Διάλεξη 7

Διαφορά σύγκλισης $\xrightarrow{P}$ και $\xrightarrow{a.s.}$ ...

	$\boxed{\varphi 1}$	$\boxed{\varphi 2}$	$\boxed{\varphi 3}$
1.	1	1	1
2.	1 2	1 2	1 2
3.	1 2 3	1 2 3	1 2 3
4.	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4
5.			
⋮		⋮	⋮
n	1 2 3 ... n	1 2 3 ... n	1 2 3 ... n
⋮			

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{, αν επιλεγεί το 1 στη n-οστή δοκιμή (κερδίζει)} \\ 0 & \text{, αν επιλεγεί οποιοσδήποτε άλλος από } \{2, \dots, n\}. \end{cases}$$

Τότε $X_n \sim Be\left(\frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \dots$ αποτελούν ανεξ. τ.μ.

Καθώς το $n\uparrow$ γίνεται όλο και πιο σπάνιο να κερδίσουμε.

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \ , \ n \to \infty.$$

Έστω $\varepsilon > 0$ $(0 < \varepsilon < 1)$.

$$P(|X_n - 0| > \varepsilon) = P(X_n > \varepsilon) = P(X_n = 1) \longrightarrow 0.$$

Έχουμε $X_n \xrightarrow{P} 0$.

Γίνεται όλο και πιο σπάνιο να βρεθούμε <u>ε-μακριά</u> από το 0. $\left(n \xrightarrow{\text{καθως}} \infty\right)$

Έχουμε πολλούς φοιτητές και αν πραγματοποιούν το πείραμα όλοι, θα διαπιστώναμε ότι το ποσοστό αυτών που κερδίζουν μικραίνει συνέχεια (ποσοστό $\to 0$, καθώς $n \to \infty$)

③

Αν $X_n \xrightarrow{a.s.} 0$,

Τότε θα έπρεπε ο κάθε φοιτητής πρακτικά να σταματήσει να κερδίζει από κάποια δοκιμή και πέρα ($X_n(\omega) \to 0$, σχεδόν $\forall \omega$). $X_n(\omega) \in \{0, 1\}$, θα είχαμε $X_n(\omega) = 0$, τελικά $\forall n$.

Είναι πιο ισχυρή από την $X_n \xrightarrow{P} 0$, η οποία δεν αποκλείει ότι κάθε φοιτητής μπορεί να κερδίζει άπειρες φορές συχνά, απλά προφανώς θα κερδίζει όλο και πιο "αραιά".

Εδώ πράγματι $X_n \not\xrightarrow{a.s.} 0$.

4

H $\xrightarrow{P}$ δεν εξετάζει την εξέλιξη των δοκιμών για κάθε άτομο ξεχωριστά, μια "πληθυσμιακή" ιδιότητα που δεν ακολουθεί το "ιστορικό" του κάθε ατόμου.

H $\xrightarrow{a.s.}$ αφορά τη συμπεριφορά των ακολουθιών $(X_{\underset{\sim}{n}}(\omega))$.

Κοιτάει κάθε "άτομο" και παρακολουθεί το $X_n(\omega)$, καθώς $n \to \infty$.

Συγκλίνει ή όχι?

$\boxed{\text{Εφαρμογές}}$

Ισχυρή συνέπεια εκτιμήτριας :

Μια εκτιμήτρια $\hat{\theta}_n$ είναι ισχυρά συνεπής εκτιμ. του θ, αν $\hat{\theta}_n \xrightarrow{a.s.} \theta$, $\forall \theta \in \Theta$.

" όποιο και να είναι το θ, τυπικά ή πρακτικά κάθε μονοπάτι (διαδρομή) της εκτίμησης του θ, θα οδηγεί στο θ ($\hat{\theta}_n(\omega) \to \theta$)

Συνέπεια εκτιμήτριας ($\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$)

όποιο και να είναι το θ, πρακτικά το ποσοστό των μονοπατιών που θα βρεθούν ε-κοντά στο θ, αυξάνει απεριόριστα καθώς $n \to \infty$.

Χρήσιμο κριτήριο της $\xrightarrow{a.s.}$

Αν $\forall \varepsilon > 0$, $\sum_{n \geq 1} P(|X_n - X| > \varepsilon) < +\infty$,

Τότε $X_n \xrightarrow{a.s.} X$

[$\not\Leftarrow$ είναι ισχυρότερη από την $\xrightarrow{a.s.}$]

Παρ' όλα αυτά αν η (X_n) είναι ακολ. ανεξ. τ.μ.

Τότε ισχύει η $\Longleftrightarrow$

Άσκηση 1

Αν $X_n \sim Be\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$, τότε $X_n \xrightarrow{P} 0$,

αλλά $X_n \overset{a.s.}{\not\to} 0$.

Λύση

Δείξαμε ότι $X_n \xrightarrow{P} 0$. Έστω $\varepsilon > 0$.

$$\sum_{n\geq 1} P(|X_n - 0| > \varepsilon) \overset{0<\varepsilon<1}{=} \sum_{n\geq 1} P(X_n = 1) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = +\infty$$

Γενικά αν σειρά $= +\infty \not\Rightarrow \overset{a.s.}{\not\to}$

Εδώ όμως (X_n) είναι ανεξ. τ.μ.

Άρα πράγματι $X_n \overset{a.s.}{\not\to} 0$.

Άσκηση 2

Έστω $X_1, \dots, X_n$ ανεξ παρατηρήσεις από $Be\left(\frac{p}{n}\right)$, όπου $0 < p \leq 1$ άγνωστο.

Ν.δ.ο. η $\hat{p}_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}$ είναι ισχυρά συνεχής εκτιμήτρια του p. Συμπεράνετε ότι η $\tilde{p}_n = \hat{p}_n + X_n$ είναι συνεπής, αλλά όχι ισχυρά συνεπής εκτιμήτρια του p.

Λύση

Θέτουμε $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ και γνωρίζουμε

ότι $b_n - \log n \longrightarrow C$ και επομένως

- $\Rightarrow b_n \sim \log n$ $\left(\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\log n} = 1 \right)$

↳ και άρα μπορούμε να την αντικαταστήσουμε.

Θέτουμε $Y_n = X_n - \frac{p}{n}$ $\left(E(X_n) = \frac{p}{n} \right)$, $n \geq 1$,

έχουμε $E(Y_n) = 0$, $\forall n \geq 1$ και η (Y_n) είναι ακολ. ανεξ. τ.μ.

Θ.δ.ο. $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{V(Y_n)}{\log^2(n)} < +\infty}$ $\xRightarrow[\log n \sim b_n]{\text{Λήμμα (στη επομ. σελίδα)}}$ $\frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{b_n} \xrightarrow{a.s.} 0$

Λήμμα

Αν (X_n) ανεξ. τ.μ. με $E(X_n)=0$ και

$b_n \nearrow +\infty$ (γνησίως αύξουσα ακολ.) με (στηρίζεται ο Ι.Ν.Μ.Δ. του Kolmogorov για ανεξ. τ.μ.)

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{V(X_n)}{b_n^2} < +\infty} \Longrightarrow \frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{b_n} \xrightarrow{a.s.} 0.$$

Κριτήριο συμπύκνωσης Cauchy για σύγκλιση σειρών

αν ακολ. θετ. αριθμών (a_n), τότε

$$\sum_n a_n < +\infty \iff \sum_n 2^n a_{2^n} < +\infty .$$

10

$$V(Y_n) = V\left(X_n - \frac{p}{n}\right) = V(X_n) \overset{X_n \sim Be\left(\frac{p}{n}\right)}{=\!=} \frac{p}{n}\left(1-\frac{p}{n}\right)$$

Άρα
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\frac{p}{n}\overbrace{\left(1-\frac{p}{n}\right)}^{1}}{\log^2 n} \leq p \cdot \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log^2 n} < +\infty,$$

αφού από Cauchy
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n}\underbrace{(\log 2^n)^2}_{= (n\log 2)^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\log^2 2} < +\infty.$$

$\xRightarrow{\text{ισχύει για}}$ Το Λήμμα για $Y_n = X_n - \frac{p}{n}$. Τελικά.

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - p\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}} = \frac{X_1+\dots+X_n}{1+\dots+\frac{1}{n}} - p \xrightarrow{a.s} 0.$$

Άρα

$$\hat{p}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} \xrightarrow{a.s.} p \ , \ \forall p$$

άρα η $\hat{p}_n$ είναι ισχυρά συνεπής εκτιμήτρια.

Όμως η $\tilde{p}_n = \hat{p}_n + X_n$ $\sim Be\left(\frac{p}{n}\right)$, άρα. $\left(\hat{p}_n \xrightarrow{a.s.} p \Rightarrow \hat{p}_n \xrightarrow{P} p\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{p}_n \xrightarrow{P} p \\ X_n \xrightarrow{P} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{p}_n \xrightarrow{P} p \Rightarrow \text{η } \tilde{p}_n \text{ είναι συνεπής.}$$

Από την άλλη όμως. $[p \in (0,1])$

$X_n \not\xrightarrow{a.s.} 0$. Άρα $\tilde{p}_n \xrightarrow{a.s.} p$. αν συνέκλινε, τότε $\tilde{p}_n \xrightarrow{a.s.} 0$, $\hat{p}_n \xrightarrow{a.s.} p$. $\Rightarrow X_n \xrightarrow{a.s.} -p$ άτοπο

Τελικά η $\tilde{p}_n$ <u>δεν είναι</u> ισχυρά συνεπής.

Ιδιότητες

Αν $X_n \xrightarrow{a.s./P} X$ και $Y_n \xrightarrow{a.s./P} Y$, τότε

$$X_n + Y_n \xrightarrow{a.s./P} X + Y$$

$$X_n Y_n \xrightarrow{a.s./P} X \cdot Y$$

$$X_n / Y_n \xrightarrow{a.s./P} X/Y \quad \text{(όταν επιτρέπεται)}$$

π.χ. $\tilde{p}_n = \hat{p}_n + X_n \xrightarrow{P} p + 0 \quad \left(\begin{array}{l} \hat{p}_n \xrightarrow{P} p \\ X_n \xrightarrow{P} 0 \end{array} \right)$

Άσκηση

Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τ.δ. από $\mathcal{E}xp(\theta)$, $\theta > 0$.
Θέλουμε να εκτιμήσουμε το θ, τη μέση τιμή & τη διασπορά της $\mathcal{E}xp(\theta)$, και να εξετάσουμε ιδιότητες των εκτιμητριών (αμεροληψία, ΜΤΣ, L^2-συνέπεια, συνέπεια).

Λύση

$$\bar{\theta}_n = \frac{1}{\bar{X}_n} = g(\bar{X}_n), \text{ όπου } g(x) = \frac{1}{x}, \; x > 0$$

είναι συνεχής + κυρτή

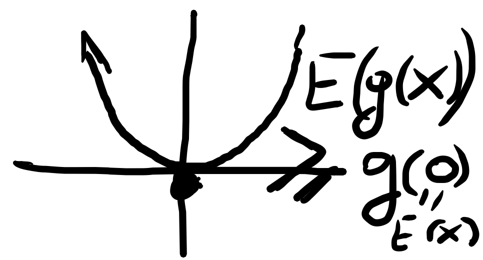
Ποιοτικά μεροληψία

$$E_\theta(\bar{\theta}_n) = E\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right) = E\left[g(\bar{X}_n)\right] \overset{g \text{ κυρτή}}{\geq} g\left(E(\bar{X}_n)\right) = g\left(\frac{1}{\theta}\right) = \theta$$

$\forall \theta > 0$. Μάλιστα η ισότητα ισχύει αν η τ.μ. $\bar{X}_n$ είναι εκφυλισμένη [όχι] ή αν είναι αφινική $(\alpha x + \beta)$ [όχι].

Τελικά $E_\theta(\bar{\theta}_n) > \theta, \; \forall \theta > 0$

δηλ. έχει θετική μεροληψία!



$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{\overline{X}_n} \quad . \quad \text{Όμως.}$$

$$\overline{X}_n = \underbrace{\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}}_{X_i \sim \mathcal{E}xp(\theta).} \sim \frac{1}{n} G(n, \theta) = \frac{1}{n\theta} G(n, 1)$$

$$G(n,1) \equiv \mathcal{E}rlang(n, 1).$$

$$\hat{\theta}_n = n\theta \cdot \frac{1}{G(n,1)} = \underset{\sim}{n\theta} \cdot \frac{1}{X} \quad , X \sim G(n,1). \quad (1)$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{1}{X}\right)^K = E\left(X^{-K}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(n)} X^{-K} \underbrace{X^{n-1}} e^{-x} dx$$

$$\underset{K<n}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(n)} X^{n-k-1} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n-K)}{\Gamma(n)} \underbrace{\int \frac{1}{\Gamma(n-k)} X^{n-k-1} e^{-x} dx}_{1}$$

$$= \frac{\Gamma(n-K)}{\Gamma(n)} = \frac{(n-k-1)!}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)\cdots(n-K)} \quad (2).$$

$$[\Gamma(n) = (n-1)!].$$

$$V\left(\frac{1}{X}\right) = E\left(\frac{1}{X}\right)^2 - E^2\left(\frac{1}{X}\right) =$$

$$\frac{1}{(n-1)(n-2)} - \frac{1}{(n-1)^2} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{(n-1)^2(n-2)}. \quad (3)$$

Τελικά από (1), (2), (3).

$$E(\hat{\theta}_n) = n\theta \cdot E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{n\theta}{n-1} = \theta + \frac{\theta}{n-1}$$

$$V_\theta(\hat{\theta}_n) = n^2\theta^2 \, V\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)} = \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \cdot \theta^2$$

Άρα

$$b_{\hat{\theta}_n}(\theta) = E_\theta(\hat{\theta}_n) - \theta = \frac{\theta}{n-1}, \quad \forall \theta > 0.$$

$$MT\Sigma_{\hat{\theta}_n}(\theta) = b^2_{\hat{\theta}_n}(\theta) + V_\theta(\hat{\theta}_n) = \frac{\theta^2}{(n-1)^2} + \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)} = \frac{(n+2)\theta^2}{(n-1)(n-2)} \quad \forall \theta > 0$$

Έχουμε $MT\Sigma_{\hat{\theta}_n}(\theta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Longrightarrow$

η $\hat{\theta}_n$ είναι L^2-συνεπής άρα και συνεπής εκτιμήτρια του θ.

Μάλιστα $\hat{\theta}_n = \frac{1}{\overline{X}_n} = g(\overline{X}_n) \xrightarrow{a.s.} g\left(\frac{1}{\theta}\right) = \theta$, $\forall \theta > 0$

διότι η $g(x)$ είναι συνεχής και $\overline{X}_n \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{\theta}$, από ($\forall \theta > 0$) Ι.Ν.Μ.Α.

και άρα εφαρμόζεται το Θ.Σ.Α.

- Κάντε άσκ. μέση τιμή + διασπορά.

Παρατήρηση

Σε πολλά στατιστικά μοντέλα είναι χρήσιμο να κάνουμε <u>αναπαραμέτρηση</u> του μοντέλου έτσι ώστε η καινούρια παράμετρος να είναι πιο βολική για τους στατιστικούς μας σκοπούς.
Λέμε αναπαραμέτρηση κάθε αλλαγή παραμέτρου μέσω μιας αμφιδιαφορίσιμης συνάρτησης, με
$\phi = \phi(\theta)$, όπου ϕ, ϕ^{-1} είναι διαφορίσιμες.
με $\phi : \Theta \longrightarrow \Phi$ όπου $\Phi = \phi(\Theta)$.

π.χ.
Η $\mathcal{E}xp(\theta)$ έχει 2 τύπους
- θ: παράμετρος <u>ρυθμού</u> (στις Πιθαν.)
- θ: παράμετρος <u>μέση τιμής</u>

Τότε αν θέσουμε

$$\mu = \mu(\theta) = \frac{1}{\theta}$$, τότε η $\mu(\cdot)$ είναι αμφιδιαφορίσιμη και έτσι κάναμε αναπαραμετρ.

$$f_\theta(x) = \theta \cdot e^{-\theta x} \longrightarrow \frac{1}{\mu} \cdot e^{-\frac{1}{\mu} \cdot x}, \quad x > 0$$

όπου $\mu = \frac{1}{\theta}$ η μέση τιμή της Εκθετικής(θ).

Η "κακή" μορφή που παίρνει τώρα αντισταθμίζεται από το ότι

$$E(X_1) = \mu$$

$$X \sim \mathcal{E}xp(\theta)$$

→ Τύπου I $\theta \cdot e^{-\theta x}$ (ρυθμό)

→ Τύπου II $\frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{1}{\theta} \cdot x}$ (μέση τιμή).

Άσκ. Δείξτε όλες τις ιδιοτ. που κάναμε πριν μέση τιμή, διασπορά

Τύπου - ΙΙ

19

$c \cdot \mathcal{E}xp(\theta) = \mathcal{E}xp(c \cdot \theta)$

$c \cdot G(\alpha, \theta) = G(\alpha, c \cdot \theta).$

+ λίγο R !