού των μεταβλητών που θεωρεί ότι οι μετασχηματισμένες μεταβλητές ξεκινούν από την παρατήρηση t=2, δηλ.

$$x_2^* = x_2 - \rho x_1 \quad \text{και} \quad y_2^* = y_2 - \rho y_1,$$

Αν ο αριθμός των παρατηρήσεων του δείγματος είναι αρκετά μικρός, χάνοντας μια παρατήρηση μπορεί να οδηγήσει σε σημαντική μείωση της αποτελεσματικότητας του εκτιμητή GLS. Έτσι, για να μη αγνοηθεί η επίδραση της πρώτης παρατήρησης στις εκτιμήσεις των συντελεστών του μετασχηματισμένου υποδείγματος με τη μέθοδο του εκτιμητή GLS, **στην βιβλιογραφία έχει προταθεί ο ακόλουθος μετασχηματισμός για την πρώτη παρατήρηση των μετασχηματισμένων μεταβλητών x_t^* και y_t^*:**

$$x_1^* = \left(\sqrt{1-\rho^2}\right)x_1 \quad \text{και} \quad y_1^* = \left(\sqrt{1-\rho^2}\right)y_1$$

Ο μετασχηματισμός αυτός επιλέχθηκε έτσι ώστε ο διαταρακτικός όρος που προκύπτει για την πρώτη παρατήρηση του μετασχηματισμένου υποδείγματος, που ορίζεται ως

$$e_1^* = \left(\sqrt{1-\rho^2}\right)\varepsilon_1,$$

να έχει αντίστοιχες ιδιότητες με τις άλλες παρατηρήσεις του όρου των διαταραχών e_t για t=2,3,…,T. Δηλ, ο διαταρακτικός όρος e_1^* να κατανέμεται ως $IID(0,\sigma_e^2)$, με μέσο μηδέν, σταθερή διακύμανση και μηδενική συσχέτιση με οποιαδήποτε άλλη παρατήρηση του σφάλματος e_t. Οι ιδιότητες αυτές αποδεικνύονται ως εξής:

$$E(e_1^*) = \left(\sqrt{1-\rho^2}\right)E(\varepsilon_1) \ = 0\,.$$

$$Var(e_1^*) = (1-\rho^2)Var(\varepsilon_1) = (1-\rho^2)\frac{\sigma_e^2}{(1-\rho^2)} = \sigma_e^2$$

και

$$Cov(e_1^*, e_j) = E(e_1^* e_j) = E\left[\left(\sqrt{1-\rho^2}\right)\varepsilon_1 e_j\right] = \left(\sqrt{1-\rho^2}\right)E(\varepsilon_1 e_j)=0,\ \ \forall j \geq 2,$$

καθώς $e_t \sim IID(0,\, \sigma_e^2)$.

Ο εκτιμητής GLS που λαμβάνει υπόψη του και την πρώτη παρατήρηση του δείγματος μπορεί να παρουσιαστεί <u>με τη βοήθεια γραμμικής άλγεβρας</u> γράφοντας το μετασχηματισμένο γραμμικό υπόδειγμα για κάθε παρατήρηση t ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2}\,y_1 \\ y_2-\rho y_1 \\ y_3-\rho y_2 \\ \vdots \\ y_T-\rho y_{T-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & \sqrt{1-\rho^2}\,x_1 \\ (1-\rho) & x_2-\rho x_1 \\ (1-\rho) & x_3-\rho x_2 \\ \vdots & \vdots \\ (1-\rho) & x_T-\rho x_{T-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1^*=\sqrt{1-\rho^2}\,\varepsilon_1 \\ e_2=\varepsilon_2-\rho\varepsilon_1 \\ e_3=\varepsilon_3-\rho\varepsilon_2 \\ \vdots \\ e_T=\varepsilon_T-\rho\varepsilon_{T\text{-}1} \end{bmatrix}.$$

ή ως

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_T \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix}\sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -\rho & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -\rho & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & -\rho & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\\ 1 & x_3\\ \vdots & \vdots\\ 1 & x_T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -\rho & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -\rho & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & -\rho & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \vdots\\ \varepsilon_T\end{bmatrix},$$

ή, χρησιμοποιώντας συμβολισμούς μητρών και διανυσμάτων, ως

$$\mathbf{Py}=\mathbf{PX\beta}+\mathbf{P\varepsilon}, \qquad ή \qquad \mathbf{y}^*=\mathbf{X}^*\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon}^*$$

όπου $\mathbf{y}^*=\mathbf{Py}$, $\mathbf{X}^*=\mathbf{PX}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^*=\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}$ και

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & .. & 0\\ -\rho & 1 & 0 & .. & 0\\ 0 & -\rho & 1 & .. & 0\\ : & : & : & & :\\ 0 & 0 & 0 & -\rho & 1\end{bmatrix}$$

αποτελεί τη μήτρα μετασχηματισμού των μεταβλητών του αρχικού γραμμικού υποδείγματος, συμπεριλαμβανομένης και της πρώτης παρατήρησης.[9]

Το διάνυσμα των παρατηρήσεων του διαταρακτικού όρου $\boldsymbol{\varepsilon}^*=\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}$ πληροί τις κλασικές ιδιότητες, δηλ.

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}^*)=\mathrm{E}(\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon})=\mathbf{P}\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon})=\mathbf{0}$$

$$`\ \mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}^*)=\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}^*\boldsymbol{\varepsilon}^{*\prime})=\mathrm{E}(\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{P}')=\mathbf{P}\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')\mathbf{P}'=\sigma_e^2\mathbf{PVP}'=\sigma_e^2\mathbf{I},$$

[9] Προφανώς, η παραπάνω μορφή του μετασχηματισμένου υποδείγματος μπορεί εύκολα να επεκταθεί και για το πολλαπλό υπόδειγμα με Κ ανεξάρτητες μεταβλητές. Στην περίπτωση αυτή η μήτρα $\mathbf{X}^*$ θα έχει διάσταση (ΤΧΚ), ενώ το διάνυσμα των συντελεστών **β** θα είναι διάστασης (ΚΧ1).

καθώς $\mathbf{V} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}'^{-1}$. Το τελευταίο αποτέλεσμα προκύπτει από το γενικό αποτέλεσμα της γραμμικής άλγεβρας ότι, αν μια μήτρα είναι θετικά ορισμένη (στην περίπτωσή μας η μήτρα **V**), τότε η αντίστροφή αυτής γράφεται ως το γινόμενο δύο τριγωνικών μητρών $\mathbf{P}$ και $\mathbf{P}'$ ως εξής: $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{P}'\mathbf{P}$, όπου η **P** είναι η κάτω τριγωνική μήτρα και η $\mathbf{P}'$ η άνω (βλέπε Άσκηση 2).[10]

Έχοντας ορίσει τη μήτρα **P**, ο εκτιμητής GLS του $\boldsymbol{\beta}$ γράφεται αναλυτικά ως εξής:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}} &= (\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{X}^{*})^{-1}(\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{y}^{*}) \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{P}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{P}'\mathbf{P}\mathbf{y}), \qquad \text{καθώς} \quad \mathbf{y}^{*} = \mathbf{P}\mathbf{y} \;\text{ και }\; \mathbf{X}^{*} = \mathbf{P}\mathbf{X} \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}), \qquad \text{καθώς ισχύει} \quad \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{P}'\mathbf{P}.\end{aligned}$$

Η δε διακύμανσή αυτού δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}) = \sigma_{\mathrm{e}}^{2}(\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{X}^{*})^{-1} = \sigma_{\mathrm{e}}^{2}(\mathbf{X}'\mathbf{P}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1} = \sigma_{\mathrm{e}}^{2}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}.$$

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ο FGLS εκτιμητής και η διακύμανσή του GLS εκτιμητή που βασίζονται στους παραπάνω γενικούς τύπους των $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}$ και $\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}})$, αντίστοιχα, μπορούν να προκύψουν αντικαθιστώντας συνεπείς εκτιμήσεις των παραμέτρων ρ και σ_{e}^{2} σε αυτούς. Η διακύμανση σ_e^2 μπορεί να εκτιμηθεί συνεπώς χρησιμοποιώντας τα κατάλοιπα του εκτιμημένου υποδείγματος ως εξής:

$$\hat{\sigma}_{\mathrm{e}}^{2} = \frac{(\mathbf{y}^{*} - \mathbf{X}^{*}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{y}^{*} - \mathbf{X}^{*}\hat{\boldsymbol{\beta}})}{\mathrm{T} - \mathrm{K}},$$

όπου K δηλώνει τον αριθμό των συντελεστών του αρχικού υποδείγματος.

---

[10] Παίρνοντας την αντίστροφη της μήτρας $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{P}'\mathbf{P}$ συνεπάγεται

$$(\mathbf{V}^{-1})^{-1} = (\mathbf{P}'\mathbf{P})^{-1} \Rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}'^{-1}.$$