$\boxed{\text{Διάλεξη 6}}$

1

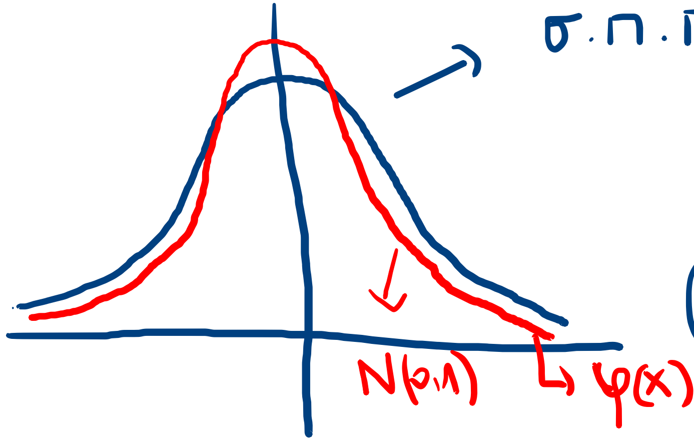
Κατανομή Student

Αν $T = \dfrac{Z}{\sqrt{\dfrac{X}{n}}}$, όπου

$$\left.\begin{array}{l} Z \sim N(0,1) \\ X \sim \chi^2_n \\ X \perp\!\!\!\perp Z \\ \text{(ανεξ. τ.μ)} \end{array}\right\} \Rightarrow T \sim t_n$$

$\downarrow$

Student με n-βαθμούς ελευθερίας



σ.π.π. της t_n.

1 έχει συμμετρική κατανομή

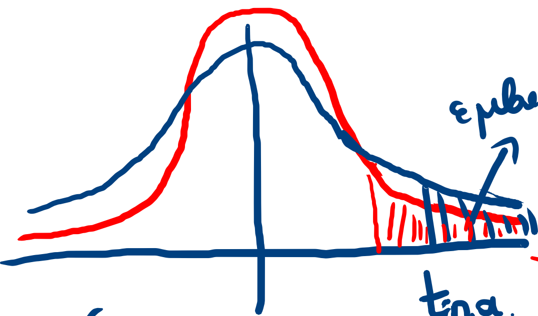
2 έχει πιο βαριές ουρές από την κανονική $N(0,1)$.

(παίρνει μεγάλες τιμές με μεγαλύτερη πιθανότητα από την $N(0,1)$).

$\Downarrow$

πέφτει πιο αργά η καμπύλη της σο ο

$$\boxed{t_{n,a} > Z_a}$$



$P(T > t_{n,a}) = a$.

α άνω-ποσοστημόριο

3 $t_n \cong N(0,1)$ για μεγάλο n.

Στην ουσία

$$T_n \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

Εφαρμογή με τη Student

Έχουμε τ.δ. από $N(\mu, \sigma^2)$.

Θέλουμε να εκτιμήσουμε το μ, όταν το σ^2 είναι άγνωστο.

Τότε αν θέσουμε

$$Z = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

σ → Τώρα είναι άγνωστο.

4

Το S^2 εκτιμά το σ^2

$\Downarrow$

S εκτιμά το σ.

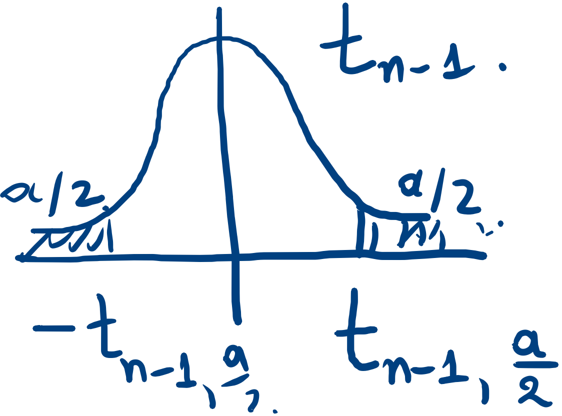
$$T = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{S} \sim \boxed{?}$$

$$T = \frac{\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}}{\frac{S}{\sigma}} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}{n-1}}} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{n-1}}} \sim t_{n-1}.$$

(i) $Z \sim N(0,1)$.

(ii) $X \sim \chi^2_{n-1}$

(iii) τ.δ. $N(\mu,\sigma^2)$, $\overline{X} \perp\!\!\!\perp S^2$ $\left[\begin{array}{l} Z = g(\overline{X}) \\ X = f(S^2) \end{array}\right]$



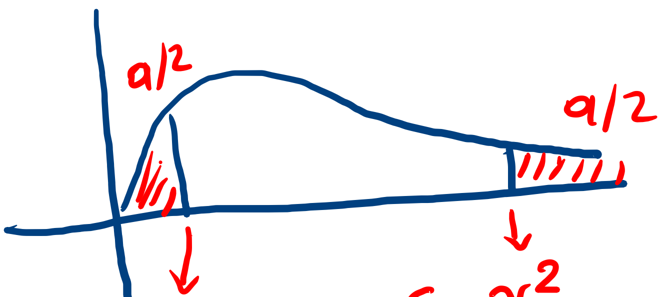
onus npiv $\Longrightarrow$ $\left(\overline{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$$I^{\mu}_{1-\alpha}(X) = \overline{X} \pm t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{S'}{\sqrt{n}}$$

$$\left[\overline{X} - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

Δ.Ε. για το σ^2

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$



$$c_1 = \chi^2_{n-1,\,1-\frac{a}{2}} \qquad c_2 = \chi^2_{n-1,\,\frac{a}{2}}$$

$$P\left(c_1 \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le c_2\right) = 1-a$$

$$c_1 \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le c_2 \iff$$

$$\frac{1}{c_2} \le \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \le \frac{1}{c_1} \iff$$

$$\frac{(n-1)S^2}{c_2} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{c_1}$$

$$I^{\sigma^2}_{1-a}(X) = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\frac{a}{2}}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{a}{2}}}\right]$$

(ακριβή $(1-a)$ − Δ.Ε.)

$\boxed{\text{Παράδειγμα}}$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα δείγμα 400 ψηφοφόρων σε δημοτικές εκλογές (έγκυρος), όπου έχουμε 2 υποψήφιους δημάρχους τον Α και τον Β. Ας υποθέσουμε το δείγμα μας έδωσε 212 ψήφους υπέρ του Α και 188 υπέρ του Β.

Ζητάμε να φτιάξουμε ένα 95%-Δ.Ε. για το άγνωστο ποσοστό των ψηφοφόρων σε όλο το δήμο.

Λύση.

Υποθέτουμε ότι p είναι το ζητούμενο ποσοστό.

Από το δείγμα έχουμε $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τα αποτελέσματα των n ατόμων.

Υποθέτουμε ότι

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν το } i\text{-άτομο προτίθεται να ψηφ. } A. \\ 0, & \text{διαφορετικά} \to B \end{cases}$$

$X_i \sim Be(p)$, και $X_1, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα.

Απο τα δεδομένα έχουμε.

$$\overline{X} = \frac{212}{400} = 0.53 = \hat{p}$$

Η $\overline{X}$ είναι μία εκτιμήτρια του p.

Πώς φτιάχνουμε 95%-Δ.Ε.

Το ακριβές είναι δύσκολο.

Μπορούμε να φτιάξαμε ένα ασυμπτωτικό $(1-a)$-Δ.Ε., δηλ. προσεγγιστικό μέσω ασυμπτ. προσέγγισης της κατανομής μια βοηθικής ποσότητας (προκύπτει φυσιολογικά μέσω τυποποίησης και αντικατάστασης παραμέτρων με εκτιμήτρια)

$$\sqrt{n}\cdot\frac{\bar{X}-p}{\sqrt{p(1-p)}}$$ συνεχ. ; $V(Be(p))=p(1-p)$

$E(Be(p))=p$.

10

$$\boxed{Z=\sqrt{n}\cdot\frac{\bar{X}-p}{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}}} \sim N(0,1)$$

$\not\sim N(0,1)$.

$X \quad c$

$X_n \xrightarrow{d} X, \quad Y_n \xrightarrow{P} c$

$X_nY_n \xrightarrow{d} c\cdot X$

Όμως $Z \approx N(0,1)$ για μεγάλο n

$$Z_n=\sqrt{n}\cdot\frac{\bar{X}_n-p}{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}=\sqrt{n}\cdot\frac{\bar{X}_n-p}{\sqrt{p(1-p)}}\cdot\sqrt{\frac{p(1-p)}{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}\xrightarrow{d} N(0,1)$$

$\xrightarrow{d} N(0,1)$; $\xrightarrow{P} 1$

Slutsky.

Άρα ένα ασυμπτωτικό $(1-\alpha)$ – Δ.Ε. (1.1)

$$\tilde{I}^{p}_{1-\alpha}(X) = \overline{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}}{\sqrt{n}}$$

$\overline{X}$: εκτιμήτριο

$Z_{\frac{\alpha}{2}}$: άνω ποσοστημόριο

$\hat{\sigma}_{\overline{x}}$

$$\sigma_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\sigma^2_{x_1} = (p(1-p))}{n}}$$

Εφαρμογή

$n = 400$, $\hat{p} = \overline{x} = 0.53$.

$\alpha = 0.05$.

$\Rightarrow \tilde{I}_{0.95}(x) \simeq [0.48, \ 0.58]$

παρατηρείσι $0.5 \in \tilde{I}_{0.95}(x)$

Παράδ.

Έστω μία εταιρεία μεγάλη πολυεθνική που σε 1 μήνα λειτουργίας της καταγράφει καθημερινά κέρδη

$X_1, X_2, \ldots, X_{30} \sim N(\mu, \sigma^2)$

που μπορεί να θεωρηθεί τυχαίο δείγμα

[$X_i < 0$, τότε σημαίνει ζημία $\longrightarrow$ προσημασμένο κέρδος].

Οι στατιστικοί που δουλεύουν στην εταιρεία, θέλουν να εκτιμήσουν το μέσο κέρδος μ και τη διασπορά σ^2

και να φτιάξουν ένα 99%−Δ.Ε. για τα μ και σ^2. Πώς τα υπολογίζουμε ? (13)

Λύση

(1) Κατ'αρχήν εκτιμήτριες.

$\hat{\mu} = \overline{X}$, $\hat{\sigma}^2 = S'^2$ → αμερόληπτη δειγμ. διασπορά.

99%−Δ.Ε., $a = 0.01$

Είμαστε στην περίπτωση τ.δ. από $N(\mu, \sigma^2)$, όπου μ, σ^2 άγνωστα.

Άρα $I^{\mu}_{0.99}(X) = \overline{X} \pm t_{29, 0.005} \cdot \frac{S'}{\sqrt{30}}$

14.

$$I_{0.99}^{\sigma^2}(X) = \left[\frac{29 \cdot S^2}{\chi^2_{29,0.005}} , \frac{29\, S^2}{\chi^2_{29,0.995}} \right]$$

Έλεγχοι Υποθέσεων

Ας υποθέσουμε ότι στο προηγούμενο παράδειγμα μετά από πολύ καιρό λειτουργίας, π.χ. όλη τη χρονιά 2019 είχε διαπιστωθεί εμπειρικά ότι η κατανομή των ημερήσιων κερδών αντιστοιχεί σε $N(10, 1)$.

Μέσα στο Γενάρη 2020
πληροφορούν το γενικό διευθυντή
της εταιρείας ότι οι πωλήσεις έχουν
πέσει και πρέπει να συγκαλέσει
ένα συμβούλιο ώστε να αποφασιστεί
αν η εταιρεία θα πρέπει να προβεί
σε μία διαφημιστική καμπάνια (θα είναι πολυδάπανη)
για να αντιστραφεί το αρνητικό κλίμα στις
πωλήσεις. Ο διευθυντής ενημερώνει τους
στατιστικούς της εταιρείας ότι πρέπει στις
31 Γενάρη να γίνει σύσκεψη, και να έχουν τα

δεδομένα των ημερήσιων κερδών (16)
τις 30 πρώτες μέρες του Γενάρη.
Με έναν έλεγχο υποθέσεων θα αποφασιστεί
κατά πόσον η εταιρεία αξίζει να
ξεκινήσει τη διαφημιστική καμπάνια.

Σκέψη.

Ακόμα και αν οι πωλήσεις έχουν
μέσο όρο < 10 που είναι το υποτιθέμενο
μέσο κέρδος της εταιρείας, αυτό θα
μπορούσε να συμβεί λόγω της μεταβλητότητας
της κανονικής κατανομής. Άρα θα πρέπει να

καθοριστεί ένα κατώφλι $C < 10$. (17)
κάτω από το οποίο θα παρθεί
η απόφαση ~~για~~ να ξεκινήσει η καμπάνια
διαφορετικά όχι.

— Πως βρίσκουμε το C?
Με τι κριτήριο?

Για να γίνει στατιστικά σωστά, θα
καθορίσουμε το C έτσι ώστε

$$P(\bar{X} < c_\alpha) = \alpha \;,$$

(έλεγχος σφάλματος)

$\bar{X}$: εκτιμήτρια του μ

όπου α θα είναι το επίπεδο "σφάλματος" που
είμαστε έτοιμοι να δεχθούμε αν υποθέσουμε ότι

Το μ είναι πράγματι 10, δηλ.
όπως λέμε κάτω από τη μηδενική
υπόθεση H_0, ότι καμία αλλαγή δεν
έχει συμβεί.

Άρα έχουμε

$\boxed{H_0 : \mu = 10}$. (μηδενική υπόθεση)

Εκφράζει ένα "status quo" μία κατάσταση
η οποία αν δεν είχαμε δεδομένα ότι κάτι
έχει αλλάξει θα τη δεχόμασταν ως αληθή.

$\boxed{H_1 : \mu < 10}$. (εναλλακτική υπόθεση)

Είναι η υπόθεση πυ κινητοποιεί τη διεξαγωγή τα ελέγχου

Για τη διεξαγωγή του ελέγχου θα χρειαστούμε μια συνάρτηση που θα "κρίνει" την απόφασή μας και λέγεται **ελεγχοσυνάρτηση** ή **κρίνουσα**.

Συνήθως είναι μια εκτιμήτρια μιας παραμέτρου ή ένας μετασχηματισμός αυτής που μας διευκολύνει στη διεξαγωγή του ελέγχου.

π.χ. εδώ ξεκινάμε με το $\overline{X}$

- **Καθορισμός κρίσιμης τιμής c_a.**

$$P(\overline{X} < c_a) = \alpha \longrightarrow \text{επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας.}$$

$$P_{H_0}(\overline{X} < c_a) \text{ ή } P_{10}(\overline{X} < c_a).$$

20

$$\overline{X} \sim N\left(10, \frac{1}{n}\right) \quad (n = 30).$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{X} - 10}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = Z \sim N(0,1)$$

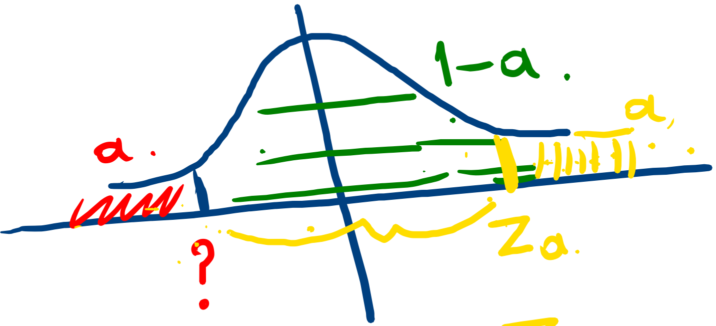
Άρα.

$$P_{10}(\overline{X} < c_a) = P_{10}\left(\frac{\overline{X}-10}{\sqrt{\frac{1}{n}}} < \frac{c_a - 10}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right)$$

$$= P\Bigg(\underbrace{Z}_{\sim N(0,1)} < \frac{c_a - 10}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\Bigg) = \Phi\left(\sqrt{n}\,(c_a - 10)\right).$$

Άρα ζητείται c_a :

$$\Phi\Big(\underbrace{\sqrt{n}\,(c_a - 10)}\Big) = a$$



$$z_{1-a} = -z_a$$

Έτσι.

$$\sqrt{n}\,(c_a - 10) = z_{1-a} = -z_a \Rightarrow$$

$$\boxed{c_a = 10 - \underset{(>0)}{z_a} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}} \qquad \left(10 + \overset{(<0)}{z_{1-a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Άρα ο διευθυντής μπορεί να πάρει 2 αποφάσεις :

- απορρίπτει τον ισχυρισμό $\mu = 10$ ή απορρίπτει την H_0.

αν $\boxed{\overline{X} < C_a}$

- δεν απορρίπτει (ή δέχεται) την H_0.

αν $\boxed{\overline{X} \geq C_a}$

Γενικά κάθε είδους απόφαση (απόρριψη ή αποδοχή) συνδέεται με κάποιο σφάλμα

Δύο είδη σφαλμάτων.

- <u>σφάλμα τύπου I</u> : (type-I error)

λανθασμένη απόρριψη της H_0.
(ισχύει η H_0 και εμείς την απορρίπτουμε).

- <u>σφάλμα τύπου II</u> (type-II error).

λανθασμένη αποδοχή της H_0.
(ισχύει η H_1 και εμείς αποδεχόμαστε την H_0).

κάθε σφάλμα συμβαίνει με κάποια πιθανότ. (24.)

• $P(\text{σφάλμα Τύπου I})$

$= P_{H_0}(\text{απορρίπτουμε την } H_0)$.

$= P_{H_0}(\text{κρίσιμη περιοχή})$

$\equiv$

περιοχή απόρριψης της H_0

Είναι αυτό που ελέγχουμε. π.χ. $(\overline{X} < c_\alpha)$.

με το ε.σ.σ. $P(\text{σφάλμα Τύπου I}) = \alpha \ (\leq \alpha)$.

• $P(\text{σφάλμα Τύπου II})$.

$= P(\text{λανθασμένη αποδοχή της } H_0) = P_{H_1}\left(\begin{array}{c}\text{εκτός κρίσιμης}\\ \text{περιοχής}\end{array}\right)$

Συνάρτηση Ισχύος του ελέγχου.

$$\Pi(\theta) = P_\theta(\text{αποδοχή της } H_1)$$

$$= P_\theta(\text{απόρριψης της } H_0)$$

Συγκεκριμένα αν θ είναι σημείο που ανήκει στην εναλλακτική, τότε μας καθορίζει την πιθανότητα να διακρίναμε σωστά την ισχύ της H_1.

Π.χ. πριν $H_0: \mu = 10$, $H_1: \mu < 10$.

Αν $\mu < 10$, $P_\mu(\bar{X} < c_a)$

Στην περίπτωση που $H_1 : \mu = \mu_1$ (26)

ένα μόνο σημείο.

Τότε λέμε

ισχύ του ελέγχου.

Το $\pi \equiv \pi(\mu_1) = P_{\mu_1}(\bar{X} < c_\alpha)$.

Επίσης αν

υπολογίζεται ακριβώς.

$\beta = P(\text{σφάλμα τύπου II}) = P_{\mu_1}(\bar{X} \geq c_\alpha)$

τότε. $\boxed{\pi = 1 - \beta}$

Περιληπτικά

η H_0 είναι / αποφασίζουμε	αληθής	ψευδής.
απόρριψη.	σφάλμα τύπου I FALSE POSITIVE	σωστή απόφαση TRUE POSITIVE
αποδοχή.	σωστή απόφαση TRUE NEGATIVE	σφάλμα τύπου II FALSE NEGATIVE

στατιστικά σημαντικό $\longrightarrow$ απορρίπτεται η H_0

ή εύρημα, δηλ POSITIVE

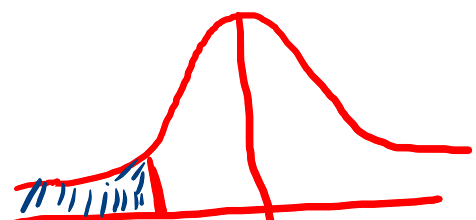
Απλοποίηση Ελεγχοσυνάρτησης.

$$\bar{X} \longrightarrow Z.$$

$$\boxed{Z} = \frac{\bar{X} - 10}{\sqrt{\frac{1}{n}}}$$

Κρίσιμη περιοχή.

$$\bar{X} < c_a \iff Z < z_a.$$



z_a.

$Z < z_a$ ή $Z \geq z_a$

$Z < z_a$: απόρριψη της H_0

$Z \geq z_a$: αποδοχή της H_0.

Τύποι Ελέγχων

Εξαρτάται από τη μορφή της εναλλακτικής.

απλή υπόθεση : $\theta = \theta_0$ → μονοσύνολο

σύνθετη υπόθεση : $\theta \in \Theta_0 \subset \Theta$

↳ όχι μονοσύνολο.

Αντίστοιχα για την εναλλακτική

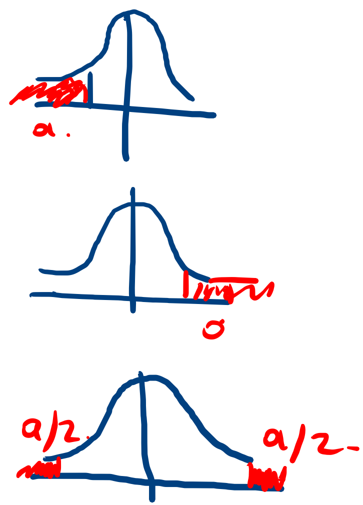
$H_0 : \theta = \theta_0$ vs $\theta < \theta_0$

$H_1 : \theta > \theta_0$

δίπλευρη ← $\theta \neq \theta_0$

Ελεγχοσυνάρτηση αν το σ^2 είναι γνωστό:

$$
\rightarrow \begin{cases} Z < z_\alpha \\ Z_1 > z_\alpha \\ |Z| > z_{\frac{\alpha}{2}} \end{cases}
$$



Εδώ ταιριάζουν και ασυμπτωτικοί έλεγχοι

π.χ $H_0: p = \frac{1}{2}$ vs $H_1: p \neq \frac{1}{2}$

ασυμπτωτικό έλεγχο.

$$Z_1 = \frac{\bar{X} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{n}}}$$

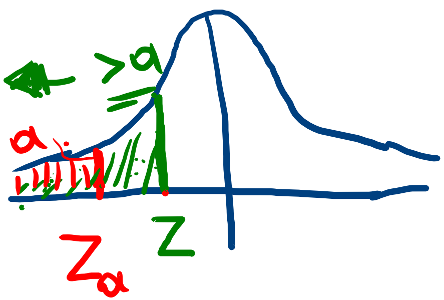
Εναλλακτικά η διεξαγωγή του ελέγχου (31.)

Το α είναι καλό να καθορίζεται πριν τη διεξαγωγή του ελέγχου.

Αλλά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη p-value.

π.χ. στο προηγούμενο πρόβλημα.

πήραμε μια τιμή $Z = z \longrightarrow$ στο συγκεκριμένο δείγμα



Μετράμε $P(Z < z)$ $\quad Z \sim N(0,1)$

$(\text{ή} \le z)$

$$\parallel$$

$$\text{p-value} = \alpha(z)$$

Παρατηρούμε επίπεδο σημαντικότητας

Κριτήριο.

- αν: p-value $> \alpha$ (ή $\geq \alpha$).

τότε δεχόμαστε την H_0.

- p-value $\leq \alpha$ (ή $< \alpha$)

τότε απορρίπτουμε την H_0.

→ Η p-value είναι ένα μέτρο της βεβαιότητας για την εμφάνιση της H_0 (συγκριτικά με το α).

Η μορφή της p-value αλλάζει ανάλογα με την H_1.

p-value $= P(Z > z)$ (ii), p-value $= 2P(Z_1 > |z|)$