Εργοδική Θεωρία (2018–2019) — Φυλλάδιο Ασκήσεων 2

1. Έστω $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο και $f\colon X\to\mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $f(T^n(x))\to 0$ για μ-σχεδόν κάθε $x\in X$, τι μπορείτε να συμπεράνετε για την f;

2. (α) Έστω $(X,\mathscr{B},\mu)$ χώρος πιθανότητας και $\mathscr{A}$ μία άλγεβρα που παράγει την $\mathscr{B}$. Δείξτε ότι για κάθε $B\in\mathscr{B}$ και κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $A\in\mathscr{A}$ τέτοιο ώστε $\mu(A\,\triangle\,B)<\varepsilon$.

(β) Μία κλάση $\mathscr{S}\subseteq\mathscr{B}$ μετρήσιμων υποσυνόλων του X καλείται *ημι-άλγεβρα* αν

(ι) $\varnothing\in\mathscr{S}$·

(ιι) για κάθε $A\in\mathscr{S}$, το $X\setminus A$ γράφεται σαν ξένη ένωση στοιχείων της $\mathscr{S}$·

(ιιι) η $\mathscr{S}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές.

Έστω $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο και $\mathscr{S}$ μία ημι-άλγεβρα που παράγει την $\mathscr{B}$. Δείξτε ότι το σύστημα είναι εργοδικό ανν

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mu(A\cap T^{-k}B)\xrightarrow{(n\to\infty)}\mu(A)\mu(B)\qquad\forall\,A,B\in\mathscr{S}.$$

3. Έστω $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ ένα εργοδικό σύστημα που διατηρεί το μέτρο και $f\colon X\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση με $\int_X f^-\,\mathrm{d}\mu<+\infty$ και $\int_X f^+\,\mathrm{d}\mu=+\infty$ (όπου $f^+(x):=\max\{f(x),0\}$ και $f^-(x):=\max\{-f(x),0\}$, για $x\in X$). Δείξτε ότι

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\circ T^k\xrightarrow{(n\to\infty)}+\infty\qquad\mu\text{-σχεδόν παντού.}$$

4. Για $x\in(0,1]\setminus\mathbb{Q}$ έστω $a_1(x),a_2(x),\ldots\in\mathbb{N}$ τα ψηφία στην αναπαράσταση του x σαν συνεχές κλάσμα. Δείξτε ότι για Lebesgue-σχεδόν κάθε $x\in(0,1]$, ο αρμονικός μέσος όρος της ακολουθίας, δηλαδή το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\dfrac{1}{a_1(x)}+\cdots+\dfrac{1}{a_n(x)}},$$

υπάρχει και βρείτε αυτό το όριο.

5. Έστω $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο, $f\in L^1(X,\mathscr{B},\mu)$ μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $\alpha\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{2\pi ik\alpha}f\circ T^k$$

υπάρχει μ-σχεδόν παντού.

6. Έστω $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)\in[0,1)^d$. Θεωρείστε το σύστημα $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ με $X=\mathbb{T}^d$, $\mathscr{B}=\mathscr{B}(\mathbb{T}^d)$ η σ-άλγεβρα Borel του $[0,1)^d$, μ το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{T}^d$ και $T_\alpha\colon X\to X$ τον μετασχηματισμό $T_\alpha(x)=x+\alpha\ (\mathrm{mod}\ 1)$, $x=(x_1,\ldots,x_d)$, δηλαδή

$$T_\alpha(x_1,\ldots,x_d)=\big(x_1+\alpha_1\ (\mathrm{mod}\ 1),\ldots,x_d+\alpha_d\ (\mathrm{mod}\ 1)\big).$$

Βρείτε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε το σύστημα να είναι εργοδικό.

7. Έστω $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο, U_T ο αντίστοιχος τελεστής Koopman στον $L^\infty(X,\mathscr{B},\mu)$, δηλαδή $U_T f = f\circ T$, και $k\in\mathbb{N}$. Δείξτε ότι το σύστημα $(X,\mathscr{B},\mu,T^k)$ είναι εργοδικό ανν οι μόνες συναρτήσεις $f\in L^\infty(X,\mathscr{B},\mu)$ που ικανοποιούν την $U_T f=\lambda f$ (στον L^∞) για κάποιο $\lambda\in\mathbb{C}$ με $\lambda^k=1$, είναι οι σταθερές (στον $L^\infty(X,\mathscr{B},\mu)$).
[Θεωρείστε την περίπτωση $k=2$ πρώτα.]

8. Έστω $(X,\mathscr{B},\mu,T)$ ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο και U_T ο αντίστοιχος τελεστής Koopman στον $L^2(X,\mathscr{B},\mu)$.

(α) Δείξτε ότι το σύστημα είναι εργοδικό ανν

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\langle U_T^k f,g\rangle \xrightarrow{(n\to\infty)} \langle f,\mathbf{1}_X\rangle\langle \mathbf{1}_X,g\rangle \qquad \forall f,g\in L^2(X,\mathscr{B},\mu).$$

(β) Δείξτε ότι το σύστημα είναι εργοδικό ανν

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\langle U_T^k f,f\rangle \xrightarrow{(n\to\infty)} \langle f,\mathbf{1}_X\rangle\langle \mathbf{1}_X,f\rangle \qquad \forall f,g\in L^2(X,\mathscr{B},\mu).$$

[$\langle f,g\rangle$ είναι το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(X,\mathscr{B},\mu)$, δηλαδή $\langle f,g\rangle := \int_X f\bar{g}\,\mathrm{d}\mu$ για $f,g\in L^2(X,\mathscr{B},\mu)$.]
[*Υπόδειξη*: Χρησιμοποιείστε την ταυτότητα $4\langle U_T^n f,g\rangle = \langle U_T^n(f+g),f+g\rangle + \mathrm{i}\langle U_T^n(f+\mathrm{i}g),f+\mathrm{i}g\rangle - \langle U_T^n(f-g),f-g\rangle - \mathrm{i}\langle U_T^n(f-\mathrm{i}g),f-\mathrm{i}g\rangle$, αφού την ελέγξετε, φυσικά.]