

Επισκόπηση Πιθανοτήτων και Στατιστικής

Εργασία. Μία εταιρεία υπολογιστών καταγράφει τις πωλήσεις μίας συγκεκριμένης μάρκας υπολογιστή ανά ημέρα και στόχος της είναι να εκτιμήσει την κατανομή της ημερήσιας ζήτησης στη συγκεκριμένη μάρκα. Δίνεται η πληροφορία ότι η κατανομή αυτή είναι σταθερή στο χρόνο και δεν υπάρχει εξάρτηση στη ζήτηση μεταξύ διαφορετικών ημερών. Αφού καταγράφηκαν οι πωλήσεις X_i για 30 διαδοχικές ημέρες, τα αποτελέσματα ήταν τα εξής:

19 22 23 24 16 21 14 31 14 14 13 32 19 13 22 12 15 28 19 10 21 19 24 13 21 26 31 27 14 17.

Σας δίνονται 3 υποψήφια μοντέλα παραγωγής των δεδομένων: το μοντέλο A υποθέτει κατανομή $Poisson$ με παράμετρο $\lambda > 0$, το μοντέλο B υποθέτει Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $(40, p)$ και το μοντέλο Γ υποθέτει κατανομή που προκύπτει από τη σχέση $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{20}$, όπου $\{Y_i\}_{1 \leq i \leq 20}$, είναι ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν Γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p , με $0 < p < 1$.

- (i) Γράψτε τη συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) που αντιστοιχεί στη ζήτηση X σε κάθε ένα από τα μοντέλα A , B και Γ . Για το Γ , να εξάγεται τη συνάρτηση πιθανότητας συνδιαστικά. Ποιά γνωστή κατανομή προκύπτει;
- (ii) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά των κατανομών που προκύπτουν και στα 3 μοντέλα. Ποιά είναι η τιμή του λόγου της μέσης τιμής προς την διασπορά σε κάθε ένα από τα μοντέλα;
- (iii) Υπολογίστε το δειγματικό μέσο, τη δειγματική διασπορά και την τιμή του λόγου τους στα δεδομένα που σας δώθηκαν. Βγάλτε τα πρώτα συμπεράσματά σας αντιπαραβάλλοντας την τιμή του λόγου στο δείγμα με τις αντίστοιχες θεωρητικές τιμές στο προηγούμενο ερώτημα.
- (iv) Με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας εκτιμήστε την άγνωστη παράμετρο (ε.μ.π.) σε κάθε ένα από τα μοντέλα, υποθέτοντας ότι έχουν παραχθεί από αυτό.
- (v) Συγκρίνετε τις μέγιστες τιμές της πιθανοφάνειας που παίρνετε στα 3 μοντέλα. Αν θέλατε τελικά να επιλέξετε ένα μοντέλο με κριτήριο την μέγιστη τιμή της πιθανοφάνειας, ποιο θα κρατάγατε;
- (vi) Δείξτε ότι η ε.μ.π. είναι συνεπής, ασυμπτωτικά αμερόληπτη και ασυμπτωτικά κανονική για κάθε ένα από τα μοντέλα. Είναι η ασυμπτωτική διασπορά των εκτιμητριών ίση με τα αντίστοιχα κάτω φράγματα διασποράς Cramer-Rao;
- (vii) Κατασκευάστε 95% ασυμπτωτικά διαστήματα εμπιστοσύνης για την υπό εκτίμηση παράμετρο για κάθε ένα από τα 3 μοντέλα. Υπολογίστε τα πάνω στο δείγμα.
- (viii) Για κάθε ένα από τα μοντέλα βρείτε την ε.μ.π. της μέσης τιμής και της διασποράς, δείξτε ότι είναι συνεπείς εκτιμήτριες των αντίστοιχων θεωρητικών τιμών και βρείτε την ασυμπτωτική τους κατανομή.
- (ix) Δείξτε ότι ο δειγματικός μέσος και η δειγματική διασπορά είναι και αυτές συνεπείς εκτιμήτριες των αντίστοιχων θεωρητικών τιμών και έχουν ασυμπτωτικά κανονική κατανομή. Συγκρίνετε τις εκτιμήτριες αυτές με τις αντίστοιχες ε.μ.π. για κάθε ένα από τα μοντέλα (όπου χρειάζεται συγκρίνετε ασυμπτωτικές διασπορές).
- (x) Για κάθε ένα από τα μοντέλα ομαδοποιήστε τις παρατηρήσεις σας σε 5 κελιά με αναμενόμενες συχνότητες ≥ 5 και κάντε έναν έλεγχο χ^2 για να αποφανθείτε για την καλή προσαρμογή του κάθε μοντέλου στα δεδομένα.