Εργοδική Θεωρία (2018–2019) — Φυλλάδιο Ασκήσεων 5

1. Έστω $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ και $(Y, \mathscr{A}, \nu, S)$ δύο συστήματα που διατηρούν το μέτρο.

(α) Έστω ότι υπάρχει απεικόνιση $\varphi\colon X \to Y$ τέτοια ώστε:
(ι) η φ είναι μετρήσιμη, δηλαδή $\varphi^{-1}\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$,
(ιι) απεικονίζει το μέτρο μ στο μέτρο ν, δηλαδή $\varphi_*\mu = \nu$ (δηλαδή $\nu(A) = \mu\left(\varphi^{-1}(A)\right) \;\; \forall A \in \mathscr{A}$) και
(ιιι) $\varphi \circ T = S \circ \varphi$.
Δείξτε ότι $h_\mu(T) \geqslant h_\nu(S)$.

(β) Μία απεικόνιση $\varphi\colon X \to Y$ καλείται *ομομορφισμός* μεταξύ συστημάτων που διατηρούν το μέτρο αν (ι) η φ είναι μετρήσιμη, (ιι) $\varphi_*\mu = \nu$ και (ιιι) $\varphi \circ T = S \circ \varphi$ μ-σχεδόν παντού. Όταν υπάρχει τέτοιος ομομορφισμός $\varphi\colon X \to Y$, το σύστημα $(Y, \mathscr{A}, \nu, S)$ καλείται *παράγοντας* (*factor*) του $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$. Δείξτε ότι αν $(Y, \mathscr{A}, \nu, S)$ είναι παράγοντας του $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$, τότε $h_\mu(T) \geqslant h_\nu(S)$.

(γ) Τα συστήματα $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ και $(Y, \mathscr{A}, \nu, S)$ είναι *μετροθεωρητικά ισόμορφα* αν υπάρχει ομομορφισμός $\varphi\colon X \to Y$ και ομομορφισμός $\psi\colon Y \to X$, τέτοιοι ώστε $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Y$ ν-σχεδόν παντού και $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_X$ μ-σχεδόν παντού, όπου $\mathrm{id}_X : X \to X$ και $\mathrm{id}_Y : Y \to Y$ οι ταυτοτικές απεικονίσεις στους X και Y, αντίστοιχα. Δείξτε ότι αν τα συστήματα $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ και $(Y, \mathscr{A}, \nu, S)$ είναι μετροθεωρητικά ισόμορφα, τότε $h_\mu(T) = h_\nu(S)$.

2. Έστω $T\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ άρρητη στροφή, δηλαδή $T(x) = x + \alpha \pmod 1$, $x \in \mathbb{T} = [0,1)$, με $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ άρρητο, και θεωρείστε το σύστημα $(\mathbb{T}, \mathscr{B}(\mathbb{T}), \lambda, T)$, όπου $\mathscr{B}(\mathbb{T})$ η Borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{T}$ και λ το μέτρο Lebesgue στο $[0,1)$. Δείξτε ότι η διαμέριση $\xi := \left\{[0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, 1)\right\}$ είναι μονόπλευρος γεννήτορας για το σύστημα και βρείτε την εντροπία του συστήματος.

3. Έστω $T : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ ρητή στροφή, δηλαδή $T(x) = x + \alpha \pmod 1$, $x \in \mathbb{T} = [0,1)$, με $\alpha \in \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι το σύστημα $(\mathbb{T}, \mathscr{B}(\mathbb{T}), \lambda, T)$ δεν έχει πεπερασμένο γεννήτορα. Βρείτε την εντροπία του συστήματος.

4. Έστω $X = [0,1]^{\mathbb{Z}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \colon x_n \in [0,1] \;\; \forall n \in \mathbb{Z}\}$, $\mathscr{B}$ η σ-άλγεβρα γινόμενο $\mathscr{B} = \otimes_{i\in\mathbb{Z}} \mathscr{B}([0,1])$, που παράγεται από όλα τα μετρήσιμα ορθογώνια

$$\{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \colon x_{k+1} \in B_1, \ldots, x_{k+m} \in B_m\}, \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad B_1, \ldots, B_m \in \mathscr{B}([0,1])$$

($\mathscr{B}([0,1])$ η Borel σ-άλγεβρα του $[0,1]$) και $T\colon X \to X$ το shift: $T\left((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\right) = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ με $y_n := x_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Τότε ορίζεται μονοσήμαντα ένα μέτρο πιθανότητας $\mu = \times_{i\in\mathbb{Z}} \lambda$ στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathscr{B})$, που ικανοποιεί τις

$$\mu\left(\{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \colon x_{k+1} \in B_1, \ldots, x_{k+m} \in B_m\}\right) = \lambda(B_1) \cdots \lambda(B_m)$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $B_1, \ldots, B_m \in \mathscr{B}([0,1])$ και κάθε $k \in \mathbb{Z}$, όπου λ το μέτρο Lebesgue στο $[0,1]$. Δείξτε ότι το σύστημα έχει εντροπία $h_\mu(T) = +\infty$. Υπάρχει πεπερασμένος γεννήτορας για το σύστημα;

5. (α) Έστω πάλι $\mathbb{T} = [0,1)$ ό τόρος, λ το μέτρο Lebesgue στο $[0,1)$, $\mathscr{B}(\mathbb{T})$ η Borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{T} = [0,1)$ και $T_2(x) = 2x \pmod 1$. Βρείτε την εντροπία του συστήματος.
[Βρείτε μονόπλευρο πεπερασμένο γεννήτορα για το σύστημα.]

(β) Επαναλάβατε για το σύστημα $(\mathbb{T}, \mathscr{B}(\mathbb{T}), \lambda, T_3)$, όπου $T_3(x) = 3x \pmod 1$, και δείξτε ότι τα δύο συστήματα δεν είναι μετροθεωρητικά ισόμορφα.

6. (Το Θεώρημα Shannon–McMillan–Breiman) (α) Έστω $X = S^{\mathbb{N}}$, όπου S πεπερασμένο σύνολο, $\mathscr{B}$ η σ-άλγεβρα που παράγεται από όλους τους πεπερασμένους κυλίνδρους

$$\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X \colon x_1 = s_1, \ldots, x_n = s_n\}, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad s_1, \ldots, s_n \in S,$$

$p = (p_s)_{s\in S}$ ένα διάνυσμα πιθανότητας, δηλαδή $p_s \geqslant 0 \ \forall s \in S$ και $\sum_{s\in S} p_s = 1$, και μ το μοναδικό μέτρο πιθανότητας που ικανοποιεί τις

$$\mu\big(\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X \colon x_1 = s_1, \ldots, x_n = s_n\}\big) = p_{s_1} \cdots p_{s_n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $s_1, \ldots, s_n \in S$. Έστω επίσης $T \colon X \to X$ το shift: $(x_1, x_2, \ldots) \overset{T}{\mapsto} (x_2, \ldots)$. Το σύστημα $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ είναι δηλαδή το Bernoulli shift p. Έστω τέλος ξ η διαμέριση $\xi := \{[s] \colon s \in S\}$ που αποτελείται από όλους τους κυλίνδρους

$$[s] := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X \colon x_1 = s\} \qquad s \in S,$$

και $\xi_n := \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi$. Αν $\xi_n(x)$ συμβολίζει το στοιχείο της διαμέρισης ξ_n που περιέχει το $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mu(\xi_n(x)) = \sum_{s\in S} p_s \ln p_s = -h_\mu(T, \xi) \qquad \text{για } \mu\text{-σχεδόν κάθε } x \in X.$$

(β) Έστω πάλι $(\mathbb{T}, \mathscr{B}(\mathbb{T}), \lambda, T_2)$ το σύστημα της Άσκησης 5 (α) και ξ η διαμέριση $\xi := \big\{[0, \tfrac{1}{3}), [\tfrac{1}{3}, 1)\big\}$ του $\mathbb{T}$. Έστω πάλι $\xi_n := \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi$ και $\xi_n(x)$ το στοιχείο της διαμέρισης ξ_n που περιέχει το $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι υπάρχει αριθμός $h > 0$ τέτοιος ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mu(\xi_n(x)) = -h \qquad \text{για } \lambda\text{-σχεδόν κάθε } x \in \mathbb{T}.$$