# ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΑΙ Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΟΥΣ ΣΕ ΕΝΑ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

**Δαφνοπούλου Δανάη**

ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών ΕΚΠΑ

ddafnopoulou@gmail.com

*Η παρούσα εργασία ασχολείται με τα μαθηματικά μοντέλα που αναπτύσσουν μαθητές Α' και Β' Γυμνασίου κατά την επίλυση ενός ρεαλιστικού προβλήματος μαθηματικής μοντελοποίησης, που αφορά την έννοια του κλάσματος, καθώς και την πορεία της εξέλιξης τους. Η ανάλυση έγινε με βάση τη θεωρία της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης και του κύκλου μοντελοποίησης. Εμφανίζονται άτυπα, προ-τυπικά και τυπικά μοντέλα των οποίων η πορεία εξέλιξης εξαρτάται από τη σύνδεση και ερμηνεία τους με βάση το ρεαλιστικό πλαίσιο, καθώς επίσης και την καθοδήγηση που προωθείται από την εκπαιδευτικό.*

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα μαθηματικά προβλήματα έχουν απασχολήσει το χώρο της διδακτικής των μαθηματικών αρκετές δεκαετίες τώρα. Σύμφωνα με τον Schoenfeld (1983, p. 41) αν ένα πρόβλημα δεν περιέχει «εκπλήξεις» και μπορεί να λυθεί επαρκώς με μια ρουτίνα ή οικείες διαδικασίες είναι μια άσκηση. Ένα βασικό ερώτημα είναι πόσο καλά προετοιμασμένοι είναι οι μαθητές στις μέρες μας να λύνουν προβλήματα που θα αντιμετωπίσουν εκτός σχολείου (Christou et al., 2005). Ο μαθηματικός εγγραμματισμός υποστηρίζει ότι η γνώση και η διδασκαλία των μαθηματικών δεν είναι μονάχα μετάδοση διαδικαστικών δεξιοτήτων αλλά και δημιουργία καταστάσεων, όπου ο μαθητής μπορεί να αναγνωρίσει, ερμηνεύσει, αξιολογήσει και κρίνει τα μαθηματικά που βρίσκονται στα κοινωνικά και πολιτικά συστήματα και ισχυρισμούς (Mousoulides et al., 2007).

Ο Schoenfeld (1992) αναφέρει ότι, η μαθηματική μοντελοποίηση είναι κάτι παραπάνω από απλά υπολογισμούς ή παραγωγική διαδικασία. Εμπεριέχει παρατήρηση μοτίβων, εξέταση εικασιών και εκτίμηση των αποτελεσμάτων (Mousoulides et al., 2007). Έτσι, τα προβλήματα μοντελοποίησης τοποθετημένα στον πραγματικό κόσμο υποστηρίζεται πως μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να καλλιεργήσουν το μαθηματικό εγγραμματισμό. Σε αυτά εμφανής είναι ο και ο ρόλος του εκπαιδευτικού, αφού όπως υποστηρίζουν οι English & Mousoulides (2015), σε δραστηριότητες μοντελοποίησης οι εκπαιδευτικοί πρέπει να μπορούν να ανταποκρίνονται στον τρόπο σκέψης των μαθητών τους, να αλληλεπιδρούν μαζί τους, χρησιμοποιώντας διάφορες αναπαραστάσεις, αιτιολογώντας τις διάφορες υποθέσεις και επικοινωνώντας μαθηματικά τα αποτελέσματα (Νικολαΐδου & Μουσουλίδης, 2015).

Η παρούσα εργασία αφορά ένα πρόβλημα μοντελοποίησης τοποθετημένο σε ένα ρεαλιστικό πλαίσιο, ενώ μελετάται πως οι μαθητές αλληλεπιδρούν με αυτό. Συγκεκριμένα, θέτονται τα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

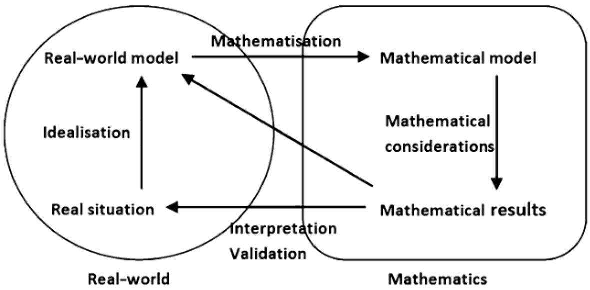
ΕΕ1: Τι είδους μαθηματικά μοντέλα αναπτύσσουν οι μαθητές κατά την ενασχόλησή τους με το πρόβλημα και με ποιον τρόπο αυτά εξελίσσονται κατά τη διδακτική παρέμβαση;

ΕΕ2: Ποιος είναι ο παράγοντας που επηρεάζει την εξέλιξη των μαθηματικών μοντέλων που αναπτύσσονται;

## ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση (RME) καθορίστηκε κυρίως από τον Freudenthal (1971) και την άποψή του για τα μαθηματικά. Πίστευε ότι αυτά θα πρέπει να συνδέονται με την πραγματικότητα και να είναι κοντά στις εμπειρίες των μαθητών. Υποστήριζε ότι η μαθηματική εκπαίδευση χρειάζεται να έχει σαν αφετηρία τα μαθηματικά, ως μια δραστηριότητα και όχι ως ένα προκατασκευασμένο σύστημα (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Ο πυρήνας της μαθηματικής δραστηριότητας είναι η «μαθηματικοποίηση», που σημαίνει οργάνωση από μαθηματικής αντίληψης. Η *μαθηματικοποίηση* μπορεί να αφορά εξίσου καθημερινά και μαθηματικά ζητήματα (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Αυτή η δραστηριότητα είναι ένας τρόπος οι μαθητές να επανεφεύρουν τα μαθηματικά.

Συναφής με τη μαθηματικοποίηση είναι μια αρχή της RME, η οποία ονομάζεται *αρχή των επιπέδων*. Σε αυτή γίνεται λόγος για *μοντέλα*, τα οποία γεφυρώνουν το κενό μεταξύ άτυπων μαθηματικών , που συνδέονται με ένα πλαίσιο και πιο τυπικών μαθηματικών. Με βάση τον Treffers (1987) τα μοντέλα αποτελούν αναπαραστάσεις προβληματικών καταστάσεων, οι οποίες αντανακλούν βασικές διαστάσεις των μαθηματικών ιδεών και δομών τους. Υλικά, οπτικά σχέδια, παραδειγματικές καταστάσεις, σχήματα, διαγράμματα, ακόμα και σύμβολα μπορεί να αποτελούν μοντέλα (Van den Heuvel- Panhuizen 2003, Gravemeijer 1994). Στην αρχή των επιπέδων, οι μαθητές αρχικά αναπτύσσουν στρατηγικές στενά συνδεδεμένες με το πλαίσιο. Αργότερα, βασικές πλευρές του πλαισίου μπορεί να γίνουν πιο γενικές. Τελικά, το μοντέλο δίνει στους μαθητές πρόσβαση σε πιο τυπική μαθηματική γνώση (Van den Heuvel- Panhuizen 2000).




**Εικόνα 1:Κύκλος της μοντελοποίησης**

Τα μοντέλα προερχόμενα από μια προβληματική κατάσταση ανάλογα με το πλαίσιο που βρίσκονται μπορεί συνδέονται είτε με την πραγματικότητα ή τα μαθηματικά. Έτσι όπως φαίνεται στον κύκλο μοντελοποίησης της εικόνας 1 των Kaiser-Meimer (1986) και Blum (1996), το πραγματικό πρόβλημα που δίνεται απλοποιείται ώστε να δημιουργηθεί ένα πραγματικό μοντέλο της κατάστασης. Για να δημιουργηθεί ένα μαθηματικό μοντέλο, το πραγματικό μοντέλο πρέπει να μεταφραστεί σε μαθηματικά. Όμως, είναι δύσκολη η διάκριση αυτών αφού είναι στενά συνδεδεμένα. Επίσης, το πραγματικό μοντέλο εξαρτάται από τις μαθηματικές γνώσεις του σχεδιαστή του. Τέλος, αφού ερμηνευθούν τα μαθηματικά αποτελέσματα, πρέπει να επικυρωθούν τα πραγματικά αποτελέσματα, όπως και όλη η διαδικασία μοντελοποίησης(Kaiser,2014).

## ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

### Το πρόβλημα

Το πρόβλημα, της εικόνας 2, που δόθηκε στους μαθητές αφορούσε την τμήση ενός μπουκαλιού με γάλα. Συνοδευόταν από μια φωτογραφία, ενώ δόθηκε και συμπληρωματική φωτογραφία στην οποία οι μαθητές μπορούσαν να εργαστούν.

| | |
|---|---|
| 500 γρ. Φαρίνα<br>250 γρ. βούτυρο<br>440 γρ. ζάχαρη | 4-5 αυγά<br>260 ml γάλα<br>ξύσμα πορτοκαλιού |

Η Δανάη αποφάσισε να φτιάξει ένα κέικ. Έχει βρει τη συνταγή και έχει αγοράσει όλα τα υλικά που χρειάζεται. Όμως δεν έχει στο σπίτι της δοσομετρητή, για να μετρήσει τα υλικά. Συγκεκριμένα, θα μπορούσατε να τη βοηθήσετε ώστε να αδειάσει στο μείγμα το γάλα που πρέπει, αν το μπουκάλι περιέχει 1 λίτρο;

Συμπληρωματική φωτογραφία

**Εικόνα 2: Το πρόβλημα**

### Ερευνητικό πλαίσιο και δεδομένα

Στην έρευνα ο σχεδιασμός του προβλήματος, η διδακτική παρέμβαση, η ανάλυση και ερμηνεία των δεδομένων έγινε από το ίδιο άτομο.

Η εφαρμογή του προβλήματος πραγματοποιήθηκε σε συνολικά τέσσερις μαθητές διαφορετικής τάξης. Σε έναν μαθητή Β’ Γυμνασίου, 14 ετών.

Ξεχωριστά δόθηκε σε μια ομάδα τριών μαθητών Α’ Γυμνασίου ενός κοινωνικού φροντιστηρίου, αποτελούμενη από δύο κορίτσια και ένα αγόρι,12-13 ετών. Οι μαθητές επιλέχθηκαν τυχαία, με βάση την προθυμία τους να επιλύσουν το πρόβλημα. Σε κάθε περίπτωση ο χρόνος ενασχόλησης με το πρόβλημα ήταν 40 λεπτά της ώρας.

Τα ερευνητικά δεδομένα που συλλέχθηκαν ήταν οι συζητήσεις των μαθητών κατά την εμπλοκή τους με το μαθηματικό πρόβλημα, οι οποίες μαγνητοφωνήθηκαν. Δεδομένα , επίσης, αποτελούν τα σχεδιαγράμματα των μαθητών στην προσπάθεια να λύσουν το πρόβλημα. Επιπλέον, συλλέχθηκαν στιγμιότυπα της διαδικασίας επίλυσης μέσω φωτογραφιών.

### Ανάλυση των δεδομένων

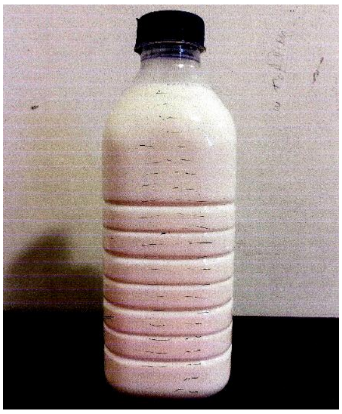
Τα δεδομένα που αναλύθηκαν, επιλέχθηκαν με βάση την ποικιλία των μοντέλων και λόγω της διαφορετικής πορείας επίλυσης του προβλήματος. Έγινε ομαδοποίηση των μοντέλων των μαθητών, με βάση τον τρόπο με τον οποίο τα δημιούργησαν και τα βελτίωσαν για την επίλυση του προβλήματος αλλά και την σύνδεση τους με την έννοια του κλάσματος. Συγκεκριμένα, αναγνωρίζονται άτυπα, προ-τυπικά και τυπικά μοντέλα που συμφωνούν με την *αρχή των επιπέδων*. Ειδικά, *άτυπα* θεωρούνται τα μοντέλα, όπου δίνονται αποκλειστικά και μόνο από την εικόνα του μπουκαλιού χωρίς την χρήση μαθηματικών ιδιοτήτων και σχέσεων. *Προ-τυπικά* θεωρούνται εκείνα που χρησιμοποιούν την εικόνα και το πλαίσιο του προβλήματος, αλλά οι μαθηματικές ιδιότητες και πράξεις γίνονται μη συνειδητά, ενώ ως *τυπικά* θεωρούνται αυτά στα οποία γίνονται συνειδητά διαδοχικές διαιρέσεις κλασματικών μονάδων. Κατά τη δημιουργία και βελτίωση των μοντέλων με σκοπό την επίλυση του προβλήματος, εμφανίζεται ο *κύκλο της μοντελοποίησης* και αναγνωρίζονται τα εξής στοιχεία: η *πραγματική κατάσταση,* η οποία είναι η συνταγή και οι διαδικασίες υλοποίησής της, το *πραγματικό μοντέλο* που είναι η τμήση του μπουκαλιού, το *μαθηματικό μοντέλο* το οποίο είναι ο διαμερισμός περιοχών ενός καμπυλόγραμμου σχήματος και το *μαθηματικό αποτέλεσμα* που είναι το χωρίο που αντιπροσωπεύει τα 260ml. Τέλος, η ανάλυση εστιάζει στους παράγοντες που επηρέασαν την εξέλιξη των μοντέλων αυτών κατά την παρέμβαση. Παράγοντες μπορεί να αποτελέσουν το ρεαλιστικό πλαίσιο, η δοσμένη φωτογραφία και οι ερωτήσεις ή παρατηρήσεις της εκπαιδευτικού.

## ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

### Από άτυπο σε τυπικό μοντέλο

Στην περίπτωση της Α’ Γυμνασίου η πορεία της επίλυσης του προβλήματος είναι η δημιουργία όλων των τύπων μοντέλων ξεκινώντας από άτυπο και καταλήγοντας σε τυπικό.

Αρχικά, στην πρώτη προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος βασικός παράγοντας δημιουργίας του μοντέλου από την ΑΛ ήταν η φωτογραφία και η ιδιομορφία της λόγο της εκτύπωσης (Εικόνα 3, η ιδιομορφία φαίνεται καλύτερα στην εικόνα 6).



**Εικόνα 3: Άτυπο μοντέλο**

Η μαθήτρια σημείωσε και μέτρησε τις ήδη κατανεμημένες περιοχές στη φωτογραφία. Αυτό αποτελεί *άτυπο μοντέλο,* αφού η ΑΛ κάνει απλά καταμέτρηση των περιοχών που βλέπει στην εικόνα, όπως φαίνεται στο απόσπασμα 1, ενώ θεωρεί αυθαίρετα ότι τα ml του κάθε χωρίου ως 10. Παρατηρείται ότι η ΑΛ δεν προσπαθεί να βελτιώσει το μοντέλο παρά το απορρίπτει γιατί το μαθηματικό αποτέλεσμα, δηλαδή το άθροισμα των διαμερίσεων δεν είναι 1000 ml, κάτι που είναι αντίθετο στα δεδομένα.

Απόσπασμα 1

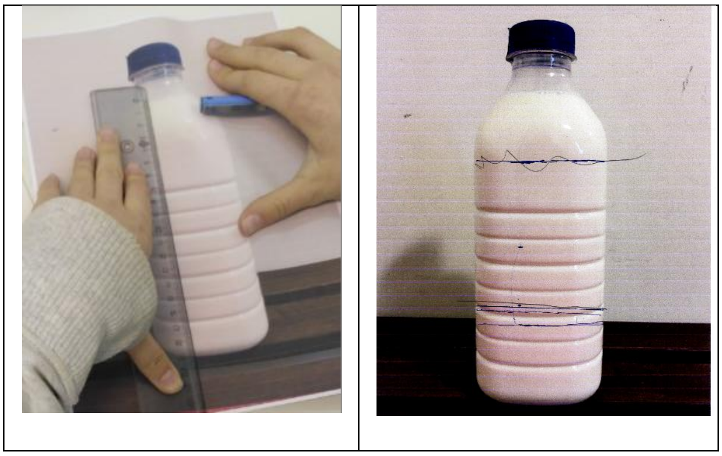
ΑΛ: Περίμενε να το σκεφτώ. 10,20,30,40,50,60…Καλά κάντο εσύ τώρα.

ΓΙ: Γιατί να το χωρίσεις έτσι;

ΑΛ: Δεν θέλω να το χωρίσω απλώς ήταν πρόχειρα, πες ότι δεν υπάρχουν αυτά.

ΓΙ: Και τι βρήκες; Δεν θέλω να το χωρίσω. Τι μου το δίνεις;

Αφού το μοντέλο απέτυχε να δώσει λύση η ΑΛ παροτρύνει τη ΓΙ να εφαρμόσει μια ιδέα που είχε διατυπώσει στην αρχή της παρέμβασης. Η ΓΙ δημιούργησε ένα νέο *προ-τυπικό μοντέλο* αυτό στην εικόνα 4. Το μοντέλο θεωρείται ως τέτοιο αφού η μαθήτρια κάνει μετρήσεις και χωρίζει το μπουκάλι σε τέταρτα. Σε αυτό το σημείο παρόλο που η ΓΙ δεν αναφέρεται στις μαθηματικές έννοιες που χρησιμοποιούνται, δηλαδή στην έννοια του κλάσματος και αγνοεί το καμπυλόγραμμο σχήμα του μπουκαλιού το μοντέλο δίνει μια λύση στο πρόβλημα η που ικανοποιεί σε μεγάλο βαθμό το ρεαλιστικό πλαίσιο.



**Εικόνα 4: Προ-τυπικό μοντέλο**

Στο ίδιο μοντέλο, η ΑΛ φαίνεται για πρώτη φορά να διαχωρίζει το πραγματικό μοντέλο, από το μαθηματικό μοντέλο. Σε αυτό έπαιξαν ρόλο οι ερωτήσεις της εκπαιδευτικού προς τη ΓΙ με βάση το απόσπασμα 2.

Απόσπασμα 2

Καθηγήτρια: Αυτά είναι 260 ml;

ΓΙ: Ναι.

Καθηγήτρια : Ωραία… Πως είναι τόσο σίγουρη;

ΓΙ: Γιατί ξέρουμε μαθηματικά και ξέρουμε πως…

ΑΛ: Να σου πω δεν είναι 260 ml, θα σου πω γιατί. Γιατί πρέπει να υπολογίσω από το τέλος , πόσα είναι 260 ml.

ΕΜ: Πως το βρήκες;

ΑΛ: Γιατί εδώ δεν είναι ίσιο. Άρα πρέπει να υπολογίσω από το τέλος.

ΓΙ: Ναι αλλά και από το τέλος δεν είναι ίσιο.

ΑΛ: Ε δεν πειράζει, από το τέλος όμως είναι πιο ίσιο.

ΓΙ: Το ίδιο πράγμα είναι.

Έτσι, η ΑΛ κάνει μια προσπάθεια βελτίωσης της λύσης του προβλήματος επιλέγοντας το κάτω μέρος του μπουκαλιού, που είναι λιγότερο καμπυλωτό όπως φαίνεται στο παραπάνω απόσπασμα.

Ωστόσο, το μαθηματικό αποτέλεσμα δεν ερμηνεύεται από την πραγματική κατάσταση, δηλαδή το γεγονός ότι δεν αδειάζουμε το μπουκάλι από το κάτω μέρος. Παράγοντας για τη σύνδεση του αποτελέσματος με το ρεαλιστικό πλαίσιο ήταν η ερώτηση της εκπαιδευτικού. Όμως, η απάντηση των μαθητών δείχνει ότι αγνοούν το πλαίσιο δίνοντας τη δική τους ερμηνεία, απόσπασμα 3.

Απόσπασμα 3

Καθηγήτρια: Όταν θα αδειάσεις το μπουκάλι πως θα το αδειάσεις όμως;

ΑΛ: Ναι κυρία όμως θα φύγει από κάτω…

ΓΙ: Γι’ αυτό σας δίνουμε και τις δύο επιλογές , ή θα αδειάσει από εδώ πέρα (από πάνω) ή από εδώ πέρα (από κάτω).

Ακόμα, η ΓΙ υποστηρίζει το παραπάνω μοντέλο της και δεν το βελτιώνει αφού επικυρώνει το αποτέλεσμα της με βάση την πραγματική κατάσταση (*Κυρία συγγνώμη κιόλας, κέικ φτιάχνουμε , αν βάλουμε λίγο παραπάνω δεν θα γίνει κάτι).* Σε αυτό το σημείο φαίνεται ότι το ρεαλιστικό πλαίσιο, συγκεκριμένα η πραγματική κατάσταση, αποτελεί ανασταλτικό παράγοντα στη βελτίωση και εξέλιξη του μοντέλου.

Έπειτα, με παρότρυνση από την καθηγήτρια(*Αν θέλουμε να είναι πιο ακριβής; Τι σημαίνει να είναι πιο ακριβής ο τρόπος;)* η ΑΛ δημιούργησε ένα παρόμοιο μοντέλο με το προηγούμενο ώστε να το βελτίωσης. Αυτό ήταν η εκ νέου τμήση του μπουκαλιού σε 6 χωρία. Η μαθήτρια ΑΛ χρησιμοποίησε εξισώσεις, ώστε να βρει πόσα ml αντιστοιχούν σε καθένα από τα 6 χωρία. Το παραπάνω μοντέλο παρόλο που χρησιμοποιεί τυπικά μαθηματικά, όπως οι εξισώσεις θεωρείται προ-τυπικό, αφού γίνεται απλά διαφορετική τμήση του μπουκαλιού και οι ιδιότητες του κλάσματος δεν γίνονται αντιληπτές. Ξανά το μαθηματικό μοντέλο απορρίπτεται γιατί το κάθε χωρίο δεν αντιστοιχεί σε 250ml (*Ναι αλλά κυρία εμείς δεν θέλουμε 166,66666667*). Σε αυτό το σημείο το μαθηματικό πλαίσιο είναι αυτό που αποτελεί ανασταλτικό παράγοντα της εξέλιξής του.

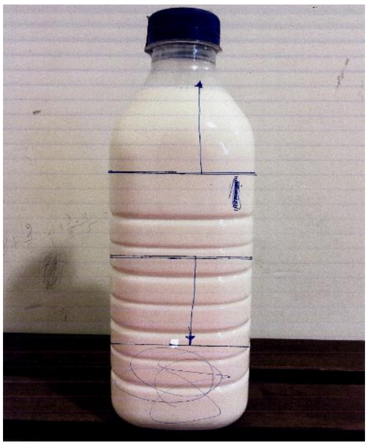
$6 \cdot x = 1000$

$x = 1000 : 6$

$x = 166,6666666667$

**Εικόνα 5: Προ-τυπικό μοντέλο**

Τελικά, δημιουργήθηκε ένα *τυπικό μοντέλο* (Εικόνα 6 & Απόσπασμα 4)από τη μαθήτρια ΑΛ, που αποφάσισε ότι χρειάζεται να γίνει επιπλέον τμήση του μπουκαλιού και όχι να χωριστεί όλο το μπουκάλι εκ νέου. Η ιδέα για αυτό το μοντέλο δεν φαίνεται να δημιουργήθηκε άμεσα από κάποια συζήτηση, αλλά φαίνεται να παροτρύνθηκε από την καθηγήτρια που η οποία ζητούσε έναν πιο ακριβή τρόπο εύρεσης των 260 ml.



**Εικόνα 6: Τυπικό μοντέλο**

Απόσπασμα 4

ΑΛ: Λοιπόν, από τη στιγμή που αυτά είναι 4,7. Άμα εμείς καταλάβουμε πόσα εκατοστά είναι το κάθε, εδώ υποτίθεται πως είναι 250ml το καθένα.(αναφορά στα τέταρτα του μπουκαλιού) Το 250ml πρέπει να βρούμε πόσα… Μισό λεπτό.250 να κάνουμε, δεν ξέρω, να το διαιρέσουμε να δούμε πόσα μπορεί να χωράει ml.

Καθηγήτρια: Ποιος μπορεί να χωράει ml;

ΑΛ: Βασικά, άμα κάνουμε δια, πρέπει να βρούμε ένα τρόπο να τα χωρίσουμε 10, 10ml.

Στο παραπάνω μοντέλο παρόλο που γίνεται χρήση μαθηματικών ιδιοτήτων του κλάσματος η κατασκευή του δεν ανταποκρινόταν στην *πραγματική κατάσταση*. Ο λόγος για αυτό ήταν ότι το χωρίο που επιλέχθηκε να χωριστεί βρισκόταν στη μέση του μπουκαλιού και όχι στο επάνω μέρος του, όπως φαίνεται στην εικόνα 6. Οι μαθητές δεν έκαναν σύνδεση του μαθηματικού αποτελέσματος με την πραγματική κατάσταση και χρειάστηκε να γίνει παρέμβαση της εκπαιδευτικού για να επικυρωθεί το μοντέλο που είχε δημιουργηθεί (*Από κάτω θα αφαιρέσω; Από εδώ θα φεύγει το γάλα;)*.

**Από τυπικό σε προ-τυπικό μοντέλο**

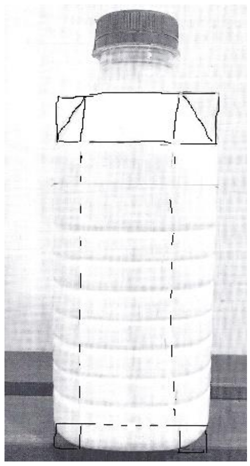
Στην περίπτωση της Β’ Γυμνασίου , η πορεία της επίλυσης οδηγήθηκε από ένα τυπικό μοντέλο σε ένα προ-τυπικό κατά την προσπάθεια βελτίωσης του.

Δημιουργήθηκε απευθείας από το μαθητή *τυπικό μοντέλο* το οποίο περιγράφεται στο παρακάτω απόσπασμα, αφού αντιλαμβάνεται απευθείας ότι χρειάζεται να χρησιμοποιήσει την έννοια τους κλάσματος.

ΣΤ: Θα μετρήσεις πόσο είναι και θα το χωρίσεις σε τέσσερα ίσα κομμάτια. Άρα, μετά νομίζω ότι πρέπει να χωρίσεις ένα από τα κομμάτια σε περισσότερα κομμάτια οπότε να κάνεις κάτι σαν που είναι ας πούμε ένα τέταρτο…

Το παραπάνω μοντέλο ταυτίζεται με αυτό των μαθητών της Α΄ Γυμνασίου της εικόνας 6 και συγκεκριμένα ο καταμερισμός του μπουκαλιού έγινε στο κάτω μέρος του, αγνοώντας το ρεαλιστικό μοντέλο. Η εκπαιδευτικός μέσω ερώτησης καθοδήγησε το μαθητή να ελέγξει τη λύση του με βάση το ρεαλιστικό πλαίσιο. (*Άμα είναι θα άνοιγες τρύπα από δω-δηλαδή από κάτω-.Απλά βρήκαμε πόσο θέλουμε. Πόσο περίπου είναι*).

Η παρότρυνση της καθηγήτριας για βελτίωση του μοντέλου, οδήγησε σε αυτό έγινε προσπάθεια βελτίωσης του μαθηματικού μοντέλου, δηλαδή μετασχηματισμός του καμπυλόγραμμου σχήματος (Εικόνα 7). Το μοντέλο θεωρείται προ-τυπικό, αφού ο μαθητής δεν εξετάζει αν υπάρχει σχέση ανάμεσα στα χωρία που έχει δημιουργήσει (Εικόνα 7).



**Εικόνα 7: Πρό-τυπικό μοντέλο**

Απόσπασμα 5

Καθηγήτρια: Σαν σχήμα τι θα ήταν αυτό που προσπαθούσες να πάρεις;

ΣΤ: Ένα ορθογώνιο κανονικό, αυτό θα το παίρναμε σαν ορθογώνιο.

Καθηγήτρια: Πως θα το κάναμε σαν ορθογώνιο;

ΣΤ: Τα κάναμε διακεκομμένες γραμμές εδώ, θα κάναμε τις μετρήσεις μας θα μετρούσαμε πόσο είναι η βάση εδώ πόσο είναι το ύψος εδώ. Άμα είχαμε πιο καλή γωνία θα μπορούσαμε να μετρήσουμε και αυτή εδώ την πλευρά, την από πίσω εδώ, θα μετρούσαμε τον όγκο.

Όμως το μοντέλο δεν εξελίχθηκε διότι ο μαθητής ήθελε να μετατρέψει τη φωτογραφία σε τρισδιάστατο αντικείμενο, όπως φαίνεται στο απόσπασμα 5. Σε αυτή την περίπτωση το ρεαλιστικό πλαίσιο και συγκεκριμένα η φωτογραφία φαίνεται να αποτελούν ανασταλτικό παράγοντα στην εξέλιξη του μοντέλου.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Συνοψίζοντας, εμφανίζονται διαφόρων ειδών άτυπα, προ-τυπικά και τυπικά μοντέλα. Η πορεία εξέλιξης της λύσης του προβλήματος φαίνεται στην Α' Γυμνασίου να είναι από άτυπο σε τυπικό μοντέλο, ενώ στην περίπτωση της Β' Γυμνασίου από τυπικό σε προ-τυπικό. Στην εξέλιξη του κάθε μοντέλου παράγοντες που έπαιξαν ρόλο φάνηκε ότι ήταν η εκπαιδευτικός, το ρεαλιστικό και μαθηματικό πλαίσιο. Ανασταλτικό παράγοντα, αρκετές φορές, αποτέλεσαν κάποιες συνιστώσες του ρεαλιστικού πλαισίου όπως η συνταγή ή η φωτογραφία του μπουκαλιού. Επομένως, το πλαίσιο στο οποίο είναι τοποθετημένο το πρόβλημα φαίνεται να μην δημιουργεί την ανάγκη για ακριβέστερη μέθοδο επίλυσης. Ωστόσο, η συνιστώσα που αφορά το μπουκάλι, δεν αποτελεί ανασταλτικό παράγοντα στην επίλυση, αλλά φαίνεται να μην είναι οικεία στους μαθητές, αφού φτιάχνοντας το μαθηματικό μοντέλο αγνοούσαν το πραγματικό δηλαδή ότι το μπουκάλι θα αδειάσει από το πάνω μέρος. Τα παραπάνω αποτελέσματα συμφωνούν με ευρήματα των ερευνητών Jurdak & Shahin (2001, p. 312), όπου σε πρόβλημα κατασκευής δοχείου από μαθητές, σχολιάζουν ότι η αλληλεπίδραση των μαθητών με το φυσικό περιβάλλον ήταν ελάχιστη και αντιμετώπισαν το πρόβλημα κατασκευής του ζητούμενου δοχείου εφαρμόζοντας τις διαδικασίες που προέρχονταν από την τάξη. Συμπερασματικά, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι τα μοντέλα που μπορούν να δημιουργηθούν σε ένα ρεαλιστικό πρόβλημα μαθηματικής μοντελοποίησης, δεν εξελίσσονται με προκαθορισμένο τρόπο κάτι που συμφωνεί με ευρήματα έρευνας που αφορά την μοντελοποίηση των Νικολαΐδου & Μουσουλίδης (2015), όπου αναφέρουν ότι στα προβλήματα μοντελοποίησης δεν υπάρχει μια προκαθορισμένη πορεία προς τη μαθηματική γνώση. Τέλος, παρόλο που η εκπαιδευτικός αποτελεί παράγοντα στην επίλυση του προβλήματος δεν εξετάζεται εκτενώς ο ρόλος και η διαχείριση της ως αναφορά τη σύνδεση του μαθηματικού και ρεαλιστικού πλαισίου, δίνοντας έναυσμα για επιπλέον διερεύνηση.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Christou, C., Mousoulides, N. , Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik 37 (3)* , pp. 149-158.

English, L., & Mousoulides, N. (2015). Bringing STEM in a real world problem. *Mathematics Teaching in the Middle School ,20(9)* , pp. 532-539.

Freudenthal, H. (1971). ‘Geometry between the devil and the deep sea’ . *Educational Studies in Mathematics 3* , pp. 413-435.

Gravemeijer, K. (1994). Developing Realistic Mathematics Education. *CD-ß Press / Freudenthal Institute , Utrech , The Netherlands* .

Jurdak, M., & Shahin, I. (2001). Problem solving activity in the workplace and the school: The case of constructing solids. *Educational Studies in Mathematics, 47(3)*, pp. 297-315.

Kaiser, G. (2014). Mathematical Modelling and Applications in Education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, pp. 396-404.

Mousoulides, N.,Sriraman, B. & Christou, C. (2007). From problem solving to modelling - the emergence of models and modeling perspectives ,12 (1). *Nordic Studies in Mathematics Education*, pp. 23-47.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 334-370.

Schoenfeld, A. (1983). 'The wild, wild, wild, wild, wild world of problem solving: a review of sorts'. *For the Learning of Mathematics, 3*, pp. 40-47.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction* . Dordrecht,The Netherlands: The Wiskobas Project, Reidel Publishing Company.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. *Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9. Utrecht: Utrecht University.*

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in Realistic Mathematics Education : An example from a longitudinal tragectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics 54*, pp. 9-35.

Νικολαΐδου-Μουσουλίδου, Μ., & Μουσουλίδης, Ν. (2015). Η μοντελοποιήση στην επιμόρφωση εκπαιδευτικών σε διερευνητικές μεθόδους διδασκαλίας στα μαθηματικά. *Πρακτικά 6ου Πανελλήνιου Συνέδριου της Εν.Ε.Δι.Μ.*