όπου f και g συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις, μπορεί να μετασχηματιστεί σε διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών.

(β) Χρησιμοποιώντας το (α) να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x - tx^2 - (t + t^2 x)x' = 0.$$

Να λυθούν τα Π.Α.Τ.

(α) $y' = (\cos x)(y-1),\ y(0) = 1.$

(β) $y' = 1 + y^2,\ y(0) = 1$, προσδιορίστε το διάστημα ύπαρξης.

(γ) $y' = \dfrac{3t^2 + 4t + 2}{2(y-1)},\ y(0) = -1.$

(δ) $3\dfrac{dy}{dt} = y\cos t,\ y(1) = 0.$

Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$x' + \sigma x = f(t) \quad , \ t \geq 0. \tag{1.102}$$

Αν $f \in C([0,+\infty])$ και $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \rho \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι

(α) αν $\sigma > 0$ τότε κάθε λύση ϕ της εξίσωσης έχει την ιδιότητα

$$\lim_{t\to+\infty} \phi(t) = \frac{\rho}{\sigma},$$

(β) αν $\sigma < 0$ τότε υπάρχει ακριβώς μία λύση ψ της εξίσωσης τέτοια ώστε

$$\lim_{t\to+\infty} \psi(t) = \frac{\rho}{\sigma}.$$

$e^{\sigma s}$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε τον κανόνα De l'Hôpital. Για το (β) δείξτε ότι υπάρχει μοναδική λύση της (1.102) στο $[0,+\infty)$, $\cancel{x} = -\int_0^{+\infty} e^{-\sigma(t-s)} f(s)\, ds.$

Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$x' = \frac{2t}{1+x^2}, \quad x(0) = 0$$

και να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της λύσης είναι όλο το $\mathbb{R}$.

Να δειχτεί ότι αν a και λ είναι θετικές σταθερές και b οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, τότε κάθε λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y' + ay = be^{-\lambda t}$$

έχει την ιδιότητα $y \to 0$ καθώς το $t \to +\infty$.

Υπόδειξη: Να θεωρηθούν ξεχωριστά οι περιπτώσεις $a = \lambda$ και $a \neq \lambda$. Άλλος τρόπος: εφαρμογή της άσκησης 1.5.

1.8 Να βρεθεί μία εξίσωση πρώτης τάξης που να έχει την ακόλουθη οικογένεια ολοκληρωτικών καμπυλών:

(α) $y = cx.$

(β) $y^2 = 2ax.$

(γ) $x^2 + y^2 - 2ax = 0.$

(δ) $xy = c.$

Υπόδειξη: Παραγωγίστε και κάντε απαλοιφή της παραμέτρου.

1.9 Να προσδιοριστεί το α έτσι ώστε το ακόλουθο Π.Α.Τ. να έχει περιοδική λύση:

$$y' - \frac{1}{2}y = 2\sin t \ , \ y(0) = \alpha.$$

1.10 (Αλλαγή κλίμακας) Να βρεθεί αλλαγή εξαρτημένης μεταβλητής τέτοια ώστε η 2π−περιοδική λύση της εξίσωσης

$$x' = -x + \cos t$$

να μετατρέπεται σε 1−περιοδική.

1.11 Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$y' = -y + c(t) \ , \ c(t+1) = c(t) \ ,$$

όπου $c(t)$ συνεχής συνάρτηση. Να δειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση έχει μοναδική 1−περιοδική λύση.

1.12 Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$x'(t) = a(t)x(t),$$

όπου $a(t)$ συνεχής μιγαδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με περίοδο ω. Έστω $x(t)$ λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $x(0) = 1$.

(α) Να βρεθεί η σταθερά c έτσι ώστε

$$x(t + \omega) = cx(t) \ , \ t \in \mathbb{R}.$$

(β) Τι συνθήκες πρέπει να ισχύουν για την $a(t)$ έτσι ώστε να υπάρχει μη μηδενική λύση της διαφορικής εξίσωσης περιόδου ω είτε περιόδου 2ω;

(γ) Εάν η $a(t)$ παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$, ποιες είναι οι απαιτήσεις στο (β);

1.13 Θεωρούμε την 1−περιοδική διαφορική εξίσωση

$$y' = -y + \cos(2\pi t) - 2\pi\sin(2\pi t).$$

(α) Να δειχθεί ότι η απεικόνιση Poincaré δίνεται από τον τύπο

$$\Pi(y_0) = e^{-1}(y_0 - 1) + 1.$$

(β) Να βρεθούν τα σταθερά σημεία της απεικόνισης Poincaré και να εξαχθεί συμπέρασμα για τις 1–περιοδικές λύσεις της εξίσωσης.

Θεωρούμε την 1–περιοδική διαφορική εξίσωση

$$y' = (\cos^2 2\pi t)y.$$

(α) Να δειχθεί ότι η λύση δίνεται από τον τύπο

$$y(t) = y(0)\exp\left\{\frac{t}{2} + \frac{\sin 4\pi t}{8\pi}\right\}.$$

(β) Να δειχθεί ότι η απεικόνιση Poincaré δίνεται από τον τύπο

$$\Pi(x_0) = x_0\sqrt{e}$$

και να βρεθούν τα σταθερά της σημεία. Να εξαχθεί συμπέρασμα για τις 1–περιοδικές λύσεις της εξίσωσης.

Να εξεταστεί η συμπεριφορά των λύσεων της

$$x' = -(\sin t)x + 1,$$

καθώς το $t \to +\infty$.

Έστω $b(t)$ T–περιοδική συνεχής συνάρτηση και έστω

$$b_0 = \int_0^1 b(s)\,ds.$$

Να δειχθεί ότι όλες οι λύσεις της $x' = b(t)$ είναι T–περιοδικές αν $b_0 = 0$ και μη φραγμένες αν $b_0 \neq 0$.

Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$y' = a(t)y + b(t)\ ,\quad 0 < t < 1,$$

με συνοριακές συνθήκες $y(0) = y(1)$. Να δειχθεί ότι:

(α) Εάν $\int_0^1 a(s)\,ds \neq 0$, τότε υπάρχει μοναδική λύση.

(β) Εάν $\int_0^1 a(s)\,ds = 0$, τότε υπάρχει λύση αν και μόνο αν

$$\int_0^1 e^{\int_0^1 a(t)\,dt} b(s)\,ds = 0.$$

1.18 Έστω $b(t)$ συνεχής 1−περιοδική συνάρτηση. Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$y' = -\left[a_0 + \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi t)\right] y + e^{-\cos(2\pi t)} b(t).$$

Να δειχθούν τα ακόλουθα:

(α) Εάν $a_0 \neq 0$ τότε υπάρχει μοναδική 1−περιοδική λύση.

(β) Εάν $a_0 = 0$ και

$$b_0 = \int_0^1 b(s)\, ds = 0,$$

τότε κάθε λύση είναι 1−περιοδική.

(γ) Εάν $a_0 = 0$ και $b_0 \neq 0$ τότε κάθε λύση είναι μη φραγμένη.

1.19 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' = \varepsilon y - \sigma y^3,$$

όπου $\varepsilon > 0$ και $\sigma > 0$ σταθερές.

1.20 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' = ry - ky^2,$$

όπου $r > 0$ και $k > 0$ σταθερές.

1.21 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + y = (ty)^2.$$

1.22 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$ty' - y - (\log t)y^2 = 0\ , \quad t > 0.$$

1.23 Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

(α) $$y' = -\frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} + y^2,$$

(β) $$y' = \frac{2\cos^2 t + \sin^2 t - y^2}{2\cos t},$$

αν είναι γνωστές οι ειδικές λύσεις

$$y_1(t) = -\frac{1}{t}$$

για την (α) και

$$y_1(t) = \sin t$$

για την (β).

1.24 Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις

(α) $(x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0.$

(β) $x^2y' - 3xy - 2y^2 = 0.$

(γ) $x^2y' = 3(x^2 + y^2)\tan^{-1}\dfrac{y}{x} + xy.$

(δ) $x\sin\dfrac{y}{x}\cdot y' = y\sin\dfrac{y}{x} + x.$

(ε) $xy' = y + 2xe^{-\frac{y}{x}}.$

(στ) $(x - y)dx - (x + y)dy = 0.$

(ζ) $(x + y)dx + (x - y)dy = 0.$

(η) $xy' = 2x + 3y.$

(ϑ) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2}.$

(ι) $x^2y' = y^2 + 2xy.$

(ια) $(x^3 + y^3)dx - xy^2dy = 0.$

(ιβ) $(y - 2x)dx + (4y + 3x)dy = 0.$

(ιγ) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$

Απάντηση: $y = x\sin\ln cx$ είτε $y = x$ είτε $y = -x$.

(ιδ) $xy' = y + x\cos^2\dfrac{y}{x}.$

(ιε) $x^2dy = (y^2 - xy + x^2)dx.$

Απάντηση: $(x - y)\ln cx = x$.

1.25 Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις

(α) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y + 4}{x - y - 6}.$

(β) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y - 1}{x + 4y + 2}.$

(γ) $(2x - 2y)dx + (y - 1)dy = 0.$

(δ) $(2x + 3y - 1)dx - 4(x + 1)dy = 0.$

(ε) $(2x - 5y + 3)dx - (2x + 4y - 6)dy = 0.$

(στ) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{7x - 3y - 7}{7y - 3x + 3}.$

(ζ) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y - x - 4}{y - 3x + 3}.$

(η) $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0.$

1.26 Να δειχθεί ότι η $f(x,y)$ είναι ομογενής βαθμού r, δηλαδή

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^r f(x,y),$$

αν και μόνο αν ικανοποιεί τη **σχέση Euler**:

$$x f_x + y f_y = r f.$$

1.27 Η συνάρτηση λέγεται **σχεδόν ομογενής** βαθμού r αν

$$f(\lambda^\alpha x, \lambda^\beta y) = \lambda^r f(x,y).$$

Οι α, β καλούνται **βάρη**. Να δειχθεί ότι

(α) ένα πολυώνυμο δύο μεταβλητών είναι σχεδόν ομογενές αν και μόνο αν τα μονώνυμα $x^p y^q$ εκ των οποίων συνίσταται ικανοποιούν τη σχέση

$$\alpha p + \beta q = r.$$

(Διάγραμμα Νεύτωνα)

(β) η f είναι σχεδόν ομογενής βαθμού r με βάρη α, β αν και μόνο αν ικανοποιεί τη σχέση Euler

$$\alpha x f_x + \beta y f_y = r f.$$

1.28 Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις.

(α) $ty' + y = 3t^2 - 1$, για $t > 0$.

<u>Απάντηση:</u> $y = t^2 - 1 + \dfrac{c}{t}$, $t > 0$,

(β) $y' - \dfrac{y}{t} = t^2$.

<u>Απάντηση:</u> $y = ct + \dfrac{t^3}{2}$.

(γ) $y' - (\tan t)y = e^{\sin t}$, για $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$.

(δ) $y' - (\cot t)y = 2t \sin t$.

<u>Απάντηση:</u> $y = t^2 \sin t + c \sin t$.

(ε) $y' + y = \dfrac{1}{1 + e^{2t}}$.

(στ) $(t \log t)y' + y = 3t^3$.

(ζ) $y' + 2ty = 2te^{-t^2}$.

<u>Απάντηση:</u> $y = (t^2 + c)e^{-t^2}$.

(η) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{t \cos y + \sin 2y}$.

<u>Υπόδειξη:</u> $\dfrac{dt}{dy} - t \cos y = \sin 2y$.

<u>Απάντηση:</u> $t = ce^{\sin y} - 2(1 + \sin y)$.

1.29 Να λυθούν τα παρακάτω Π.Α.Τ.

(α) $(1+t^2)y' + 4ty = t \ , \ y(1) = \frac{1}{4}$.

Απάντηση: $y \equiv \frac{1}{4}$.

(β) $t(t-1)y' + y = t^2(2t-1) \ , \ y(2) = 4$.

Απάντηση: $y = t^2$.

1.30 Έστω f και g πραγματικές συνεχείς συναρτήσεις με $f(t) \geq \delta > 0$ και

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0.$$

Αποδείξτε ότι αν $\varphi(t)$ είναι μία λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y' + f(t)y = g(t),$$

τότε

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0.$$

1.31 Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις.

(α) $tdt + ydy = 0$.

(β) $t(1+y^2)dt - y(1+t^2)dy = 0$.

(γ) $y' = -kt$, όπου k σταθερά.

(δ) $e^y(1+t^2)dy - 2t(1+e^y)dt = 0$.

(ε) $e^t \sin^3 y + (1+e^{2t})(\cos y)y' = 0$.

1.32 Να λυθούν τα παρακάτω Π.Α.Τ.

(α) $y' \sin t - y \cos t = 0 \ , \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

(β) $t\sqrt{1-y^2}dt + y\sqrt{1-t^2}dy = 0 \ , \ y(0) = 1$.

(γ) $(y \log y)dt + tdy = 0 \ , \ y(1) = 1$.

(δ) $ydy + (1+y^2)(\sin t)dt = 0 \ , \ y(0) = 1$.

1.33 Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις.

(α) $\cos y' = 0$.

(β) $\log y' = t$.

(γ) $e^{y'} = t$.

(δ) $e^{y'} = 1$.

(ε) $\sin y' = t$.

1.34 Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις.

(α) $y' = a^{t+y}$, όπου $a > 0$, $a \neq 1$.
Απάντηση: $a^t + a^{-y} = c$.

(β) $y' = \cos(t - y)$.
Απάντηση: $t + c = \cot\left(\frac{y-t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

1.35 Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

(α) $y'' - 2y' = 0$.
(β) $y'' + y' = 0$.
(γ) $xy'' - y' = 0$.
(δ) $xy'' + 3y' = 0$.
(ε) $y'' + y' = 0$.
(στ) $y'' + a^2 y = 0$.
(ζ) $y'' = \left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}$.
~~(η) $2yy'' = 1 + (y')^2$.~~

$$\boxed{yy'' = (y')^2 \qquad \text{Απ: } y(x) = ce^{kx}}$$

1.36 Να αποδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση

$$(2xy - 3x^2)dx + (x^2 - 2y)dy = 0$$

είναι ακριβής και να υπολογιστεί η γενική της λύση.
Απάντηση: $x^2 y - x^3 - y^2 = c$.

1.37 Να αποδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση

$$\frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy = 0$$

είναι ακριβής και να υπολογιστεί η γενική της λύση.
Απάντηση: $-\frac{y}{x} = c$.

1.38 Να αποδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση

$$ye^{xy}dx + (3 + xe^{xy})dy = 0$$

είναι ακριβής και να υπολογιστεί η λύση της που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = 0$.
Απάντηση: $e^{xy} + 3y = 1$.

1.39 Να εξεταστεί αν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις είναι ακριβείς και να υπολογιστεί η γενική λύση αυτών που είναι ακριβείς.

(α) $(2x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0$.
Απάντηση: $x^2 - 3xy + y^2 = c$.

(β) $(3y^2 + 10xy^2)dx + (6xy - 2 + 10x^2y)dy = 0.$

Απάντηση: $3xy^2 + 5x^2y^2 - 2y = c.$

(γ) $(4x^3 - 6xy^2)dx + (4y^3 - 6xy)dy = 0.$

Απάντηση: Δεν είναι ακριβής.

(δ) $\dfrac{-y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}dy = 0,\ y(1) = 1.$

Απάντηση: $\arctan\dfrac{x}{y} = \dfrac{\pi}{4}.$

(ε) $\left(\dfrac{y}{x-y}\right)^2 dx + \left(\dfrac{x}{x-y}\right)^2 dy = 0.$

Απάντηση: Δεν είναι ακριβής.

(στ) $\dfrac{y}{x-1}dx + [\ln(x-1) + 2y]dy = 0,\ y(2) = 4.$

Απάντηση: $y\ln(x-1) + y^2 = 16.$

(ζ) $\dfrac{x}{x^2+y^2}dx - \dfrac{y}{x^2+y^2}dy = 0.$

Απάντηση: Δεν είναι ακριβής.

(η) $[2x\tan(y) + 5]dx + \left(x^2\sec^2(y)\right)dy = 0.$

Απάντηση: $x^2\tan(y) + 5x = c.$

10 Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης που διέρχεται από το σημείο $(0,2)$ με κλίση
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Απάντηση: $3x^2y + y^3 = 8.$

11 Να υπολογιστεί η γενική λύση των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων αφού βρεθεί ο κατάλληλος κάθε φορά ολοκληρωτικός παράγοντας.

(α) $(x^2y + y^2)dx - x^3dy = 0.$

Απάντηση: Ολοκληρωτικός παράγοντας: $\dfrac{1}{x^2y^2}.$

Γενική λύση: $\dfrac{x}{y} - \dfrac{1}{x} = c.$

(β) $(3y^4 + 4xy)dx + (5xy^3 + 2x^2)dy = 0.$

Απάντηση: Ολοκληρωτικός παράγοντας: $x^2y.$

Γενική λύση: $x^3y^5 + x^4y^2 = c.$

(γ) $(x + x^2 + y^2)dx + ydy = 0.$

Απάντηση: Ολοκληρωτικός παράγοντας: $\dfrac{1}{x^2+y^2}.$

Γενική λύση: $y + \arctan\dfrac{y}{x} = c.$

(δ) $ydx - (x + 6y^2)dy = 0.$

Απάντηση: Ολοκληρωτικός παράγοντας: $\frac{1}{y^2}$.

Γενική λύση: $\frac{x}{y} - 6y = c.$

(ε) $(5x^2 - y)dx + xdy = 0.$

Απάντηση: Ολοκληρωτικός παράγοντας: $\frac{1}{x^2}$.

Γενική λύση: $\frac{y}{x} + 5x = c.$

(στ) $(x + y)dx + (\tan x)dy = 0.$

Απάντηση: Ολοκληρωτικός παράγοντας: $\cos x$.

Γενική λύση: $y \sin x + x \sin x + \cos x = c.$

(ζ) $y^2dx + (xy - 1)dy = 0.$

Απάντηση: Ολοκληρωτικός παράγοντας: $\frac{1}{y}$.

Γενική λύση: $xy - \ln y = c.$

(η) $2ydx + \left(x - \sin\sqrt{y}\right) dy = 0.$

Απάντηση: Ολοκληρωτικός παράγοντας: $\frac{1}{\sqrt{y}}$.

Γενική λύση: $x\sqrt{y} + \cos\sqrt{y} = c.$

(ϑ) $(4x^2y + 2y^2)dx + (3x^3 + 4xy)dy = 0.$

Απάντηση: Ολοκληρωτικός παράγοντας: xy^2.

Γενική λύση: $x^4y^3 + x^2y^4 = c.$

(ι) $(-y^5 + x^2y)dx + (2xy^4 - 2x^3)dy = 0.$

Απάντηση: Ολοκληρωτικός παράγοντας: $\frac{1}{x^2y^3}$.

Γενική λύση: $\frac{y^2}{x} + \frac{x}{y^2} = c.$

(ια) $(x^3 - x^2 - y^2)dx + x^2ydy = 0.$

Απάντηση:

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x^2}dx = 0 \;\Rightarrow\; \ln\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{x} = c.$$

(ιβ) $\left(3ye^x - \frac{1}{x^2y^3}\right) dx + 4xe^x dy = 0.$

Απάντηση:

$$(3x^2y^4dx + 4x^3y^3dy) - e^{-x}dx = 0 \;\Rightarrow\; x^3y^4 + e^{-x} = c.$$

1.42 Με τη βοήθεια του διαφορικού της $\sqrt{x^2-y^2}$ να υπολογιστεί η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\left(x+y\sqrt{x^2-y^2}\right)dx-\left(y-x\sqrt{x^2-y^2}\right)dy=0.$$

Απάντηση: $d\sqrt{x^2-y^2}=\dfrac{xdx-ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}$ οπότε η λύση είναι $\sqrt{x^2-y^2}+xy=c$.

1.43 Να αποδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση

$$(\alpha xy^2+\beta y)dx+(\beta x^2y+\alpha x)dy=0$$

είναι ακριβής μόνο αν $\alpha=\beta$. Αν $\alpha\neq\beta$ δείξτε ότι x^my^n είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας με

$$m=-\frac{2\beta+\alpha}{\alpha+\beta}\quad\text{και}\quad n=-\frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta}.$$

1.44 Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f(t)$ που είναι τέτοιες ώστε η διαφορική εξίσωση

$$f(t)\,x'+t^2+x=0\ ,\quad x=x(t)\ ,$$

να δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(t)=t$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση.

1.45 Να βρεθεί η διαφορίσιμη συνάρτηση f με $f(0)=0$, για την οποία η διαφορική εξίσωση

$$2+y^3(t)\cos t+f(t)y^2(t)y'(t)=0$$

είναι ακριβής. Στη συνέχεια να λυθεί η διαφορική εξίσωση για την προκύπτουσα f.

1.46 Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$\left(3t+\frac{6}{y}\right)+\left(\frac{t^2}{y}+\frac{3y}{t}\right)\frac{dy}{dt}=0.$$

Να βρεθεί ο ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\mu(t,y)=t^\alpha y^\beta$ και με τη χρήση του στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση.

1.47 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(3t+2y+y^2)dt+(t+4ty+5y^2)dy=0.$$

Υπόδειξη: $\mu(t,y)=\mu(t+y^2)$.

1.48 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(\sin y+t^2+2t)dt+\cos y\,dy=0.$$

1.49 Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(3x^2 + y^2)dx + 2xy\,dy = 0,$$

υπολογίζοντας το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int M\,dx + \int N\,dy$$

κατά μήκος ευθύγραμμου τμήματος με άκρα $(0,0)$ και (x,y).

1.50 Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

(α) $(x-y)dx + x\,dy = 0.$

(β) $\sqrt{x^2+y^2}dx = x\,dy - y\,dx.$

(γ) $\left(x^2 e^{-\frac{y^2}{x^2}} - y^2\right)dx + xy\,dy = 0.$

1.51 Εάν μία επιφάνεια $\Gamma(t)$ κινείται ομοιόμορφα με κάθετη ταχύτητα v (δηλαδή το μέτρο της v είναι το ίδιο σε κάθε σημείο της επιφάνειας) τότε ισχύει η ακόλουθη κινηματική σχέση μεταξύ της καμπυλότητας Gauss K και της μέσης καμπυλότητας H:

$$\begin{cases} K' = -2HKv, \\ H' = -(2H^2 - K)v, \end{cases}$$

όπου ο τόνος $'$ συμβολίζει την παράγωγο ως προς t. Παίρνοντας σαν δεδομένο το παραπάνω σύστημα να επαληθευτούν τα ακόλουθα βήματα:

(α) $(2H^2 - K)\,dK - 2HK\,dH = 0.$

Υπόδειξη: Να διαιρεθούν οι εξισώσεις.

(β) Να δειχτεί ότι αν η εξίσωση του (α) πολλαπλασιαστεί με K^{-3} τότε μετατρέπεται σε ακριβούς μορφής. Να επιλυθεί η μετασχηματισμένη εξίσωση.

$k_1 k_2 = K$

$\frac{k_1+k_2}{2} = H$

(γ) Να δειχτεί ότι η ποσότητα

$$\frac{K - H^2}{K^2}$$

$\left(H = \frac{1}{R}\right.$

$\left.K = \frac{1}{R^2}\right)$

μένει αναλλοίωτη στο χρόνο, δηλαδή

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{K - H^2}{K^2}\Big) = 0.$$

1.52 (Lotka–Volterra) (α) Έστω

$$F(x,y) = -\delta x + \gamma \ln x - \beta y + \alpha \ln y =: g_1(x) + g_2(y).$$

Να δειχθεί ότι το σύνολο

$$F^c = \{\,(x,y)\ :\ x > 0, y > 0,\ F(x,y) \geq c\,\}$$

είναι κυρτό, δηλαδή αν $z_1 = (x_1, y_1)$ και $z_2 = (x_2, y_2)$ στο F^c τότε το ευθύγραμμο τμήμα $\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$, βρίσκεται επίσης εντός του F^c.

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί ότι οι συναρτήσεις g_1 και g_2 είναι κοίλες.

(β) Να δειχθεί ότι το F^c είναι συμπαγές.

Υπόδειξη: Θεωρήστε μία ακολουθία $(x_n, y_n) \in F^c$ με

$$\sqrt{|x_n|^2 + |y_n|^2} \to +\infty$$

και καταλήξτε σε αντίφαση.

(γ) $F^{c_1} \subseteq F^{c_2}$ αν $c_1 \geq c_2$. Να δειχθεί ότι η F έχει ολικό μέγιστο στο $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}\right)$.

(δ) Εάν $c > -\infty$ τότε το σύνολο F^c δεν τέμνει τους άξονες. Κατά συνέπεια αν $x_0 > 0$ και $y_0 > 0$ τότε η αντίστοιχη λύση $\Big(x(t), y(t)\Big)$ παραμένει εντός του τεταρτημορίου $x > 0, y > 0$.

1.53 Ο δεύτερος νόμος του Kepler είναι ισοδύναμος με την διατήρηση της στροφορμής (βλ. (1.96) και (1.97)). Να δειχθεί ότι η διατήρηση της στροφορμής ισχύει για τον πιο γενικό νόμο

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = f\Big(|\vec{r}|\Big)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|},$$

όπου f αυθαίρετη συνάρτηση.

1.54 Δείξτε ότι το παράδειγμα 1.7 έχει καλώς ορισμένη λύση για κάθε c εάν $0 < b < a$

1.55 Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y' + y = \left(\int_0^1 y(t)dt\right)^{1/2}, \quad y(0) = 1$$