Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΝΟΣ ΑΝΟΙΧΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Τζεφριού Ευρυδίκη

ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών ΕΚΠΑ

evitzefriou@gmail.com

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μια από τις βασικές αρχές της σύγχρονης διδακτικής των μαθηματικών είναι η διδασκαλία μέσω επίλυσης προβλημάτων. Ο Polya (1945) αναφέρει ότι η επίλυση προβλήματος θεωρείται θεμελιώδης ικανότητα για τον άνθρωπο καθώς το μεγαλύτερο μέρος της συνειδητής του σκέψης αφορά σε προβλήματα. Σε αντίθεση όμως με τις ανάγκες της σύγχρονης κοινωνίας, οι απόφοιτοι των σχολείων δεν είναι ικανοί λύτες προβλημάτων (Μουσουλίδης κ.ά., 2006), ειδικότερα εκείνων που χαρακτηρίζονται ως μη τετριμμένα (non-routine problems). Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της PISA (2003), μόνο το 20% των 15χρονών μαθητών μπορεί να θεωρηθούν ως ικανοί λύτες προβλημάτων (OECD, 2004), δηλαδή να μπορούν να κατανοήσουν και στη συνέχεια να επιλύσουν ένα πρόβλημα μέσα από την αναζήτηση μοτίβων, τη συστηματική δοκιμή λύσεων ή την εξέταση ειδικών περιπτώσεων, να μπορούν να συνδυάσουν στοιχεία μαθηματικής γνώσης απαραίτητα για την επίλυση του προβλήματος, να οργανώσουν και να καταγράψουν τα διαδοχικά βήματα επίλυσης και να ελέγξουν την ορθότητα της λύσης (Κολοβού & Van den Heuvel-Panhuizen, 2011).

Τα μαθηματικά έργα που προτείνονται στη σχολική τάξη έχουν ιδιαίτερη σημασία γιατί αποτελούν το πλαίσιο πάνω στο οποίο καλείται να αναπτυχθεί η μαθηματική δραστηριότητα (Τζεκάκη, 2011). Καθώς η επίλυση προβλήματος κατέχει κεντρική θέση στην μαθηματική εκπαίδευση, δημιουργικές προσεγγίσεις όπως η χρήση ανοιχτών προβλημάτων αποτελεί χρήσιμη κατηγορία προβλημάτων στην πρακτική των εκπαιδευτικών (Ζήση & Τριανταφύλλου, 2019) δεδομένου ότι αποτελούν σημαντικό παράγοντα τόσο στην ανάπτυξη διαφόρων στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων, όσο και στην προώθηση της μαθηματικής σκέψης. Στην διδασκαλία των μαθηματικών η επίλυση ανοιχτών προβλημάτων, δηλαδή προβλημάτων με πολλαπλές λύσεις, συνδέεται με τη βαθύτερη κατανόηση και την ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού (Polya, 1973 & Schoenfeld, 1985).

Στην παρούσα εργασία θα διερευνηθεί η χρήση στρατηγικών, είτε ευρετικών είτε μεταγνωστικών, που ανέπτυξαν οι μαθητές κατά την επίλυση ενός ανοιχτού προβλήματος. Συγκεκριμένα, θέτονται τα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

ΕΕ1: Τι είδους «στρατηγικές» (είτε ευρετικές είτε μεταγνωστικές) ανέπτυξαν οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με το ανοιχτό πρόβλημα;

ΕΕ2: Ποιοι ήταν οι παράγοντες που επηρέασαν την ανάπτυξη και εξέλιξη των στρατηγικών που ανέπτυξαν οι μαθητές;

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Τα περισσότερα προβλήματα που αντιμετωπίζονται στα σχολικά μαθηματικά είναι συνήθως κλειστά προβλήματα τα οποία δεν αφήνουν πολλά περιθώρια δημιουργικής σκέψης, καθώς εστιάζουν στην απομνημόνευση μαθηματικών κανόνων και θεωρημάτων. Αντιθέτως, κατά τη διδασκαλία ανοιχτών προβλημάτων οι μαθητές α) εμπλέκονται σε μαθηματικές δραστηριότητες και εκφράζουν τις ιδέες τους ελεύθερα, β) μπορούν να απαντήσουν στο πρόβλημα με τους δικούς τους τρόπους (Kwon, Park & Park, 2006), γ) τα προβλήματα αυτά προσφέρουν ευκαιρίες για επέκταση της μαθηματικής γνώσης και δ) παρέχουν ευκαιρίες για διατύπωση εικασιών και επιχειρηματολογία (Ζήση & Τριανταφύλλου, 2019). Λόγω της φύσης των ανοιχτών προβλημάτων οι μαθητές μπορεί να ακολουθήσουν στρατηγικές μη αναμενόμενες (Ζήση & Τριανταφύλλου, 2019) ή να σχεδιάσουν νέες όταν οι προηγούμενες δεν είχαν επιφέρει κάποιο αποτέλεσμα. Επομένως, η επίλυση ενός ανοιχτού προβλήματος απαιτεί ένα συνδυασμό ευρετικών και μεταγνωστικών στρατηγικών.

Σύμφωνα με τον Polya (1945), κατά την προσπάθεια εύρεσης της λύσης ενός προβλήματος ο μαθητής μπορεί να αναθεωρεί κατ’ επανάληψη τον τρόπο με τον οποίο το αντιμετωπίζει. Επομένως, ο ίδιος καταγράφει κάποιες βασικές στρατηγικές που βελτιώνουν την ικανότητα των μαθητών να επιλύουν προβλήματα: α) κατασκευή σχήματος , β) απλοποίηση προβλήματος, γ) χρήση ή ανακάλυψη μοτίβου, δ) πειραματισμός, ε) ανάδρομη πορεία, στ) διατύπωση και έλεγχος μιας υπόθεσης κ.ά. Σύμφωνα με τον Schoenfeld (1985) η επίλυση προβλήματος συνδέεται τόσο με γνωστικής φύσης διαδικασίες όσο και μεταγνωστικής φύσης. Στο θεωρητικό πλαίσιο που ανέπτυξε, ως ευρετικές στρατηγικές ορίζει στρατηγικές όπως χρήση αναπαραστάσεων, αξιοποίηση παρόμοιων προβλημάτων, αναδιατύπωση προβλήματος κ.ά. Ως μεταγνωστικές στρατηγικές ορίζει την παρακολούθηση και αξιολόγηση των αποφάσεων, της επιλογής και χρήσης των κατάλληλων πηγών και στρατηγικών που στοχεύουν στην επίλυση προβλήματος. Στη μεταγνώση αναγνωρίζονται δύο διαστάσεις: α) η παρακολούθηση (monitoring) και β) η ρύθμιση (regulation) (Flavell, 1976). Συγκεκριμένα, η μεταγνώση είναι ένα μέσο με τη βοήθεια του οποίου ο μαθητής ελέγχει και αξιολογεί την ορθότητα των διεργασιών κατά τις φάσεις επίλυσης ενός προβλήματος, είναι σε θέση να διαπιστώσει τα λάθη του, να τροποποιήσει τις ιδέες και τις στρατηγικές που τον οδήγησαν σε αυτά και να ερμηνεύσει τις αιτίες που τον οδήγησαν σε ένα σωστό ή λάθος αποτέλεσμα. Η ανάπτυξη μεταγνωστικών στρατηγικών αποτελεί μια πτυχή ζωτικής σημασίας κατά την επίλυση προβλήματος, δεδομένου ότι κάνει τους μαθητές καλύτερους λύτες προβλημάτων (Schoenfeld, 1992). Πολλές έρευνες έχουν διεξαχθεί με σκοπό τη μελέτη της σχέσης της μεταγνώσης και της μαθηματικής εκπαίδευσης, ειδικά στην περιοχή της επίλυσης προβλήματος και έδειξαν ότι η μεταγνώση έχει θετικά αποτελέσματα στη δραστηριότητα των μαθητών (Kramarski et al, 2002), και κυρίως στη βελτίωση των δεξιοτήτων επίλυσης προβλήματος (Goldberg & Bush, 2003).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Ερευνητικό πλαίσιο

Η πειραματική διδασκαλία πραγματοποιήθηκε σε συνολικά τρεις μαθητές διαφορετικής τάξης. Σε μία μαθήτρια Α’ Λυκείου, 16 ετών και ξεχωριστά δόθηκε σε μια ομάδα δύο μαθητριών Β’ Γυμνασίου, 14 ετών. Οι μαθήτριες επιλέχθηκαν με βάση την τάξη που βρίσκονται, καθώς οι μαθήτριες της Β’ Γυμνασίου έχουν πρόσφατα διδαχθεί αρκετές από τις μαθηματικές έννοιες που πραγματεύεται το πρόβλημα σε αντίθεση με την μαθήτρια της Α’ Λυκείου. Στην πρώτη περίπτωση ο χρόνος ενασχόλησης με το πρόβλημα ήταν 1 ώρα, ενώ στην δεύτερη περίπτωση, στην ομάδα των δύο μαθητριών, ο χρόνος ενασχόλησης ήταν 2 ώρες.

Πρόβλημα

Το ανοιχτό πρόβλημα της εικόνας 1, που δόθηκε στους μαθητές αφορούσε μια προβληματική κατάσταση βασισμένη σε ένα ημικυκλικό θέατρο. Συνοδευόταν από μια φωτογραφία στην οποία οι μαθητές μπορούσαν να εργαστούν.

Δύο φίλες, η Ν και η Π, αποφάσισαν να παρακολουθήσουν την συναυλία του αγαπημένου τους τραγουδιστή στο Θέατρο Βράχων του Βύρωνα. Αρχικά, κάθισαν στην $20^{η}$ σειρά στις θέσεις που βλέπεις στην φωτογραφία. Ωστόσο, στην συνέχεια το μετάνιωσαν και σκέφτηκαν ότι κατά την διάρκεια της συναυλίας είναι καλύτερο να κάτσουν μαζί. Μπορείς να υπολογίσεις πόσα βήματα πρέπει να κάνει η Ν για να φτάσει στην Π αν κάθε βήμα της είναι 0,5 μέτρα; Δίνεται η οριζόντια απόσταση ΑΒ=15 μέτρα και το ύψος κάθε σκαλοπατιού 0,20 μέτρα.

Εικόνα 1: Το πρόβλημα

Ερευνητικά δεδομένα

Τα ερευνητικά δεδομένα που συλλέχθηκαν είναι οι συζητήσεις των μαθητών κατά τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος. Και στις δύο διδασκαλίες οι συζητήσεις μαγνητοφωνήθηκαν. Δεδομένα, επίσης, αποτελούν οι σημειώσεις των μαθητών στην προσπάθειά τους να λύσουν το ανοιχτό πρόβλημα. Επιπλέον, συλλέχθηκαν στιγμιότυπα της διαδικασίας επίλυσης μέσω φωτογραφιών.

Ανάλυση των δεδομένων

Έγινε απομαγνητοφώνηση της συζήτησης που είχαν οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με το πρόβλημα. Η ανάλυση εστίασε στην εύρεση και μελέτη των στρατηγικών που ανέπτυξαν οι μαθητές στην προσπάθειά τους να διαχειριστούν και να λύσουν το ανοιχτό πρόβλημα. Οι στρατηγικές των μαθητών κατηγοριοποιήθηκαν σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο του Schoenfeld στις (α) ευρετικές στρατηγικές και (β) μεταγνωστικές στρατηγικές. Τέλος, η ανάλυση εστίασε στους παράγοντες που επηρέασαν την ανάπτυξη και εξέλιξη των στρατηγικών που ανέπτυξαν οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με το ανοιχτό πρόβλημα. Παράγοντες μπορεί να αποτελούν το ίδιο το ανοιχτό πρόβλημα, οι ερωτήσεις ή οι παρατηρήσεις της εκπαιδευτικού, η τάξη των μαθητριών όπως επίσης και η φωτογραφία που αναφέρεται σε ένα τρισδιάστατο σχήμα (θέατρο) αλλά παρουσιάζεται μέσω μιας δισδιάστατης απεικόνισης.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στην περίπτωση της Β' Γυμνασίου, οι δύο μαθήτριες κατά τη διάρκεια της επίλυσης του ανοιχτού προβλήματος ανέπτυξαν τόσο ευρετικές όσο και μεταγνωστικές στρατηγικές.

Στην αρχή, και οι δύο μαθήτριες αντιμετώπισαν αρκετές δυσκολίες για την εύρεση ενός σωστού «δρόμου» προς την λύση του ανοιχτού προβλήματος. Στην προσπάθειά τους, λοιπόν, να διαχειριστούν το πρόβλημα ανέπτυξαν το πρώτο είδος *ευρετικής στρατηγικής*: τον *πειραματισμό* με τα δεδομένα του προβλήματος. Συγκεκριμένα, όπως φαίνεται στο απόσπασμα 1, και οι δύο μαθήτριες (ΑΡ και ΝΕ), αφού είχαν προβληματιστεί με το πώς να ξεκινήσουν, αποφάσισαν να πειραματιστούν με τα δεδομένα του προβλήματος, έχοντας ως στόχο να ανακαλύψουν σχέσεις ή καινούρια δεδομένα που θα τους έδιναν ιδέες για το πώς να προχωρήσουν. Βασικός παράγοντας ανάπτυξης αυτής της ευρετικής στρατηγικής ήταν το ανοιχτό πρόβλημα, δηλαδή το γεγονός ότι η μέθοδος της λύσης δεν ήταν γνωστή εκ των προτέρων. Παρατηρήθηκε ότι τελικά η στρατηγική του πειραματισμού με τα δεδομένα επέφερε θετικό αποτέλεσμα στην προσπάθεια των μαθητριών να προσεγγίσουν κατά κάποιο τρόπο μία σωστή μέθοδο επίλυσης, καθώς η σκέψη της ΝΕ τις βοήθησε να κατασκευάσουν ένα καινούριο δεδομένο στο πρόβλημα που στην συνέχεια αξιοποιήθηκε για την εύρεση της λύσης.

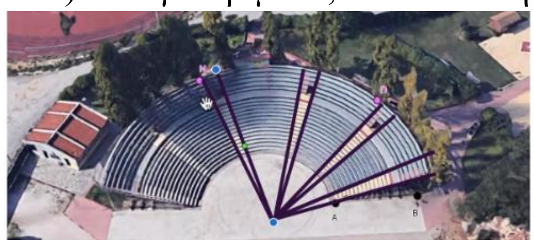
Απόσπασμα 1

ΑΡ: Δεν ξέρω πώς να ξεκινήσω … Αυτό το ΑΒ είναι 15 μέτρα. Αυτό θα μπορούσε να είναι κάπως σαν ακτίνα για ένα ημικύκλιο που υπάρχει. […] Πρέπει να βρούμε ένα τρόπο να τα συνδέσουμε.

Κ: ΝΕ εσύ γιατί ρώτησες για τα σκαλοπάτια, τι είχες στο μυαλό σου, τι σκεφτόσουν;

ΝΕ: Δεν ξέρω σκεφτόμουν μήπως βρω πόσα μέτρα είναι μέχρι την 20η σειρά. Βασικά προσπαθώ ακόμα να σκεφτώ πώς να το αρχίσω. Προσπαθώ να βρω πληροφορίες. Μήπως πάω κάπου.

Στην συνέχεια, η ΑΡ έντονα επηρεασμένη από τη φωτογραφία, δηλαδή το ημικυκλικό θέατρο, αναζητά το κέντρο του και ένα τρόπο να υπολογίσει το τόξο ΝΠ. Όπως φαίνεται και στο απόσπασμα 2, η ΑΡ εκφράζει προφορικά κάποιες σκέψεις της πάνω σε αυτούς τους προβληματισμούς. Καταλυτικός παράγοντας για την ανάπτυξη της επόμενης *ευρετικής στρατηγικής*, ήταν η παρότρυνση της εκπαιδευτικού να βρει ένα τρόπο να επιβεβαιώσει τις σκέψεις της. Αυτό την οδήγησε στην *κατασκευή σχήματος* (Εικόνα 2). Συγκεκριμένα, πάνω στη φωτογραφία η ΑΡ τράβηξε γραμμές προσπαθώντας κατά κάποιο τρόπο να ομαδοποιήσει τις περιοχές του θεάτρου ανάλογα με το χρώμα τους και ταυτόχρονα να προσεγγίσει και το κέντρο των κύκλων που σχηματίζονται από τις σειρές του θεάτρου.



Εικόνα 2: Κατασκευή σχήματος Τοποθέτηση κέντρου

Απόσπασμα 2

ΑΡ: Άμα πιάσεις το $1^{ο}$ κίτρινο αυτό που είναι πάνω από το ΑΒ, την πρώτη κίτρινη γραμμή, δεν φαίνεται να οδηγεί στο κέντρο του μικρού κύκλου άρα της σκηνής.

Κ: Αυτό το φαίνεται που λες πως θα το κάνεις βεβαιότητα; Μπορείς να χρησιμοποιήσεις την φωτογραφία με κάποιο τρόπο;

ΑΡ: Δεν ξέρω. Τραβώντας γραμμές. […] Οπότε μάλλον το κέντρο θα είναι κάπου εδώ. Άρα μπορώ να πω ότι κάθονται … δεν ξέρω αν το μετρήσουμε κάπως με τα κίτρινα. Άμα πούμε ότι από κίτρινο σε κίτρινο είναι μια ομάδα σκαλιών και πούμε ότι κάθονται 2 ομάδες μακριά.

Ωστόσο, η ΑΡ, έχοντας προχωρήσει λίγο το συλλογισμό της, διαπίστωσε ότι κάτι πάει λάθος με την μέθοδο εύρεσης του κέντρου, όπως φαίνεται και στο απόσπασμα 3. Στην προσπάθειά της, λοιπόν, να εντοπίσει το λάθος και να το διορθώσει ανέπτυξε μια *μεταγνωστική στρατηγική*. Συγκεκριμένα, η μαθήτρια δουλεύοντας με την έννοια της κλίμακας (ΑΒ=15 μέτρα στην πραγματικότητα και 2 εκατοστά στην φωτογραφία) μέτρησε και διαπίστωσε ότι η ακτίνα του ημικυκλικού θεάτρου είναι 4, ενώ έπρεπε να βγαίνει 3,5 σύμφωνα με τις αρχικές της μετρήσεις. Αφού συμπέρανε ότι κάτι πάει λάθος με την τοποθέτηση του κέντρου, το οποίο αρχικά ήταν τοποθετημένο στο σημείο τομής των ευθειών

(Εικόνα 2), στη συνέχεια φαίνεται να εντοπίζει κατά κάποιο τρόπο ότι η αιτία που την οδήγησε στο λάθος είναι ότι δεν έχει λάβει υπ’ όψιν της την κλίση του θεάτρου, χωρίς ωστόσο να γίνεται αναφορά στην έννοια της κλίσης. Επομένως, αποφάσισε να αλλάξει το κέντρο του θεάτρου (νέο κέντρο η πράσινη κουκκίδα) (Εικόνα 3).

Εικόνα 3: Αλλαγή κέντρου

Απόσπασμα 3

ΑΡ: Άρα όλο αυτό είναι 3,5. Μισό, γιατί το βγάζει 4 τώρα; Τι έχω κάνει λάθος; Περίμενε ότι αφού αυτή η γραμμή είναι εδώ … Όχι είναι το κάτω μέρος άρα δεν πηγαίνει εκεί, πηγαίνει εδώ.

Κ: Άρα άλλαξε το κέντρο;

ΑΡ: Δεν ξέρω. Ααα αυτό είναι! Άμα αυτό εδώ είναι η άκρη του ημικυκλίου σημαίνει αναγκαστικά ότι το κέντρο είναι πιο εδώ. Προς το πράσινο. Άρα θα είναι εδώ. Αυτό είναι το κέντρο του.

Και ενώ η ΑΡ βελτιώνει το σχήμα της, η ΝΕ αναζητά ένα δικό της τρόπο λύσης. Πιο συγκεκριμένα, όπως φαίνεται και στο απόσπασμα 4, αναζητά εκείνες τις πληροφορίες που θα την οδηγούσαν στην *εύρεση εναλλακτικού τρόπου λύσης*. Ωστόσο, αυτή η *ευρετική στρατηγική* δεν κατάφερε να εξελιχθεί και επομένως να συμβάλει στην επίλυση του προβλήματος, καθώς η ΝΕ δεν κατάφερε να εντοπίσει τις πληροφορίες που θα την βοηθούσαν. Επίσης, παράγοντας που συνέβαλε στην απόρριψη αυτής της στρατηγικής ήταν και η παρότρυνση της καθηγήτριας να συνεχίσει την επίλυση βασιζόμενη στην ιδέα της ΑΡ.

Απόσπασμα 4

ΝΕ: Προσπάθησα να σκεφτώ πως θα το έλυνα αν είχα ότι πληροφορία ήθελα και μετά να σκεφτώ πως θα μπορούσα να βρω αυτές τις πληροφορίες ή κάτι τέτοιο. Αυτό είναι που σκέφτηκα βασικά.

Κ: Ποια πληροφορία ψάχνεις;

ΝΕ: Δεν έχω βρει κάτι ακόμα.

Κ: Ωραία. Αυτή τη συζήτηση με την ΑΡ την παρακολουθείς; Έχεις σκεφτεί; Η ΑΡ ας πούμε ψάχνει τώρα τα 4 εκατοστά πόσα μέτρα θα είναι. Έχεις καμία ιδέα πάνω σε αυτό;

Προχωρώντας και οι δύο μαθήτριες στην εφαρμογή τύπων και στην εκτέλεση αριθμητικών πράξεων για την εύρεση των ζητούμενων βημάτων, κατέληξαν στο αποτέλεσμα 4,8π βήματα. Όμως, όπως φαίνεται και στο απόσπασμα 5, δεν ήταν ικανοποιημένες με αυτό, καθώς ανέμεναν ένα πιο «λογικό» για αυτές αποτέλεσμα. Συνεπώς, προσπάθησαν όχι μόνο να κάνουν *έλεγχο του αποτελέσματος* (*μεταγνωστική στρατηγική*) αλλά εστίασαν και στην *εύρεση εναλλακτικού τρόπου λύσης* ως μέσο επιβεβαίωσης (*ευρετική στρατηγική*).

Απόσπασμα 5

ΑΡ: Γίνεται να κάνει 4,8π βήματα;… Εσύ τι κάνεις τώρα;

ΝΕ: Προσπαθώ να σκεφτώ αν έχουμε κάνει λάθος και που. Μήπως αυτό με τα βήματα.

ΑΡ: Ναι μάλλον κάτι έχουμε κάνει λάθος. […]

Κ: Προσπαθώ να καταλάβω τόση ώρα που μιλάτε γιατί αφήσατε την απάντηση που βρήκατε.

ΑΡ: Επειδή βγήκε 4,8π βήματα. Οπότε προσπαθούμε να το κάνουμε και με άλλο τρόπο.

Κ: Ααα ψάχνετε να βρείτε δεύτερη λύση; Το θεωρείται λύση το 4,8π βήματα;

ΑΡ: Απλά δεν είμαστε πολύ σίγουρες για αυτό.

Κ: Ααα οκ οπότε προσπαθείτε να το λύσετε και αλλιώς για να δείτε αν θα βγει το ίδιο.

Έτσι, στην προσπάθειά τους να προσεγγίσουν το πρόβλημα και με άλλο τρόπο, και συζητώντας μεταξύ τους, διαπιστώνουν ότι στην $1^η$ λύση που έδωσαν δεν είχαν λάβει υπ’ όψιν τους την κλίση του θεάτρου, οπότε και την απέρριψαν σαν πιθανή λύση. Ακολουθούν πάλι μια σειρά από αριθμητικές διαδικασίες με σκοπό να υπολογίσουν το μήκος του τόξου που θα τους οδηγήσει στην λύση του προβλήματος και αφού το βρίσκουν έρχεται η στιγμή να υπολογίσουν το ζητούμενο. Όμως όπως φαίνεται και στο απόσπασμα 6 κάνουν λάθος στις πράξεις. Έτσι, η ερώτηση της καθηγήτριας για να διευκρινίσουν τους λόγους που επιλέγουν αυτές τις πράξεις, τις οδήγησε στο να αναπτύξουν *μεταγνωστικές στρατηγικές* σχετικά με την ορθότητα των λύσεων που δώσανε.

Απόσπασμα 6

ΑΡ: Ωραία άρα η Ν πρέπει να προχωρήσει 2 επί $\sqrt{89}π$ δια 5 επί 0,5 βήματα.

Κ: Γιατί πολλαπλασιάζετε το 0,5;

ΑΡ: Μισό. Είναι πολύ μπερδευτικό. Ωραία άρα αυτές οι δύο ομαδούλες είπαμε ότι είναι 2 επί $\sqrt{89}π$ δια 5 άρα αυτά είναι και τα μέτρα που απέχουν αυτές οι δύο. Ωραία άρα κάθε βήμα της είναι μισό μέτρο δεν πρέπει να διαιρέσουμε; Ας πούμε ότι είναι 10 και κάθε βήμα ήταν 2 μέτρα θα κάναμε 10 δια 2 που θα έκανε 5 βήματα. Άρα ναι θα διαιρέσουμε με 0,5 και θα βγει 2 $\sqrt{89}π$ δια 5 δια 0,5.

Κ: Άρα και στην $1^η$ λύση που δώσατε νομίζω πάλι πολλαπλασιασμό είχατε κάνει. Και αυτό θέλει λίγο φτιάξιμο. Αν την κρατήσετε δεν ξέρω ποια από τις δύο θα κρατήσετε.

ΑΡ: Την $2^η$ αφού η άλλη είναι σαν να βρήκαμε κάτω τις κερκίδες.

Στην περίπτωση της Α’ Λυκείου, η μαθήτρια ανέπτυξε λιγότερες στρατηγικές κατά την προσπάθεια επίλυσης του ανοιχτού προβλήματος, σε σχέση με αυτές που ανέπτυξαν οι μαθήτριες της Β’ Γυμνασίου.

Η μαθήτρια (ΝΙ), σε αντίθεση με τις μαθήτριες της Β’ Γυμνασίου που δεν ήξεραν πώς να ξεκινήσουν, επιδίωξε από την αρχή να εντοπίσει την διαδρομή που θα ακολουθούσε η Ν (σύμφωνα με το πρόβλημα) για να φτάσει στην φίλη της.

Ωστόσο, όπως φαίνεται στο απόσπασμα 7, αλλά παρατηρήθηκε και σε όλη την διάρκεια της διδασκαλίας, η ΝΙ δυσκολευόταν σε μεγάλο βαθμό να διαχειριστεί το γεγονός ότι το θέατρο είναι ημικυκλικό (ενώ αντιλαμβανόταν ότι αποτελεί βασικό στοιχείο του προβλήματος) και συνεπώς προσπάθησε να βρει οποιαδήποτε άλλη πιο εύκολη μέθοδο λύσης, είτε την θεωρούσε λογική είτε όχι. Συνεπώς, το πρώτο είδος *ευρετικής στρατηγικής* που ανέπτυξε η ΝΙ ήταν η *εύρεση εναλλακτικού τρόπου λύσης*.

Απόσπασμα 7

ΝΙ: Λοιπόν η μία μου σκέψη είναι να πάει κατευθείαν έτσι όπως είναι το θέατρο, δηλαδή έτσι όπως κάθονται στην 20η σειρά, η Ν να πλησιάσει την Π αλλά να μην κατέβει.

Κ: Ωραία μπορείς σύμφωνα με αυτό σαν δεδομένο να υπολογίσεις πόσα βήματα θα κάνει;

ΝΙ: Όχι αυτό είναι το πρόβλημα. Η άλλη πιο εύκολη σκέψη είναι να κατέβει η Ν τα σκαλιά μέχρι να φτάσει στη σκηνή και μετά να ανέβει τα σκαλιά και να βρει την Π. Το θέμα είναι ότι πάλι πρέπει να καλύψει αυτή την απόσταση, την καμπύλη. Δηλαδή εμένα αυτό είναι που με προβληματίζει.

Κ: Και πως σκέφτεσαι να το διαχειριστείς αυτό το πρόβλημα;

ΝΙ: Επειδή δεν ξέρω αν μπορώ να βρω το καμπυλωτό, αν κατέβει κάτω, αυτό που σκεφτόμουν είναι να μην καλύψει την απόσταση καμπυλωτά. Δηλαδή από εκεί που είναι να ανέβει σαν μια ευθεία.

Στην συνέχεια, η ΝΙ προσπαθώντας πάντα να αποφύγει οποιαδήποτε κυκλική διαδρομή, ακολουθεί την εξής *ευρετική στρατηγική*: *κατασκευή σχήματος*. Συγκεκριμένα, σχεδιάζει την υποτιθέμενη διαδρομή που χρειάζεται (Εικόνα 5) ώστε να μπορέσει μετά να υπολογίσει το ζητούμενο.

Εικόνα 5: Η διαδρομή

Έτσι, προσπαθώντας να επιχειρηματολογήσει πάνω στην σκέψη της για το πόση είναι η απόσταση που έχει σχεδιάσει, η ΝΙ εμφανίζει μια *μεταγνωστική στρατηγική*. Σύμφωνα, λοιπόν, με αυτήν, όπως φαίνεται και στο απόσπασμα 8, αντιλαμβάνεται ότι στον συλλογισμό της έχει λάθος, ωστόσο επειδή δεν μπορεί να εντοπίσει τις αιτίες που την οδήγησαν σε αυτό, ούτε και τρόπους για να το διαχειριστεί και να το διορθώσει, παραμένει στην απόφασή της. Ανασταλτικός παράγοντας στην εξέλιξη αυτής της μεταγνωστικής στρατηγικής φαίνεται να είναι το γεγονός ότι επειδή η ΝΙ βρίσκεται στην Α’ Λυκείου, νιώθει ανασφάλεια να χρησιμοποιήσει μαθηματικές έννοιες που είχε διδαχθεί πριν δύο χρόνια και πιθανόν να έχει ξεχάσει.

Απόσπασμα 8

ΝΙ: Δηλαδή εκεί πέρα που κατέληξε η Ν, εκεί που κατέβηκε δεν είμαι πολύ σίγουρη αν για να πάει πάλι ευθεία, όχι να κάνει το καμπυλωτό και μετά να ανέβει, αν είναι η ίδια απόσταση. Εγώ θεώρησα ότι είναι ίδια με αυτή που κατέβηκε πράγμα που δεν είναι πολύ σωστό.

Κ: Άρα έχεις αμφιβολία για αυτό. Τι είναι αυτό που σκέφτεσαι και λες ότι μάλλον δεν είναι σωστό;

ΝΙ: Γιατί μπορεί να ανέβει τα ίδια σκαλιά, είναι ο ίδιος αριθμός, αλλά δεν είναι η ίδια διαδρομή.

Κ: Άρα δηλαδή απορρίπτεις αυτό που σκέφτηκες.

ΝΙ: Δεν το απορρίπτω γιατί δεν έχω βρει άλλο.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συνοψίζοντας, η έρευνα έδειξε ότι όλοι οι μαθητές, στην προσπάθεια αναζήτησης της βέλτιστης στρατηγικής, ανέπτυξαν ικανοποιητικό πλήθος στρατηγικών επίλυσης. Οι μαθήτριες τις Β' Γυμνασίου ανέπτυξαν αρκετές ευρετικές και μεταγνωστικές στρατηγικές, σε αντίθεση με την μαθήτρια της Α' Λυκείου που εμφάνισε τα λιγότερα είδη στρατηγικών. Η ανάπτυξη των διαφόρων ευρετικών στρατηγικών συνέβαλε καθοριστικά στην επίλυση του ανοιχτού προβλήματος, ενώ οι μεταγνωστικές στρατηγικές φάνηκε να επιδρούν καταλυτικά στην εξέλιξη της επίλυσης, καθώς μέσω αυτών οι μαθήτριες χρησιμοποίησαν δράσεις παρακολούθησης και προσπάθησαν να κατανοήσουν και να αξιολογήσουν τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος. Οι παράγοντες που επηρέασαν την εξέλιξη των στρατηγικών ήταν οι παρεμβάσεις της εκπαιδευτικού, η φωτογραφία, το ανοιχτό πρόβλημα και η τάξη των μαθητριών. Αρκετές φορές ανασταλτικό παράγοντα αποτέλεσε η φωτογραφία του θεάτρου, δείχνοντας έτσι και την αδυναμία των μαθητών να αντλήσουν πληροφορίες από μη οικεία δεδομένα που τους παρέχονται για την επίλυση ενός προβλήματος. Όσο αναφορά την τάξη των μαθητριών, δεν αποτέλεσε ανασταλτικό παράγοντα στην επίλυση, αλλά φάνηκε να επιδρά σημαντικά στην ανάπτυξη και αξιοποίηση κατάλληλων στρατηγικών για την επίλυση του προβλήματος. Συμπερασματικά, στο πεδίο της διδακτικής των Μαθηματικών, η επίλυσης ανοιχτού προβλήματος διαφαίνεται ιδιαίτερα σημαντική γιατί: α) ενεργοποιεί το ενδιαφέρον των μαθητών δημιουργώντας εσωτερικά κίνητρα μάθησης, β) δημιουργεί ευκαιρίες γνωστικής σύγκρουσης και διαπραγμάτευσης μαθηματικού νοήματος, γ) υποστηρίζει ποικίλους νοητικούς συλλογισμούς, στρατηγικές και μαθηματικές δεξιότητες και δ) παρέχει τη δυνατότητα διδακτικής ανάπτυξης και υποστήριξης μεταγνωστικών δεξιοτήτων, οι οποίες βοηθούν στην επισημοποίηση και στην σταθεροποίηση της μαθηματικής γνώσης. Ωστόσο, η περιορισμένη παρουσία ανοιχτών προβλημάτων στα σχολικά εγχειρίδια και στη σχολική τάξη αναμένεται να δυσκολεύει τη διαχείρισή τους από τους μαθητές, όπως φάνηκε και στα παραπάνω αποτελέσματα, αλλά υποστηρίζει και την ανάγκη να μελετηθεί παραπάνω (Ζήση & Τριανταφύλλου, 2019). Μια μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να μελετήσει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με ανοιχτά μαθηματικά προβλήματα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In L. B. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence* (pp. 231-235). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Goldberg, P. D. & Bush, W. S. (2003). Using Metacognitive Skills to Improve 3rd Graders' Math Problem Solving. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. 25, (4) 35-54.

Kramarski, B., Mevarech, Z. & Arami, M. (2002). The Effects of Metacognitive Instruction on Solving Mathematical Authentic Tasks, *Educational Studies in Mathematics*, 49, 225-250.

Kwon, O. N., Park, J. H., & Park, J. S. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Education Review,* 7(1), 51-61.

OECD (2004). Problem Solving for *Tomorrow's World-First Measures of Cross Curricular Competencies from PISA 2003,* *http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/25/12/34009000.pdf*

Polya, G. (1945/1973). *How to Solve It*. Princeton, NJ: Princeton University Press 1945.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York, NY: Academic Press

Schoenfeld, H. (1992). Learning to think mathematically: Problem-solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp.334-368). New* York: Macmillan.

Ζήση, Μ., Τριανταφύλλου, Χ. (2019). Διδακτικές πρακτικές εκπαιδευτικών κατά τη συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης: Η διαχείριση ανοιχτών προβλημάτων. *Πρακτικά 8ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών* (ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ).

Κολοβού, Α., Van den Heuvel Panhuizen (2011). Επίλυση μαθηματικών προβλημάτων σε ένα περιβάλλον ΤΠΕ. Πρακτικά 4ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών, 233-242.

Μουσουλίδης, Ν., Κάττου, Μ., Πιττάλης, Μ., & Χρίστου, Κ. (2006). Η ικανότητα μοντελοποίησης στην επίλυση μαθηματικού προβλήματος. *Πρακτικά 9ου Συνεδρίου Παιδαγωγικής Εταιρείας Κύπρου*, 259-270.

Τζεκάκη, Μ. (2011). Μαθηματική Δραστηριότητα και Μαθηματικά Έργα. *Πρακτικά 4ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών* (ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ), 51-66.