

Ε. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ - Μ. ΠΑΠΑΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
I

ΑΘΗΝΑ 1990

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οι σημειώσεις αυτές αποτελούν ένα πρόχειρο βοήθημα, που έχει σκοπό να καλύψει άμεσες ανάγκες της διδασκαλίας του μαθήματος "Διαφορική Γεωμετρία Ι".

Ελπίζουμε ότι, η "δοκιμασία" των σημειώσεων στο αμφωατήριο, οι τροποποιήσεις που έχουμε στο νού μας και οι τυχόν παρατηρήσεις που θα μας γίνουν, θα μας επιτρέψουν να δώσουμε στο μεόμενο μία άλλη μορφή, έτσι ώστε να αποτελέσει ουσιαστική εισαγωγή στη θεωρία των διαφορικών πολλαπλοτήτων.

Εκτός από τη βασική θεωρία, σε κάθε παράγραφο περιλαμβάνονται αρκετά παραδείγματα και εφαρμογές, που βοηθούν στην κατανόηση της θεωρίας και τη λύση σχετικών ασκήσεων. Για διευκόλυνση, στο τέλος, παραθέτουμε και τις λύσεις μερικών βασικών ασκήσεων.

Αθήνα, Οκτώβριος 1988

Ε.Β-Μ.Π.

Σημειώσεις

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Ι

(Για χρήση των φοιτητών του 7^{ου} εξαμήνου
του Τμήματος Μαθηματικών του Π.Α.)

© Copyright : Ε. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ - Μ. ΠΑΠΑΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ

ΑΘΗΝΑ 1988.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

The paradox is now fully established that the utmost abstractions are the true weapons with which to control our thought of concrete facts [A. WHITEHEAD: Science and the modern world].

Αντικείμενο της Διαφοριτικής Γεωμετρίας είναι η μελέτη της Γεωμετρίας, που χρησιμοποιεί σαν βασικό εργαλείο τις μεθόδους του Διαφορικού Λογισμού (εμφανισε, π.χ., με την Αναλυτική και Προβολική Γεωμετρία). Μέχρι και τον προηγούμενο αιώνα, η μελέτη αυτή αναφερόταν κυρίως στις καμπύλες και τις επιφανείες μέσα στο συνηθισμένο Ευκλείδειο χώρο (\mathbb{R}^3).

Σταθμός στην εξέλιξη της Διαφοριτικής Γεωμετρίας απετέλεσε το έργο του C.F. GAUSS "Disquisitiones generales circa superficies curvas" ("Γενικές έρευνες επί των καμπύλων επιφανειών"), που παρουσιάστηκε στις Β-Χ-1827 στη Βασιλική Επιστημονική Εταιρεία του Göttingen. Σ' αυτό, και ιδιαίτερα στο περίφημο θεώρημα Egregium ("Εξοχο θεώρημα") απομαλύνεται η ύπαρξη μιας εμφυέτης (ή εσωτερικής) Γεωμετρίας. Δηλ. αποδεικνύεται ότι υπάρχουν ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων, οι οποίες δεν εξαρτώνται από τον περιβάλλοντα χώρο, μέσα στον οποίον αυτά είναι εμβαπτισμένα.

Το προηγούμενο αποτέλεσμα οδήγησε τον B. RIEMANN (στην Υφηγεσία που παρουσίασε το 1854 στο Πανεπιστήμιο του Göttingen) να θεωρήσει αφηρημένα γεωμετρικά αντικείμενα (αυτά που, πιο μακρύτερα, μαζούμε πολλαπλότητες) τα οποία δεν είναι, αναγκαστικά, εμβαπτισμένα σε καίσιον (Ευκλείδειο ή μη) χώρο.

Η ιδέα του Riemann υπήρξε "απογοητευτικός λίθος" όχι μόνο για την ίδια τη Διαφοριτική Γεωμετρία αλλά και για άλλους κλάδους των Μαθηματικών, όπως την (ολική) Ανάλυση, τη Διαφοριτική Τοπολογία, τις Διαφορικές Εξισώσεις (: δυναμικά συστήματα), τις ομάδες Lie κ.α.

Η θεωρία των Διαφορικών Πολλαπλοτήτων, που θα μας απασχολήσει αποκλειστικά στη συνέχεια, αποτελεί τη σύγχρονη μορφή της Διαφοριτικής Γεωμετρίας και βρίσκεται στο προσκήνιο της σημερινής έρευνας στα Μαθηματικά και τη φυσική.

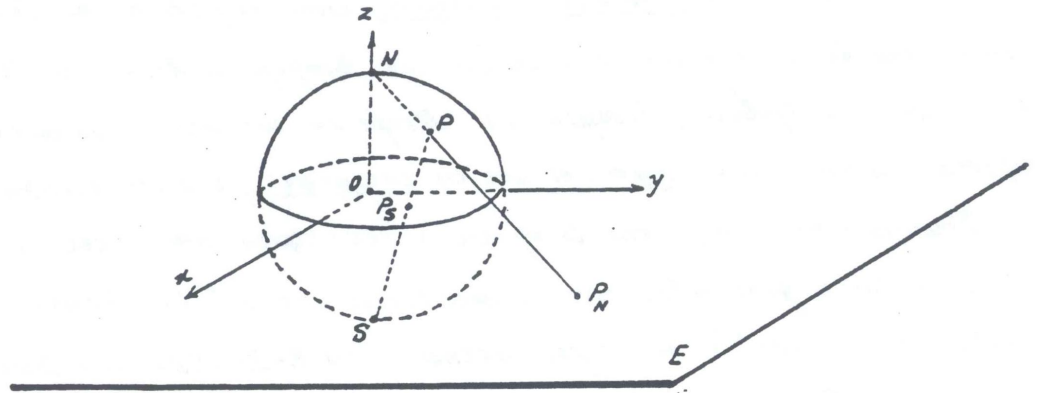
Εδώ πρέπει να αναφέρουμε ότι οι διαφοριείς πολλαπλότητες αποτελούν το φυσικό μαθηματικό πλαίσιο για την ανάπτυξη της θεωρίας της Σχετικότητας και της θεωρητικής φυσικής γενικότερα. Η αλληλεπίδραση Διαφοριής Γεωμετρίας και Θεωρητικής Φυσικής είχε, και εξακολουθεί να έχει, δευτερεύουσα σημασία για την ανάπτυξη και των δύο κλάδων.

Πριν προχωρήσουμε στους αυστηρούς ορισμούς του επομένου κεφαλαίου, ας πούμε λίγα πράγματα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν κίνητρο/παράδειγμα στη μελέτη μας.

Περίγραφοι μπορούμε να πούμε ότι μία πολλαπλότητα είναι ένας τοπολογικός χώρος M , ο οποίος τοπικά "μοιάζει" με έναν ευκλείδειο χώρο. Δηλ., για κάθε $x \in M$, υπάρχει μία περιοχή U του x ομοιόμορφη με ένα ανοικτό υποσύνολο ενός ευκλείδειου χώρου, ας πούμε \mathbb{R}^n .

Ένα παράδειγμα τέτοιου χώρου είναι η σφαίρα $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Σχ. 1



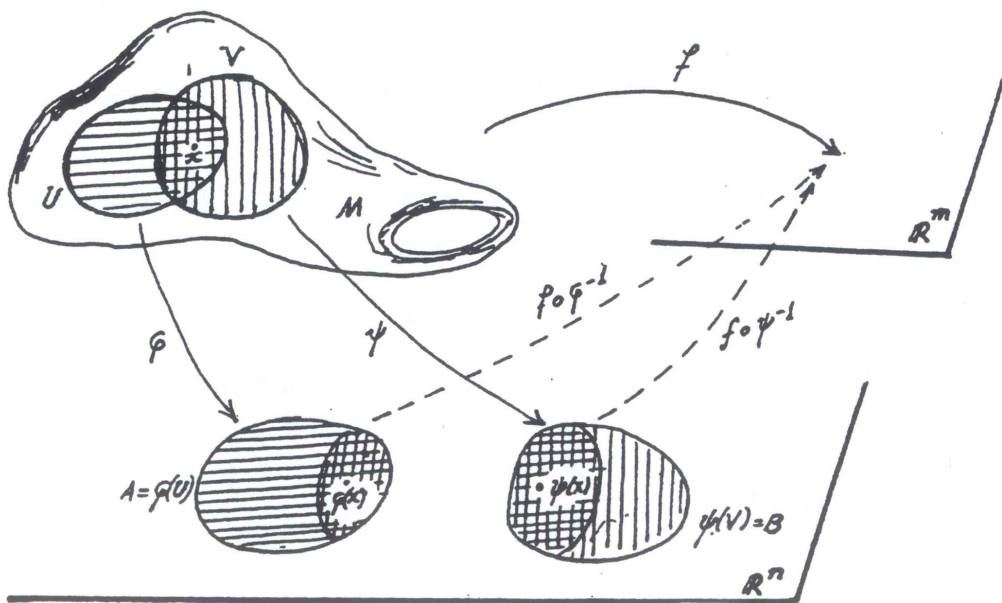
Θεωρούμε το σύνολο $U_N = S^2 - \{N\}$ και την απεικόνιση φ_N (στερεογραφική προβολή από το βόρειο πόλο N), η οποία σε κάθε σημείο $P \in U_N$ αντιστοιχεί το σημείο P_N , τομή της ευθείας \overline{NP} με το επίπεδο του ισημερινού $E (\cong \mathbb{R}^2)$. Παρόμοια ορίζεται το σύνολο $U_S = S^2 - \{S\}$ και η φ_S , η οποία σε κάθε $P \in U_S$ αντιστοιχεί την τομή της \overline{SP} με το E , δηλ. το σημείο P_S του τμήματος E . Μπορούμε να δούμε εύκολα ότι το U_N ταυτίζεται (δηλ. βρίσκεται σε 1-1 και επί αντιστοιχία), μέσω της φ_N , με ολόκληρο το \mathbb{R}^2 . Παρόμοια και το U_S . Άρα κάθε σημείο της S^2 περιέχεται σε μία περιοχή ισομορφή με ένα ανοικτό υποσύνολο ενός ευκλείδειου χώρου (εδώ με ολόκληρο το \mathbb{R}^2). Ακριβέστερα, κάθε σημείο $P \neq N, S$ βρίσκεται σε δύο τέτοιες περιοχές, ενώ κάθε πόλος μόνο σε μία. Φυσικά, αφού κάθε $P \neq N, S$ βρίσκεται και στις δύο περιοχές U_N και U_S , οι απεικονίσεις φ_N και φ_S θα συνδέονται αλληλεπίδραση, έτσι ώστε η ευλογητή του Γκαίους

(U_N, φ_N) ή του (U_S, φ_S) να μην παίζει ιδιαίτερο ρόλο (βλ. το ανάλογο της αλλαγής συντεταγμένων στην Αναλυτική Γεωμετρία).

Ας αναφέρουμε (χωρίς λεπτομέρειες εδώ) και την περίπτωση μιας αφηρημένης πολλαπλότητας, που δεν είναι υποσύνολο ευκλείδειου χώρου (όπως η γραφή $S^2 \subset \mathbb{R}^3$). Θεωρούμε τον χώρο \mathbb{R}^{n+1} και το σύνολο $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ του οποίου τα στοιχεία είναι όλες οι ευθείες, που διέρχονται από την αρχή $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ (ο αναγνώστης μπορεί να θυμηθεί το προβολικό επίπεδο $\mathbb{P}_2 \cong \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, που διδάχτηκε στην Προβολική Γεωμετρία). Το σύνολο $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ καλείται n-διάστατος προβολικός χώρος και, παρά το γεγονός ότι προκύπτει από στοιχεία του ευκλείδειου χώρου, δεν είναι ούτε ευκλείδειος χώρος ούτε υποσύνολο καποιου ευκλείδειου χώρου (λεπτομερής μελέτη της S^2 και άλλων παραδειγμάτων θα γίνει στο 1^ο κεφάλαιο).

Ας δούμε ένα (θεωρητικό) πρόβλημα, στο οποίο γαίνεται η σημασία των χώρων που τοπικά "μοιάζουν" με ευκλείδειους χώρους: Θεωρούμε έναν τυχαίο τοπολογικό χώρο M και μία συνεχή απεικόνιση $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$. Διερωτάται κανείς αν είναι δυνατόν να ορίσει μίαν έννοια διαφορευσιμότητας στον M , έτσι ώστε να μπορεί να μιλάει για την παραγώγο $f'(x)$ της f στο $x \in M$, για κάθε $x \in M$. Φυσικά το πρόβλημα είναι λυμένο στην περίπτωση που ο M είναι ευκλείδειος χώρος (ας πούμε ο \mathbb{R}^n). Καιτί τέτοιο όμως δεν μπορεί να περιμενουμε και στην περίπτωση ενός (γενικού) τοπολογικού χώρου. Αν όμως ο M είναι πολλαπλότητα, όπως την ορίσαμε (πρόχειρα) πιο πάνω, τότε το πρόβλημά μας μπορεί να λυθεί αρκετά φυσιολογικά.

Σχ. 2



Σύμφωνα με ό,τι είπαμε παραπάνω, θα υπάρχει μία περιοχή U του x ομοιόμορφη με κάποιο ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , δηλ. υπάρχει $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $\varphi: U \rightarrow A$ ($A \equiv \varphi(U)$) ομοιομορφισμός. Άρα έχω έννοια η απεικόνιση $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και μπορεί να υπάρχει ή όχι η παράγωγος $D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))$. Έτσι, θα μπορούσε να πει κανείς ότι η f διαφορίζεται/παραγωγίζεται στο $x \in M$ αν διαφορίζεται η $f \circ \varphi^{-1}$ στο $\varphi(x)$ [τι σημαίνει τώρα "πάργωγος" της f στο x είναι κάτι που θα ορίσουμε πιο κάτω με τη βοήθεια του εργαζόμενου χώρου]. Βέβαια, εδώ εμφανίζεται και το εξής βασικό πρόβλημα: αν υπάρχει και μία άλλη περιοχή V του x , ομοιόμορφη (μέσω ενός ομοιομορφισμού ψ) με ένα ανοικτό $B \subset \mathbb{R}^n$ και υποθέσουμε ότι και η $f \circ \psi^{-1}$ είναι διαφορίσιμη στο $\psi(x)$, τότε, εξίσου εύκολα, όπως προηγουμένως, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η f διαφορίζεται στο x αν η $f \circ \psi^{-1}$ διαφορίζεται στο $\psi(x)$, δηλ. υπάρχει η παράγωγος $D(f \circ \psi^{-1})(\psi(x))$. Είναι φανερό πως για να είναι καλά ορισμένη μία διαφορική της f (και αργότερα η αντίστοιχη παράγωγος), που εισάγεται με τον προηγούμενο τρόπο, θα πρέπει να υπάρχει μία κατάλληλη σύνδεση ανάμεσα στις συνήθειες παραγωγούς $D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))$ και $D(f \circ \psi^{-1})(\psi(x))$, έτσι ώστε, τελικά, ο ορισμός να μην εξαρτάται από την επιλογή συγκεκριμένης περιοχής του x .

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Από την πολλή πλούσια βιβλιογραφία που υπάρχει, ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί τα παρακάτω βιβλία, που είναι σχετικά εύκολα στην προσπέλασή τους στον πρωτοεπιλεγμένο στο θέμα:

F. BRICKELL - R.S. CLARK: *Differentiable manifolds - An Introduction* (Van Nostrand - Reinhold)

W.M BOOTHBY: *An introduction to differential manifolds and differential geometry* (Academic Press).

S.T. HU: *Differentiable manifolds* (Holt - Rinehart & Winston).

Y. MATSUSHIMA: *Differentiable manifolds* (Marcel Dekker, Inc)

A. ΜΑΛΛΙΟΥ: *Μαθηματα Διαφορικής Γεωμετρίας: Θεωρία των Διαφορίσιμων Πολλαπλοτήτων 1.* (Ευδ. Καρυπίτσας).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

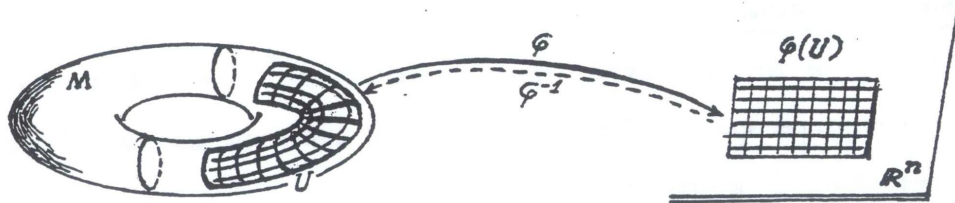
1.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Σκοπός μας είναι να εφοδιάσουμε ένα τυχαίο σύνολο M με μια δομή (:δομή διαφορικότητας πολλαπλότητας) που θα το κάνει τοπολογικό χώρο και θα επιτρέψει να ορίσουμε έννοια διαφορισιμότητας για απεικονίσεις μεταξύ χώρων πύο πολύπλοκων από το \mathbb{R}^n .

1.1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ. Ένας (n -διάστατος) χάρτης του M είναι ένα ζεύγος (U, φ) , έτσι ώστε : $U \subset M$ και $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ απεικόνιση 1-1 (και επί του $\varphi(U)$), με $\varphi(U)$ ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n .

Αν U είναι γνήσιο υποσύνολο του M , το ζεύγος (U, φ) λέγεται τοπικός χάρτης, ενώ αν $U=M$ λέγεται ολικός χάρτης. Στην γενική περίπτωση ολικοί χάρτες δεν υπάρχουν. Συνήθως λέγοντας χάρτη, θα εννοούμε τοπικό χάρτη. (βλ. παραδείγματα ολικών χαρτών, όταν $M=\mathbb{R}^n$, στα Παραδείγματα 1.1.9 (Α), (Ε)).

Σκ. 3



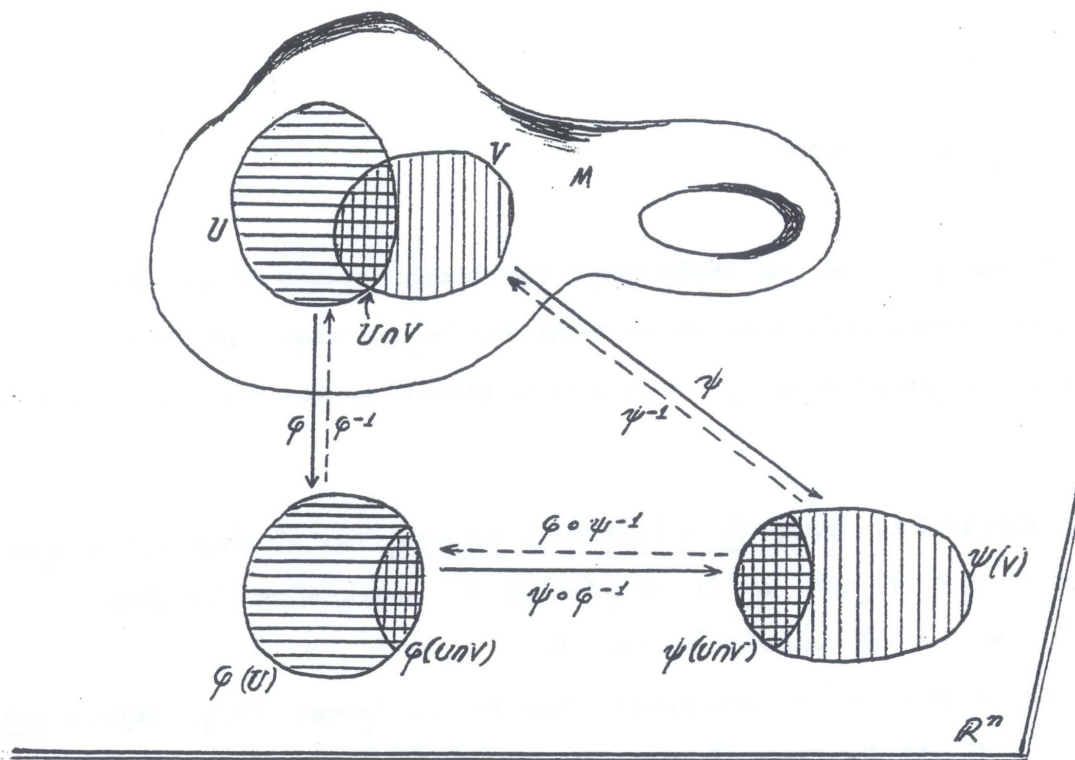
Συντά λέμε ότι ένας τοπικός χάρτης (U, φ) ορίζει ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων, αφού, για οποιοδήποτε $x \in U$, μπορούμε να ορίσουμε τις συντεταγμένες του (που γενικεύουν τις συνήθεις συντεταγμένες της Αναλυτικής Γεωμετρίας) $x_i := \rho_i(\varphi(x))$, $i=1, \dots, n$, όπου $\rho_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η i -προβολή.

1.1.2 ΟΡΙΣΜΟΣ. Δύο χάρτες (U, φ) και (V, ψ) του M λέγονται C^k -συμβαστοί, αν τα σύνολα $\varphi(U \cap V)$ και $\psi(U \cap V)$ είναι ανοιχτά υποσύνολα του \mathbb{R}^n και (εφ' όσον $U \cap V \neq \emptyset$) οι απεικονίσεις μεταφοράς των χαρτών (ή αλλαγής των συντεταγμένων)

$$(1.1) \quad \psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V), \quad \varphi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$$

είναι διαφορίσιμες τάξεως C^k ($0 \leq k \leq \infty$).

Σχ. 4



Επειδή οι προηγούμενες απεικονίσεις είναι η μία αντίστροφη της άλλης, η προηγούμενη συνθήκη διαφορισιμότητας συνεπάγεται ότι και οι δύο απεικονίσεις είναι αμφιδιαφορίσιμες.

Για $k=0$, οι απεικονίσεις $\psi \circ \phi^{-1}$ και $\phi \circ \psi^{-1}$ είναι συνεχείς (εστω πραγματικότητα ομοιομορφισμοί). Στην περίπτωση αυτή οι χάρτες (U, ϕ) και (V, ψ) λέγονται τοπολογικά συμβαστοί.

Αν $k=\infty$, οι χάρτες λέγονται και διαφορικά συμβαστοί.

[Σχετικά με την έννοια της C^k -διαφορισιμότητας επαρτήσεων μεταξύ ευκλειδών χώρων ($k \geq 1$) παραπέμπουμε στο Παράρτημα, στο τέλος των Σημειώσεων].

Αν θέλαμε να είμαστε τυπικοί, τις απεικονίσεις (1.1) έπρεπε να τις γράψουμε $\psi \circ (\phi^{-1}|_{\phi(U \cap V)})$ και $\phi \circ (\psi^{-1}|_{\psi(U \cap V)})$. Όμως, όπου δεν είναι απαραίτητη η διευκρίνιση (και αφού θα δίνεται το πεδίο ορισμού), χάρη απλότητας δεν θα γράψουμε τον περιορισμό, αναμένοντας ότι ο αναγνώστης θα καταλάβει πως στην πραγματικότητα παίρνουμε περιορισμό.

1.1.3 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Η C^k -συμβαστότητα δύο καρτών που τέμνονται συνεπά-

χεται ότι οι χάρτες έχουν την ίδια διάσταση. Πράγματι, έστω (U, φ) και (V, ψ) χάρτες διαστάσεων n και m , αντίστοιχα, C^k -συμβαστοί μεταξύ τους, με $U \cap V \neq \emptyset$. Αν $k \geq 1$, για κάθε $x \in U \cap V$, υπάρχει η παράγωγος $D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και είναι γραμμικός ισομορφισμός, άρα $n = m$. Αν $k = 0$, τα ανοιχτά εύνολα $\varphi(U \cap V)$ και $\psi(U \cap V)$ των χώρων \mathbb{R}^n και \mathbb{R}^m είναι ομοιόμορφα και το συμπέρασμα είναι αποτέλεσμα ενός θεωρήματος της Αλγεβρικής Τοπολογίας (Invariance of Domain; βλ. π.π. [Spanier: Algebraic Topology]).

1.1.4 ΟΡΙΣΜΟΣ. Ένας C^k -άτλαντας του M (διάστασης n) είναι μια οικογένεια $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$ (n -διάστατων) χαρτών του M , έτσι ώστε:

1. $M = \bigcup_{i \in I} U_i$, δηλ. τα πεδία ορισμού των χαρτών καλύπτουν το M , και
2. Για οποιαδήποτε $i, j \in I$, οι χάρτες $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ είναι C^k -συμβαστοί.
Ένας C^∞ -άτλαντας του M θα λέγεται και διαφορικώς άτλαντας.

Είναι δυνατόν ένα εύνολο M να διαθέτει άτλαντα του οποίου οι χάρτες δεν έχουν όλοι την ίδια διάσταση. (βλ., π.χ., Λεμμά 13, §1). Αν όμως το M είναι συνεκτικός χώρος ως προς την τοπολογία που ορίζει ο άτλαντας, όπως θα δούμε παρακάτω (§ 1.2.), τότε όλοι οι χάρτες έχουν την ίδια διάσταση (πρβλ. και Παρατήρηση 1.1.3, προηγουμένως).

1.1.5 ΟΡΙΣΜΟΣ. Ένας (n -διάστατος) C^k -άτλαντας \mathcal{A} του M λέγεται μέγιστος αν, για κάθε (n -διάστατο) χάρτη (U, φ) που είναι C^k -συμβαστός με όλους τους χάρτες του \mathcal{A} , συνάγεται ότι $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$.

1.1.6 ΟΡΙΣΜΟΣ. Ένας μέγιστος C^k -άτλαντας \mathcal{A} του M λέμε ότι ορίζει μια C^k -διαφορικτή δομή επί του M , και ότι το ζεύγος (M, \mathcal{A}) αποτελεί μια C^k -διαφορικτή πολλαπλότητα. Αν οι χάρτες του \mathcal{A} είναι διάστασης n , τότε λέμε ότι το n είναι η διάσταση της πολλαπλότητας και ότι ο χώρος \mathbb{R}^n είναι το μοντέλο της πολλαπλότητας.

Ιδιαίτερως, αν $k = \infty$, λέμε ότι (M, \mathcal{A}) είναι μια διαφορικτή πολλαπλότητα και, αν $k = 0$, ότι είναι μια τοπολογική πολλαπλότητα.

Αν δεν υπάρχει αμφιβολία για τον άτλαντα που ορίζει τη διαφορικτή δομή, λέμε και γράφουμε: " n πολλαπλότητα M ".

|| Στη συνέχεια, για λόγους ευκολίας, οι πολλαπλότητες που μελετώνται θα είναι διαφοριμές (δηλ. C^∞ -διαφοριμές), εκτός αν άλλως ρητά αναφέρεται.

1.1.7 ΘΕΩΡΗΜΑ. Για κάθε n -διάστατο διαφορικό άτλαντα \mathcal{A} του M , υπάρχει ένας μοναδικός μέγιστος n -διάστατος διαφορικός άτλαντας \mathcal{A}' με $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Συμβολίζουμε με \mathcal{A}' το σύνολο όλων των (n -διάστατων) καρτιών του M , οι οποίοι είναι C^∞ -εμβιβαστοί με τους καρτες του \mathcal{A} . Προφανώς $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$.

Θα δείξουμε ότι ο \mathcal{A}' είναι C^∞ -άτλαντας. Η πρώτη ιδιότητα του ορισμού 1.1.4 είναι άμεση. Για τη δεύτερη, θεωρούμε δύο τυκόντες καρτες $(U, \varphi), (V, \psi)$ του \mathcal{A}' με $U \cap V \neq \emptyset$.

Θα πρέπει να δείξουμε πρώτα ότι τα $\varphi(U \cap V), \psi(U \cap V)$ είναι ανοιχτά στον \mathbb{R}^n . Για να δείξουμε ότι το $\varphi(U \cap V)$ είναι ανοιχτό, αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $a \in \varphi(U \cap V)$, υπάρχει ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , ας το πούμε B , έτσι ώστε $a \in B \subset \varphi(U \cap V)$. Έστω $x := \varphi^{-1}(a) \in U \cap V$. Επειδή οι καρτες του \mathcal{A} καλύπτουν το M , υπάρχει κάποιος $(W, \chi) \in \mathcal{A}$ με $x \in W$, άρα $x \in A := U \cap V \cap W$. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε διαδοχικά τις εκθέσεις

$$(1.2) \quad \begin{cases} \varphi(A) = \varphi(U \cap V \cap W) = (\varphi \circ \chi^{-1})(\chi(U \cap V \cap W)) = \\ = (\varphi \circ \chi^{-1})(\chi(U \cap W) \cap \chi(V \cap W)). \end{cases}$$

Ομως οι καρτες (U, φ) και (W, χ) είναι C^∞ -εμβιβαστοί (από τον ορισμό του \mathcal{A}'), άρα το $\chi(U \cap W)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Ομοίως και το $\chi(V \cap W)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , λόγω της εμβιβαστότητας των (V, ψ) και (W, χ) . Συνεπώς το $\varphi(A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , σαν εικόνα του ανοιχτού $\chi(U \cap W) \cap \chi(V \cap W)$ μέσω του ομοιομορφισμού $\varphi \circ \chi^{-1}$. Επειδή $a \in \varphi(A) \subset \varphi(U \cap V)$, παίρνοντας $B := \varphi(A)$, έχουμε ότι ισχύει ο παραπάνω ισχυρισμός, άρα και το $\varphi(U \cap V)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και το $\psi(U \cap V)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n .

Στη συνέχεια θα πρέπει να δείξουμε ότι οι απεικονίσεις μεταφοράς

$$(1.3) \quad \varphi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V),$$

$$(1.3') \quad \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$$

είναι C^∞ -διαφοριζιμες. Θα δείξουμε τη διαφορισιμότητα της πρώτης (οπότε ανάλογα αποδεικνύεται η διαφορισιμότητα της δεύτερης). Επειδή η διαφορισιμότητα είναι τοπική ιδιότητα, αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $a \in \varphi(U \cap V)$, υπάρχει

ανοιχτή περιοχή B του a με $B \subset \varphi(U \cap V)$, έτσι ώστε ο περιορισμός της $\psi \circ \varphi^{-1}$ επί του B , δηλ. $\pi \psi \circ \varphi^{-1}|_B$, να είναι C^∞ -απεικόνιση.

Όπως πιο πάνω, θεωρούμε το χάρτη $(W, \chi) \in \mathcal{A}$ με $x := \varphi^{-1}(a) \in W$ και την τομή $A := U \cap V \cap W \ni x$. Αποδείξαμε προηγουμένως ότι $\varphi(A)$ και $\chi(A) = \chi(U \cap W) \cap \chi(V \cap W)$ είναι ανοιχτά υποσύνολα του \mathbb{R}^n . Από το άλλο μέρος, η συμβιβαστότητα των χαρτών $(U, \varphi), (W, \chi)$ και $(V, \psi), (W, \chi)$ συνεπάγεται την C^∞ -διαφορισιμότητα των απεικονίσεων $\chi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap W) \rightarrow \chi(U \cap W)$ και $\psi \circ \chi^{-1} : \chi(V \cap W) \rightarrow \psi(V \cap W)$. Οπότε οι περιορισμοί των προηγουμένων απεικονίσεων στα $\varphi(A), \chi(A)$ αντίστοιχα, είναι C^∞ -διαφορίσιμες απεικονίσεις της μορφής :

$$\chi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(A)} : \varphi(A) \rightarrow \chi(A), \quad \psi \circ \chi^{-1}|_{\chi(A)} : \chi(A) \rightarrow \psi(A).$$

Επομένως και η σύνθεσή τους, δηλ. π

$$\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(A)} = (\psi \circ \chi^{-1}|_{\chi(A)}) \circ (\chi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(A)})$$

είναι C^∞ -απεικόνιση. Άρα, δείξαμε ότι η $\psi \circ \varphi^{-1}$ είναι C^∞ -απεικόνιση στην περιοχή $B = \varphi(A)$ του a , όπως ζητούσαμε, πράγμα που σημαίνει ότι και η (1.3) είναι C^∞ -απεικόνιση.

Δείχνουμε τώρα ότι ο \mathcal{A}' είναι μέγιστος. Πραγματικά, αν (U, φ) είναι τυχόν χάρτης του M , συμβιβαστός με τους χάρτες του \mathcal{A}' , τότε ο (U, φ) είναι συμβιβαστός με τους χάρτες του \mathcal{A} (αφού $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$), άρα (σύμφωνα με τον ορισμό του \mathcal{A}') $(U, \varphi) \in \mathcal{A}'$, δηλ. \mathcal{A}' μέγιστος.

Τέλος, ο \mathcal{A}' είναι ο μοναδικός άτλαντας που έχει τις δύο ζητούμενες ιδιότητες, δηλ. \mathcal{A}' μέγιστος και $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$. Δηλ. αν υποθέσουμε ότι \mathcal{A}'' είναι μέγιστος άτλαντας με $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}''$, τότε $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}'$. Πράγματι, αν \mathcal{A}'' είναι ένας τέτοιος άτλαντας, επειδή $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}''$, οι χάρτες του \mathcal{A}'' είναι συμβιβαστοί με τους χάρτες του \mathcal{A} , άρα $\mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}'$. Αφού τώρα $\mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}'$, οι χάρτες του \mathcal{A}' είναι συμβιβαστοί με τους χάρτες του \mathcal{A}'' και επειδή ο \mathcal{A}'' είναι μέγιστος, τους περιέχει. Δηλ. $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}''$. Άρα τελικά $\mathcal{A}' = \mathcal{A}''$ και ολοκληρώνεται η απόδειξη. ■

1.1.8 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Η σημασία του θεωρήματος 1.1.7 είναι (εσχεδόν) προφανής. Για να ελέγξουμε αν ένα σύνολο M διαθέτει διαφορική δομή (δηλ. αν είναι πολλαπλότητα) αρκεί να βρούμε έναν άτλαντα, οπότε ο αντίστοιχος μέγιστος θα ορίζει μια τέτοια δομή.

1.1.9 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

(Α) Ο χώρος \mathbb{R}^n .

Θεωρούμε το ζεύγος $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$ και παρατηρούμε ότι η $id_{\mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι 1-1 και η εικόνα-της $id_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , δηλ. $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$ είναι κάρτης του \mathbb{R}^n . Εστω $\mathcal{A} := \{(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})\}$. Τότε \mathcal{A} είναι διαφοριμός άτλαντας του \mathbb{R}^n , αφού το πεδίο ορισμού του κάρτη καλύπτει το \mathbb{R}^n και ο κάρτης $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$ είναι C^∞ -διαφορικά ευμβιβατός με τον εαυτό του. Συνεπώς, αν \mathcal{A}' είναι ο αντίστοιχος μέγιστος, τότε $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}')$ είναι μία διαφοριμική πολλαπλότητα.

(Β) Το καρτεσιανό γινόμενο πολλαπλοτήτων.

Εστω (M, \mathcal{A}) και (N, \mathcal{B}) διαφοριμές πολλαπλότητες διαστάσεων m και n , αντίστοιχα. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{C} := \{(U \times V, \varphi \times \psi) : (U, \varphi) \in \mathcal{A}, (V, \psi) \in \mathcal{B}\}.$$

Θα δείξουμε ότι \mathcal{C} είναι άτλαντας του $M \times N$, διάστασης $m+n$.

Πράγματι, κάθε $(U \times V, \varphi \times \psi)$ είναι κάρτης του $M \times N$, διότι η απεικόνιση

$$\varphi \times \psi : U \times V \rightarrow \varphi(U) \times \psi(V) : (x, y) \mapsto (\varphi \times \psi)(x, y) := (\varphi(x), \psi(y))$$

είναι 1-1 εάν καρτεσιανό γινόμενο απεικονίσεων 1-1 και η εικόνα-της $\varphi(U) \times \psi(V)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ εάν καρτεσιανό γινόμενο ανοιχτών.

Εξάλλου, οι κάρτες του \mathcal{C} καλύπτουν το $M \times N$, γιατί, αν $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$ και $\mathcal{B} = \{(V_j, \psi_j) : j \in J\}$, τότε

$$\bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (U_i \times V_j) = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \times \left(\bigcup_{j \in J} V_j \right) = M \times N.$$

Τέλος, είναι C^∞ -διαφορικά ευμβιβαστοί ανά δύο : αν $(U_1 \times V_1, \varphi_1 \times \psi_1), (U_2 \times V_2, \varphi_2 \times \psi_2) \in \mathcal{C}$ με $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) \neq \emptyset$, τότε

$$(\varphi_1 \times \psi_1)((U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)) = \varphi_1(U_1 \cap U_2) \times \psi_1(V_1 \cap V_2),$$

$$(\varphi_2 \times \psi_2)((U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) \times \psi_2(V_1 \cap V_2)$$

είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ και η απεικόνιση μεταφοράς

$$(\varphi_2 \times \psi_2) \circ (\varphi_1 \times \psi_1)^{-1} : (\varphi_1 \times \psi_1)((U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)) \rightarrow (\varphi_2 \times \psi_2)((U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)),$$

ισούται με την απεικόνιση

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \times (\psi_2 \circ \psi_1^{-1}) : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \times \psi_1(V_1 \cap V_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2) \times \psi_2(V_1 \cap V_2)$$

και είναι C^∞ -αμφιδιαφορίση, εάν καρτεσιανό γινόμενο δύο C^∞ -αμφιδιαφορίσεων.

Άρα ο \mathcal{C} είναι C^∞ -διαφοριμός άτλαντας του $M \times N$ και ο αντίστοιχος μέγιστος \mathcal{C}' ορίζει διαφοριμική δομή επί του $M \times N$.

(C) Η σφαίρα (επιφάνεια) $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Θα κάνουμε τη σφαίρα S^2 διαφορική πολλαπλότητα με δύο (ισοδύναμους, όπως θα δούμε παρακάτω) τρόπους. Για ευκολία θεωρούμε κέντρο το $(0, 0, 0)$ και ακτίνα $r = 1$.

(C₁) Με τη στερεογραφική προβολή (βλ. Εισαγωγή).

Θεωρούμε τα ζεύγη (U_N, φ_N) και (U_S, φ_S) , όπου $U_N = S^2 - \{N\}$ και $U_S = S^2 - \{S\}$ (υπενδύση: N, S είναι ο βόρειος και ο νότιος πόλος, αντίστοιχα), ενώ φ_N και φ_S είναι οι στερεογραφικές προβολές από τους πόλους.

Είναι στοιχειώδες θέμα της τριγωνομετρίας να προσδιορίσουμε την αναλυτική έκφραση των φ_N και φ_S . Βρίσκουμε ότι:

$$\varphi_N : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto \varphi_N(x, y, z) := \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

και

$$\varphi_S : S^2 - \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto \varphi_S(x, y, z) := \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right).$$

Ελέγχουμε ότι η απεικόνιση φ_N είναι 1-1: αν $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in U_N$ με $\varphi_N(x_1, y_1, z_1) = \varphi_N(x_2, y_2, z_2)$, τότε προσδέοντας τα τετράγωνα των δύο ισοτήτων που προκύπτουν στις εντεταγμένες και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$, έχουμε ότι $z_1 = z_2$ απ' όπου αμέσως προκύπτει ότι $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$. Ανάλογα αποδεικνύουμε ότι φ_S είναι 1-1. Επίσης, παρατηρούμε ότι η φ_N είναι επί του \mathbb{R}^2 . Πράγματι, αν $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$\varphi_N^{-1}(a, b) = \left(\frac{2a}{1+a^2+b^2}, \frac{2b}{1+a^2+b^2}, \frac{-1+a^2+b^2}{1+a^2+b^2} \right).$$

Αρα $\varphi_N(U_N) = \mathbb{R}^2$ ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 . Ανάλογα διαπιστώνουμε ότι, για κάθε $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi_S^{-1}(a, b) = \left(\frac{2a}{1+a^2+b^2}, \frac{2b}{1+a^2+b^2}, \frac{1-a^2-b^2}{1+a^2+b^2} \right),$$

δηλ. η φ_S είναι επί του \mathbb{R}^2 και $\varphi_S(U_S) = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^2$ ανοιχτό.

Αποδεικνύουμε λοιπόν ότι (U_N, φ_N) και (U_S, φ_S) είναι χάρτες του S^2 . Θα δείξουμε τώρα ότι το σύνολο

$$\mathcal{A} := \{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$$

είναι διαφορικός ατλαντας. Είναι άμεσο ότι $U_N \cup U_S = S^2$. Παρατηρούμε τώρα ότι $U_N \cap U_S = U_N - \{(0, 0, -1)\} = U_S - \{(0, 0, 1)\}$, άρα

$$\varphi_N(U_N \cap U_S) = \varphi_N(U_N - \{(0, 0, -1)\}) = \varphi_N(U_N) - \varphi_N(0, 0, -1) = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

$$\varphi_S(U_N \cap U_S) = \varphi_S(U_S - \{(0, 0, 1)\}) = \varphi_S(U_S) - \varphi_S(0, 0, 1) = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

επομένως $\varphi_N(U_N \cap U_S) = \varphi_S(U_N \cap U_S) = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$ ανοιχτό. Ακόμη, οι απεικονίσεις

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}, \varphi_N \circ \varphi_S^{-1} : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

δίνονται από τον τύπο

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(a, b) = \varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(a, b) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2} \right),$$

για κάθε $(a,b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, δηλ. είναι C^∞ -απειροστές. Αρα, οι χάρτες (U_N, φ_N) και (U_S, φ_S) είναι διαφορικά συμπίπτουσα και A είναι διαφορικός άτλαντας. Επομένως (S^2, A') είναι διαφορική πολλαπλότητα.

(C_2) Με κατάλληλα ημισφαίρια

Ορίζουμε τα σύνολα

$$U_z^+ := \{(x,y,z) \in S^2 : z > 0\}, \quad U_z^- := \{(x,y,z) \in S^2 : z < 0\},$$

$$D_z := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Δηλ. το U_z^+ (αντ. το U_z^-) είναι το δεξιό (αντ. το αριστερό) ημισφαίριο επάνω (αντ. κάτω) από το επίπεδο των x,y , χωρίς τον ισημερινό, ενώ το D_z είναι ο ανοικτός δίσκος με κέντρο $(0,0,0)$ και ακτίνα 1 στο επίπεδο των x,y . Επίσης, ορίζουμε τις απειροστές

$$\varphi_z^+ : U_z^+ \rightarrow D_z : (x,y,z) \mapsto \varphi_z^+(x,y,z) := (x,y),$$

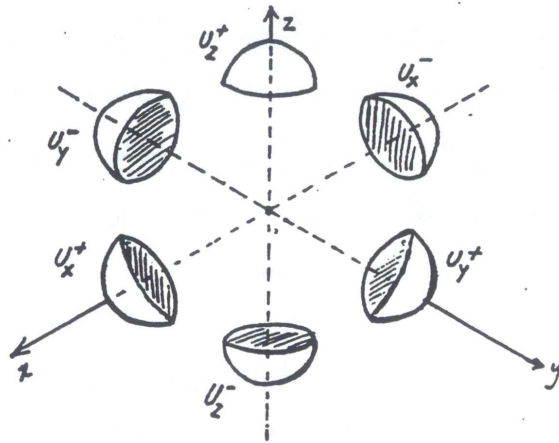
$$\varphi_z^- : U_z^- \rightarrow D_z : (x,y,z) \mapsto \varphi_z^-(x,y,z) := (x,y).$$

Δηλ. οι φ_z^+, φ_z^- είναι οι προβολές των προηγούμενων ημισφαιρίων στον δίσκο που τα χωρίζει. Τότε τα ζεύγη (U_z^+, φ_z^+) , (U_z^-, φ_z^-) είναι χάρτες. Είναι άμεσο ότι οι απειροστές φ_z^+, φ_z^- είναι 1-1. Εξάλλου είναι επί του D_z με

$$(\varphi_z^+)^{-1}(x,y) = (x,y, \sqrt{1-x^2-y^2}), \quad (\varphi_z^-)^{-1}(x,y) = (x,y, -\sqrt{1-x^2-y^2})$$

για κάθε $(x,y) \in D_z$. Αρα $\varphi_z^+(U_z^+) = \varphi_z^-(U_z^-) = D_z \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό.

Σχ. 5



Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να ορίσουμε έξη χάρτες $(U_i^\alpha, \varphi_i^\alpha)$ με $i = x,y,z$ και $\alpha = +, -$ και τρεις δίσκους D_i , $i = x,y,z$. Τότε το σύνολο

$$\mathcal{B} := \{(U_i^\alpha, \varphi_i^\alpha) : i = x,y,z, \alpha = +, -\}$$

είναι άτλαντας του S^2 . Προφανώς τα πεδία ορισμού των χαρτών καλύπτουν την S^2 , αφού για κάθε $(x,y,z) \in S^2$ έχουμε $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \neq 0$, άρα μία τουλάχιστον συντεταγμένη, έστω η x , είναι μη μηδενική, οπότε $(x,y,z) \in U_x^+$ ή $(x,y,z) \in U_x^-$.

Δείχνουμε την συμβιβαστικότητα των (U_x^+, φ_x^+) και (U_y^-, φ_y^-) . Είναι

$$U_x^+ \cap U_y^- = \{(x, y, z) \in S^2 : x > 0, y < 0\},$$

άρα $U_x^+ \cap U_y^- \ni (x, y, z) \mapsto \varphi_x^+(x, y, z) = (y, z) \in D_x$, με $y < 0$, δηλ.

$$\varphi_x^+(U_x^+ \cap U_y^-) = D_x \cap \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}.$$

Επομένως το $\varphi_x^+(U_x^+ \cap U_y^-)$ είναι το εσωτερικό του μισού δίσκου D_x και είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 . Ομοίως και το $\varphi_y^-(U_x^+ \cap U_y^-) = D_y \cap \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι ανοιχτό.

Για την διαφορισιμότητα των απεικονίσεων μεταφοράς παρατηρούμε ότι, για κάθε $(y, z) \in \varphi_x^+(U_x^+ \cap U_y^-)$, δηλ. για κάθε $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ με $y^2 + z^2 < 1$ και $y < 0$, είναι

$$(\varphi_y^- \circ (\varphi_x^+)^{-1})(y, z) = \varphi_y^-(\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z) = (\sqrt{1-y^2-z^2}, z),$$

άρα η απεικόνιση $\varphi_y^- \circ (\varphi_x^+)^{-1}$ είναι C^∞ στο πεδίο ορισμού της, και για κάθε $(x, z) \in \varphi_y^-(U_x^+ \cap U_y^-)$, δηλ. για κάθε $(x, z) \in \mathbb{R}^2$ με $x^2 + z^2 < 1$ και $x > 0$, είναι

$$(\varphi_x^+ \circ (\varphi_y^-)^{-1})(x, z) = \varphi_x^+(x, -\sqrt{1-x^2-z^2}, z) = (-\sqrt{1-x^2-z^2}, z),$$

άρα και η $\varphi_x^+ \circ (\varphi_y^-)^{-1}$ είναι C^∞ στο πεδίο ορισμού της.

Ανάλογα αποδεικνύεται η συμβιβαστικότητα οποιουδήποτε ζεύγους καρτών. Επομένως το σύνολο \mathcal{B} είναι άτλας του S^2 και (S^2, \mathcal{B}) είναι διαφοριζή πολλαπλότητα.

(D) Ο προβολικός χώρος $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

Δίνουμε πρώτα μια αλγεβρική περιγραφή του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ [που είναι άλλωστε ισοδύναμη μ' αυτήν της Εισαγωγής], η οποία διευκολύνει περισσότερο τους υπολογισμούς.

Θεωρούμε τον ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^3 και ορίζουμε στο $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ τη σχέση

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} : y_i = \lambda x_i, \quad i=1,2,3.$$

Διαπιστώνουμε ότι η σχέση αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας και συμβολίζουμε με $[(x_1, x_2, x_3)]$ την κλάση ισοδυναμίας ενός στοιχείου. Το σύνολο των προηγούμενων κλάσεων, δηλ. το σύνολο-πηλίκο $(\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\})/\sim$, καλούμε προβολικό χώρο $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Αμέσως προκύπτει ότι ο προβολικός χώρος $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, που ορίσαμε με την προηγούμενη σχέση ισοδυναμίας, είναι ισομορφος (μέσω μιας 1-1 και επί απεικόνισης) με τον προβολικό χώρο όπως τον περιγράψαμε στην Εισαγωγή.

Θέτουμε $U_i = \{[(x_1, x_2, x_3)] \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : x_i \neq 0\}$ ($i=1,2,3$) και ορίζουμε τις απεικονίσεις

$$\varphi_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^2 : [(x_1, x_2, x_3)] \mapsto \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right),$$

$$\varphi_2: U_2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : [(x_1, x_2, x_3)] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}\right),$$

$$\varphi_3: U_3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : [(x_1, x_2, x_3)] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right).$$

Δείχνουμε ότι (U_i, φ_i) είναι κάρτης του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$: Πρώτα παρατηρούμε ότι φ_1 είναι 1-1, γιατί αν $\varphi_1([(x_1, x_2, x_3)]) = \varphi_1([(y_1, y_2, y_3)])$, τότε $\frac{x_i}{x_1} = \frac{y_i}{y_1}$ για $i=2,3$, δηλ. $\frac{y_i}{x_i} = \frac{y_1}{x_1} = \lambda \neq 0$, απ' όπου προκύπτει ότι $[(y_1, y_2, y_3)] = [(x_1, x_2, x_3)]$. Επίσης $\varphi_1(U_1) = \mathbb{R}^2$. Πράγματι, για κάθε $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ έχουμε ότι $\varphi_1([(1, a, b)]) = (a, b)$, δηλ. η φ_1 είναι επί. Άρα $\varphi_1(U_1)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του

\mathbb{R}^2 και (U_1, φ_1) είναι χάρτης. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και τα ζεύγη (U_2, φ_2) και (U_3, φ_3) είναι χάρτες.

Θα δείξουμε τώρα ότι το σύνολο $\mathcal{A} := \{(U_i, \varphi_i) : i=1,2,3\}$ αποτελεί διαφορικό άτλαντα του $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Παρατηρούμε ότι τα U_i καλύπτουν το $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, γιατί για κάθε $[(x_1, x_2, x_3)] \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, για τουλάχιστον ένα i έχουμε $x_i \neq 0$, άρα $[(x_1, x_2, x_3)] \in U_i$. Δείχνουμε την συμβατότητα των (U_1, φ_1) και (U_2, φ_2) : $U_1 \cap U_2 = \{[(x_1, x_2, x_3)] \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\}$, συνεπώς αν $[(x_1, x_2, x_3)] \in U_1 \cap U_2$, τότε $\varphi_1([(x_1, x_2, x_3)]) = (\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}) \in (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$ και αν $(a, b) \in (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$ τότε $[(1, a, b)] \in U_1 \cap U_2$ με $\varphi_1([(1, a, b)]) = (a, b)$, δηλ. $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$ που είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 . Ομοίως $\varphi_2(U_1 \cap U_2) = (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 . Για τις απεικονίσεις μεταφοράς παρατηρούμε ότι

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R} : (a, b) \mapsto (\frac{1}{a}, \frac{b}{a}),$$

δηλ. είναι C^∞ απεικονίσεις. Παρόμοια αποδεικνύεται η συμβατότητα και των άλλων ζευγών χαρτών. Επομένως, το σύνολο \mathcal{A} είναι άτλαντας και $(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}), \mathcal{A})$ είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης 2.

(E) Το σύνολο $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ των $m \times n$ πραγματικών πινάκων.

Αυτό προκύπτει αμέσως από την ισομορφία $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{m \cdot n}$. Αν Φ είναι ο προηγούμενος ισομορφισμός, $(\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}), \Phi)$ είναι (οληρός) χάρτης του $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να συμπληρώσετε τις λεπτομέρειες των Παραδειγμάτων 1.1.9
2. Αν $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ και $U = (0, 1) \times (0, \pi/2) \subset \mathbb{R}^2$, να δείξετε ότι το $(U, f|_U)$ είναι χάρτης που ανήκει στη διαφορική δομή του \mathbb{R}^2 .
3. Να δείξετε ότι οι χάρτες $(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)$ της S^2 [βλ. Παράδειγμα (C₁)] είναι C^∞ συμβατοί με τους χάρτες (U_i^x, φ_i^x) της S^2 [βλ. Παράδειγμα (C₂)].
4. Να δείξετε ότι ο κύβλος S^1 είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης 1 και η επείρα (τοξός) $T^n := \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_n$ είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n .
5. Στο Παράδειγμα (A) να περιγραφούν οι χάρτες του μέγιστου άτλαντα.
6. Εστω K η επιφάνεια ενός κυλίνδρου και B_1, B_2 οι βάσεις του. Γιατί το $K - (B_1 \cup B_2)$ είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης 2;
7. Εστω $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$. Να δείξετε ότι το μονοσύνολο $\{(\mathbb{R}, \psi)\}$ ορίζει μία διαφορική δομή επί του \mathbb{R} . Επίσης, να εξετάσετε αν ο χάρτης (\mathbb{R}, ψ) είναι τοπολογικά και διαφορικά συμβατός με τον χάρτη $(\mathbb{R}, \text{id}_{\mathbb{R}})$ [βλ. Παράδειγμα (A)].

8. Να δείξετε ότι η απεικόνιση $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $g(x,y) := (x^2 + 2y^2, 3xy)$ ορίζει σε κατάλληλα ανοικτά υποσύνολα του \mathbb{R}^2 (ποιά;) χάρτες του \mathbb{R}^2 , οι οποίοι ανήκουν στη διαφορική δομή του \mathbb{R}^2 .

9. Στο σύνολο όλων των δυνατών C^∞ -ατλαντών επί του M ορίζουμε την εξής σχέση:

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \text{ είναι άτλαντας.}$$

Να δείξετε ότι:

(α) Η \sim είναι σχέση ισοδυναμίας

(β) Αν $[\mathcal{A}]$ είναι η κλάση ενός άτλαντα \mathcal{A} , τότε το σύνολο

$$\mathcal{A}^* := \bigcup_{\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]} \mathcal{B}$$

αποτελεί ένα C^∞ -άτλαντα του M .

(γ) Αν \mathcal{A}' είναι ο μέγιστος άτλαντας που αντιστοιχεί σ' ένα άτλαντα \mathcal{A} , τότε $\mathcal{A}' = \mathcal{A}^*$.

10. Αν \mathcal{A}, \mathcal{B} είναι C^∞ -άτλαντες του M και $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$ οι αντίστοιχοι μέγιστοι, τότε ισχύει

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \iff \mathcal{A}' = \mathcal{B}'.$$

(Να δοθεί και μια απόδειξη χωρίς χρήση της Λεμμάς 9.)

11. Να δείξετε ότι, για κάθε τοπολογικό άτλαντα \mathcal{A} του M , υπάρχει ένας μοναδικός μέγιστος τοπολογικός άτλαντας \mathcal{A}' (ίδιας διάστασης) του M με $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$.

12. Να δείξετε ότι οι δύο διαφορικές δομές της S^2 (Παραδείγματα $(C_1), (C_2)$) συμπίπτουν [Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε την Λεμμά 3].

13. Να αποδείξετε ότι η ένωση δύο μη τεμνομένων πολλαπλοτήτων $(M, \mathcal{A}), (N, \mathcal{B})$ διάστασης n είναι πολλαπλότητα διάστασης n . Τι συμβαίνει όταν οι πολλαπλότητες έχουν διαφορετική διάσταση; Τι συμβαίνει όταν οι πολλαπλότητες τέμνονται;

14. Να δείξετε ότι κάθε πραγματικός διανυσματικός χώρος διάστασης $n \in \mathbb{N}$ είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n , και κάθε μιγαδικός διανυσματικός χώρος διάστασης $n \in \mathbb{N}$ είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης $2n$.

15. Στο σύνολο $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας $(x_1, \dots, x_{n+1}) \sim (y_1, \dots, y_{n+1}) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ : (x_1, \dots, x_{n+1}) = \lambda (y_1, \dots, y_{n+1})$. Ονομάζουμε προβολικό χώρο διάστασης n και συμβολίζουμε με $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ το σύνολο των αντίστοιχων κλάσεων ισοδυναμίας. Να δείξετε ότι το $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ είναι διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n .

2. ΕΠΙ ΤΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ ΤΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΩΝ

Θα δείξουμε ότι κάθε πολλαπλότητα είναι τοπολογικός χώρος και θα μελετήσουμε ορισμένες ιδιότητες της τοπολογίας των πολλαπλοτήτων.

1.2.1 ΟΡΙΣΜΟΣ. Έστω \mathcal{A} ένας n -διάστατος διαφορικός ατλαντας του M (όχι αναγκαστικά μέγιστος). Ένα υποσύνολο A του M θα λέγεται ανοιχτό αν, για κάθε $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, το $\varphi(U \cap A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n .

Αν $\tau_{\mathcal{A}}$ είναι το σύνολο των ανοιχτών υποσυνόλων του M που ορίζει ο \mathcal{A} , όπως προηγουμένως, τότε ισχύει π

1.2.2 ΠΡΟΤΑΣΗ. Το σύνολο $\tau_{\mathcal{A}}$ είναι μία τοπολογία επί του M .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προφανώς $\emptyset \in \tau_{\mathcal{A}}$. Επίσης, για κάθε $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, $\varphi(M \cap U) = \varphi(U) = \mathbb{R}^n$ (ανοιχτό), που αποδεικνύει ότι και $M \in \tau_{\mathcal{A}}$.

Έστω τώρα μια ομογένεια $(A_i)_{i \in I}$ με $A_i \in \tau_{\mathcal{A}}$, $\forall i \in I$. Θα δείξουμε ότι και $\bigcup_{i \in I} A_i = A \in \tau_{\mathcal{A}}$. Πραγματικά, για οποιαδήποτε $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, θα είναι $A \cap U = (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap U = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap U)$, άρα $\varphi(A \cap U) = \varphi(\bigcup_{i \in I} (A_i \cap U)) = \bigcup_{i \in I} \varphi(A_i \cap U)$. Επειδή κάθε $\varphi(A_i \cap U)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , καταλήγουμε στον ισχυρισμό.

Υποθέτουμε τώρα ότι $A, B \in \tau_{\mathcal{A}}$. Θα δείξουμε ότι και $A \cap B \in \tau_{\mathcal{A}}$. Πράγματι:

$$\varphi((A \cap B) \cap U) = \varphi((A \cap U) \cap (B \cap U)) = \varphi(A \cap U) \cap \varphi(B \cap U).$$

Επειδή $\varphi(A \cap U)$, $\varphi(B \cap U)$ είναι ανοιχτά στον \mathbb{R}^n , για κάθε $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, καταλήγουμε στο δεύτερο συμπέρασμα, που αποδεικνύει και την πρόταση. ■

1.2.3 ΠΡΟΤΑΣΗ. Με τους προηγούμενους συμβολισμούς, για κάθε χάρτη $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, ισχύουν τα επόμενα:

i) $U \in \tau_{\mathcal{A}}$.

ii) Η απεικόνιση $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ είναι ομοιομορφισμός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, λόγω της συμβατότητας των καρτών του \mathcal{A} , το $\psi(U \cap V)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n (ιδιαίτερα $\psi(U \cap V) = \emptyset$, αν $U \cap V = \emptyset$), άρα ισχύει η i).

Για τη ii) θα πρέπει να δείξουμε ότι οι φ, φ^{-1} είναι συνεχείς. Για τη συνέπεια της φ παίρνουμε ένα τυχόν ανοιχτό υποσύνολο A του $\varphi(U)$ (άρα και του \mathbb{R}^n) και θα δει-

Ξοομε οτι το $\varphi^{-1}(A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του U (άρα και του M). (Τα $U, \varphi(U)$ είναι τοπολογικοί χώροι με την σχετική τοπολογία από τα M, \mathbb{R}^n αντίστοιχα). Έστω λοιπόν $(V, \psi) \in \mathcal{A}$. Τότε, επειδή $\varphi^{-1}(A) \subset U$, είναι

$$\varphi^{-1}(A) \cap V = \varphi^{-1}(A) \cap U \cap V = \varphi^{-1}(A) \cap \varphi^{-1}(\varphi(U \cap V)) = \varphi^{-1}(A \cap \varphi(U \cap V)),$$

οπότε και

$$\psi(\varphi^{-1}(A) \cap V) = (\psi \circ \varphi^{-1})(A \cap \varphi(U \cap V)).$$

Επειδή τα $A, \varphi(U \cap V)$ είναι ανοιχτά υποσύνολα του \mathbb{R}^n και η $\psi \circ \varphi^{-1}$ ομοιομορφισμός (εάν αμφιδιαφόριση), η παραπάνω ιδιότητα δείχνει ότι το $\psi(\varphi^{-1}(A) \cap V)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n και, κατά τον ορισμό 1.2.1, $\varphi^{-1}(A) \in \tau_A$. Επειδή $\varphi^{-1}(A) \subset U$ και $U \subset M$ ανοιχτό, προκύπτει ότι το $\varphi^{-1}(A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του U , ως προς τη σχετική τοπολογία.

Για τη συνέχεια της $\varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow U$ αρκεί να δείξουμε ότι, αν B είναι ανοιχτό υποσύνολο του U , θα είναι και το $(\varphi^{-1})^{-1}(B) \equiv \varphi(B)$ ανοιχτό υποσύνολο του $\varphi(U)$. Επειδή όμως το B είναι ανοιχτό στο U , κατά τον ορισμό της τ_A , το $\varphi(B) \equiv \varphi(B \cap U)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , άρα και του $\varphi(U)$. ■

1.2.4 ΠΟΡΙΣΜΑ. Τα πεδία ορισμών των καρτών ενός μέγιστου άτλαντα \mathcal{A} ορίζουν μια βάση της τ_A .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $A \in \tau_A$ και $x \in A$ υπάρχει $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U \subset A$. Πραγματικά, επειδή οι κάρτες του \mathcal{A} καλύπτουν το M (βλ. ορισμό 1.1.4, ιδιότητα 1), θα υπάρχει κάποιος $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ με $x \in V$. Θέτουμε $U := A \cap V$, $\varphi := \psi|_U$ και διαπιστώνουμε αμέσως ότι $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ (βλ. Λήμμα 1.2.11, πιο πάνω).

1.2.5 ΠΟΡΙΣΜΑ. Κάθε πολλαπλότητα M είναι τοπολογικός χώρος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρκεί να εφαρμόσουμε τα προηγούμενα για τον μέγιστο άτλαντα που ορίζει τη διαφορική δομή της M . ■

1.2.6. ΟΡΙΣΜΟΣ. Την τοπολογία της πολλαπλότητας, που προκύπτει από τη διαφορική δομή της (δηλ. κάποιο μέγιστο άτλαντα) την λέμε κανονική.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι η προηγούμενη τοπολογία μπορεί να οριστεί από οποιονδήποτε άτλαντα που περιέχεται στον μέγιστο. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι \mathcal{A} είναι ένας

άτλαντας του M και \mathcal{A}' ο αντίστοιχος μέγιστος (βλ. Θεώρημα 1.1.7). Καλούμε $\tau_{\mathcal{A}}$ και $\tau_{\mathcal{A}'}$ τις αντίστοιχες τοπολογίες του M . Τότε αποδεικνύεται η επόμενη

1.2.7 ΠΡΟΤΑΣΗ. Ισχύει η σχέση $\tau_{\mathcal{A}} = \tau_{\mathcal{A}'}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εστω τυχόν $A \in \tau_{\mathcal{A}}$. Θα δείξουμε ότι και $A \in \tau_{\mathcal{A}'}$. Πρώτα παρατηρούμε ότι, για οποιοδήποτε $(V, \psi) \in \mathcal{A}'$ μπορούμε να γράψουμε ότι

$$A \cap V = M \cap A \cap V = \left(\bigcup_i U_i \right) \cap A \cap V = \bigcup_i (U_i \cap A \cap V) = \bigcup_i ((U_i \cap A) \cap (U_i \cap V)),$$

όπου (U_i, φ_i) είναι οι κάρτες του \mathcal{A} . Άρα

$$\begin{aligned} \psi(A \cap V) &= \psi\left(\bigcup_i ((U_i \cap A) \cap (U_i \cap V))\right) = \bigcup_i \psi((U_i \cap A) \cap (U_i \cap V)) = \\ &= \bigcup_i (\psi \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i((U_i \cap A) \cap (U_i \cap V))) = \bigcup_i (\psi \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(U_i \cap A) \cap \varphi_i(U_i \cap V)). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, αφού $A \in \tau_{\mathcal{A}}$, $\varphi_i(U_i \cap A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Επίσης, επειδή $(U_i, \varphi_i), (V, \psi)$ είναι συμβατοί (αν στοιχεία του \mathcal{A}'), το $\varphi_i(U_i \cap V)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Ακόμη, κάθε τομή $X_i = \varphi_i(U_i \cap A) \cap \varphi_i(U_i \cap V) = \varphi_i(U_i \cap A \cap V)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\varphi_i(U_i \cap V)$, άρα, τελικά, $\bigcup_i (\psi \circ \varphi_i^{-1})(X_i)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , δηλ. $\psi(A \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και $A \in \tau_{\mathcal{A}'}$. Συνεπώς $\tau_{\mathcal{A}} \subset \tau_{\mathcal{A}'}$.

Για να δείξουμε την ανάλογη σχέση $\tau_{\mathcal{A}'} \subset \tau_{\mathcal{A}}$, θεωρούμε τυχόν $B \in \tau_{\mathcal{A}'}$. Τότε, για κάθε $(V, \psi) \in \mathcal{A}'$, ισχύει ότι $\psi(B \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό. Επειδή όμως $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$, η προηγούμενη σχέση θα ισχύει και για κάθε κάρτη του \mathcal{A} , πράγμα που δείχνει ότι $B \in \tau_{\mathcal{A}}$ και κλείνει την απόδειξη. ■

Δείξαμε λοιπόν, ότι ένα σύνολο M που διαδέτει ένα διαφορικό άτλαντα \mathcal{A} , εφοδιάζεται και με μια τοπολογική δομή $\tau_{\mathcal{A}}$. Πολλές φορές όμως, συμβαίνει το M να διαδέτει και μια τοπολογική δομή τ [παράδειγμα: η σφαίρα S^2 έχει την τοπολογία ενός υποχώρου του \mathbb{R}^3 (εξειδικία τοπολογία)]. Ενδιαφέρει λοιπόν να συγκρίνουμε τις δύο δομές τ και $\tau_{\mathcal{A}}$.

1.2.8 ΠΡΟΤΑΣΗ. Εστω $M \neq \emptyset$ σύνολο, εφοδιασμένο με μια τοπολογία τ και έναν άτλαντα \mathcal{A} . Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

i) $\tau = \tau_{\mathcal{A}}$.

ii) Για κάθε $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ ισχύει $U \in \tau$ και $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ είναι ομοιομορφισμός ως προς τ [δηλ. όταν το U έχει τη σχετική τοπολογία σαν ανοιχτό υποσύνολο του τοπολογικού χώρου (M, τ) , και το $\varphi(U)$ έχει τη σχετική τοπολογία σαν ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n].

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η συνεπαγωγή i) \Rightarrow ii) είναι η Πρόταση 1.2.3. Δείχνουμε την ii) \Rightarrow i).

Εστω $A \in \tau$. Θεωρούμε $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. Αφού $U \in \tau$ θα είναι και $U \cap A \in \tau$, άρα το $U \cap A$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του U . Εφαρμόζοντας τον ομοιομορφισμό φ (ως προς τ), βρίσκουμε ότι $\varphi(U \cap A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\varphi(U)$, άρα και του \mathbb{R}^n (αφού $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό). Δηλ. βρίσκουμε ότι, για κάθε $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, είναι $\varphi(U \cap A) \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό. Άρα (βλ. Ορισμό 1.2.1) θα είναι $A \in \tau_{\mathcal{A}}$ και

$$(1.4) \quad \tau \subset \tau_{\mathcal{A}}.$$

Εστω τώρα $B \in \tau_{\mathcal{A}}$. Για τυχόν $x \in B$ υπάρχει $(U_x, \varphi_x) \in \mathcal{A}$ με $x \in U_x$. Επειδή $B \in \tau_{\mathcal{A}}$, σύμφωνα με τον Ορισμό 1.2.1, το $\varphi_x(B \cap U_x)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , άρα και του $\varphi_x(U_x)$ [αφού $\varphi_x(B \cap U_x) \subset \varphi_x(U_x)$ και $\varphi_x(U_x) \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό]. Επομένως, μέσω του ομοιομορφισμού φ_x (ως προς τ), το $B \cap U_x \equiv \varphi_x^{-1}(\varphi_x(B \cap U_x))$ θα είναι ανοιχτό υποσύνολο του U_x . Επειδή και $U_x \in \tau$, τελικά $U_x \cap B \in \tau$. Επομένως και

$$B = \bigcup_{x \in B} (U_x \cap B) \in \tau.$$

Δηλ. δείξαμε ότι και

$$(1.5) \quad \tau_{\mathcal{A}} \subset \tau.$$

Οι (1.4) και (1.5) αποδεικνύουν την i). ■

1.2.9 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Στην προηγούμενη Πρόταση 1.2.8, αν ο άτλαντας \mathcal{A} είναι μέγιστος, η απόδειξη του ότι $\tau_{\mathcal{A}} \subset \tau$ απλοποιείται ως εξής: αφού $B \in \tau_{\mathcal{A}}$ και οι χάρτες του μέγιστου άτλαντα αποτελούν βάση της τοπολογίας $\tau_{\mathcal{A}}$ (βλ. Πρόταση 1.2.4), μπορούμε να γράψουμε ότι $B = \bigcup_{i \in I} U_i$, για κάποιους χάρτες $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}$. Επειδή, κατά την υπόθεση, $U_i \in \tau$, έχουμε ότι και $B \in \tau$, δηλ. $\tau_{\mathcal{A}} \subset \tau$.

1.2.10 ΣΥΜΒΑΣΗ. Από δω και πέρα, όταν αναφερόμαστε στην τοπολογία μιας πολλαπλότητας (M, \mathcal{A}) , θα εννοούμε την κανονική τοπολογία $\tau_{\mathcal{A}}$ (επιτός αν ρητά αναφέρεται κάτι άλλο).

1.2.11 ΛΗΜΜΑ. Εστω M εύνολο εφοδιασμένο με ένα διαφορικό άτλαντα \mathcal{A} και $A \subset M$ με $A \in \tau_{\mathcal{A}}$. Τότε, για κάθε $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ με $U \cap A \neq \emptyset$, το ζεύγος $(U \cap A, \varphi|_{U \cap A})$ είναι χάρτης του M και ανήκει στον \mathcal{A}' .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε ένα χάρτη $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ με $U \cap A \neq \emptyset$. Τότε η $\varphi|_{U \cap A}$ είναι 1-1 και περιορισμός μιας απεικόνισης 1-1 και $\varphi(U \cap A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , αφού $A \in \tau_{\mathcal{A}}$. Δηλ. $(U \cap A, \varphi|_{U \cap A})$ είναι χάρτης του M .

Για να δείξουμε ότι $(U \cap A, \varphi|_{U \cap A}) \in \mathcal{A}'$, αρκεί να δείξουμε ότι, για τυχόντα

χάρτη $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, οι $(U \cap A, \varphi|_{U \cap A})$ και (V, ψ) είναι διαφορικά συμβιβαστοί. Πράγματι, για $U \cap V \cap A \neq \emptyset$, έχουμε $U \cap V \cap A \subset U \cap V$ ανοιχτό, άρα οι ομοιομορφισμοί $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ και $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$, το μεταφέρουν στα ανοιχτά υποσύνολα $\varphi(U \cap V \cap A)$ και $\psi(U \cap V \cap A)$ του \mathbb{R}^n . Μένει να δείξουμε ότι οι απεικονίσεις $\psi \circ (\varphi|_{U \cap A})^{-1}$ και $(\varphi|_{U \cap A}) \circ \psi^{-1}$ είναι διαφορίσιμες. Όμως, λόγω της συμβιβαστότητας των χαρτών $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$, οι απεικονίσεις $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ και $\varphi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$ είναι διαφορίσιμες. Άρα οι $\psi \circ (\varphi|_{U \cap A})^{-1} = (\psi \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(U \cap V \cap A)}$ και $(\varphi|_{U \cap A}) \circ \psi^{-1} = (\varphi \circ \psi^{-1})|_{\psi(U \cap V \cap A)}$ είναι διαφορίσιμες εαν περιορισμοί διαφορίσιμων απεικονίσεων σε ανοιχτά υποσύνολα των πεδίων ορισμού τους. ■

1.2.12 ΕΦΑΡΜΟΓΗ. Έστω \mathcal{A} ένας n -διάστατος διαφορικός атлантас του M και $A \in \mathcal{A}$. Τότε το σύνολο $\mathcal{B} := \{(U \cap A, \varphi|_{U \cap A}) : (U, \varphi) \in \mathcal{A} \text{ με } U \cap A \neq \emptyset\}$ είναι n -διάστατος διαφορικός атлантас του A . Την διαφορική πολλαπλότητα (A, \mathcal{B}) που προκύπτει την ονομάζουμε ανοιχτή υποπολλαπλότητα του M . Ιδιαίτερως, αν \mathcal{A} είναι μέγιστος, τότε και \mathcal{B} είναι μέγιστος.

Πράγματι, σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα, τα στοιχεία του \mathcal{B} είναι χάρτες του M που αντίκωον στον A . Προφανώς είναι και χάρτες του A , καλύπτουν το A (αφού για κάθε $x \in A$ υπάρχει $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$, άρα $x \in U \cap A$) και είναι συμβιβαστοί μεταξύ τους (αφού αντίκωον στον ίδιο атлантас A). Άρα ο \mathcal{B} είναι n -διάστατος διαφορικός атлантас του A .

Έστω τώρα \mathcal{A} μέγιστος και (V, ψ) χάρτης του A συμβιβαστός με κάθε χάρτη του \mathcal{B} . Θα δείξουμε ότι $(V, \psi) \in \mathcal{B}$. Θεωρούμε χάρτη $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ με $U \cap V \neq \emptyset$. Επειδή οι (V, ψ) και $(U \cap A, \varphi|_{U \cap A})$ είναι συμβιβαστοί, τα σύνολα $\varphi|_{U \cap A}(U \cap A \cap V)$ και $\psi(U \cap A \cap V)$ είναι ανοιχτά στο \mathbb{R}^n και οι απεικονίσεις $\psi \circ (\varphi|_{U \cap A})^{-1}: \varphi|_{U \cap A}(U \cap A \cap V) \rightarrow \psi(U \cap A \cap V)$ και $(\varphi|_{U \cap A}) \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap A \cap V) \rightarrow \varphi|_{U \cap A}(U \cap A \cap V)$ είναι διαφορίσιμες. Όμως, επειδή $A \cap V = V$, $\varphi|_{U \cap A}(U \cap A \cap V) = \varphi(U \cap V \cap A) = \varphi(U \cap V)$, $\psi(U \cap A \cap V) = \psi(U \cap V)$ και $\psi \circ (\varphi|_{U \cap A})^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)}$, $(\varphi|_{U \cap A}) \circ \psi^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1}|_{\psi(U \cap V)}$, δηλ. οι χάρτες $(U, \varphi), (V, \psi)$ είναι συμβιβαστοί. Άρα $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, επομένως $(V \cap A, \psi|_{V \cap A}) = (V, \psi) \in \mathcal{B}$.

Μια πολλαπλότητα M εφοδιασμένη με την κανονική τοπολογία $\tau_{\mathcal{A}}$ έχει πάντοτε ορισμένες τοπολογικές ιδιότητες. Συγκεκριμένα, είναι τοπολογικός χώρος T_1 , τοπικά συμπαγής και τοπικά εννευτικός.

Πριν προχωρήσουμε, θυμίζουμε ότι ένας τοπολογικός χώρος (X, τ) λέγεται:

- T_1 -χώρος, αν για κάθε ζεύγος σημείων x, y του X με $x \neq y$, υπάρχει ανοιχτό $U \subset X$ με $x \in U$ και $y \notin U$.
- τοπικά συμπαγής, αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει τουλάχιστον μια συμπαγής περιοχή του x .

- τοπικά συνεκτικός, αν για κάθε $x \in X$ και κάθε περιοχή U του x , υπάρχει συνεκτική περιοχή V του x με $V \subset U$.

1.2.13 ΠΡΟΤΑΣΗ. Ο τοπολογικός χώρος (M, τ_A) είναι T_1 -χώρος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $x, y \in M$ με $x \neq y$. Επειδή τα πεδία ορισμού των καρτών του \mathcal{A} αποτελούν κάλυψη του X , υπάρχει $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$. Εξάλλου $U \in \tau_A$ (Πρόταση 1.2.3). Αν $y \notin U$, τότε το U είναι η ζητούμενη περιοχή. Αν $y \in U$, θεωρούμε την εικόνα $\varphi(U)$ που είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , με $\varphi(x), \varphi(y) \in \varphi(U)$. Επειδή ο \mathbb{R}^n είναι T_1 -χώρος, υπάρχει ανοιχτή περιοχή A του $\varphi(x)$ με $\varphi(y) \notin A$. Τότε $\varphi(U) \cap A$ είναι ανοιχτή περιοχή του $\varphi(x)$ με $\varphi(y) \notin \varphi(U) \cap A$ και, αφού η $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ είναι ομοιομορφισμός, η αντίστροφη εικόνα $V = \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap A)$ είναι η ζητούμενη περιοχή. ■

1.2.14 ΠΡΟΤΑΣΗ. Ο τοπολογικός χώρος (M, τ_A) είναι τοπικά συμπαγής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $x \in X$. Υπάρχει κάρτης $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$. Τότε $\varphi(U)$ είναι ανοιχτή περιοχή του $\varphi(x)$ στο \mathbb{R}^n . Άρα υπάρχει $\epsilon > 0$ με $S(\varphi(x), \epsilon) \subset \varphi(U)$, οπότε

$$x \in \varphi^{-1}(S(\varphi(x), \epsilon)) \subset \varphi^{-1}(\overline{S(\varphi(x), \epsilon)}) \subset U.$$

Όμως η κλειστή σφαίρα $\overline{S(\varphi(x), \epsilon)}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{R}^n (εάν κλειστό και φραγμένο). Επειδή οι συνεχείς απεικονίσεις διατηρούν την συμπαγεία και φ^{-1} είναι συνεχής, έχουμε ότι $\varphi^{-1}(\overline{S(\varphi(x), \epsilon)})$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X . Ακόμη, είναι περιοχή του x , αφού περιέχει την ανοιχτή περιοχή $\varphi^{-1}(S(\varphi(x), \epsilon))$ του x , και περιέχεται στο U . ■

1.2.15 ΠΡΟΤΑΣΗ. Ο τοπολογικός χώρος (M, τ_A) είναι τοπικά συνεκτικός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $x \in X$ και $A \in \tau_A$ με $x \in A$. Άρκει να βρεθεί συνεκτικό $B \in \tau_A$ με $x \in B \subset A$. Θεωρούμε ένα κάρτη $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U$. Τότε $U \cap A \ni x$ και $\varphi(U \cap A)$ είναι ανοιχτή περιοχή του $\varphi(x)$ στο \mathbb{R}^n . Άρα υπάρχει $\epsilon > 0$ με $S(\varphi(x), \epsilon) \subset \varphi(U \cap A)$, οπότε

$$x \in \varphi^{-1}(S(\varphi(x), \epsilon)) \subset U \cap A \subset A.$$

Είναι γνωστό ότι οι σφαίρες είναι συνεκτικά υποσύνολα του \mathbb{R}^n και ότι οι συνεχείς απεικονίσεις διατηρούν την συνεκτικότητα, συνεπώς η συνέχεια της φ^{-1} εξασφαλίζει ότι η $B = \varphi^{-1}(S(\varphi(x), \epsilon))$ είναι συνεκτικό σύνολο. Εξάλλου, προφανώς, η B είναι ανοιχτή περιοχή του x με $B \subset A$. ■

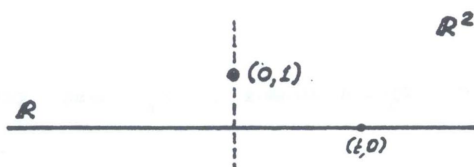
Όμως, μια πολλαπλότητα εν γένει δεν είναι χώρος Hausdorff, ούτε συμπαγής, ούτε συνεκτικός, ιδιότητες που συχνά απαιτούνται στην τοπολογική ή γεωμετρική μελέτη της πολλαπλότητας. Τις ιδιότητες αυτές πρέπει να τις υποδέσσουμε, συχνά βάζοντας κατάλληλες συνθήκες στους χάρτες.

Ας εξετάσουμε σύντομα την περίπτωση των πολλαπλοτήτων Hausdorff. Και πρώτα, ας δούμε ένα κλασικό (αντι)παράδειγμα πολλαπλότητας η οποία δεν είναι χώρος Hausdorff, πράγμα που δείχνει ότι οι πολλαπλότητες δεν είναι κατ' ανάγκη χώροι Hausdorff. (Σημείωση: Όπως θα δούμε αργότερα, σε μια κατηγορία πολλαπλοτήτων, τις ομάδες Lie, εξασφαθίζεται πάντοτε ότι είναι χώροι Hausdorff.)

1.2.16 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (πολλαπλότητας μη Hausdorff) [Reeb-Haefliger (1957)].

Θεωρούμε το σύνολο $M = \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 1)\}$.

Σκ. 6



Ορίζουμε τα ζεύγη (U_1, φ_1) και (U_2, φ_2) με :

$$U_1 := \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\}, \quad \varphi_1 := \text{pr}_1|_{U_1} : U_1 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$U_2 := \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}_* = \mathbb{R} - \{0\}\} \cup \{(0, 1)\}, \quad \varphi_2 := \text{pr}_1|_{U_2} : U_2 \rightarrow \mathbb{R},$$

όπου $\text{pr}_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η πρώτη προβολή. Διαπιστώνουμε ότι τα δύο προηγούμενα ζεύγη είναι χάρτες του M . Πράγματι, η φ_1 είναι απεικόνιση 1-1 και $\varphi_1(U_1) = \mathbb{R}$. Ομοίως και η φ_2 είναι 1-1 με $\varphi_2(U_2) = \mathbb{R}$. (Στο Σκ. 7 απεικονίζεται το U_2).

Σκ. 7



Προφανώς, τα U_1 και U_2 καλύπτουν το M . Επίσης, οι προηγούμενοι χάρτες είναι C^∞ συμβιβαστοί, αφού $U_1 \cap U_2 = \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}_*\}$, οπότε $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}_* \subset \mathbb{R}$ (ανοιχτό) και $\varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}_* \subset \mathbb{R}$ (ανοιχτό) και, επιπλέον, $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}_*}$, που είναι C^∞ απεικόνιση. Συνεπώς το $\mathcal{A} := \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ είναι άτλαντας του M και το (M, \mathcal{A}) πολλαπλότητα.

Όμως ο τοπολογικός χώρος $(M, \tau_{\mathcal{A}})$ δεν είναι Hausdorff. Για να δείξουμε τον ισχυρισμό αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν σημεία του M , τα οποία δεν έχουν (ανοιχτές) περιοχές που να είναι ξένες μεταξύ τους. Πραγματικά, ας πάρουμε τα σημεία $(0, 0)$ και $(0, 1)$ και δύο οποιεσδήποτε ανοιχτές περιοχές A και B των $(0, 0)$ και $(0, 1)$, αντίστοιχα (τα A, B

δemonstrούνται ανοιχτά ως προς την τ_A). Τότε, σύμφωνα με τον ορισμό της τ_A , τα $\mathcal{F}_1(A \cap U_1)$ και $\mathcal{F}_2(B \cap U_2)$ είναι ανοιχτά υποσύνολα του \mathbb{R} και μάλιστα $0 \in \mathcal{F}_1(A \cap U_1) \cap \mathcal{F}_2(B \cap U_2)$ [αφού $(0,0) \in A \cap U_1 \Rightarrow \mathcal{F}_1(0,0) = 0 \in \mathcal{F}_1(A \cap U_1)$ και $(0,1) \in B \cap U_2 \Rightarrow \mathcal{F}_2(0,1) = 0 \in \mathcal{F}_2(B \cap U_2)$]. Επειδή όμως $\mathcal{F}_1(A \cap U_1) \cap \mathcal{F}_2(B \cap U_2)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R} , θα περιέχει και κάποιο $t_0 \neq 0$. Τότε όμως θα είναι και $(t_0, 0) \in A \cap B$. [πραγματικά, επειδή $\mathcal{F}_1(t_0, 0) = t_0 \in \mathcal{F}_1(A \cap U_1) \Rightarrow (t_0, 0) \in A \cap U_1$, δηλ. $(t_0, 0) \in A$. Ομοίως και $(t_0, 0) \in B$]. Δηλ. βρήκαμε ότι οποιεσδήποτε ανοιχτές περιοχές των $(0,0)$ και $(0,1)$ τέμνονται, άρα το M δεν είναι χώρος Hausdorff.

Δίνουμε τώρα μια ικανή και αναγκαία συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν οι χάρτες για να είναι μια πολλαπλότητα χώρος Hausdorff.

1.2.17 ΠΡΟΤΑΣΗ. Μια πολλαπλότητα (M, \mathcal{A}) είναι χώρος Hausdorff αν και μόνον αν, για οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία $x, y \in M$, υπάρχουν χάρτες $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$, έτσι ώστε:

$$x \in U, y \in V \text{ και } U \cap V = \emptyset.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν υπάρχουν τέτοιοι χάρτες, προφανώς το M είναι χώρος Hausdorff.

Αντίστροφα, έστω ότι το M είναι χώρος Hausdorff. Τότε θα υπάρχουν ανοιχτά σύνολα (περιοχές) A και B με $x \in A, y \in B$ και $A \cap B = \emptyset$. Επειδή τα πεδία ορισμού των καρτών ενός μέγιστου άτλαντα αποτελούν βάση της ικανονικής τοπολογίας (βλ. Πρόταση 1.2.4) θα υπάρχουν χάρτες $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ με $x \in U \subset A$ και $y \in V \subset B$. Προφανώς $U \cap V = \emptyset$. ■

Η παραπάνω πρόταση είναι ένα εύκολο κριτήριο για να διαπιστώσουμε αν μια πολλαπλότητα είναι Hausdorff. Μερικά άλλα κριτήρια δίνονται στις ασκήσεις αυτής της παραγράφου.

Όπως θα δούμε αργότερα, η υπόθεση ότι μια πολλαπλότητα είναι Hausdorff είναι ουσιώδης στη μελέτη των ολοκληρωτικών καμπύλων ενός διανυσματικού πεδίου (επειδή είναι απαραίτητη προκειμένου να εξασφαλιστεί το μονοσήμαντο τέτοιων καμπύλων, για δοσμένες αρχικές συνθήκες).

Μια άλλη τοπολογική ιδιότητα που έχει ιδιαίτερη σημασία στη μελέτη των πολλαπλοτήτων είναι η συνεκτικότητα. Και πάλι, η συνεκτικότητα δεν είναι ιδιότητα που έχουν όλες οι πολλαπλότητες.

1.2.18 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (μη συνεκτικής πολλαπλότητας).

Στην Λεκση 4 της §2 λέμε ότι η γενική γραμμική ομάδα $GL(n, \mathbb{R})$ (δηλ. η ομάδα των $n \times n$ αντιστρεπτών πινάκων) είναι πολλαπλότητα [και μάλιστα ανοικτή υποπολλαπλότητα της $M_{n \times n}(\mathbb{R})$, αφού $GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$]. Ορίζουμε τα επόμενα υποσύνολα της $GL(n, \mathbb{R})$:

$$GL^+(n, \mathbb{R}) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det(A) > 0\},$$

$$GL^-(n, \mathbb{R}) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det(A) < 0\}.$$

Προφανώς,

$$GL^+(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}_+) \subset GL(n, \mathbb{R}) \text{ ανοικτό} \quad (\mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} : t > 0\})$$

$$GL^-(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}_-) \subset GL(n, \mathbb{R}) \text{ ανοικτό} \quad (\mathbb{R}_- := \{t \in \mathbb{R} : t < 0\})$$

και

$$GL^+(n, \mathbb{R}) \cap GL^-(n, \mathbb{R}) = \emptyset.$$

Επομένως, το $GL(n, \mathbb{R})$ καλύπτεται από δύο ανοικτά μη κενά υποσύνολά του, ξένα μεταξύ τους. Δηλ. δεν είναι συνεκτικός χώρος. Ακριβέστερα, έχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες, τα $GL^+(n, \mathbb{R})$ και $GL^-(n, \mathbb{R})$.

Η συνεκτικότητα είναι μια τοπολογική ιδιότητα, που απαιτούμε πολλές φορές να ισχύει σε μία πολλαπλότητα, ιδιαίτερα όταν θέλουμε να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη συνεκτών καμπύλων που συνδέουν τυχόντα σημεία της. Υπενθυμίζουμε πρώτα τον επόμενο ορισμό:

1.2.19 ΟΡΙΣΜΟΣ. Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται κατά τόξα συνεκτικός, αν κάθε ζεύγος σημείων του μπορεί να ενωθεί με μια συνεχή καμπύλη. Επίσης, λέγεται τοπικά κατά τόξα συνεκτικός αν, για κάθε $x \in X$ και κάθε περιοχή A του x , υπάρχει ανοικτή περιοχή B του x με $B \subset A$ και B κατά τόξα συνεκτικός υπόχωρος του X .

Οι έννοιες της συνεκτικότητας και της κατά τόξα συνεκτικότητας συνδέονται με το επόμενο θεώρημα (βλ. [Dugundji: Topology]).

1.2.20 ΘΕΩΡΗΜΑ. Ένας τοπολογικός χώρος X είναι κατά τόξα συνεκτικός, αν και μόνον αν είναι συνεκτικός και τοπικά κατά τόξα συνεκτικός.

Κάνοντας αναλογισμούς ανάλογους με εκείνους στις αποδείξεις των προτάσεων 1.2.14 και 1.2.15, μπορεί να αποδείξει κανείς ότι:

1.2.21 ΠΡΟΤΑΣΗ. Ο τοπολογικός χώρος (M, τ_A) είναι τοπικά κατά τόξα συνεκτικός.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα 1.2.20, αν μια πολλαπλότητα (M, χ) είναι συνεκτικός χώρος, τότε κάθε ζεύγος σημείων της μπορεί να ενωθεί με μια συνεχή καμπύλη. Χρη-

ειμοποιώντας αυτό το συμπέρασμα μπορεί να αποδείξει κανείς ότι όλοι οι χάρτες της πολλαπλότητας έχουν την ίδια διάσταση (απόδειξη;). Αν η πολλαπλότητα δεν είναι συνεκτική, το τελευταίο συμπέρασμα ισχύει για τις συνεκτικές της συνιστώσες.

Τέλος, ας πούμε και λίγα λόγια για την συμπαγεία. Η τοπολογική αυτή ιδιότητα συνεπάγεται σοβαρούς περιορισμούς για τη δομή της πολλαπλότητας, όπως φαίνεται στο επόμενο συμπέρασμα:

1.2.22 ΠΡΟΤΑΣΗ. Έστω A άτλαντας επί του M , έτσι ώστε (M, τ_A) να είναι συμπαγής χώρος. Τότε ο A έχει περιεσώτερος του ενός χάρτες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας μόνο χάρτης, δηλ. $A = \{(U, \varphi)\}$. Τότε θα ήταν $U = M$, ώστε ο χάρτης να καλύπτει το M , και $\varphi(U) = \varphi(M) \subset \mathbb{R}^m$ ανοιχτό, αν m είναι η διάσταση του M . Επίσης, επειδή M συμπαγής και φ ομοιομορφισμός θα είναι $\varphi(M)$ συμπαγής, δηλ. κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^m .

Αφού $\varphi(M)$ είναι ανοιχτό και κλειστό υποσύνολο του \mathbb{R}^m και \mathbb{R}^m συνεκτικός χώρος, έχουμε ότι $\varphi(M) = \emptyset$ ή $\varphi(M) = \mathbb{R}^m$. Επειδή $M \neq \emptyset$ πρέπει $\varphi(M) \neq \emptyset$, δηλ. $\varphi(M) = \mathbb{R}^m$. Όμως $\varphi(M)$ είναι και φραγμένο, άρα \mathbb{R}^m φραγμένο, άτοπο. ■

Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι υπάρχουν μη συμπαγείς πολλαπλότητες: όλες διαθέτουν ολιγό χάρτη, π.χ. το \mathbb{R}^n και το $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ (βλ. Παραδείγματα 1.1.9 (A) και (E)).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.2.8, αποδείξτε ότι:

(α) Η τοπολογία τ_A του \mathbb{R}^n (Παράδειγμα 1.1.9 (A)) συμπίπτει με την συνήδη τοπολογία του \mathbb{R}^n .

(β) Η τοπολογία τ_{\otimes} του $M \times N$ (Παράδειγμα 1.1.9 (B)) συμπίπτει με την τοπολογία-γινόμενο $\tau_A \times \tau_B$.

(γ) Η τοπολογίες τ_A και τ_B του S^2 (Παράδειγματα 1.1.9 (C₁) και 1.1.9 (C₂)) συμπίπτουν με την σχετική τοπολογία που επαγεται στο S^2 από το \mathbb{R}^3 .

(δ) Η τοπολογία τ_A του $P_2(\mathbb{R})$ (Παράδειγμα 1.1.9 (D)) συμπίπτει με την τοπολογία πηλίκο του $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ ως προς την σχέση \sim .

(ε) Η τοπολογία τ_B της ανοικτής υποπολλαπλότητας (Εφαρμογή 1.2.12) συμπίπτει με τη σχετική τοπολογία του υποσυνόλου A του M , όταν το M εφοδιάζεται με την τ_A .

2. Αναφέρατε παραδείγματα πολλαπλοτήτων που είναι χώροι Hausdorff, συνεκτικοί ή συμπαγείς. Επίσης βρείτε και παραδείγματα πολλαπλοτήτων που έχουν δύο ή τρεις από τις προηγούμενες ιδιότητες.

3. Να δείξετε ότι σε μια πολλαπλότητα M τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) Η M είναι χώρος Hausdorff.

(β) Για οποιαδήποτε σημεία $x \neq y \in M$, υπάρχουν χάρτες (U, φ) και (V, ψ) με $x \in U$ και $y \in V$, ιαδώς και ανοικτά υποσύνολα A, B της M , έτσι ώστε

$$(*) \quad x \in A \subset U, \quad y \in B \subset V \quad \text{και} \quad A \cap B = \emptyset.$$

(γ) Για οποιαδήποτε σημεία $x \neq y \in M$ και οποιουδήποτε χάρτες (U, φ) και (V, ψ) της M με $x \in U$ και $y \in V$, υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα A, B της M , τέτοια ώστε να ικανοποιούν την (*).

4. Αποδείξτε ότι το $GL(n, \mathbb{R})$ είναι ανοικτή υποπολλαπλότητα του $M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

5. Αποδείξτε ότι το $GL(n, \mathbb{R})$ δεν είναι συμπαγής πολλαπλότητα.

6. Αποδείξτε ότι το \mathbb{R}_* δεν είναι συνεκτική πολλαπλότητα.

7. Αν \mathcal{A} και \mathcal{B} είναι δύο τοπολογικοί ατλαντές του M , τότε ισχύει ότι

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \iff \tau_{\mathcal{A}} = \tau_{\mathcal{B}},$$

όπου η σχέση ισοδυναμίας για τοπολογικούς ατλαντές είναι ανάλογη προς την ισοδυναμία διαφοριζών ατλαντών (βλ. Άσκηση 10, §1).

8. Θεωρούμε το σύνολο

$$M = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

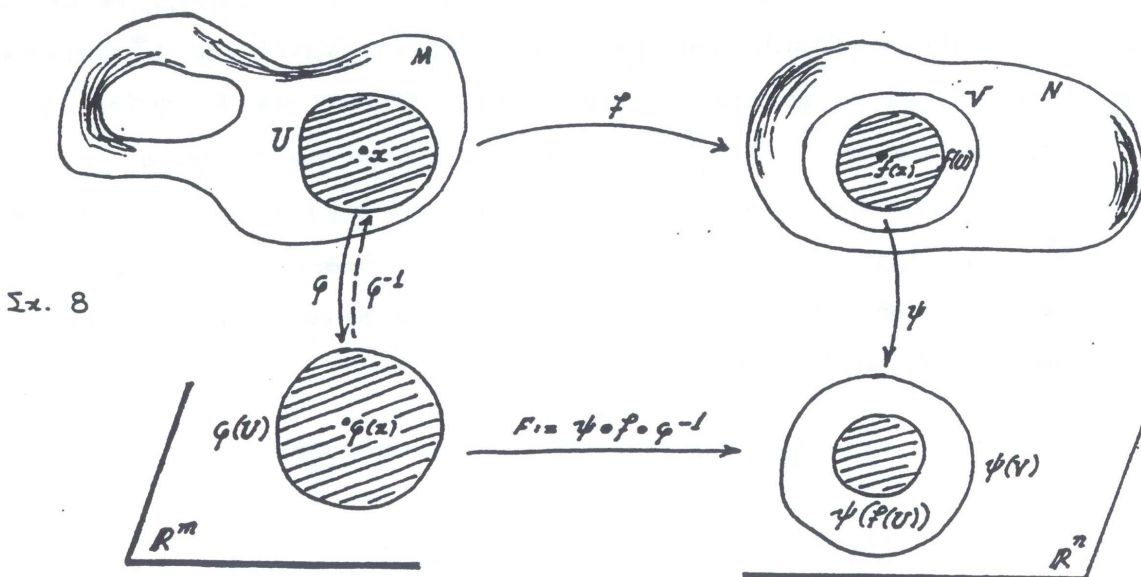
και τα ζεύγη $(U, \varphi), (V, \psi)$ με $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$, $V = (\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} - \{(0, 0, 0)\}) \cup \{(0, 0, 1)\}$, $\varphi(x, y, 0) = (x, y)$ και $\psi(x, y, 0) = (x, y)$, $\psi(0, 0, 1) = (0, 0)$. Να δείξετε ότι το σύνολο $\mathcal{A} = \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ είναι διαφορικός ατλαντής του M και ότι $(M, \tau_{\mathcal{A}})$ δεν είναι χώρος Hausdorff.

1.3 ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Θα ορίσουμε την έννοια της διαφορισιμότητας για απεικονίσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων γειτνεύοντας έτσι τη συνήθη διαφορισιμότητα απεικονίσεων μεταξύ ευκλείδειων χώρων. Η αντίστοιχη έννοια της παραγώγου (διαφορισμού) θα οριστεί πιο κάτω, με τη βοήθεια καταλλήλων γραμμικών χώρων (των εφαπτομένων χώρων), οι οποίοι προσαρτώνται στα σημεία της πολλαπλότητας.

1.3.1 ΟΡΙΣΜΟΣ. Υποθέτουμε ότι $(M, \mathcal{A}), (N, \mathcal{B})$ είναι C^k -διαφοριμές πολλαπλοτήτες ($0 \leq k \leq \infty$) με αντίστοιχες διαστάσεις m και n . Μια απεικόνιση $f: M \rightarrow N$ λέγεται διαφορίσιμη τάξης C^r στο σημείο $x \in M$ ($0 \leq r \leq k$), αν υπάρχουν χάρτες $(U, \varphi) \in \mathcal{A}, (V, \psi) \in \mathcal{B}$ έτσι ώστε: $x \in U, f(U) \subset V$ και η απεικόνιση $F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ να είναι διαφορίσιμη τάξης C^r στο σημείο $\varphi(x)$ [με τη συνήθη έννοια της διαφορισιμότητας σε ευκλείδειους χώρους· βλ. βιβλίο και το Παράρτημα]. Την απεικόνιση F θα λούμε τοπική παράσταση της f μέσω των χαρτών (U, φ) και (V, ψ) [βλ. Σχ. 8].

Μια $f: M \rightarrow N$ θα λέγεται (ολιγά) διαφορίσιμη τάξης C^r , αν είναι διαφορίσιμη τάξης C^r , σε κάθε σημείο $x \in M$. Συμβολίζουμε με $C^r(M, N)$ ($0 \leq r \leq k$) το σύνολο όλων των (ολιγά) διαφορίσιμων απεικονίσεων τάξης C^r μεταξύ των πολλαπλοτήτων M και N .



1.3.2 ΣΥΜΒΑΣΗ. Στα επόμενα λέγοντας διαφορίσιμη ή C^∞ -απεικόνιση (στο σημείο x) θα εννοούμε μια διαφορίσιμη απεικόνιση τάξης C^∞ (στο σημείο x) μεταξύ C^∞ -διαφοριμών πολλαπλοτήτων.

Υποθέτουμε ότι $M \equiv (M, \mathcal{A})$ και $N \equiv (N, \mathcal{B})$ είναι διαφορίσιμες, πολλαπλότητες με αντίστοιχες διαστάσεις m και n .

1.3.3 ΠΡΟΤΑΣΗ. Μια απεικόνιση $f: M \rightarrow N$ διαφορίσιμη στο $x \in M$ είναι και συνεχής στο x .
Ανάλογα, μια C^∞ -απεικόνιση $f: M \rightarrow N$ είναι συνεχής.

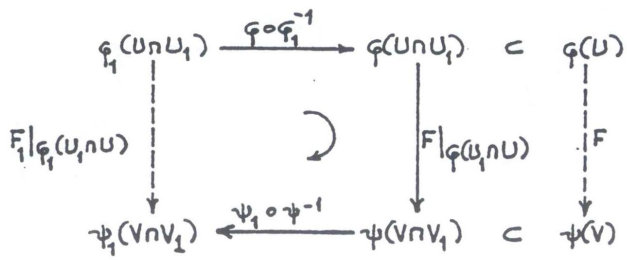
ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού η f είναι διαφορίσιμη στο x , υπάρχουν κάρτες $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ με $x \in U$, $f(U) \subset V$ και $F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ διαφορίσιμη στο $\varphi(x)$. Η F , εάν διαφορίσιμη, είναι συνεχής στο $\varphi(x)$. Άρα, επειδή οι φ και ψ είναι ομοιομορφισμοί, και η $f|_U = \psi^{-1} \circ F \circ \varphi$ θα είναι συνεχής στο x . Συνεπώς και η f είναι συνεχής στο x .

Το δεύτερο συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια του πρώτου. ■

Είναι ουσιώδες ότι ο ορισμός της διαφορισιμότητας δεν εξαρτάται από την επιλογή των καρτών συγκεκριμένα, έχουμε την

1.3.4 ΠΡΟΤΑΣΗ. Εστω $f: M \rightarrow N$ διαφορίσιμη απεικόνιση στο $x \in M$. Τότε, για κάθε ζεύγος καρτών $(U_1, \varphi_1) \in \mathcal{A}$ και $(V_1, \psi_1) \in \mathcal{B}$ με $x \in U_1$ και $f(U_1) \subset V_1$, η τοπική παράσταση $F_1 := \psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}: \varphi_1(U_1) \rightarrow \psi_1(V_1)$ είναι διαφορίσιμη στο $\varphi_1(x)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σύμφωνα με τα γνωστά για τη διαφορία σε ευκλείδειους χώρους, αρκεί να θρούμε ένα ανοιχτό υποσύνολο A του $\varphi_1(U_1)$, έτσι ώστε $\varphi_1(x) \in A$ και $F_1|_A$ να είναι C^∞ -απεικόνιση στο $\varphi_1(x)$. Λόγω της συμβιβαστότητας των καρτών $(U, \varphi), (U_1, \varphi_1)$ και $(V, \psi), (V_1, \psi_1)$, έχουμε ότι οι $\varphi \circ \varphi_1^{-1}: \varphi_1(U_1 \cap U) \rightarrow \varphi(U_1 \cap U)$ και $\psi \circ \psi_1^{-1}: \psi_1(V_1 \cap V) \rightarrow \psi(V_1 \cap V)$ είναι C^∞ -απεικονίσεις (παντού) [όπου $(U, \varphi), (V, \psi)$ είναι οι κάρτες με $x \in U$, $f(U) \subset V$ και $F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$, C^∞ -διαφορίσιμη στο $\varphi(x)$, που η ύπαρξή τους, εξασφαλίζεται από τον ορισμό 1.3.1]. Επίσης, επειδή το $\varphi(U \cap U_1)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\varphi(U)$ [αφού $\varphi(U)$ και $\varphi(U \cap U_1)$ είναι ανοιχτά στον \mathbb{R}^m], η $F|_{\varphi(U \cap U_1)}: \varphi(U \cap U_1) \rightarrow \psi(V \cap V_1)$ είναι διαφορίσιμη στο $\varphi(x)$ [εάν περιορισμός διαφορίσιμης απεικόνισης σε ανοιχτό υποσύνολο του πεδίου ορισμού της]. Επομένως, έχουμε το επόμενο μεταθετικό διάγραμμα:



Εύκολα διαπιστώνεται ότι $F(\varphi(U \cap U_1)) \subset \psi(V \cap V_1)$, δηλ. ορίζεται η σύνθεση $\psi_1 \circ \psi^{-1} \circ F|_{\varphi(U \cap U_1)}$. Άρα βρίσκουμε ότι $F_1|_{\varphi_1(U \cap U_1)} = (\psi_1 \circ \psi^{-1}) \circ F|_{\varphi(U \cap U_1)} \circ (\varphi \circ \varphi_1^{-1})$, η οποία είναι C^∞ στο

σημείο $\varphi_1(x)$; εάν σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων. θέτοντας $A = \varphi_1(U \cap U_1)$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα. ■

1.3.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ. (i) Ας υποθέσουμε ότι η διαφοριτή δομή της M (αντίστ. της N) ορίζεται από τον μέγιστο άτλαντα \mathcal{A} (αντίστ. \mathcal{B}), που προέρχεται από ένα δοσμένο άτλαντα \mathcal{A} (αντίστ. \mathcal{B}) του M (αντίστ. του N). Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, για να διατυπώσουμε αν μια $f: M \rightarrow N$ είναι C^∞ στο $x \in M$, αρκεί να ελέγξουμε τη διαφορίσιμότητα της τοπικής παράστασης F , για δύο χάρτες $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ [φυσικά με $x \in U$ και $f(U) \subset V$]. Δηλ. αρκεί ο έλεγχος της διαφορίσιμότητας της F για κατάλληλους χάρτες από τους \mathcal{A} και \mathcal{B} και όχι αναγκαστικά από τους μέγιστους.

Αυτό είναι, προφανώς, ιδιαίτερα χρήσιμο στις περιπτώσεις πολλαπλότητας, που η διαφοριτή δομή τους προκύπτει από κάποιους συγκεκριμένους (και ίσως βολικούς) άτλαντες. Αυτό π.χ. συμβαίνει στην περίπτωση του \mathbb{R}^n , οπότε μπορούμε να περιοριστούμε στον άτλαντα $\{(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})\}$, στην περίπτωση της σφαίρας S^2 , οπότε μπορούμε να κάνουμε τον έλεγχο μέσω των δύο καρτών της στερεογραφικής προβολής, κ.λ.π.

(ii) Η έννοια της διαφορίσιμότητας, όπως ορίστηκε προηγουμένως, συμπίπτει με τη συνήθη διαφορίσιμότητα αν εφαρμοστεί σε απεικονίσεις μεταξύ ευκλειδίων χώρων. Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι C^∞ στο x με την έννοια του Ορισμού 1.3.1, όταν τα $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ εφοδιαστούν με τη συνήθη δομή πολλαπλότητας [βλ. Παράδειγμα 1.1.9 (A)]. Παρατηρούμε ότι οι χάρτες $(\mathbb{R}^m, id_{\mathbb{R}^m})$ και $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$ ικανοποιούν τις απαιτήσεις του Ορισμού 1.2.1 και η τοπική παράσταση $id_{\mathbb{R}^n} \circ f \circ id_{\mathbb{R}^m}^{-1} \equiv f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμη στο $x \equiv id_{\mathbb{R}^m}(x)$, με την έννοια της διαφορίσιμότητας για απεικονίσεις μεταξύ ευκλειδίων χώρων. Και αντίστροφα, αν η f είναι διαφορίσιμη στο x (εάν απεικονίση ευκλειδίων χώρων), χρησιμοποιώντας τους ίδιους χάρτες έπουμε ότι η τοπική παράσταση (που ταυτίζεται με την f) είναι C^∞ στο x , άρα η f είναι C^∞ στο x εάν απεικονίση μεταξύ πολλαπλότητων.

Σ Πρέπει όμως να προσέξει κανείς το εξής: αν M είναι υποσύνολο του \mathbb{R}^m και έχει διαφοριτή δομή όπλ ανοικτής υποπολλαπλότητας, τότε μια απεικονίση $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, η οποία είναι C^∞ κατά τον Ορισμό 1.3.1, δε ν' είναι C^∞ εάν απεικονίση ευκλειδίων χώρων (βλ. σχετικό παράδειγμα πιο κάτω).

1.3.6 ΠΡΟΤΑΣΗ. Υποθέτουμε ότι X, Y, Z είναι διαφοριτές πολλαπλότητες και $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ διαφορίσιμες απεικονίσεις στα $x \in X$ και $f(x) \in Y$, αντίστοιχα. Τότε και η $g \circ f: X \rightarrow Z$ είναι διαφορίσιμη στο x . Ιδιαίτερα, για κάθε $f \in C^\infty(X, Y)$ και $g \in C^\infty(Y, Z)$ συνάγεται ότι $g \circ f \in C^\infty(X, Z)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού η g είναι C^∞ στο $f(x)$, θα υπάρχουν χάρτες (V, ψ) και (W, χ) των Y και Z , έτσι ώστε $f(x) \in V$, $g(V) \subset W$ και η $\chi \circ g \circ \psi^{-1} : \psi(V) \rightarrow \chi(W)$ να είναι C^∞ στο $\psi(f(x))$.

Απ' το άλλο μέρος, λόγω της συνέχειας της f στο x , το $f^{-1}(V)$ περιέχει ένα ανοιχτό υποδύναμο A του X με $x \in A$. Κατά το Πρόβλημα 1.2.4, θα υπάρξει χάρτης (U, φ) του X με $x \in U \subset A \subset f^{-1}(V)$. Επομένως, αφού $x \in U$, $f(U) \subset V$ και η f είναι διαφορίσιμη στο x , η Πρόταση 1.3.4 συνεπάγεται ότι η $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ είναι διαφορίσιμη στο $\varphi(x)$.

Μέσω των δύο προηγούμενων τοπιών παραστάσεων βλέπουμε ότι η απεικόνιση

$$\chi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\chi \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$$

είναι C^∞ στο $\varphi(x)$ εάν συνδέσει δύο C^∞ απεικονίσεις (σε ευκλείδειους χώρους, όπου ισχύει ο κανόνας της αλυσίδας). Επομένως καταλήγουμε στο πρώτο συμπέρασμα. Το δεύτερο είναι άμεση συνέπεια του προηγούμενου. ■

Η Πρόταση 1.3.6 θα μπορούσε να ονομαστεί και (μιάς) κανόνας της αλυσίδας ή (μιάς) θεώρημα της συνθέτου απεικονίσεως. Η ολοκληρωμένη μορφή του θα δοθεί στο επόμενο Κεφάλαιο 2, μαζί με τον υπολογισμό του διαφοριζομένου της σύνθεσης.

Ας εξετάσουμε τώρα δύο ειδικές περιπτώσεις απεικονίσεων που θα εμφανίζονται συχνά στη μελέτη μας. Εστώ πρώτα μια απεικόνιση της μορφής $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, δηλ. μια πραγματική συνάρτηση επί της πολλαπλότητας M . Θεωρώντας το \mathbb{R} με τη συνήθη διαφορίσιμη δομή [βλ. Παράδειγμα 1.1.9 (Α), για $n=1$] και χρησιμοποιώντας τον χάρτη $(\mathbb{R}, id_{\mathbb{R}})$ [βλ. σχετικά και τη βασική Παρατήρηση 1.3.5 (i)], διαπιστώνουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη ε' ένα $x \in M$, αν υπάρχει χάρτης (U, φ) του M με $x \in U$ και τέτοιος ώστε η τοπιική παράσταση

$$(1.6) \quad f \circ \varphi^{-1} = id_{\mathbb{R}} \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$$

να είναι διαφορίσιμη στο $\varphi(x)$. Επομένως, κατά την Πρόταση 1.3.4, θα είναι διαφορίσιμη στο αντίστοιχο σημείο και η ανάλογη τοπιική παράσταση, που προκύπτει από οποιοδήποτε χάρτη διερχόμενο από το x . Δηλ. καταλήγουμε στο

1.3.7 ΠΟΡΙΣΜΑ. Μια πραγματική συνάρτηση $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^∞ στο $x \in M$ τότε και μόνον τότε, αν υπάρχει χάρτης (U, φ) του M με $x \in U$, τέτοιος ώστε η (1.6) να είναι C^∞ στο $\varphi(x)$.

Ας πάρουμε τώρα μια απεικόνιση της μορφής $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, δηλ. μια διανυσματική συνάρτηση. Αν $\rho_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η i -πρωβολή, τότε ορίζονται και οι συνιστώσες συναρτήσεις

(1.7) $f_i := p_{\mathbb{R}^n} \circ f : M \rightarrow \mathbb{R} \quad (i=1, \dots, n)$

1.3.8 ΠΟΡΙΣΜΑ. Η $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμη στο $x \in M$ τότε και μόνον τότε αν οι συναρτήσεις $f_i \quad (i=1, \dots, n)$ είναι διαφορίσιμες στο x . Ιδιαίτερα,
 $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n) \iff f_i \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \quad (i=1, \dots, n)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν η f είναι C^∞ στο x , τότε και η $f_i = p_{\mathbb{R}^n} \circ f$ είναι C^∞ στο x , εάν είν-
 δεση διαφορίσιμων απεικονίσεων (υάδε $p_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^∞ παντού, άρα και στο $f(x)$,
 εάν γραμμική απεικόνιση).

Αντίστροφα, θεωρούμε τυχόντα χάρτη (U, φ) του M με $x \in U$. Γι' αυτόν και τον
 $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$ σχηματίζουμε την τοπική παράσταση $id_{\mathbb{R}^n} \circ f \circ \varphi^{-1} \equiv f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ και
 θα δείξουμε ότι είναι C^∞ στο $\varphi(x)$. Το τελευταίο συμβαίνει (βλ. Παράρτημα (B)) τότε
 και μόνον τότε αν οι $p_{\mathbb{R}^n} \circ (f \circ \varphi^{-1}) = (p_{\mathbb{R}^n} \circ f) \circ \varphi^{-1} = f_i \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^∞ στο
 $\varphi(x)$, πράγμα που ισχύει λόγω της διαφορίσιμότητας των $f_i \quad (i=1, \dots, n)$.

Η ιδιαίτερη περίπτωση (της ολικής διαφορίσιμότητας) είναι προφανής συνέπεια του πρώ-
 του μέρους της πρότασης. ■

1.3.9 ΟΡΙΣΜΟΣ. Μία απεικόνιση $f : M \rightarrow N$ μεταξύ διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων λέγεται
 αμφιδιαφορίσιμη (τάξης C^∞) αν είναι C^∞ , 1-1 και επί και η f^{-1} είναι επίσης C^∞ -απεικόνι-
 ση. Τότε οι M, N λέγονται αμφιδιαφορίσιμες.

1.3.10 (ΑΝΤΙ)ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Αν θεωρήσουμε το \mathbb{R} εφοδιασμένο με τη συνήθη διαφορίσιμη
 δομή (βλ. Παράδειγμα 1.1.9 (A), για $n=1$), τότε η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x^3$
 δεν είναι αμφιδιαφορίσιμη.

1.3.11 ΠΡΟΤΑΣΗ. Για υάδε χάρτη (U, φ) της M , η $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ είναι αμφιδιαφό-
 ριστη [όταν τα $U, \varphi(U)$ εφοδιαστούν με τη δομή της ανοικτής υποπολλαπλότητας των
 M, \mathbb{R}^m αντίστοιχα· βλ. Εφαρμογή 1.2.12].

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ο χάρτης (U, φ) της M είναι και χάρτης της U . Επίσης ο $(\varphi(U), id_{\varphi(U)})$
 είναι χάρτης της $\varphi(U)$. Η αντίστοιχη τοπική παράσταση έχει τη μορφή

$$id_{\varphi(U)} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = id_{\varphi(U)} : \varphi(U) \rightarrow \varphi(U).$$

Επειδή η τελευταία είναι αμφιδιαφορίσιμη (βλ. ευνηλίδειους χώρους), συνάγεται ότι και
 η φ είναι αμφιδιαφορίσιμη μεταξύ των αντίστοιχων πολλαπλοτήτων. ■

Ενα είδος ατεστρόφου συμπεράσματος μας δίνει η

1.3.12 ΠΡΟΤΑΣΗ. Εστω (M, \mathcal{A}) m -διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα και U, A

ανοιχτά υποσύνολα των M, \mathbb{R}^m αντίστοιχα. Αν $f: U \rightarrow A$ είναι αμφιδιαφορίση (ως προς τις δομές της ανοικτής υποπολλαπλότητας των M, \mathbb{R}^m) τότε το ζεύγος (U, f) είναι χάρτης του \mathcal{A} .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή η f είναι 1-1, επί και $f(U) = A$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^m , έπεται ότι (U, f) είναι χάρτης της M . Θα δείξουμε ότι ο (U, f) είναι C^∞ -συμβιβαστός με κάθε χάρτη $(V, \psi) \in \mathcal{A}$, οπότε θα είναι $(U, f) \in \mathcal{A}$, αφού \mathcal{A} μέγιστος.

Εστω $(V, \psi) \in \mathcal{A}$. Αν $U \cap V = \emptyset$, ισχύει το ζητούμενο. Αν $U \cap V \neq \emptyset$, τότε το $U \cap V$ είναι ανοιχτό υποσύνολο και του U και του V , άρα (μέσω των ομοιομορφισμών f και ψ) τα $f(U \cap V)$ και $\psi(U \cap V)$ είναι ανοιχτά υποσύνολα των $f(U)$ και $\psi(V)$ αντίστοιχα, οπότε είναι και ανοιχτά υποσύνολα του \mathbb{R}^m . Από το άλλο μέρος, επειδή f και ψ είναι αμφιδιαφορίσεις (η πρώτη από την υπόθεση και η δεύτερη από την Πρόταση 1.3.11) θα είναι αμφιδιαφορίσεις και οι περιορισμοί επί του ανοικτού υποσυνόλου $U \cap V$ των U και V [βλ. σχετικό Παράδειγμα πιο κάτω]

$$f|_{U \cap V} : U \cap V \rightarrow f(U \cap V), \quad \psi|_{U \cap V} : U \cap V \rightarrow \psi(U \cap V).$$

Συνεπώς οι απεικονίσεις

$$(\psi|_{U \cap V}) \circ (f|_{U \cap V})^{-1} \equiv \psi \circ f^{-1} : f(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V),$$

$$(f|_{U \cap V}) \circ (\psi|_{U \cap V})^{-1} \equiv f \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow f(U \cap V)$$

είναι C^∞ -απεικονίσεις, πράγμα που αποδεικνύει την συμβιβαστότητα των (U, f) και (V, ψ) και κλείνει την απόδειξη. ■

1.3.13 ΟΡΙΣΜΟΣ. Εστω M διαφορική πολλαπλότητα και $x \in M$. Μία τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση της M στο x είναι μια (πραγματική) C^∞ -συνάρτηση της μορφής $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου το A είναι ανοιχτή περιοχή του x στο M .

Ανάλογα, μια τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση της M είναι μια C^∞ -συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου το A είναι ανοιχτό υποσύνολο της M .

Συμβολίζουμε με $C_x^\infty(M, \mathbb{R})$ το σύνολο των τοπικά διαφορίσιμων συναρτήσεων της M στο x . Ας προσεχθεί ότι αν $f, g \in C_x^\infty(M, \mathbb{R})$, θα είναι $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, όπου τα ανοιχτά A και B περιέχουν το x , χωρίς να είναι κατ' ανάγκη $A=B$.

1.3.14 ΠΡΟΤΑΣΗ. Υποθέτουμε ότι M και N είναι διαφορικές πολλαπλότητες (διαστάσεων m και n , αντίστοιχα) και $f: M \rightarrow N$ απεικόνιση. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

i) Η f είναι C^∞ -απεικόνιση.

ii) Η f είναι συνεχής και για κάθε τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση g της N , η συνάρ-

| τηση $g \circ f|_{f^{-1}(A)}$, όπου A το πεδίο ορισμού της g , είναι C^∞ - απεικόνιση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι η f είναι C^∞ - απεικόνιση. Τότε είναι και συνεχής (Πρόταση 1.3.3). Επιπλέον, αν $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση της N , λόγω της συνέχειας της f , έχουμε ότι $f^{-1}(A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο της M και η $f|_{f^{-1}(A)}$ είναι διαφορίσιμη, εάν περιορισμός διαφορίσιμης απεικόνισης σε ανοιχτό σύνολο (βλ. και σχετικό παράδειγμα πιο κάτω). Επομένως και η σύνθεση $g \circ f|_{f^{-1}(A)}$ είναι διαφορίσιμη, δηλ. δείξαμε ότι $i) \Rightarrow ii)$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ισχύει η $ii)$. Θα δείξουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο x , για κάθε $x \in M$. Θεωρούμε ένα $x \in M$ και ένα χάρτη (V, ψ) της N με $f(x) \in V$. Η συνέχεια της f εξασφαλίζει ότι $f^{-1}(V)$ είναι ανοιχτή περιοχή του x , άρα (Πόρισμα 1.2.4) υπάρχει χάρτης (U, φ) της M με $x \in U \subset f^{-1}(V)$, δηλ. $x \in U$ και $f(U) \subset V$. Θα δείξουμε ότι η τοπική παράσταση $F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ είναι διαφορίσιμη στο $\varphi(x)$. Παρατηρούμε ότι η τελευταία είναι C^∞ - απεικόνιση αν και μόνον αν οι συνιστώσες συναρτήσεις $p_{r_j} \circ F: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^∞ ($j=1, \dots, r$), όπου $p_{r_j}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ η j -προβολή. Επίσης παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $\psi_j = p_{r_j} \circ \psi: V \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες στο $f(x)$, άρα, λόγω της υπόθεσης, οι $\psi_j \circ f|_{f^{-1}(V)}$ είναι διαφορίσιμες. Σύμφωνα με το Πόρισμα 1.3.7, οι $\psi_j \circ f|_{f^{-1}(V)} \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες. Ομως, $\psi_j \circ f|_{f^{-1}(V)} \circ \varphi^{-1} = \psi_j \circ f \circ \varphi^{-1} = p_{r_j} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} = p_{r_j} \circ F$, δηλ. οι $p_{r_j} \circ F$ είναι διαφορίσιμες, άρα είναι και διαφορίσιμες στο $\varphi(x)$, απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο. ■

Στο επόμενο βασικό θεώρημα, αποδεικνύουμε ότι η σύμπτωση δύο διαφορικών δομών επί του αυτού συνόλου ελέγχεται μέσω της αμφιδιαφορισιμότητας της ταυτοτικής απεικόνισης:

1.3.15 ΘΕΩΡΗΜΑ. Υποθέτουμε ότι το σύνολο M εφοδιάζεται με δύο διαφορικές δομές, μέσω των μεγίστων ατλάντων \mathcal{A} και \mathcal{B} , αντιστοίχων διαστάσεων m και n . Τότε, τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- i) Οι διαφορικές δομές συμπίπτουν, δηλ. $m=n$ και $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.
- ii) Η ταυτοτική απεικόνιση $id_M: (M, \mathcal{A}) \rightarrow (M, \mathcal{B})$ είναι αμφιδιαφορίσιμη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η συνεπαγωγή $i) \Rightarrow ii)$ είναι άμεση [αρκεί να ελέγξουμε τί συμβαίνει σε τυχόν σημείο $x \in M$, θεωρώντας το ζεύγος των χαρτών (U, φ) και (U, ψ) , με $x \in U$].

Δείχνουμε την $ii) \Rightarrow i)$: Θεωρούμε τυχόντες χάρτες $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$. Πρέπει να δείχθει ότι οι χάρτες αυτοί είναι διαφορικά συμβαστοί. Αν $U \cap V = \emptyset$, η περίπτωση είναι τετριμένη. Έστω $U \cap V \neq \emptyset$. Επειδή η $id_M: (M, \mathcal{A}) \rightarrow (M, \mathcal{B})$, εάν αμφι-

διαφόριση, είναι ομοιομορφισμός και $V \in \tau_{\mathcal{B}}$, θα είναι και $V = id_M^{-1}(V) \in \tau_{\mathcal{A}}$ καθώς και $U = id_M(U) \in \tau_{\mathcal{B}}$, αφού $U \in \tau_{\mathcal{A}}$. Επομένως, το $U \cap V$ είναι ανοικτό υποένοδο του U και του V , άρα (μέσω των ομοιομορφισμών f και ψ) τα $f(U \cap V)$ και $\psi(U \cap V)$ είναι ανοικτά υποένοδα των $f(U)$ και $\psi(V)$ αντίστοιχα, καθώς και των \mathbb{R}^m και \mathbb{R}^n αντίστοιχα.

Εξάλλου, $(U \cap V, f|_{U \cap V}) \in \mathcal{A}$ και $(U \cap V, \psi|_{U \cap V}) \in \mathcal{B}$ (βλ. Λήμμα 1.2.11), επομένως, έχει έννοια η τοπική παράσταση της id_M μέσω των παραπάνω καρτών, αφού $id_M(U \cap V) \subset U \cap V$. Η τοπική αυτή παράσταση, δηλ. η απεικόνιση

$$\psi|_{U \cap V} \circ id_M \circ (f|_{U \cap V})^{-1} \equiv \psi \circ f^{-1} : f(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

είναι, λόγω της υπόθεσης για την id_M , αμφιαφορίση, δηλ. οι κάρτες (U, f) και (V, ψ) είναι C^∞ -διαφορικά συμβαστοί. Επειδή λοιπόν οι κάρτες των \mathcal{A} και \mathcal{B} είναι μεταξύ τους συμβαστοί και \mathcal{A}, \mathcal{B} είναι μέγιστοι, έχουμε $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ και $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, άρα $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Παρατηρούμε τέλος ότι $f(U \cap V) \subset \mathbb{R}^m$, $\psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ και επειδή η $\psi \circ f^{-1}$ είναι αμφιαφορίση, για κάθε $a \in f(U \cap V)$ η παράγωγος $D(\psi \circ f^{-1})(a)$ είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός μεταξύ των χώρων \mathbb{R}^m και \mathbb{R}^n , δηλ. $m=n$ και ολοκληρώνεται η απόδειξη. ■

1.3.16 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ. (i) Αν υποθέσουμε ότι στο Θεώρημα 1.3.15 οι άτλαντες \mathcal{A} και \mathcal{B} δεν είναι μέγιστοι, τότε το M εφοδιάζεται με τις διαφορικές δομές (M, \mathcal{A}') και (M, \mathcal{B}') . Στην περίπτωση αυτή: $\mathcal{A}' = \mathcal{B}' \iff id_M : (M, \mathcal{A}') \rightarrow (M, \mathcal{B}')$ αμφιαφορίση. Ο έλεγχος της συμβαστότητας των (U, f) και (V, ψ) , όπως στην παραπάνω απόδειξη, αρκεί να γίνει μόνο για κάρτες των \mathcal{A} και \mathcal{B} αντίστοιχα, και ότι αναγκαία των μέγιστων. Πραγματικά, αν $(U, f) \in \mathcal{A}$ και $(V, \psi) \in \mathcal{B}$, όπως προηγουμένως, αποδεικνύουμε ότι ο (U, f) είναι συμβαστός με τον (V, ψ) , άρα $(U, f) \in \mathcal{B}'$ [και $(V, \psi) \in \mathcal{A}'$]. Δηλ. $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}'$ [και $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}'$]. Όμως $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$, δηλ. ο \mathcal{A} περιέχεται σε δύο μέγιστους άτλαντες, άρα $\mathcal{A}' = \mathcal{B}'$ (βλ. Θεώρημα 1.1.7).

(ii) Το Θεώρημα 1.3.15 ισχύει και για τοπολογικές πολλαπλότητες. Στην περίπτωση αυτή η id_M θα είναι απλώς ομοιομορφισμός. Η απόδειξη είναι ανάλογη με την απόδειξη που δόθηκε για διαφορικές πολλαπλότητες (αρκεί να αντικαταστήσουμε τις αμφιαφορίσεις με ομοιομορφισμούς). Όμως για την απόδειξη του ότι $m=n$, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ύπαρξη του γραμμικού ισομορφισμού $D(\psi \circ f^{-1})(a)$. Στην περίπτωση αυτή βρίσκουμε ότι $m=n$ με τη βοήθεια ενός (δύσκολου) θεωρήματος της Αλγεβρικής Τοπολογίας (βλ. και Παρατήρηση 1.1.3).

1.3.17 ΣΧΟΛΙΑ. (i) Αποδεικνύεται ότι το ένοδο των τοπικά διαφορίσιμων συναρτήσεων μιας πολλαπλότητας (M, \mathcal{A}) καθορίζει τη διαφορική δομή της πολλαπλότητας,

δηλ., αν το ανωτέρω σύνολο είναι γνωστό, είναι γνωστός και ο μέγιστος άτλαντας \mathcal{A} . Γι' αυτόν τον λόγο, το σύνολο των τοπικά διαφορίσιμων συναρτήσεων χρησιμοποιείται, αντί του άτλαντα, για να δοθεί ένας ισοδύναμος ορισμός της πολλαπλότητας. Η απόδειξη της ισοδυναμίας των δύο ορισμών ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτής της παρουσίασης.

(ii) Το σύνολο $C^\infty(M, \mathbb{R})$ των (ολικά) διαφορίσιμων συναρτήσεων μιας πολλαπλότητας είναι μια άλγεβρα μη τετριμμένη, αφού περιέχει πάντοτε τις σταθερές συναρτήσεις.

1.3.18 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

(A) Υποθέτουμε ότι M, N είναι διαφορικές πολλαπλότητες και $f: M \rightarrow N$ διαφορίσιμη απεικόνιση. Αν $A \subset M$ ανοιχτό, τότε και ο περιορισμός $f|_A: A \rightarrow N$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση (φυσικά, το A θεωρείται εφοδιασμένο με τη δομή της ανοικτής υποπολλαπλότητας).

Πραγματικά, αν $x \in A$ είναι τυχόν σημείο, λόγω της διαφορισιμότητας της f στο x , θα υπάρχουν χάρτες (U, φ) και (V, ψ) των M και N αντίστοιχα, έτσι ώστε $x \in U$, $f(U) \subset V$ και η τοπική παράσταση της f μέσω των προηγούμενων χαρτών

$$(1. \quad \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

να είναι C^∞ -απεικόνιση στο $\varphi(x)$.

Θεωρούμε τώρα τον χάρτη $(A \cap U, \varphi|_{A \cap U})$, που είναι χάρτης και του A και του M (βλ. Παράδειγμα 1.2. () και Αδειση της §2). Παρατηρούμε ότι $f|_{A \cap U} (A \cap U) = \varphi(A \cap U) \subset f(U) \subset V$. Άρα, θεωρώντας τους χάρτες $(A \cap U, \varphi|_{A \cap U})$ και (V, ψ) , και η τοπική παράσταση

$$\psi \circ f \circ (\varphi|_{A \cap U})^{-1}: \varphi(A \cap U) \equiv \varphi|_{A \cap U} (A \cap U) \rightarrow \psi(V)$$

είναι C^∞ -απεικόνιση στο $\varphi(x)$ [βλ. Πρόταση 1.3.4]. Επειδή όμως $\psi \circ f \circ (\varphi|_{A \cap U})^{-1} = \psi \circ f|_A \circ (\varphi|_{A \cap U})^{-1}$, τελικά έχουμε ότι

$$\psi \circ f|_A \circ (\varphi|_{A \cap U})^{-1}: \varphi(A \cap U) \equiv \varphi|_{A \cap U} (A \cap U) \rightarrow \psi(V)$$

είναι C^∞ -απεικόνιση στο $\varphi(x) = \varphi|_{A \cap U} (x)$. Όμως η τελευταία είναι η τοπική παράσταση της $f|_A$ ως προς τους χάρτες $(U \cap A, \varphi|_{U \cap A})$ και (V, ψ) των A και N , αντίστοιχα. Συνεπώς η $f|_A$ είναι διαφορίσιμη στο $x \in A$. Παρόμοια και για κάθε άλλο σημείο της A , οπότε η $f|_A$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση.

(B) Αν (U, φ) είναι χάρτης μιας πολλαπλότητας M και $\chi_i := \text{pr}_i \circ \varphi$ ($i=1, \dots, m; m := \dim M$) είναι οι συντεταγμένες που ορίζει ο χάρτης (βλ. Ορισμό 1.1.1), τότε οι χ_i είναι C^∞ -απεικονίσεις $: U \rightarrow \mathbb{R}$, σαν συνδέσεις των γραμμικών, άρα και C^∞ , απεικονίσεων $\text{pr}_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ με την διαφορίσιμη $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ (βλ. Προτάσεις 1.3.6 και 1.3.11).

(C) Το ανοιχτό διάστημα $(-1, 1)$ είναι αμφιδιαφορισμό με ολόκληρη την πραγματική

ευθεία \mathbb{R} .

Πράγματι, ορίζουμε την απεικόνιση

$$f: (-1,1) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := \frac{x}{1-x^2}$$

Διαπιστώνουμε αμέσως ότι η f είναι 1-1. Επίσης, είναι επί: αν $y \in \mathbb{R}$ και ζητήσουμε ένα $x \in (-1,1)$ με $f(x) = y$, θα πρέπει $yx^2 + x - y = 0$, απ' όπου προκύπτει ότι, για $y = 0$ είναι $x = 0$ και για $y \neq 0$ είναι $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4y^2}}{2y}$. Ελέγχει κανείς (δένει αριθμού ως προς τις ρίζες τριωνύμου (!)) ότι η ρίζα $\frac{-1 + \sqrt{1+4y^2}}{2y}$ βρίσκεται εντός του $(-1,1)$ ενώ η άλλη εκτός. Επομένως

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} 0, & \text{για } y=0 \\ \frac{-1 + \sqrt{1+4y^2}}{2y}, & \text{για } y \neq 0. \end{cases}$$

Οι f και f^{-1} είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις, άρα αποδεικνύεται ο ισχυρισμός.

Παρατήρηση: Η μελέτη της διαφορισιμότητας της f^{-1} στο 0 είναι πολύπλοκη. Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της Αντίστροφης Συναρτησης [βλ. Παράρτημα] και μάλιστα στην απλούστερη μορφή του για το \mathbb{R} [βλ. Απειροστικό Λογισμό]: "αν $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, με $U \subset \mathbb{R}$ ανοικτό, είναι C^∞ -απεικόνιση και για κάποιο $a \in U$ είναι $f'(a) \neq 0$, τότε υπάρχει περιοχή J του a , με $J \subset U$, και περιοχή V του $f(a)$, έτσι ώστε $f|_J: J \rightarrow V \subset \mathbb{R}$ να είναι αμφιδιαφόριση τάξης C^∞ ". Στην περίπτωση μας βλέπουμε ότι $f'(a) = \frac{1+a^2}{(1-a^2)^2} \neq 0$, για κάθε $a \in (-1,1)$. Άρα η f είναι 1-1, επί και τοπική αμφιδιαφόριση σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, δηλ. είναι ολική αμφιδιαφόριση.

(D) Θεωρούμε τον μοναδιαίο κύκλο S^1 με τη συνηθισμένη δομή πολλαπλότητας (ανάλογα με τη σφαίρα S^2), που ορίζεται μέσω των καρτών $(U_i^\alpha, \varphi_i^\alpha)$, με $i = x, y$ και $\alpha = +, -$. Θεωρούμε και την απεικόνιση

$$f: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 : ((x, y), (x', y')) \mapsto (xx' - yy', xy' + x'y).$$

Ελέγχει κανείς ότι η f παίρνει τιμές στον S^1 με στοιχειώδεις πράξεις ή ταυτίζοντας κάθε (x, y) με ένα μιγαδικό αριθμό z με $|z|=1$, οπότε διαπιστώνει ότι η f έχει τη μορφή $f(z, z') = z \cdot z'$. Θα δείξουμε ότι η f είναι C^∞ σε τυχόν $(z, z') \in S^1 \times S^1$

Η εύρεση κατάλληλων καρτών για την μελέτη της διαφορισιμότητας της τοπικής παράστασης στο αντίστοιχο σημείο εξαρτάται, φυσικά, από την δένει των z, z' και $f(z, z')$. Ας υποθέσουμε ότι το z βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο και το z' στο 3^ο (ανάλογα εξετάζονται όλες οι άλλες περιπτώσεις). Προφανώς το $z \cdot z'$ θα βρίσκεται στο 3^ο ή 4^ο τεταρτημόριο, επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε γι' αυτό τον κάρτη $(U_y^- = \{(x, y) \in S^1 : y < 0\}, \varphi_y^-)$.

Όμως, για τα σημεία z, z' δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ολόκληρους τους αντίστοιχους κάρτες (U_y^+, φ_y^+) και (U_y^-, φ_y^-) (ή (U_x^-, φ_x^-)), γιατί δεν ισχύει η σχέση

$f(U_y^+ \times U_y^-) \subset U_y^-$. Για το λόγο αυτό μιμναινομε τους προηγούμενους χάρτες, παίρνοντας την τομή τους με τα αντίστοιχα τεταρτημόρια. Φυσικά, οι τομές αυτές είναι και πάλι χάρτες του S^1 που περιέχουν τα z, z' .

Για την αυριβεια, θεωρούμε τους χάρτες (U_1, φ_1) και (U_3, φ_3) με

$$U_1 = U_y^+ \cap \{1^{\text{ο}} \text{ τεταρτημόριο}\} = \{1^{\text{ο}} \text{ τεταρτημόριο}\} = \{(x, y) \in S^1 : x > 0, y > 0\}$$

$$U_3 = U_y^- \cap \{3^{\text{ο}} \text{ τεταρτημόριο}\} = \{3^{\text{ο}} \text{ τεταρτημόριο}\} = \{(x, y) \in S^1 : x < 0, y < 0\},$$

και

$$\varphi_1 = \varphi_y^+|_{U_1}, \quad \varphi_3 = \varphi_y^-|_{U_3}.$$

Παρατηρούμε ότι $z \in U_1, z' \in U_3, f(U_1 \times U_3) \subset U_y^-$ και η τοπιική παράσταση της f είναι η

$$\varphi_y^- \circ f \circ (\varphi_1 \times \varphi_3)^{-1} : (\varphi_1 \times \varphi_3)(U_1 \times U_3) = \varphi_1(U_1) \times \varphi_3(U_3) \rightarrow \varphi_y^-(U_y^-).$$

Προσαρμόζοντας το ανάλογο της S^2 στην διυτή μας περίπτωση, θρίβουμε ότι

$$\varphi_1(U_1) = \varphi_y^+(U_1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\} = (0, 1)$$

$$\varphi_3(U_3) = \varphi_y^-(U_3) = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 0\} = (-1, 0)$$

$$\varphi_y^-(U_y^-) = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\} = (-1, 1),$$

συνεπώς η τοπιική παράσταση της f είναι της μορφής $\varphi_y^- \circ f \circ (\varphi_1 \times \varphi_3)^{-1} : (0, 1) \times (-1, 0) \rightarrow (-1, 1)$,

η οποία σε τυχόν $(t, s) \in (0, 1) \times (-1, 0)$ έπει την έκφραση:

$$\begin{aligned} [\varphi_y^- \circ f \circ (\varphi_1 \times \varphi_3)^{-1}](t, s) &= (\varphi_y^- \circ f)(\varphi_1^{-1}(t), \varphi_3^{-1}(s)) = (\varphi_y^- \circ f)((\varphi_y^+)^{-1}(t), (\varphi_y^-)^{-1}(s)) = \\ &= (\varphi_y^- \circ f)((t, \sqrt{1-t^2}), (s, -\sqrt{1-s^2})) = \varphi_y^-(ts + \sqrt{(1-t^2)(1-s^2)}, -t\sqrt{1-s^2} - s\sqrt{1-t^2}) = \\ &= ts + \sqrt{(1-t^2)(1-s^2)}. \end{aligned}$$

Η τελευταία έκφραση δείχνει ότι η τοπιική παράσταση είναι C^∞ σε κάθε σημείο του πεδίου ορίσμου

της, άρα και στο $(\varphi_1 \times \varphi_3)((x, y), (x', y')) = (x, x')$, δηλ. η f είναι C^∞ στο σημείο $(z, z') = ((x, y), (x', y'))$, για κάθε $((x, y), (x', y')) \in S^1 \times S^1$.

ΒΑΣΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Αν θεωρήσουμε την f απεικόνιση μεταξύ υποσύνολων των $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ και \mathbb{R}^2 , δηλ. $f : S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, επειδή τώρα η f ορίζεται σε υποσύνολο ευκλειδείου χώρου που δεν είναι ανοικτό (ο S^1 είναι κλειστό υποσύνολο του \mathbb{R}^2), δεν μπορεί να θεωρηθεί διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ ευκλειδίων χώρων (όπως ορίζεται η διαφορίσιμότητα στο Παράρτημα). Εν τούτοις, και τα έμβάβπ, η f μπορεί να θεωρηθεί και στην περίπτωση αυτή διαφορίσιμη, εάν περιορισμός επί του $S^1 \times S^1$, της διαφορίσιμης απεικόνισης $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : ((x, y), (x', y')) \mapsto (xx' - yy', xy' + x'y)$.

(Ε) Η προηγούμενη βασική παρατήρηση μας επιτρέπει να επεξεργαστούμε την έννοια της διαφορίσιμότητας και σε κλειστά σύνολα. Έτσι, μια απεικόνιση $f : K \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ (K κλειστό) θα λέγεται διαφορίσιμη, αν υπάρχει $U \subset \mathbb{R}^m$ ανοικτό, με $K \subset U$ και $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ διαφορίσιμη.

μη, έτσι ώστε $F|_K = f$. Ανάλογα, αν M είναι πολλαπλότητα και K κλειστό υποσύνολό-της, μια $F: K \rightarrow N$ (N πολλαπλότητα) θα λέγεται διαφορίσιμη αν υπάρχει $A \subset M$ ανοικτό, με $K \subset A$, και $F: A \rightarrow N$ διαφορίσιμη, με $F|_K = f$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν M, N είναι πολλαπλότητες και $p_M: M \times N \rightarrow M$ (αντ. $p_N: M \times N \rightarrow N$) είναι η προβολή στον πρώτο (αντ. στον δεύτερο) παράγοντα, να δείξετε ότι οι p_M και p_N είναι C^∞ -απεικονίσεις.

2. Υποθέτουμε ότι $f: M \rightarrow N$ είναι μια αμφιδιαφόριση μεταξύ πολλαπλοτήτων και $A \subset M$ ανοικτό. Να δείξετε ότι υπάρχει $B \subset N$ ανοικτό, έτσι ώστε τα A, B να είναι αμφιδιαφορικές (ανοιχτές) υποπολλαπλότητες. Τι συμπέραννετε για τον περιορισμό μιας αμφιδιαφόρισης επί ενός ανοικτού υποσυνόλου;

3. Θεωρούμε το \mathbb{R} εφοδιασμένο με την διαφορική δομή του Παραδείγματος 1.1.9 (A) και με τη διαφορική δομή της Αβελιανής \mathbb{F} (§1). Να δείξετε ότι οι διαφορικές αυτές δομές δεν συμβαίνουν. Τι συμβαίνει στην περίπτωση των αναλόγων τοπολογικών δομών;

4. Να δείξετε ότι μια σταθερή απεικόνιση επί μιας πολλαπλότητας είναι διαφορίσιμη. Επίσης, αν $A \subset M$ ανοικτό, να δείξετε ότι η κανονική εμφύτευση $i: A \hookrightarrow M$ είναι διαφορίσιμη.

5. Η απεικόνιση $\det: M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη.

6. Αν M, N, P είναι πολλαπλότητες και $f: P \rightarrow M \times N$ απεικόνιση, τότε να δείξετε ότι:
 $[\pi \circ f \text{ είναι } C^\infty] \iff [p_M \circ f \text{ και } p_N \circ f \text{ είναι } C^\infty]$.

7. Υποθέτουμε ότι M, N είναι σύνολα μη κενά και $f: M \rightarrow N$ απεικόνιση 1-1 και επί. Να δείξετε ότι αν ένα από τα M και N έχει διαφορική δομή, τότε μπορεί να οριστεί μια μοναδική διαφορική δομή και στο άλλο, έτσι ώστε $\pi \circ f$ να είναι αμφιδιαφόριση.

[Υπόδειξη: Εστω ότι το N είναι διαφορική πολλαπλότητα. Οι χάρτες της ζητούμενης δομής επί του M είναι της μορφής (U, φ) , όπου $U := f^{-1}(V)$ και $\varphi := \psi \circ (f|_U)$, για όλους τους χάρτες (V, ψ) του N . Ανάλογα φρίβουμε μια δομή διαφορικής πολλαπλότητας επί του N , αν το M είναι διαφορική πολλαπλότητα].

8. Να δείξετε ότι οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα $(a, b) \subset \mathbb{R}$ είναι αμφιδιαφορικό με το $(-1, 1)$. Κατά συνέπεια, όλα τα ανοικτά διαστήματα του \mathbb{R} είναι αμφιδιαφορικά μεταξύ τους, καθώς και με το \mathbb{R} .

[Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την απεικόνιση

$$\varphi: (-1, 1) \rightarrow (a, b): t \mapsto \frac{1}{2}[(1-t)a + (1+t)b].$$

9. Εστω $D^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 1\}$ (ο ανοικτός μοναδιαίος δίσκος) και $f: D^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η

απεικόνιση που ορίζεται με τη σχέση

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{1-x^2-y^2}, \frac{y}{1-x^2-y^2} \right).$$

Να δείξετε ότι η D ορίζει μια αμφιδιαφορία του D^2 επί του \mathbb{R}^2 .

10. Αν $f: M \rightarrow N$ και $f': M' \rightarrow N'$ είναι C^∞ -απεικονίσεις, τότε και η $f \times f': M \times M' \rightarrow N \times N'$, με $(f \times f')(x, x') := (f(x), f'(x'))$ είναι C^∞ -απεικόνιση.

11. Εστω X, Y, Z πολλαπλότητες και $f: X \times Y \rightarrow Z$ διαφορίσιμη απεικόνιση. Για ένα $(x, y) \in X \times Y$ ορίζουμε τις μερικές απεικονίσεις

$$f_x: Y \rightarrow Z: y \mapsto f_x(y) := f(x, y),$$

$$f_y: X \rightarrow Z: x \mapsto f_y(x) := f(x, y).$$

Να δείξει ότι οι f_x, f_y είναι διαφορίσιμες.

12. Εστω $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ η απεικόνιση με $\pi(x, y, z) := [x, y, z]$. Να δείξετε ότι η π είναι C^∞ . Γιατί δεν είναι αμφιδιαφορία;

13. Να δείξετε ότι ο δίσκος D^2 είναι αμφιδιαφορικός με το $(a, b)^2 := (a, b) \times (a, b)$, για οποιαδήποτε $a, b \in \mathbb{R}$.

14. Να δείξετε ότι το σύνολο των αμφιδιαφορίσεων $f: M \rightarrow M$ επί μιας πολλαπλότητας (συμβολισμός: $\text{Diff}(M)$) είναι ομάδα, με πράξη την σύνθεση των απεικονίσεων.

15. Να δείξετε ότι το $C^r(M, \mathbb{R})$, $r \geq 1$, είναι άλγεβρα. Συμβαίνει το ίδιο και με το $C_x^r(M, \mathbb{R})$ ή όχι, και γιατί; Ομοια για το $C^r(A, \mathbb{R})$ με $A \subset M$, ανοιχτό.

16. Να εξηγήσετε γιατί μεταξύ C^k -διαφορικτών πολλαπλοτήτων, δεν μπορούν να οριστούν C^r -διαφορίσιμες απεικονίσεις με $r > k$.

17. Εστω M, N πολλαπλότητες και $f: M \rightarrow N$ απεικόνιση. Να δείξετε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) Η f είναι C^∞ στο $x \in M$.

(ii) Η f είναι συνεχής στο x και, για κάθε $g \in C_{f(x)}^\infty(N, \mathbb{R})$, υπάρχει ανοιχτή περιοχή $A \subset M$ του x με $g \circ f|_A$ διαφορίσιμη στο x .

18. Εστω M, N πολλαπλότητες και $f: M \rightarrow N$ απεικόνιση. Για κάθε $x \in M$ οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) Η f είναι C^∞ στο $x \in M$.

(ii) Η f είναι συνεχής στο x και για κάθε ζεύγος καρτών (U, φ) της M και (V, ψ) της N με $x \in U$ και $f(x) \in V$, η απεικόνιση $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$ είναι διαφορίσιμη στο $\varphi(x)$.

19. Εστω (M, \mathcal{A}) διαφορική πολλαπλότητα. Τότε, για κάθε σημείο $x \in M$, υπάρχει κάρτης $(W, \chi) \in \mathcal{A}$ με $x \in W$ και $\chi(x) = 0$. Επίσης, υπάρχει κάρτης $(V, \psi) \in \mathcal{A}$ με $x \in V$ και $\psi(V) = \mathbb{R}^m$, όπου $m = \dim M$.

20. Έστω η απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: (\tau, u, v) \mapsto (\tau \cos u \cdot \cos v, \tau \sin u \cdot \cos v, \tau \sin v)$.

Να δείξετε ότι η f περιορισμένη επί του συνόλου

$$U = \left\{ (\tau, u, v) \in \mathbb{R}^3 : \tau \in (0, 1), u \in (-\pi, \pi), v \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \right\}$$

είναι αμφιδιαφόριση. Επίσης, να δείξετε ότι η απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $f(u, v) =$

$(\cos u \cdot \sin v, \sin u \cdot \sin v, \cos v)$ ορίζει μια C^∞ -απεικόνιση μεταξύ \mathbb{R}^2 και S^2 .

[Υπόδειξη: Στο πρώτο ερώτημα χρησιμοποιείτε το θεώρημα της Αντίστροφης Συναρτησης].

21. Αποδείξτε ότι ο προβολικός χώρος $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ είναι συμπαγής και συνεκτική πολλαπλότητα. Γενικεύστε το αποτέλεσμα για τον προβολικό χώρο $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

[Υπόδειξη: Στο πρώτο ερώτημα αποδείξτε ότι η απεικόνιση π της Ασκήσης 12 προηγούμενης είναι επί].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΔΕΣΜΗ

2.1 ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟΣ ΧΩΡΟΣ

Με την συνήθη έννοια της διαφορίσιμης (στην Πραγματική Ανάλυση) επιτυγχάνεται η τοπική προσέγγιση μιας διαφορίσιμης στο $x \in U$ απεικόνισης $f: U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ με μια γραμμική απεικόνιση $: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, το διαφορικό $Df(x)$. Για να πετύχουμε κάτι ανάλογο στις πολ/τες θα πρέπει πρώτα να προσαρτήσουμε σε αυτές κάποιους γραμμικούς χώρους, μεταξύ των οποίων θα ορίζονται τα διαφορικά. Ενώ στους Ευκλειδείς χώρους τα διαφορικά ορίζονται μεταξύ σταθερών χώρων (των \mathbb{R}^m και \mathbb{R}^n), στις πολ/τες οι χώροι αυτοί αλλάζουν μαζί με το σημείο x .

Στα επόμενα θεωρούμε μια διαφορίσιμη πολ/τα M με $\dim M = m$.

2.1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ. Μια διαφορίσιμη καμπύλη στην πολ/τα M είναι μια διαφορίσιμη απεικόνιση της μορφής $\alpha: J \rightarrow M$, όπου J ανοιχτό διάστημα του \mathbb{R} με $0 \in J$ (η διαφορίσιμότητα θεωρείται με την έννοια του Ορισμού 1.2.1, όπου το J εφοδιάζεται με τη δομή της ανοιχτής υποπολ/τας του \mathbb{R}).

Πολλές φορές, για ευκολία, θεωρούμε το J σαν συμμετρικό διάστημα της μορφής $(-\epsilon, \epsilon)$.

Θα λέμε αδόμη ότι μια καμπύλη α περνά από το $x \in M$, αν $\alpha(0) = x$.

2.1.2 ΟΡΙΣΜΟΣ. Έστω α, β διαφορίσιμες καμπύλες στο M που περνούν από το $x \in M$. Θα λέμε ότι οι α, β εφάπτονται στο x , ή ότι είναι ισοδύναμες στο x , αν υπάρχει χάρτης (U, φ) της M με $x \in U$ και

$$(2.1) \quad D(\varphi \circ \alpha)(0) = D(\varphi \circ \beta)(0).$$

2.1.3 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ. 1) Για τον ορισμό της παραπάνω σχέσης επαφής μεταξύ καμπύλων, αρκεί η \mathcal{C}^1 -διαφορίσιμότητά τους, αφού δεν υπάρχει απαίτηση που να αφορά τις παραγώγους ανώτερης τάξης.

2) Επειδή $D(\varphi \circ \alpha)(0) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$, οπότε $[D(\varphi \circ \alpha)(0)](\lambda) = \lambda[D(\varphi \circ \alpha)(0)](1)$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η συνθήκη (2.1) του ορισμού ισοδυναμεί με την απαίτηση $[D(\varphi \circ \alpha)(0)](1) = [D(\varphi \circ \beta)(0)](1)$, δηλ. με την

$$(2.2) \quad (\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0),$$

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \alpha)'(0) &= ((\varphi \circ \alpha)'(0), \dots, (\varphi \circ \alpha)'(0))' = \\ &= (x_1 \circ \alpha)'(0), \dots, (x_m \circ \alpha)'(0). \end{aligned}$$

(Υπενθυμίζουμε ότι $x_i = \varphi \circ \alpha$ είναι οι τοπιικές συντεταγμένες που αντιστοιχούν στο χάρτη (U, φ)).

2.1.4 ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν α, β εφάπτονται στο $x \in M$, τότε για κάθε χάρτη (V, ψ) της M με $x \in V$ ισχύει $D(\psi \circ \alpha)(0) = D(\psi \circ \beta)(0)$. Δηλ η σχέση της επαφής είναι ανεξάρτητη του χάρτη που περιέχει το x .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού α, β εφάπτονται στο x , $\alpha(0) = \beta(0) = x$ και υπάρχει χάρτης (U, φ) με $x \in U$ και $D(\varphi \circ \alpha)(0) = D(\varphi \circ \beta)(0)$. Αν (V, ψ) είναι ένας άλλος χάρτης με $x \in V$, τότε

$$\begin{aligned} D(\psi \circ \alpha)(0) &= D((\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \alpha))(0) = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \alpha(0)) \circ D(\varphi \circ \alpha)(0) = \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \beta(0)) \circ D(\varphi \circ \beta)(0) = D((\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \beta))(0) = \\ &= D(\psi \circ \beta)(0) \quad \bullet \end{aligned}$$

2.1.5 ΠΟΡΙΣΜΑ. Η επαφή των καμπύλων στο σημείο $x \in M$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Βάσει του προηγούμενου πορίσματος, το σύνολο των διαφορίσιμων καμπύλων που περνούν από το $x \in M$ διαμερίζεται σε υλάσεις ισοδυναμίας. Συμβολίζουμε με $[(\alpha, x)]$ την υλάση μιας τέτοιας καμπύλης α .

2.1.6 ΟΡΙΣΜΟΣ. Το σύνολο των παραπάνω υλάσεων ισοδυναμίας των καμπύλων που περνούν από το $x \in M$ ονομάζεται εφαπτόμενος χώρος της M στο x και συμβολίζεται με $T_x M$. Τα στοιχεία του ονομάζονται εφαπτόμενα διανύσματα. Συνικά, για συντομία, θέτουμε $[(\alpha, x)] = u$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι ο $T_x M$ εφοδιάζεται με δομή γραμμικού χώρου.

2.1.7 ΠΡΟΤΑΣΗ. Έστω $x \in M$ και (U, φ) χάρτης με $x \in U$. Τότε η απεικόνιση

$$\bar{\varphi}: T_x M \rightarrow \mathbb{R}^m: [(\alpha, x)] \mapsto [D(\varphi \circ \alpha)(0)](1) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$$

είναι καλά ορισμένη, 1-1 και επί.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Η $\bar{\varphi}$ είναι καλά ορισμένη: Άρκει να δείχθει ότι, αν $\beta \in [(\alpha, x)]$, δηλ. αν β, α εφάπτονται στο x , τότε $(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$. Αυτό όμως είναι άμεσο, λόγω της Παρατήρησης 2.1.3(2).

(ii) Η $\bar{\varphi}$ είναι 1-1: Έστω $[(\alpha, x)], [(\beta, x)] \in T_x M$ με $\bar{\varphi}([(\alpha, x)]) = \bar{\varphi}([(\beta, x)])$. Τότε $(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$, οπότε (βλ. Παρατήρηση 2.1.3(2)) $D(\varphi \circ \alpha)(0) = D(\varphi \circ \beta)(0)$.

δηλ. α, β εφάπτονται στο x , επομένως $[(\alpha, x)] = [(\beta, x)]$.

(iii) Η $\bar{\varphi}$ είναι επί: Έστω $h \in \mathbb{R}^m$. Θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m: t \mapsto \varphi(x) + t h$. Τότε $[D\varepsilon(0)](1) = \varepsilon'(0) = h$ και $\varepsilon(0) = \varphi(x)$. Επειδή η ε είναι συνεχής (στο 0) και $\varphi(U)$ είναι ανοιχτή περιοχή του $\varepsilon(0) = \varphi(x)$, υπάρχει $\delta > 0$ με $\varepsilon((- \delta, \delta)) \subseteq \varphi(U)$, δηλ. ορίζεται η σύνθεση $\alpha := \bar{\varphi}^{-1} \circ \varepsilon_0: (-\delta, \delta) \rightarrow U \subseteq M$, όπου $\varepsilon_0 = \varepsilon|_{(-\delta, \delta)}$. Η α είναι διαφορίσιμη καμπύλη του M που περνά από το x και $\bar{\varphi}([(\alpha, x)]) = (\varphi \circ \alpha)'(0) = \varepsilon_0'(0) = h$. ●

2.1.8 ΠΟΡΙΣΜΑ. Για κάθε $h \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\varphi}^{-1}(h) = [(\alpha, x)]$, όπου $\alpha(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + t h)$, για t μέσα σε κατάλληλο διάστημα J .

Η απεικόνιση $\bar{\varphi}$ ταυτίζει τα έννοια $T_x M$ και \mathbb{R}^m . Αρα μας επιτρέπει να μεταφέρουμε την αλγεβρική δομή του \mathbb{R}^m στο $T_x M$. Ορίζουμε

$$(2.3) \quad \begin{cases} u+v := \bar{\varphi}^{-1}(\bar{\varphi}(u) + \bar{\varphi}(v)) \\ \lambda u := \bar{\varphi}^{-1}(\lambda \bar{\varphi}(u)), \end{cases}$$

$\forall u, v \in T_x M$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Σημειώνουμε ότι η αλγεβρική δομή του $T_x M$ μπορεί να οριστεί και μέσω της σχέσης

$$\lambda u + \mu v := \bar{\varphi}^{-1}(\lambda \bar{\varphi}(u) + \mu \bar{\varphi}(v)),$$

αφ' όπου ορίζουμε την πρόθεση δέτοντας $u+v := 1u+1v$ και τον πολλαπλασιασμό δέτοντας $\lambda u := \lambda u + 0v$.

Επουμε το επόμενο:

2.1.9 ΘΕΩΡΗΜΑ. Αν $x \in M$ και (U, φ) χάρτης του M με $x \in U$, τότε οι πράξεις (2.3) εφοδιάζουν τον $T_x M$ με δομή γραμμικού χώρου, έτσι ώστε η $\bar{\varphi}$ να είναι γραμμικός ισομορφισμός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Άμεση εφαρμογή των εκθέσεων (2.3). ●

Αν $(U, \varphi), (V, \psi)$ χάρτες της M με $x \in U \cap V$, τότε υπάρχουν δύο απεικονίσεις $\bar{\varphi}, \bar{\psi}: T_x M \rightarrow \mathbb{R}^m$. Εν γένει $\bar{\varphi} \neq \bar{\psi}$. Όμως η δομή που ορίζουν στον $T_x M$ είναι η ίδια, δηλ. τα αποτελέσματα των πράξεων (2.3) δεν αλλάζουν αν αντικατασταθεί η $\bar{\varphi}$ με $\bar{\psi}$. Για να το αποδείξουμε, χρειάζομαστε πρώτα το εξής

2.1.10 ΛΗΜΜΑ. Αν $(U, \varphi), (V, \psi)$ χάρτες της M με $x \in U \cap V$, τότε $\bar{\psi} \circ \bar{\varphi}^{-1} = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε ένα $h \in \mathbb{R}^m$. Επειδή $\bar{\varphi}$ ισομορφισμός, υπάρχει $[(\alpha, x)] \in$

ε $T_x M$ με $\bar{\varphi}([\alpha, x]) = (\varphi \circ \alpha)'(0) = h$. Άρα

$$\begin{aligned} (\bar{\psi} \circ \bar{\varphi}^{-1})(h) &= \bar{\psi}([\alpha, x]) = [D(\psi \circ \alpha)(0)](1) = [D((\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \alpha))(0)](1) = \\ &= [D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \alpha(0)) \circ D(\varphi \circ \alpha)(0)](1) = \\ &= [D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))][D(\varphi \circ \alpha)(0)](1) = \\ &= [D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))](\varphi \circ \alpha)'(0) = \\ &= [D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))](h). \bullet \end{aligned}$$

ΣΧΟΛΙΟ. Στην προηγούμενη απόδειξη ένας αντιπροσώπος της υλάδας $[\alpha, x]$ είναι και η καμπύλη $\varphi^{-1} \circ \varepsilon_0$, όπου $\varepsilon_0(t) = \varphi(x) + t h$, για κατάλληλα t (βλ. και πρόταση 2.1.8). Αν χρησιμοποιηθεί η συγκεκριμένη καμπύλη, η απόδειξη γίνεται:

$$\begin{aligned} (\bar{\psi} \circ \bar{\varphi}^{-1})(h) &= \bar{\psi}([\varphi^{-1} \circ \varepsilon_0, x]) = (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varepsilon_0)'(0) = \\ &= [D(\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varepsilon_0)(0)](1) = \\ &= [D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varepsilon_0(0)) \circ D\varepsilon_0(0)](1) = \\ &= [D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))](D\varepsilon_0(0)(1)) = \\ &= [D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))](h). \end{aligned}$$

2.1.11 ΘΕΩΡΗΜΑ. Η γραμμική δομή του $T_x M$ δεν εξαρτάται από τον χάρτη (U, φ) .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν $(U, \varphi), (V, \psi)$ είναι χάρτες του M με $x \in U \cap V$, πρέπει να δείξει ότι

$$\bar{\psi}^{-1}(\lambda \bar{\psi}(u) + \mu \bar{\psi}(v)) = \bar{\varphi}^{-1}(\lambda \bar{\varphi}(u) + \mu \bar{\varphi}(v)),$$

που ισοδυναμεί με την

$$\lambda \bar{\psi}(u) + \mu \bar{\psi}(v) = \bar{\psi} \circ \bar{\varphi}^{-1}(\lambda \bar{\varphi}(u) + \mu \bar{\varphi}(v)).$$

Αυτό είναι προφανές, αφού η $\bar{\psi} \circ \bar{\varphi}^{-1}$ είναι γραμμική κατά το λήμμα 2.1.10. \bullet

2.1.12 ΟΡΙΣΜΟΣ. Λεω θεωρήσουμε ένα χάρτη (U, φ) με $x \in U$. Αν $\{e_i\}_{1 \leq i \leq m}$ είναι η κανονική βάση του \mathbb{R}^m , το σύνολο $\{\bar{\varphi}^{-1}(e_i)\}_{1 \leq i \leq m}$ είναι βάση του $T_x M$. Τα $\bar{\varphi}^{-1}(e_i)$ ονομάζονται κανονικά βασικά εφαπτόμενα διανύσματα του $T_x M$ ως προς τον χάρτη (U, φ) και συμβολίζονται με

$$(2.4) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x := \bar{\varphi}^{-1}(e_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

Συνεπώς ένα $u \in T_x M$ μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$(2.5) \quad u = \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x.$$

Δύο κρίσιμα αποτελέσματα που αφορούν τους εφαπτόμενους χώρους είναι τα επόμενα:

2.1.13 ΠΡΟΤΑΣΗ. Έστω $A \subset M$ ανοιχτό και $x \in A$. Αν το A εφοδιαστεί με τη δομή της ανοιχτής υποπολλίας, τότε $T_x A \cong T_x M$ (δηλ. οι εφαιπόμενοι χώροι ταυτίζονται μέσω ενός γραμμικού ισομορφισμού).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $u \in T_x A$. Τότε υπάρχει καμπύλη $\alpha: J \rightarrow A$ με $\alpha(0) = x$ και $u = [(\alpha, x)]_A$ (ο δεύτερος $[]_A, []_M$ στις ηλίσσεις μπαίνει για να βοηθήσει στη διάκριση των ηλίσσεων ισοδυναμίας στα A, M αντίστοιχα). Όμως η α είναι και καμπύλη του M και μάλιστα διαφορίσιμη, δίδει η $\alpha: J \rightarrow M$ είναι η σύνθεση των $\alpha: J \rightarrow A$ και $i: A \rightarrow M$ (βλ. Λεκ. 4, §2/Κεφ. 1). Δηλ. \exists και η ηλίσση $[(\alpha, x)]_M \in T_x M$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$f: T_x A \rightarrow T_x M : [(\alpha, x)]_A \mapsto [(\alpha, x)]_M.$$

(i) Η f είναι καλά ορισμένη: θα δείξουμε ότι αν $\beta \in [(\alpha, x)]_A$, δηλ. αν $[(\beta, x)]_A = [(\alpha, x)]_A$, τότε $\beta \in [(\alpha, x)]_M$, δηλ. $[(\beta, x)]_M = [(\alpha, x)]_M$, οπότε $f([(\beta, x)]_A) = f([(\alpha, x)]_A)$. Πράγματι, αν $\beta \in [(\alpha, x)]_A$, \exists κάρτης (U, φ) του A με $x \in U$ και $(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$. Όμως ο (U, φ) σαν κάρτης της ανοιχτής υποπολλίας A έχει τη μορφή $(U, \varphi) = (V \cap A, \psi|_{V \cap A})$, για κάποιο κάρτη (V, ψ) της M (βλ. Παραδ. 1.1.16 (B)). Άρα είναι κάρτης και της M (βλ. Λεκ. 2, §1/Κεφ. 1). Άρα η $(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$ συνεπάγεται και την επαφή των α, β στην M , δηλ. $\beta \in [(\alpha, x)]_M$.

(ii) Η f είναι 1-1: θεωρούμε α, β καμπύλες της A με $f([(\alpha, x)]_A) = f([(\beta, x)]_A)$, δηλ. με $[(\alpha, x)]_M = [(\beta, x)]_M$ και θα δείξουμε ότι $[(\alpha, x)]_A = [(\beta, x)]_A$. Αφού $[(\alpha, x)]_M = [(\beta, x)]_M$, για κάθε κάρτη (V, ψ) της M με $x \in V$, είναι $(\psi \circ \alpha)'(0) = (\psi \circ \beta)'(0)$. Άρα και για τον κάρτη (U, φ) της A (που είναι και κάρτης της M), $(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$. Επομένως α, β εφάπτονται στο x σαν καμπύλες της A , δηλ. $[(\alpha, x)]_A = [(\beta, x)]_A$.

(iii) Η f είναι γραμμική: Παίρνουμε ένα κάρτη (U, φ) του A (και του M !) με $x \in U$ και παρατηρούμε ότι το διάνυσμα

$$(2.6) \quad \begin{array}{ccc} T_x A & \xrightarrow{f} & T_x M \\ & \searrow \bar{\varphi}_A & \swarrow \bar{\varphi}_M \\ & \mathbb{R}^m & \end{array}$$

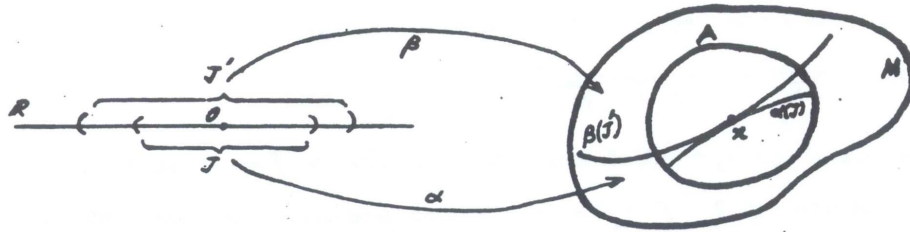
είναι μεταθετικό. Πράγματι, $\bar{\varphi}_M \circ f([(\alpha, x)]_A) = \bar{\varphi}_M([(\alpha, x)]_M) = (\varphi \circ \alpha)'(0) = \bar{\varphi}_A([(\alpha, x)]_A)$, για κάθε $[(\alpha, x)]_A \in T_x A$. Άρα $f = \bar{\varphi}_M^{-1} \circ \bar{\varphi}_A$ και είναι γραμμική σαν σύνθεση δύο γραμμικών ισομορφισμών. ●

ΣΧΟΛΙΑ. 1) Από το καλά ορισμένο της f έχουμε ότι $\beta \in [(\alpha, x)]_A \Rightarrow \beta \in [(\alpha, x)]_M$, δηλ.

$$[(\alpha, x)]_A \subset [(\alpha, x)]_M.$$

Όμως η δεύτερη ηλίσση είναι μεγαλύτερη από την πρώτη, αφού μπορεί να περιλάβει καμπύλες

$\beta: J' \rightarrow M$ που παίρνουν τιμές και έξω από το A (βλ. Σχήμα 9)



Σκ. 9

Απ' το άλλο μέρος, κάθε τέτοια καμπύλη β περιορισμένη κατάλληλα δίνει καμπύλη του A (πρβλ. το επί της \mathcal{F}).

2) Οι $\bar{\varphi}_M^{-1}$ και $\bar{\varphi}_A$ δεν είναι αντίστροφες η μια της άλλης, αφού το πεδίο ορισμού της $\bar{\varphi}_A$ (το $T_x A$) και το πεδίο τιμών της $\bar{\varphi}_M^{-1}$ (το $T_x M$) είναι διαφορετικά.

3) Τα μέρη (ii) και (iii) της προηγούμενης απόδειξης μπορούν να παραλειφθούν αφού η \mathcal{F} σαν σύνθεση γραμμικών ισομορφισμών (βλ. Διοργ. 2.6) είναι 1-1 και επί. Οι αποδείξεις γίνονται εδώ αναλυτικά μόνο για να γίνει εναργής η σχέση των υλάσεων των $T_x A$ και $T_x M$ μέσω της \mathcal{F} .

2.1.14 ΠΡΟΤΑΣΗ. Έστω M, N πολ/τες με $\dim M = m$ και $\dim N = n$. Τότε για κάθε $(x, y) \in M \times N$, ισχύει

$$T_{(x,y)}(M \times N) \cong T_x M \times T_y N$$

μέσω ενός γραμμικού ισομορφισμού.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $w = [(\alpha, (x, y))] \in T_{(x,y)}(M \times N)$. Μέσω των προβολών $p_M: M \times N \rightarrow M$ και $p_N: M \times N \rightarrow N$ (βλ. Λεμ. 1, §2/Κεφ. 1), ορίζονται οι διαφορίσιμες καμπύλες $\alpha_M := p_M \circ \alpha$ και $\alpha_N := p_N \circ \alpha$ στις M και N , έτσι ώστε $\alpha_M(0) = p_M(\alpha(0)) = p_M(x, y) = x$ και $\alpha_N(0) = y$. Συνεπώς ορίζονται οι υλάσεις $[(\alpha_M, x)] \in T_x M$ και $[(\alpha_N, y)] \in T_y N$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\Phi: T_{(x,y)}(M \times N) \rightarrow T_x M \times T_y N: [(\alpha, (x, y))] \mapsto [(\alpha_M, x), (\alpha_N, y)].$$

(i) Η Φ είναι καλά ορισμένη: Πράγματι, ως πάρουμε τυχούσα καμπύλη $\beta \in [(\alpha, (x, y))]$, οπότε $[(\beta, (x, y))] = [(\alpha, (x, y))]$. Η επαφή των α, β στο (x, y) συνεπάγεται ότι για κάθε κάρτη $(U \times V, \varphi \times \psi)$ της $M \times N$ με $(x, y) \in U \times V$ είναι

$$(2.7) \quad [(\varphi \times \psi) \circ \alpha]'(0) = [(\varphi \times \psi) \circ \beta]'(0).$$

Επειδή $\forall t \in J$ (: πεδίο ορισμού της α)

$$\begin{aligned} [(\varphi \times \psi) \circ \alpha](t) &= (\varphi \times \psi)(\alpha(t)) = (\varphi \times \psi)(\alpha_M(t), \alpha_N(t)) = (\varphi(\alpha_M(t)), \psi(\alpha_N(t))) = \\ &= (\varphi \circ \alpha_M, \psi \circ \alpha_N)(t), \end{aligned}$$

έχουμε

$$(2.8) \quad [(\varphi \times \psi) \circ \alpha]'(0) = ((\varphi \circ \alpha_M)'(0), (\psi \circ \alpha_N)'(0)).$$

Ανάλογα βρίσκουμε ότι

$$(2.9) \quad [(\varphi \times \psi) \circ \beta]'(0) = ((\varphi \circ \beta_M)'(0), (\psi \circ \beta_N)'(0)).$$

Συνεπώς οι (2.7), (2.8), (2.9) συνεπάγονται ότι $(\varphi \circ \alpha_M)'(0) = (\varphi \circ \beta_M)'(0)$ και $(\psi \circ \alpha_N)'(0) = (\psi \circ \beta_N)'(0)$, από τις οποίες προκύπτει ότι $[(\alpha_M, \alpha)] = [(\beta_M, \alpha)]$ και $[(\alpha_N, \psi)] = [(\beta_N, \psi)]$, άρα και $\Phi([(\alpha, (z, \gamma))]) = \Phi([(\beta, (z, \gamma))])$, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

(ii) Η Φ είναι γραμμικός ισομορφισμός: Πράγματι, θεωρώντας τους χάρτες (U, φ) , (V, ψ) και $(U \times V, \varphi \times \psi)$ που διέρχονται από τα x, y και (z, γ) αντίστοιχα, παρατηρούμε ότι μπορούμε να πάρουμε το επόμενο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} T_{(z, \gamma)}(M \times N) & \xrightarrow{\Phi} & T_x M \times T_y N \\ \downarrow \overline{\varphi \times \psi} & & \downarrow \overline{\varphi \times \psi} \\ \mathbb{R}^{m+n} & \xrightarrow{id} & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

Το διάγραμμα αυτό είναι μεταδετικό αφού για κάθε $[(\alpha, (z, \gamma))] \in T_{(z, \gamma)}(M \times N)$ είναι

$$[(\overline{\varphi \times \psi}) \circ f]([(\alpha, (z, \gamma))]) = (\overline{\varphi \times \psi})([(\alpha_M, \alpha)], [(\alpha_N, \gamma)]) =$$

$$= (\overline{\varphi}([(\alpha_M, \alpha)]), \overline{\psi}([(\alpha_N, \gamma)])) = ((\varphi \circ \alpha_M)'(0), (\psi \circ \alpha_N)'(0)) =$$

$$[\text{βλ. (2.8)}] = [(\varphi \times \psi) \circ \alpha]'(0) = \overline{\varphi \times \psi}([(\alpha, (z, \gamma))]).$$

Επομένως $\Phi = (\overline{\varphi \times \psi})^{-1} \circ \overline{\varphi \times \psi}$, που δείχνει ότι η Φ είναι γραμμικός ισομορφισμός. ●

2.1.15 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ.

(A) Έστω ο Ευκλείδειος χώρος \mathbb{R}^n με τη συνηθισμένη διαφοριική δομή που ορίζει ο άσλος $\{(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})\}$. Τότε ορίζεται και ο χώρος $T_x \mathbb{R}^n$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, του οποίου η δομή κατασκευάζεται από το χάρτη $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$ (και είναι φυσικά ανεξάρτητη από αυτή την επιλογή). Άρα έχουμε τον γραμμικό ισομορφισμό

$$id_{\mathbb{R}^n} : T_x \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

και τα αντίστοιχα διανύσματα βάσης

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x := id_{\mathbb{R}^n}^{-1}(e_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Ιδιαίτερα, στην περίπτωση του \mathbb{R} , έχουμε την αντιστοιχία

$$id_{\mathbb{R}} : T_s \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Τώρα θα υπάρχει ένα στοιχείο βάσης (αφού $\dim T_s \mathbb{R} = \dim \mathbb{R} = 1$), το οποίο συμβολίζουμε

$$(2.10) \quad \frac{d}{dt} \Big|_s := id_{\mathbb{R}}^{-1}(1).$$

Οπότε, $\forall u \in T_s \mathbb{R} \exists \lambda \in \mathbb{R} :$

$$u = \lambda \cdot \frac{d}{dt} \Big|_s.$$

(B) Έστω $u \in T_x M$. Τότε από τον ορισμό του u θα είναι $u = [(\alpha, x)]$ για κάποια καμπύλη $\alpha: J \rightarrow M$ με $\alpha(0) = x$. Έστω $\bar{\varphi}: T_x M \rightarrow \mathbb{R}^m$, για κάποιο χάρτη (U, φ) με $x \in U$. Τότε το u μπορεί να υλοποιηθεί και από την καμπύλη $\beta := \varphi^{-1}(\varepsilon(t))$, όπου $\varepsilon(t) := \varphi(x) + t\bar{\varphi}(u)$, για t σε κάποιο διάστημα $(-\delta, \delta)$ με $\varepsilon((-\delta, \delta)) \subseteq \varphi(U)$. Προσπαζι, όπως δείξαμε και στο επί της $\bar{\varphi}$, $\bar{\varphi}([\beta, x]) = (\varphi \circ \beta)'(0) = (\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varepsilon)'(0) = \varepsilon'(0) = \bar{\varphi}(u) = \bar{\varphi}([\alpha, x])$, δηλ.

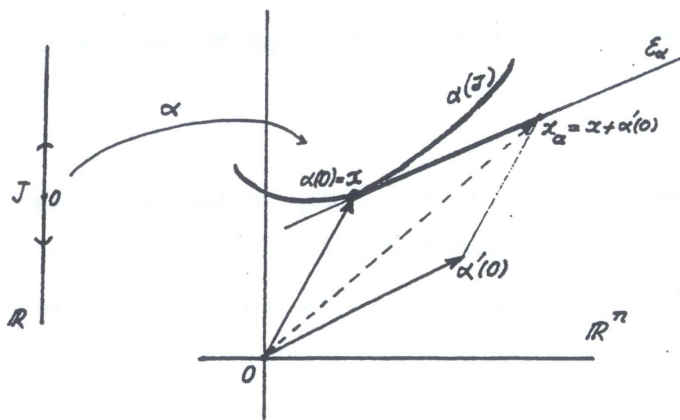
$$u = [(\alpha, x)] = [(\beta, x)].$$

Επομένως, κάθε $u = [(\alpha, x)] \in T_x M$ υλοποιείται και από την καμπύλη β , που προκύπτει από μια κατάλληλη ευθεία του \mathbb{R}^m [βλ. υπί ανάλογο στο Πρόβλημα 2.1.8 και το Σχόλιο μετά το Λήμμα 2.1.10].

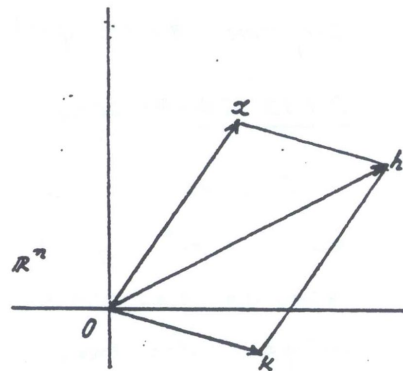
(Γ) Θα συνδέσουμε τον $T_x \mathbb{R}^n$ (σαν χώρο υλάσεων καμπύλων του \mathbb{R}^n) με ένα χώρο γιό οικείο, έτσι ώστε η γενική έννοια του εφαπτομένου διανύσματος (στην αφηρημένη μορφή των πολλατάτων) να αντιστοιχεί στη συνήθη έννοια του εφαπτομένου διανύσματος μιας καμπύλης, όπως την ξέρουμε από την Ανάλυση.

Έστω $u = [(\alpha, x)] \in T_x \mathbb{R}^n$. Μέσω της $\overline{id}_{\mathbb{R}^n}$ το u απεικονίζεται στο διάνυσμα (βλ. Σχήμα 10 (I))

$$(2.11) \quad \overline{id}_{\mathbb{R}^n}([\alpha, x]) = \alpha'(0) \in \mathbb{R}^n.$$



Σχ. 10 (I)



Σχ. 10 (II)

Είναι γνωστό από την Ανάλυση ότι η ευθεία $E_\alpha(t) := x + t\alpha'(0)$, δηλ. η ευθεία που περνά από το x και έχει κατεύθυνση το διάνυσμα $\alpha'(0)$, εφάπτεται της καμπύλης α στο σημείο $x = \alpha(0)$ (βλ. Σχήμα 10(I)). Η E_α είναι διαφορίσιμη καμπύλη του \mathbb{R}^n με $E_\alpha(0) = x$, άρα ορίζεται η υλάση $[(E_\alpha, x)] \in T_x \mathbb{R}^n$ και είναι

$$(2.12) \quad \overline{id}_{\mathbb{R}^n}([(E_\alpha, x)]) = E_\alpha'(0) = \alpha'(0).$$

Από τις (2.11) και (2.12) προκύπτει ότι

(2.13) $[(\alpha, x)] = [(\epsilon_\alpha, x)] = u.$

Αν το άλλο μέρος, στην $[(\epsilon_\alpha, x)]$ αντιστοιχεί κατά τρόπο αμφιμονοσήμαντο η ευθεία ϵ_α επί της οποίας βρίσκεται το (προεκανατολιγμένο) ευθύγραμμο τμήμα $\overline{x x_\alpha}$, όπου

$$x_\alpha := \alpha(0) + \alpha'(0) = x + \alpha'(0).$$

Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση f με

$$[(\alpha, x)] = [(\epsilon_\alpha, x)] \xrightarrow{f} \overline{x x_\alpha}.$$

Η f έχει πεδίο ορισμού του $T_x \mathbb{R}^n$ και παίρνει τιμές στο σύνολο των ευθύγραμμων τμημάτων του \mathbb{R}^n με αρχή το x .

Η f είναι υαλά ορισμένη: αν $\gamma \in [(\alpha, x)]$, τότε $\gamma(0) = x$ και $\gamma'(0) = \alpha'(0)$, άρα $x_\gamma = \gamma(0) + \gamma'(0) = x + \alpha'(0) = x_\alpha$ και $f([(\gamma, x)]) = \overline{x x_\gamma} = \overline{x x_\alpha} = f([(\alpha, x)])$. Επίσης

η f είναι 1-1: Αν υποθέσουμε ότι για δύο κλάσεις $[(\alpha, x)], [(\beta, x)]$ είναι

$$f([(\alpha, x)]) = f([(\beta, x)]), \text{ τότε: } \overline{x x_\alpha} = \overline{x x_\beta} \Rightarrow x_\alpha = x_\beta \Rightarrow \alpha'(0) = \beta'(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(\alpha, x)] = [(\beta, x)]. \text{ Τέλος, η } f \text{ είναι επί: Πράγματι, αν θεωρήσουμε τυχόν ευθύ-}$$

γραμμο τμήμα $\overline{x h}$ ($h \in \mathbb{R}^n$), ορίζονται το διάνυσμα $k := h - x$ (βλ. σχ. 10 (II)), η

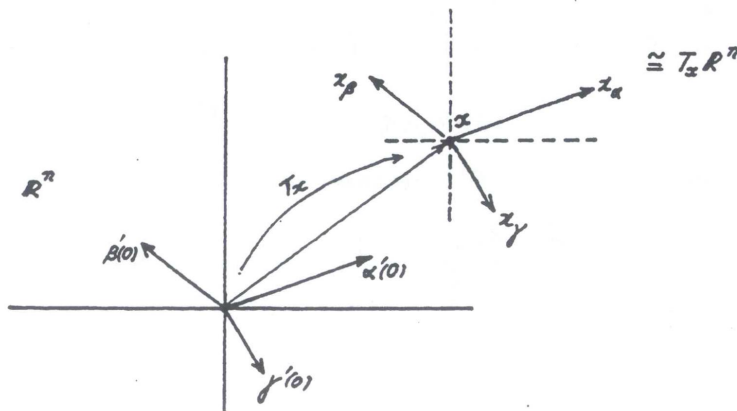
ευθεία $\epsilon(\epsilon) := x + t k$ και η κλάση $[(\epsilon, x)]$. Τότε $x_\epsilon = \epsilon(0) + \epsilon'(0) = x + k = h$ και

$$f([(\epsilon, x)]) = \overline{x x_\epsilon} = \overline{x h}.$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο, μέσω της f , ο $T_x \mathbb{R}^n$ έρχεται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με το σύνολο των ευθύγραμμων τμημάτων (του \mathbb{R}^n) τα οποία έχουν αρχή το x . Το σύνολο αυτό μπορεί να γίνει γραμμικός χώρος αν κάνουμε μια παράλληλη μετατόπιση T_x ολόκληρου του \mathbb{R}^n κατά το διάνυσμα x , οπότε το σύστημα των αξόνων με αρχή 0 μεταφέρεται (παράλληλα) στο σημείο x . Τότε τα τμήματα $\overline{x x_\alpha}, \overline{x x_\beta}$, κλπ. μπορούν να θεωρηθούν διανύσματα (: στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου) και είναι παράλληλες μεταφορές των $\alpha'(0), \beta'(0)$, κλπ., αντίστοιχα.

Ετσι τελικά, μέσω της απεικόνισης $T_x \circ f$, ο $T_x \mathbb{R}^n$ αντιστοιχεί κατά τρόπο 1-1 και επί με τον διανυσματικό χώρο διάστασης n με αρχή το x , και τα εδαπτόμενα διανύσματα του $T_x \mathbb{R}^n$ αντιστοιχούν στα διανύσματα με αρχή το x .

Σχ. 11



(Δ) Έστω ο εφαπτόμενος χώρος $T_x M$. Λίγες υποθέσουμε ότι $x \in U \cap V$, για δύο κάρτες (U, φ) και (V, ψ) . Για τον (U, φ) ορίζεται το τοπικό σύστημα συντεταγμένων $x_i := \varphi^{-1} \circ \rho_{\varphi}$, $i = 1, \dots, m$, και για τον (V, ψ) το τοπικό σύστημα συντεταγμένων $y_j := \psi^{-1} \circ \rho_{\psi}$, $j = 1, \dots, m$ ($m = \dim M$). Η δομή του $T_x M$ είναι ανεξάρτητη της επιλογής των καρτών, αλλά ορίζονται δύο διαφορετικοί ισομορφισμοί $\bar{\varphi}, \bar{\psi}: T_x M \rightarrow \mathbb{R}^m$. Μέσω αυτών έχουμε δύο βάσεις του $T_x M$:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x : i = 1, \dots, m \right\} \quad \text{και} \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_x : j = 1, \dots, m \right\},$$

όπου:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x := \bar{\varphi}^{-1}(e_i) \quad \text{και} \quad \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_x := \bar{\psi}^{-1}(e_j).$$

θα βρούμε τη σχέση των $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x$ και $\frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_x$.

Εφόσον $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x \in T_x M$ και τα $\frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_x$ αποτελούν βάση του $T_x M$, θα υπάρχουν $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$ με

$$(2.14) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x = \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_x.$$

Εφαρμόζοντας την $\bar{\psi}$ στην (2.14) έχουμε

$$(2.15) \quad \bar{\psi} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x \right) = \bar{\psi} \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_x \right) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \bar{\psi} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_x \right) = \sum_{j=1}^m \lambda_j e_j,$$

αλλά και

$$(2.16) \quad \bar{\psi} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x \right) = \bar{\psi} \circ \bar{\varphi}^{-1}(e_i) \stackrel{\text{Λήμμα 2.1.10}}{=} [D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))](e_i).$$

δηλαδή

$$(2.17) \quad [D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))](e_i) = \sum_{j=1}^m \lambda_j e_j.$$

Υπολογίζουμε το 1^ο μέλος της (2.17):

$$\begin{aligned} [D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))](e_i) &= ([D(\rho_{\psi} \circ \psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))](e_i), \dots, [D(\rho_{\psi} \circ \psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))](e_i)) = \\ &= ([D(\gamma_1 \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))](e_i), \dots, [D(\gamma_m \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))](e_i)) = \end{aligned}$$

$$(2.18) \quad = \left(\frac{\partial(\gamma_1 \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(x)}, \dots, \frac{\partial(\gamma_m \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(x)} \right).$$

[Γράβουμε $\frac{\partial}{\partial x_i}$ για να το ξεχωρίσουμε από το $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Το πρώτο σημαίνει μερική παράγωγο στον \mathbb{R}^m ενώ το δεύτερο δηλώνει εφαπτόμενο διάνυσμα]. Άρα:

$$[D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))](e_i) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial(\gamma_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(x)} \cdot e_j.$$

Η τελευταία μαζί με την (2.17) δείχνουν ότι

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial(\gamma_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(x)} \cdot e_j = \sum_{j=1}^m \lambda_j e_j,$$

άρα

$$\lambda_j := \frac{\partial(y_j \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i} \Big|_{\varphi(x)}$$

Άρα η (2.14) δίνει ότι

$$(2.18') \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial(y_j \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i} \Big|_{\varphi(x)} \right) \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x} \Big|_x$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Η απεικόνιση $f: (0, \pi/2) \ni t \mapsto f(t) := (2\cos^2 t, \sin 2t, 2\sin t) \in \mathbb{R}^3$ ορίζει μία διαφορίσιμη καμπύλη επί της σφαίρας S^2 με κέντρο $(0,0,0)$ και ακτίνα 2. Ιδιαίτερα, η εικόνα της καμπύλης δίνεται σαν τομή της προηγούμενης σφαίρας με τον κύλινδρο του οποίου η βάση είναι κύκλος στο επίπεδο των αξόνων x και y , με κέντρο $(1,0,0)$ και ακτίνα 1. Να γίνει πρόχειρο σχήμα της εικόνας.

2. Εστωσαν $u, v \in T_x M$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν καμπύλες γ, δ επί της M , έτσι ώστε:

α) $u+v = [(\gamma, x)]$ β) $\lambda u = [(\delta, x)]$

Ποια καμπύλη υλοποιεί το μηδενικό διάνυσμα του $T_x M$;

3. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες της απόδειξης του θεωρήματος 2.1.9

4. Εστω $u \in T_x M$. Αν $u = [(\alpha, x)]$ και (U, φ) κάρτης με $x \in U$, τότε

$$u = \sum_{i=1}^m (x_i \circ \alpha)'(0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x$$

όπου $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ που ορίζονται από τον (U, φ) και $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x := \varphi^{-1}(e_i)$.

5. Να υλοποιηθεί το $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x$ σαν υλάση ισοδυναμίας καμπύλων.

6. Να δείξετε ότι

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_x = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial(x_i \circ \psi^{-1})}{\partial u_j} \Big|_{\psi(x)} \right) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \Big|_x$$

7. Να υπολογίσετε τον τύπο της εφαρμογής (Δ) και της Λευκής θ , χρησιμοποιώντας τις αδιέξοδες 4 και 5.

8. Εστω $x \in M$ και $(U, \varphi), (V, \psi)$ κάρτες του M με $x \in U \cap V$. Αν $(x_i)_{1 \leq i \leq m}, (y_j)_{1 \leq j \leq m}$ είναι τα ευδετήματα συντεταγμένων που αντιστοιχούν στους $(U, \varphi), (V, \psi)$, τότε το τυκόν $u \in T_x M$ γράφεται $u = \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x = \sum_{j=1}^m \mu_j \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_x$. Να δειχθεί ότι:

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^m \mu_j \cdot \frac{\partial(x_i \circ \psi^{-1})}{\partial u_j} \Big|_{\psi(x)} \quad \text{και} \quad \mu_j = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \frac{\partial(y_j \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i} \Big|_{\varphi(x)}$$

2.2. ΤΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΜΙΑΣ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΗΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗΣ

Με τη βοήθεια των εφαπτομένων χώρων θα ορίσουμε την έννοια του διαφοριού μιας διαφορίσιμης απεικόνισης, γενικεύοντας έτσι την αντίστοιχη έννοια της παραγώγου, που γνωρίζουμε για ευθύεις διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ Ευκλειδών χώρων.

2.2.1 ΟΡΙΣΜΟΣ. Έστω $f: M \rightarrow N$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ των ποικιλιών M και N . Αν $x \in M$, θα λούμε διαφοριό της f στο x (ή παραγώγο της f στο x) την απεικόνιση

$$T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N : [(a, \alpha)] \mapsto [(f \circ a, f'(x))].$$

2.2.2 ΣΧΟΛΙΟ. Πολλοί συγγραφείς ονομάζουν την $T_x f$ και εφαπτομένη απεικόνιση της f στο x . Επίσης, αντί του συμβόλου $T_x f$ πολλοί χρησιμοποιούν τα σύμβολα $d_x f$ ή $f_{*,x}$. Εδώ θα κρατήσουμε τον συμβολισμό $T_x f$ για να θυμίζουμε ότι αναφερόμαστε σε απεικονίσεις μεταξύ εφαπτομένων χώρων και για να μην υπάρχει σύγχυση με το $d_x f$ που πολλές φορές δηλώνει και άλλα είδη διαφορίσιμης.

2.2.3 ΛΗΜΜΑ. Η $T_x f$ είναι καλά ορισμένη απεικόνιση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η $[(f \circ a, f'(x))] \in T_{f(x)} N$ πραγματικά, αφού $f \circ a$ είναι διαφορίσιμη καμπύλη του N με $(f \circ a)(0) = f(a(0)) = f(x)$, για κάθε $[(a, \alpha)] \in T_x M$.

Έστω τώρα ότι διαλέγουμε σαν αντιπρόσωπο του $u = [(a, \alpha)]$ την καμπύλη β , δηλ. $u = [(a, \alpha)] = [(b, \alpha)]$. Τότε, $(f \circ a)'(0) = (f \circ b)'(0)$ και ισοδύναμα (βλ. Παραγ. 2.1.3 (2))

$$(2.18) \quad D(f \circ a)(0) = D(f \circ b)(0),$$

για κάθε χάρτη (U, φ) της M με $x \in U$. Εξάλλου, λόγω της διαφορίσιμότητας της f στο x , θα υπάρχουν χάρτες (U, φ) και (V, ψ) με $x \in U$, $f(U) \subset V$ και έτσι ώστε η αντίστοιχη τοπιική παράσταση $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ να είναι διαφορίσιμη. Επομένως, για τις διαφορίσιμες καμπύλες $f \circ a$, $f \circ b$ που διέρχονται από το $f(x)$, θα έχουμε (βλ. Παράρτημα / Κεφ. 1, (C) Θεώρ. 2) :

$$\begin{aligned} D(\psi \circ (f \circ a))(0) &= D((\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (f \circ a))(0) = D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(f \circ a(0)) \circ D(f \circ a)(0) = \\ [βλ. (2.18)] \quad &= D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(f \circ b(0)) \circ D(f \circ b)(0) = \\ &= D((\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (f \circ b))(0) = D(\psi \circ (f \circ b))(0), \end{aligned}$$

άρα και (βλ. και πάλι την Πρόταση 2.1.4)

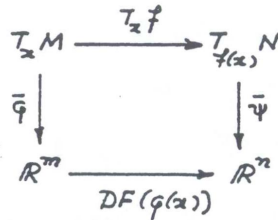
$$[(f \circ a, f'(x))] = [(f \circ b, f'(x))],$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. ●

2.2.4 ΛΗΜΜΑ. Αν $f: M \rightarrow N$ διαφορίσιμη στο x , (U, φ) , (V, ψ) χάρτες με $x \in U$, $f(U) \subset V$ τότε ισχύει η σχέση

(2.19) $T_x f = \bar{\psi}^{-1} \circ DF(\varphi(x)) \circ \bar{\varphi}$,

όπου $F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Δηλ. το επόμενο διάγραμμα είναι μεταθετικό:



ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Λόγω της διαφορισμότητας της f στο x , για τους χάρτες της υπόθεσης, έχουμε ότι η απεικόνιση $F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ διαφορίσιμη στο $\varphi(x)$, άρα ορίζεται η (ευνήθης παράγωγος μεταξύ Ευκλειδείου χώρων) $DF(\varphi(x)) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Θεωρούμε και τους αντίστοιχους γραμμικούς ισομορφισμούς $\bar{\varphi}: T_x M \rightarrow \mathbb{R}^m$ και $\bar{\psi}: T_{f(x)} N \rightarrow \mathbb{R}^n$. Θα δείξουμε ότι $DF(\varphi(x)) \circ \bar{\varphi} = \bar{\psi} \circ T_x f$. Πράγματι, έστω $[(\alpha, x)] \in T_x M$. Τότε

$$\begin{aligned}
 (DF(\varphi(x)) \circ \bar{\varphi})([(\alpha, x)]) &= [D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(\alpha(0)))]([D(\varphi \circ \alpha)(0)](1)) = \\
 &= [D((\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \alpha))(0)](1) = [D(\psi \circ (f \circ \alpha))(0)](1) = \\
 &= \bar{\psi}([(f \circ \alpha, f(x))]) = (\bar{\psi} \circ T_x f)([(\alpha, x)]).
 \end{aligned}$$

Από την $DF(\varphi(x)) \circ \bar{\varphi} = \bar{\psi} \circ T_x f$, προφανώς έπεται και η (2.19). ●

2.2.5 ΠΡΟΤΑΣΗ. Η $T_x f: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ είναι γραμμική απεικόνιση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αμέσως, βάσει του προηγούμενου Λήμματος, εάν εύνδεση τριών γραμμικών απεικονίσεων. ●

2.2.6 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ. 1) Ταυτίζοντας τους $T_x M$ και $T_x N$ με τους αντίστοιχους Ευκλειδείς χώρους μέσω των $\bar{\varphi}$ και $\bar{\psi}$, μπορούμε να ταυτίσουμε την $T_x f$ με την (ευνήθη) παράγωγο στο $\varphi(x)$ της τοπιότης παράστασης $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$

2) Όπως και στη ευνήθη παράγωγη η παράγωγος προσεγγίζει γραμμικά μία συνάρτηση,

Σχ. 12



ανάλογα, μπορούμε να πούμε ότι και η $T_x f$ προσεγγίζει την f γραμμικά στο x . Όπως, αντίστοιχα, ο εφαπτόμενος χώρος προσεγγίζει την πολλαπλα στο x . Εδώ όμως η έκφραση "προσεγγίζει" δεν έχει κάποια αντίστοιχη παράσταση, όπως στους Ευκλειδείς χώρους και φυσικά δεν είναι δυνατή κάποια παράσταση ούτε του εφαπτόμενου χώρου, ούτε του διαφορισμίου απεικόνισης.

Στην Πρόταση 1.2.6 είδαμε ότι η εύνδεση διαφορίσιμων απεικονίσεων είναι διαφορίσιμη

(μέσος κανόνας αλυσίδας). Η επόμενη πρόταση ολοκληρώνει τον κανόνα αυτό, αφού μας δίνει και τη σχέση των αντίστοιχων διαφορικών.

2.2.7 ΘΕΩΡΗΜΑ (Κανόνας της αλυσίδας). Αν $f: X \rightarrow Y$ και $g: Y \rightarrow Z$ είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις, τότε για κάθε $x \in X$ ισχύει:

$$T_x(g \circ f) = T_{f(x)}g \circ T_x f.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $u = [(\alpha, x)] \in T_x X$. Τότε

$$\begin{aligned} (T_x(g \circ f))(u) &= (T_x(g \circ f))([(\alpha, x)]) = [((g \circ f) \circ \alpha, (g \circ f)(x))] = \\ &= [(g \circ (f \circ \alpha), g(f(x)))] = T_{f(x)}g([(\alpha, x)]) = \\ &= T_{f(x)}g(T_x f([(\alpha, x)])) = (T_{f(x)}g \circ T_x f)(u). \bullet \end{aligned}$$

Αποδεικνύουμε το επόμενο θεμελιώδες αποτέλεσμα επί των πολυτήτων (βλ. το ανάλογο © Θεώρ. 1, Παράρτημα Κεφ. 1).

2.2.8 ΘΕΩΡΗΜΑ (Αντίστροφης Απεικόνισης). Έστω $f: M \rightarrow N$ διαφορίσιμη απεικόνιση. Αν, για ένα $x_0 \in M$, το διαφορικό $T_{x_0} f: T_{x_0} M \rightarrow T_{f(x_0)} N$ είναι ισομορφισμός (διανυσματικών χώρων), τότε η f είναι τοπική αμφιδιαφόριση στο x_0 , δηλ. υπάρχουν ανοιχτά εύνολα $U_0 \subset M$ και $V_0 \subset N$, έτσι ώστε $x_0 \in U_0$, $f(x_0) \in V_0$ και η $f|_{U_0}: U_0 \rightarrow V_0$ να είναι αμφιδιαφόριση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού η f είναι διαφορίσιμη στο x_0 , υπάρχουν χάρτες (U, φ) και (V, ψ) με $x_0 \in U$, $f(U) \subset V$ και έτσι ώστε η τοπιική παράσταση $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ να είναι διαφορίσιμη στο $\varphi(x_0)$. Τότε, από το Λήμμα 2.2.4, προκύπτει ότι $DF(\varphi(x)) = \bar{\psi} \circ T_x f \circ \bar{\varphi}^{-1}$, δηλ. η $DF(\varphi(x)): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ (όπου $m = \dim M = n = \dim N$) είναι γραμμικός ισομορφισμός, αν σύνθεση τριών γραμμικών ισομορφισμών. Επομένως, κατά το Θεώρημα της Αντίστροφης Απεικόνισης μεταξύ Ευκλειδείου χώρων (© Θεώρ. 1, Παράρτ. Κεφ. 1), θα υπάρχει ένα ανοιχτό υποεύνολο A του \mathbb{R}^m με $\varphi(x_0) \in A$ και ένα ανοιχτό υποεύνολο B του \mathbb{R}^n με $F(\varphi(x_0)) = \psi(f(x_0)) \in B$ έτσι ώστε η $F|_A: A \rightarrow B$ να είναι αμφιδιαφόριση. Επομένως ορίζονται τα ανοιχτά εύνολα $U_0 = \varphi^{-1}(A)$ και $V_0 = \psi^{-1}(B)$ των M, N αντίστοιχα, και έτσι ώστε $f|_{U_0} = \psi^{-1}|_B \circ F|_A \circ \varphi|_{U_0}$. Επομένως η $f|_{U_0}$ είναι αμφιδιαφόριση. \bullet

2.2.9 ΠΟΡΙΣΜΑ. Αν $f: M \rightarrow N$ είναι διαφορίσιμη 1-1 και επί απεικόνιση και για κάθε $x \in M$, η $T_x f$ είναι ισομορφισμός, τότε η f είναι (ολιγή) αμφιδιαφόριση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προφανής συνέπεια του Θεωρήματος 2.2.8. \bullet

Ας θεωρήσουμε τώρα μια απεικόνιση $f: X \times Y \rightarrow Z$. Για ένα $(x, y) \in X \times Y$ ορίζουμε τις μερικές απεικονίσεις

$$f_x: Y \rightarrow Z: y \mapsto f_x(y) := f(x, y),$$

$$f_y: X \rightarrow Z: x \mapsto f_y(x) := f(x, y).$$

Αν η f είναι διαφορίσιμη, τότε και οι f_x, f_y είναι διαφορίσιμες (γιατί;).

Με τους προηγούμενους συμβολισμούς έχουμε το επόμενο βασικό (και χρήσιμο).

2.2.10 ΘΕΩΡΗΜΑ (Τύπος του Leibniz). Υποθέτουμε ότι $f: X \times Y \rightarrow Z$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση. Τότε, για κάθε $(x, y) \in X \times Y$, μετά την ταύτιση $T_{(x,y)}(X \times Y) \cong T_x X \times T_y Y$ (Πρόταση 2.1.14), ισχύει η σχέση

$$T_{(x,y)} f(u, v) = T_x f_y(u) + T_y f_x(v),$$

για κάθε $(u, v) \in T_x X \times T_y Y$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού f διαφορίσιμη στο (x, y) , θα υπάρχουν κάμπτες $(U, \varphi), (V, \psi)$ και (W, χ) με $x \in U, y \in V, f(U \times V) \subset W$ και τέτοιοι ώστε η αντίστοιχη τοπιική παράσταση $\chi \circ f \circ (\varphi \times \psi)^{-1}$ να είναι διαφορίσιμη στο $(\varphi(x), \psi(y))$. Θεωρούμε και το μεταδεκτικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} T_x X \times T_y Y \cong T_{(x,y)}(X \times Y) & \xrightarrow{T_{(x,y)} f} & T_{f(x,y)} Z \\ \bar{\varphi} \times \bar{\psi} \downarrow & & \downarrow \bar{f} \\ \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{D(\chi \circ f \circ (\varphi \times \psi)^{-1})(\varphi(x), \psi(y))} & \mathbb{R}^l \quad (l = \dim Z) \end{array}$$

Για κάθε $(u, v) \in T_x X \times T_y Y$ είναι:

$$\bar{f} \circ T_{(x,y)} f(u, v) = [D(\chi \circ f \circ (\varphi \times \psi)^{-1})(\varphi(x), \psi(y))] \circ (\bar{\varphi} \times \bar{\psi})(u, v) =$$

$$= [D(\chi \circ f \circ (\varphi \times \psi)^{-1})(\varphi(x), \psi(y))] (\bar{\varphi}(u), \bar{\psi}(v)) =$$

[Παράρτ. ③]

$$= [D(\chi \circ f \circ (\varphi \times \psi)^{-1})_{\psi(y)}(\varphi(x))] (\bar{\varphi}(u)) +$$

$$+ [D(\chi \circ f \circ (\varphi \times \psi)^{-1})_{\varphi(x)}(\psi(y))] (\bar{\psi}(v)) =$$

$$= [D(\chi \circ f_y \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))] (\bar{\varphi}(u)) +$$

$$+ [D(\chi \circ f_x \circ \psi^{-1})(\psi(y))] (\bar{\psi}(v)) =$$

$$= [D(\chi \circ f_y \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \circ \bar{\varphi}] (\bar{\varphi}(u)) + [D(\chi \circ f_x \circ \psi^{-1})(\psi(y)) \circ \bar{\psi}] (\bar{\psi}(v)) =$$

[Λήμμα 2.2.4]

$$= \bar{f} \circ T_x f_y(u) + \bar{f} \circ T_y f_x(v) = \bar{f} (T_x f_y(u) + T_y f_x(v)),$$

από την οποία προκύπτει η σχέση του θεωρήματος. ●

2.2.11 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

(Α) Σαν άμεση συνέπεια του Ορισμού 2.2.1 έχουμε ότι, για κάθε $x \in M$:

$$T_x id_M = id_{T_x M}.$$

(Β) Έστω $x \in M$ και (U, φ) κάρτης με $x \in U$. Μετά την ταύτιση $T_{\varphi(x)} \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m$ (μέσω της $\overline{id}_{\mathbb{R}^m}$), για κάθε $u = [(\alpha, \alpha)] \in T_x M$ είναι $T_x \varphi(u) = T_x \varphi([\alpha, \alpha]) = [(\varphi_* \alpha, \varphi_* \alpha)] \stackrel{\overline{id}_{\mathbb{R}^m}}{\cong} (\varphi_* \alpha)'(0) = \overline{\varphi}([\alpha, \alpha]) = \overline{\varphi}(u)$, δηλ. $T_x \varphi \cong \overline{\varphi}$. [Πιο τυπικά ισχύει η σχέση: $T_x \varphi =$

(Γ) Μετά την ταύτιση $T_{(x,y)}(M \times N) \cong T_x M \times T_y N$ (μέσω της Φ της Πρότ. 2.1.14), έχουμε ότι

$$T_{(x,y)} P_M = P_{E_1},$$

όπου $P_{E_1}: T_x M \times T_y N \rightarrow T_x M$ (η προβολή στον πρώτο παράγοντα). Ανάλογα και

$$T_{(x,y)} P_N = P_{E_2}.$$

Πράγματι, σύμφωνα με τον Ορισμό της Φ (Πρόταση 2.1.14), έχουμε ότι το επόμενο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} T_{(x,y)}(M \times N) & \xrightarrow{\Phi} & T_x M \times T_y N \\ T_{(x,y)} P_M \downarrow & & \downarrow P_{E_1} \\ T_x M & \xrightarrow{id_{T_x M}} & T_x M \end{array}$$

Επομένως, θεωρώντας ότι $T_{(x,y)}(M \times N) \cong T_x M \times T_y N$, έχουμε το αποτέλεσμα.

(Δ) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη απεικόνιση. Τότε, για κάθε $s \in \mathbb{R}$,

$$T_s f \left(\frac{d}{dt} \Big|_s \right) = f'(s) \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{f(s)}.$$

Πραγματικά, από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} T_s \mathbb{R} & \xrightarrow{T_s f} & T_{f(s)} \mathbb{R} \\ \overline{id}_{\mathbb{R}} \downarrow & & \downarrow \overline{id}_{\mathbb{R}} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{Df(s)} & \mathbb{R} \\ & \cong & \\ & D(\overline{id}_{\mathbb{R}} \circ f \circ \overline{id}_{\mathbb{R}}^{-1})(s) & \end{array}$$

έχουμε ότι (βλ. (2.10)):

$$\begin{aligned} T_s f \left(\frac{d}{dt} \Big|_s \right) &= (\overline{id}_{\mathbb{R}}^{-1} \circ Df(s) \circ \overline{id}_{\mathbb{R}}) \left(\frac{d}{dt} \Big|_s \right) = (\overline{id}_{\mathbb{R}}^{-1} \circ Df(s))(1) = \overline{id}_{\mathbb{R}}^{-1} (Df(s)(1)) = \\ &= \overline{id}_{\mathbb{R}}^{-1} (f'(s)) = \overline{id}_{\mathbb{R}}^{-1} (f'(s) \cdot 1) = f'(s) \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{f(s)} \end{aligned}$$

(Ε) Έστω $f: M \rightarrow N$ αμφιδιαφόριστη. Τότε, $\forall x \in M$, ισχύει η σχέση:

(2.20) $T_{f(z)} f^{-1} = (T_z f)^{-1}$.

Πράγματι, εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας στην $f \circ f^{-1} = id_N$ έχουμε ότι

(2.21) $T_z f \circ T_{f(z)} f^{-1} = T_{f(z)} (f \circ f^{-1}) = T_{f(z)} id_N = id_{T_{f(z)} N}$.

Παρόμοια, από την $f^{-1} \circ f = id_M$, βρίσκουμε

(2.22) $T_{f(z)} f^{-1} \circ T_z f = id_{T_z M}$.

Από τις (2.21) και (2.22) προκύπτει η (2.20).

(Z) Έστω καμπύλη $\alpha: J \rightarrow M$. Ορίζουμε σαν εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης α στο σημείο t το διάνυσμα

(2.23) $\dot{\alpha}(t) := T_t \alpha \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) \in T_{\alpha(t)} M$.

Αν τώρα $M = \mathbb{R}^m$, θεωρώντας την ταύτιση $T_t J \cong T_t \mathbb{R}$, έχουμε το μεταδετικό διάγραμμα

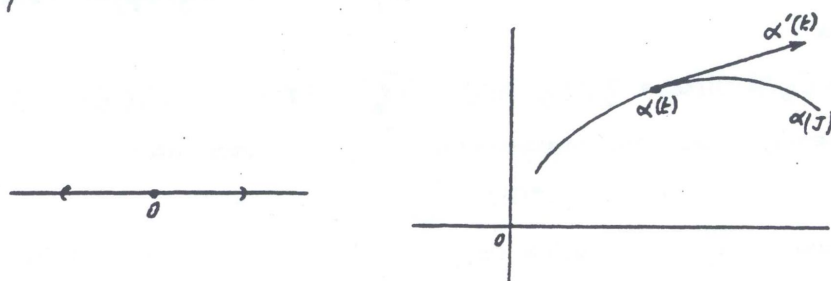
$$\begin{array}{ccc} T_t J \cong T_t \mathbb{R} & \xrightarrow{T_t \alpha} & T_{\alpha(t)} \mathbb{R}^m \\ \downarrow \bar{id}_{\mathbb{R}} & & \downarrow \bar{id}_{\mathbb{R}^m} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{D\alpha(t)} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

από το οποίο προκύπτει ότι

$$\dot{\alpha}(t) = T_t \alpha \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) = \bar{id}_{\mathbb{R}^m}^{-1} \circ D\alpha(t) \circ \bar{id}_{\mathbb{R}} \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) = \bar{id}_{\mathbb{R}^m}^{-1} (D\alpha(t)(1)) = \bar{id}_{\mathbb{R}^m}^{-1} (\alpha'(t)).$$

Επομένως, μέσω της $\bar{id}_{\mathbb{R}^m}$ το $\dot{\alpha}(t)$ αντιστοιχεί στο ετήδες εφαπτόμενο διάνυσμα της $\alpha(t)$ στο t (με την έννοια της Ανάλυσης)

Σχ. 13



(H) Στην εφαρμογή αυτή θα δούμε πώς ο εφαπτόμενος χώρος $T_P S^1$ σε ένα σημείο $P=(a,b)$ του μοναδιαίου κύκλου αντιστοιχεί στη συνηθισμένη έννοια της εφαπτομένης ευθείας στο P και τα διανύσματα του $T_P S^1$ στα συνηθισμένα εφαπτόμενα διανύσματα του κύκλου [βλ. σκευικά και την Εφαρμογή 2.1.15 (Γ)].

Θεωρώντας τη διαφοριτική δομή του S^1 [είτε με κατάλληλα ημικύκλια, είτε με στερεογραφικές προβολές (ανάλογα προς την σφαίρα S^2)], μπορούμε να διαπιστώσουμε αμέσως ότι η κανονική εμφύτευση

$$i: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2: (x,y) \mapsto (x,y)$$

είναι διαφορίσιμη απεικόνιση, οπότε ορίζεται και το διαφορικό της

$$T_P i: T_P S^1 \rightarrow T_P \mathbb{R}^2 \quad (P=(a,b)).$$

θεωρούμε και την απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x,y) = x^2 + y^2$, η οποία είναι (προφανώς) διαφορίσιμη. Άρα η απεικόνιση $f \circ i: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι σταθερή [$\forall (x,y) \in S^1: (f \circ i)(x,y) = f(x,y) = x^2 + y^2 = 1$], οπότε και το διαφορίδιο $T_p(f \circ i): T_p S^1 \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}$ είναι απεικόνιση σταθερά 0. Δηλ.

$$(2.24) \quad [T_p(f \circ i)](u) = 0, \quad \forall u \in T_p S^1.$$

Απ' το άλλο μέρος (θεώρημα 2.2.7)

$$T_p(f \circ i) = T_p f \circ T_p i.$$

Ας υπολογίσουμε την $T_p f$: Κατά τα γνωστά έχουμε το μεταδετικό διάγραμμα:

$$(2.25) \quad \begin{array}{ccc} T_p \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{T_p f} & T_{f(p)} \mathbb{R} \\ \downarrow \overline{id}_{\mathbb{R}^2} & & \downarrow \overline{id}_{\mathbb{R}} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{Df(p)} & \mathbb{R} \end{array}$$

οπότε, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ είναι (Παράρτημα 1, Θ):

$$\begin{aligned} [Df(p)](x,y) &= [Df(a,b)](x,y) = [Df_a(b)](y) + [Df_b(a)](x) = \\ &= y \cdot [Df_a(b)](1) + x \cdot [Df_b(a)](1) = y \cdot f'_a(b) + x \cdot f'_b(a) = \\ &= y \cdot 2b + x \cdot 2a = 2(ax + by). \end{aligned}$$

Αν \langle, \rangle είναι το εσωτερικό γινόμενο του \mathbb{R}^2 , η τελευταία σχέση παίρνει τη μορφή

$$(2.26) \quad [Df(p)](x,y) = 2 \langle (a,b), (x,y) \rangle.$$

Επομένως, συνδυάζοντας την (2.24), το μεταδετικό διάγραμμα (2.25) και την (2.26) έχουμε ότι

$$0 = [T_p(f \circ i)](u) = T_p f(T_p i(u)) = (\overline{id}_{\mathbb{R}}^{-1} \circ Df(p) \circ \overline{id}_{\mathbb{R}^2})(T_p i(u)),$$

από την οποία, λόγω του ισομορφισμού $\overline{id}_{\mathbb{R}}$, προκύπτει ότι:

$$(2.27) \quad Df(p)(\overline{id}_{\mathbb{R}^2}(T_p i(u))) = 0.$$

Αν υαλέσουμε $\overline{id}_{\mathbb{R}^2}(T_p i(u)) = (x,y)$, τότε οι (2.26) και (2.27) συνεπάγονται ότι:

$$[Df(p)](\overline{id}_{\mathbb{R}^2}(T_p i(u))) = [Df(p)](x,y) = 2 \langle (a,b), (x,y) \rangle = 0.$$

Επομένως, το (x,y) είναι διάνυσμα κάθετο στο $P = (a,b)$, δηλ. $(x,y) \in P^\perp$ (ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου $\langle P \rangle$) και τελικά

$$\overline{id}_{\mathbb{R}^2}(T_p i(T_p S^1)) \subset P^\perp.$$

Θα δείξουμε ότι

$$(2.28) \quad \overline{id}_{\mathbb{R}^2}(T_p i(T_p S^1)) = P^\perp.$$

Για να συμβαίνει αυτό αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{id}_{\mathbb{R}^2} \circ T_p i: T_p S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι απεικόνιση 1-1, αφού $\dim P^\perp = \dim T_p S^1 = 1$. και επειδή $\overline{id}_{\mathbb{R}^2}$ είναι ισομορφισμός, αρκεί να δείξουμε ότι η $T_p i$ είναι 1-1.

Για την απόδειξη του τελευταίου ισχυρισμού θεωρούμε την απεικόνιση

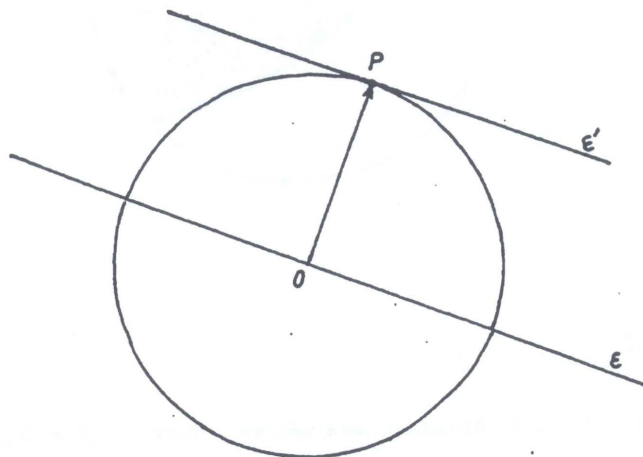
$$g: \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow S^1: (x, y) \mapsto g(x, y) := \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right).$$

Προφανώς είναι διαφορίσιμη απεικόνιση έτσι ώστε

$$g \circ i = id_{S^1},$$

άρα $T_p(g \circ i) = T_p g \circ T_p i = id_{T_p S^1}$. Επειδή $id_{T_p S^1}$ είναι ισομορφισμός, έχουμε ότι $T_p i$ είναι 1-1 όπως ζητούσαμε και ισχύει η (2.28).

Σκ. 14

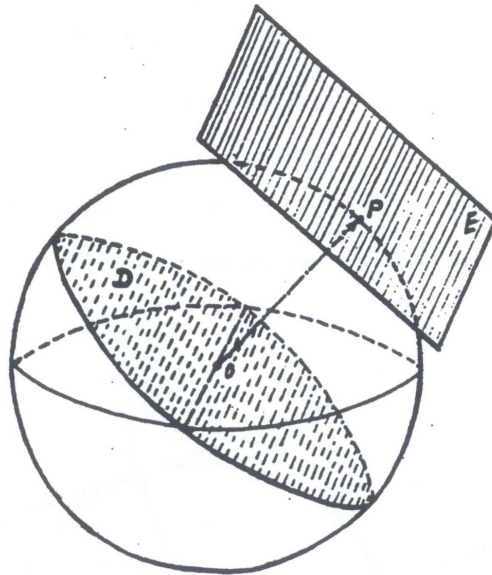


Άρα, μέσω της $\overline{id_{\mathbb{R}^2}} \circ T_p i$, ο $T_p S^1$ απεικονίζεται επί της ευθείας E του Σκ. 14, που αποτελεί ακριβώς το ορθογώνιο συμπλήρωμα του διανύσματος \overrightarrow{OP} (ΞP). Κάνοντας μια παράλληλη μετατόπιση της E κατά \overrightarrow{OP} , η E μετατοπίζεται στην E' , που είναι η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο P .

Δηλ. μέσω της διαδοχικής εφαρμογής των απεικονίσεων $T_p i$, $\overline{id_{\mathbb{R}^2}}$ και μιας κατάλληλης παράλληλης μετατόπισης, ο εφαπτόμενος χώρος $T_p S^1$ (όπως κατασκευάζεται θεωρητικά για την πολλα S^1) αντιστοιχεί στη συστήτη εφαπτομένη του S^1 στο P .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Μιά όμοια διαδικασία αποδεικνύει ότι, ο εφαπτόμενος χώρος $T_p S^2$ της σφαίρας $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ [μέσω της $\overline{id_{\mathbb{R}^3}} \circ T_p i$ ($i: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$)] απεικονίζεται επί του ορθογωνίου συμπληρώματος του διανύσματος \overrightarrow{OP} (Σκ. 15), δηλ. επί του επιπέδου που ορίζει ο γραμμοεξισωμένος δίκυβος D . Επομένως, και πάλι μέσω μίας παράλληλης μετατόπισης κατά \overrightarrow{OP} , το D μεταφέρεται στο επίπεδο E του \mathbb{R}^3 που εφάπτεται της S^2 στο P .

Άρα, τελικά, ο $T_p S^2$ αντιστοιχεί στο επίπεδο E .



Σκ. 15

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν $f: M \rightarrow N$ είναι σταθερή απεικόνιση, τότε $T_x f = 0, \forall x \in M$.

2. Αποδείξτε ότι για το σύστημα συντεταγμένων x_i , που αντιστοιχεί σ' ένα κάρτη (U, φ) της M ισχύει η σχέση

$$(\overline{id}_{\mathbb{R}} \circ T_x z_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_x \right) = \delta_{ij}, \quad \forall x \in U.$$

Επομένως θα είναι

$$T_x z_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_x \right) = \begin{cases} 0 \in T_{x_i(z)} \mathbb{R}, & \text{αν } i \neq j \\ \frac{d}{dt} \Big|_{x_i(z)} \in T_{x_i(z)} \mathbb{R}, & \text{αν } i = j. \end{cases}$$

3. Εστω ότι $f: P \rightarrow M \times N$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση. Αν $f_M = \mathcal{P}_M \circ f$ και $f_N = \mathcal{P}_N \circ f$, τότε να δείξετε ότι, μετά την ταύτιση $T_{(x,y)}(M \times N) \cong T_x M \times T_y N$, ισχύει

$$T_p f \cong (T_p f_M, T_p f_N).$$

4. Αν $f: X \rightarrow Y$ και $g: X \rightarrow Z$ είναι διαφορίσιμες, τότε η απεικόνιση

$$(f, g): X \rightarrow Y \times Z: x \mapsto (f(x), g(x))$$

είναι διαφορίσιμη και $T_x(f, g) \cong (T_x f, T_x g)$.

5. Αν $f: M \rightarrow N$ και $f': M' \rightarrow N'$ διαφορίσιμες, τότε για κάθε $(x, x') \in M \times M'$ είναι

$$T_{(x,x')} (f \times f') \cong T_x f \times T_{x'} f'$$

(δηλ. $[T_{(x,x')} (f \times f')] (w, w') = (T_x f(w), T_{x'} f'(w'))$, για κάθε $(w, w') \in T_x M \times T_{x'} M' \cong T_{(x,x')} (M \times M')$).

6. Έστω $f: M \rightarrow N$ διαφορίσιμη απειρίωστη. Αν (U, φ) χάρτης της M με $x \in U$ και $x_i = \varphi_i \circ \varphi$ ($i=1, \dots, m$) το αντίστοιχο σύστημα συντεταγμένων, (V, ψ) χάρτης της N με $f(x) \in V$ και $y_j = \psi_j \circ \psi$ ($j=1, \dots, n$) το αντίστοιχο τοπικό σύστημα συντεταγμένων, τότε

$$T_x f([(\alpha, x)]) = \sum_{j=1}^n (\gamma_j \circ f \circ \alpha)'(0) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} |_{f(x)}.$$

7. Έστω $u = [(\alpha, x)]$. Τότε $\dot{\alpha}(0) = u$.

8. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ με $t \mapsto f(t) := (\sin 2\pi t, \cos 2\pi t)$. Αν $s = \frac{1}{8}$, να δείξετε ότι η απειρίωστη $T_s f: T_s \mathbb{R} \rightarrow T_{f(s)} S^1$ είναι 1-1. Εξετάστε επίσης αν η $T_s f$ είναι ισομορφισμός (γραμμική χάρση)

9. Να δείξετε ότι $T_{(\alpha, \gamma)}(M \times N) \cong T_x M \times T_y N$ χρησιμοποιώντας την απειρίωστη

$$u \mapsto (T_{(\alpha, \gamma)} \rho_M(u), T_{(\alpha, \gamma)} \rho_N(u))$$

Να συσχετίσετε την προηγούμενη απειρίωστη με τον ισομορφισμό Φ της Πρότασης 2.14.

10. Μέσω της προηγούμενης ταυτίσης να δείξετε ότι

$$T_{(x, x')} (f \times f') \cong T_x f \times T_{x'} f'$$

11. Αν A είναι ανοιχτό υποσύνολο της M , τότε, για κάθε διαφορίσιμη απειρίωστη $f: M \rightarrow R$ ισχύει η σχέση

$$T_x f = T_x (f|_A), \quad \forall x \in A,$$

(μετά την ταυτίση $T_x A \cong T_x M$).

2.3. ΤΑ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΑΝ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΕΙΣ

Στην παράγραφο αυτή θα δώμε μιον άλλη ερμηνεία των εφαιπτομένων διανυσμάτων μιας πολλαίας, που θα διηαιολογήσει γιαί συμβολίζουμε τα βασικά διανύσματα του $T_x M$ με $\frac{\partial}{\partial x_i} /_x$ [ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων $(x_i)_{i=1, \dots, n}$], δηλ. γιατί κρηιμοποιούμε ένα συμβολισμό που θυμίζει μερικη παραγωγήση.

2.3.1 ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $u = [(\alpha, x)] \in T_x M$. Ορίζουμε, μέσω του u , την απεικόνιση

$$\delta_u : C_x^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \delta_u(f) := (f \circ \alpha)'(0).$$

Υπενθυμίζουμε ότι $\alpha : J \rightarrow M$ είναι διαφορίσιμη καμπύλη στην M (με $\alpha(0) = x$), άρα, για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, με $A \subset M$ ανοιχτό και $x \in A$, ορίζεται η σύνθεση $f \circ \alpha : J' \rightarrow \mathbb{R}$ σε κάποιο $J' \subset J$ και είναι μια συνήθης καμπύλη του \mathbb{R} . Η $(f \circ \alpha)'(0)$ είναι η συνήθης παράγωγος [συνάρτησης με πεδίο ορισμού ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R} και τιμές στο \mathbb{R}].

As θεωρήσουμε τώρα $f, g \in C_x^\infty(M, \mathbb{R})$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχουν ανοιχτές περιοχές A, B του x με $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμες στο x (ως προς την διαφορίσιμη δομή των ανοιχτών υποπολ/τάτων A και B του M). Ορίζουμε τις συναρτήσεις $\lambda f, f+g, f \cdot g$ μέσω των σχέσεων

$$\lambda f : A \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x),$$

$$f+g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto (f+g)(x) := f(x) + g(x),$$

$$f \cdot g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x).$$

Και οι τρεις παραπάνω συναρτήσεις ορίζονται σε ανοιχτές περιοχές του x και είναι διαφορίσιμες στο x . Δηλ. $\lambda f, f+g, f \cdot g \in C_x^\infty(M, \mathbb{R})$.

2.3.2 ΠΡΟΤΑΣΗ. Έστω $x \in M$ και $u = [(\alpha, x)] \in T_x M$. Τότε η απεικόνιση δ_u έχει τις ιδιότητες:

i) Είναι καλά ορισμένη (δηλ. ανεξάρτητη του αντιπροσώπου της κλάσης $[(\alpha, x)]$).

ii) Για κάθε $f, g \in C_x^\infty(M, \mathbb{R})$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\delta_u(\lambda f + \mu g) = \lambda \delta_u(f) + \mu \delta_u(g).$$

iii) Ικανοποιεί τη σχέση (Leibniz)

$$\delta_u(f \cdot g) = f(x) \cdot \delta_u(g) + g(x) \cdot \delta_u(f),$$

για κάθε $f, g \in C_x^\infty(M, \mathbb{R})$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. i) Αν $\beta \in [(\alpha, x)]$, τότε $\beta \circ \alpha$ και $D(\beta \circ \alpha)(0) = D(\beta \circ \beta)(0)$ (βλ. σχέση (2.1)), για κάποιο κέρση (U, φ) του M με $x \in U$ και $U \subseteq A$. Τότε:

$$\begin{aligned} (f \circ \alpha)'(0) &= [D(f \circ \alpha)(0)](1) = [D(f \circ \varphi^{-1}) \circ (g \circ \alpha)(0)](1) = [D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \circ D(g \circ \alpha)(0)](1) = \\ &= [D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \circ D(g \circ \beta)(0)](1) = [D(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \beta)(0)](1) = \\ &= [D(f \circ \beta)(0)](1) = (f \circ \beta)'(0), \end{aligned}$$

που αποδεικνύει τον πρώτο ισχυρισμό.

ii) Επειδή $(\lambda f + \mu g) \circ \alpha = \lambda \cdot (f \circ \alpha) + \mu \cdot (g \circ \alpha)$, θα είναι:

$$\begin{aligned} \delta_u(\lambda f + \mu g) &= ((\lambda f + \mu g) \circ \alpha)'(0) = [\lambda \cdot (f \circ \alpha) + \mu \cdot (g \circ \alpha)]'(0) = \\ &= \lambda \cdot (f \circ \alpha)'(0) + \mu \cdot (g \circ \alpha)'(0) = \lambda \cdot \delta_u(f) + \mu \cdot \delta_u(g). \end{aligned}$$

iii) Επειδή $(f \cdot g) \circ \alpha = (f \circ \alpha) \cdot (g \circ \alpha)$, θα είναι

$$\begin{aligned} \delta_u(f \cdot g) &= [(f \circ \alpha) \cdot (g \circ \alpha)]'(0) = (f \circ \alpha)'(0) \cdot (g \circ \alpha)(0) + (f \circ \alpha)(0) \cdot (g \circ \alpha)'(0) = \\ &= \delta_u(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot \delta_u(g), \end{aligned}$$

που αποδεικνύει την iii) και ολοκληρώνει την απόδειξη. ●

● Τα προηγούμενα ισχύουν και για την αλγεβρά $C^\infty(M, \mathbb{R})$ καθώς και για $f \in C^\infty(A, \mathbb{R})$, $A \subset M$ ανοικτό.

2.3.3 ΟΡΙΣΜΟΣ. Μια απεικόνιση, που ικανοποιεί τις ιδιότητες ii) και iii) της προηγούμενης πρότασης θα λέγεται παραγωγή του συνόλου $\mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ [: των τοπικά διαφορίσιμων συναρτήσεων στο $x \in M$].

2.3.4 ΛΗΜΜΑ. Το σύνολο \mathcal{D}_x των παραγωγών του $\mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ αποτελεί γραμμικό χώρο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν δ_1, δ_2 είναι δύο παραγωγές της $\mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$, τότε ορίζουμε

$$\begin{aligned} (\delta_1 + \delta_2)(f) &:= \delta_1(f) + \delta_2(f) \\ (\lambda \delta_1)(f) &:= \lambda \cdot \delta_1(f). \end{aligned}$$

Διαπιστώνουμε εύκολα ότι $\delta_1 + \delta_2$ και $\lambda \delta_1$ είναι παραγωγές. Η απόδειξη των αξιωμάτων του γραμμικού χώρου είναι άμεση. ●

2.3.5 ΠΡΟΤΑΣΗ. Η απεικόνιση $\delta: T_x M \rightarrow \mathcal{D}_x: u \mapsto \delta_u$ είναι γραμμική και 1-1.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για να δείξουμε ότι η δ διατηρεί την πρόθεση αρκεί να δείξουμε ότι $\delta_{u+v} = \delta_u + \delta_v$, ή, για κάθε $f \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ (σύμφωνα με το Λήμμα 2.3.4)

$$\delta_{u+v}(f) = \delta_u(f) + \delta_v(f).$$

Ξέρουμε ότι το u μπορεί να υλοποιηθεί ως υλάση, δηλ. $u = [\alpha, x]$, όπου α είναι η καμπύλη $\alpha(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + t\bar{\varphi}(u))$ (βλ. Εφαρμογή 2.1.15 (B)), με t σε κατάλληλο διάστημα. Ομοίως, $v = [\beta, x]$, όπου $\beta(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + t\bar{\varphi}(v))$, για t σε κατάλληλο διάστημα. Τότε $u+v = [\gamma, x]$, όπου $\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + t(\bar{\varphi}(u) + \bar{\varphi}(v)))$ [άμεση απόδειξη δι' εφαρμογής της $\bar{\varphi}$ (βλ. και Λεμμα 2, § 2.1)]. Εννοείται ότι (U, φ) είναι ένας κάρτης του M με $x \in U$. Επομένως (βλ. Ορισμό 2.3.1)

$$\begin{aligned}
 \delta_{u+v}(f) &= (f \circ \gamma)'(0) = [D(f \circ \gamma)(0)](1) = [D((f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma))(0)](1) = \\
 &= [D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \circ D(\varphi \circ \gamma)(0)](1) = [D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))][D(\varphi \circ \gamma)(0)](1) = \\
 &= [D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))](\bar{\varphi}(u) + \bar{\varphi}(v)) = \\
 &\text{(λόγω της γραμμικότητας της παραγώγου } D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))\text{)} \\
 &= [D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))](\bar{\varphi}(u)) + [D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))](\bar{\varphi}(v)) = \\
 &= [D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))](\varphi \circ \alpha)'(0) + [D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))](\varphi \circ \beta)'(0) = \\
 &= [D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \circ D(\varphi \circ \alpha)(0)](1) + [D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \circ D(\varphi \circ \beta)(0)](1) = \\
 &= [D((f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \alpha))(0)](1) + [D((f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \beta))(0)](1) = \\
 &= [D(f \circ \alpha)(0)](1) + [D(f \circ \beta)(0)](1) = (f \circ \alpha)'(0) + (f \circ \beta)'(0) = \\
 &= \delta_u(f) + \delta_v(f),
 \end{aligned}$$

και αποδεικνύεται το ζητούμενο.

Ανάλογα αποδεικνύεται και ότι $\delta_{\lambda u} = \lambda \delta_u$, για κάθε $u \in T_x M$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Αποδεικνύουμε τώρα το 1-1: Εστω $\delta(u) = \delta(v)$, δηλ. $\delta_u = \delta_v$. Θα δείξουμε ότι $u=v$.
 Ας υποθέσουμε ότι $u = [\alpha, x]$ και $v = [\beta, x]$. Από την υπόθεση, $\delta_u(f) = \delta_v(f)$, δηλ.

$$(2.29) \quad (f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0),$$

για κάθε $f \in \mathcal{C}_2^\infty(M, \mathbb{R})$.

Για να δείξουμε ότι $u=v$, αρκεί να δείξουμε ότι $\bar{\varphi}(u) = \bar{\varphi}(v)$, δηλ. $(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$.

Επειδή

$$(2.30) \quad (\varphi \circ \alpha)'(0) = ((x_1 \circ \alpha)'(0), \dots, (x_m \circ \alpha)'(0))$$

$$(2.31) \quad (\varphi \circ \beta)'(0) = ((x_1 \circ \beta)'(0), \dots, (x_m \circ \beta)'(0))$$

και $x_i \in \mathcal{C}_2^\infty(M, \mathbb{R})$, $\forall i=1, \dots, m$, τα δεύτερα μέλη των (2.30), (2.31) είναι ίσα από την (2.29) (για $f = x_i$), άρα αποδεικνύεται το ζητούμενο. ●

Μπορεί τώρα να αποδειχθεί, με μέθοδο της Ανάλυσης, η επόμενη πρόταση, της οποίας την απόδειξη παραλείπουμε:

2.3.6 ΠΡΟΤΑΣΗ. Η απεικόνιση δ είναι επί

Οι δύο τελευταίες προτάσεις ενισχύονται στο επόμενο

2.3.7 ΘΕΩΡΗΜΑ. Η απεικόνιση $\delta: T_x M \rightarrow \mathcal{D}_x$ είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

2.3.8. ΣΧΟΛΙΟ ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ. Η ταύτιση των χώρων $T_x M$ και \mathcal{D}_x μέσω της απεικόνισης δ μας επιτρέπει να ερμηνεύουμε τα εφευρέσιμα διανόμεμα σαν παραγωγίσιμα και αντίστροφα. Εξάλλου, έχει επικρατήσει το σύμβολο $u(f)$ αντί του $\delta_u(f)$, για μια $f \in \mathcal{C}_2^\infty(M, \mathbb{R})$. Δηλ. γράφουμε

$$(2.32) \quad u(f) := \delta_u(f) = (f \circ \alpha)'(0),$$

για κάθε $f \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ και $u = [(\alpha, \alpha)] \in T_x M$. Βάσει της προηγούμενης απλοποίησης του συμβολισμού, οι συνθήκες της Πρότασης 2.3.2 γράφονται

$$\begin{aligned} u(\lambda f + \mu g) &= \lambda u(f) + \mu u(g), \\ u(f \cdot g) &= f(x) \cdot u(g) + g(x) \cdot u(f). \end{aligned}$$

2.3.9 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Αν $f, g \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ με $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ και $f|_C = g|_C$, για κάποιο ανοικτό $C \subset A \cap B$ με $x \in C$, τότε

$$(2.33) \quad u(f) = u(g),$$

για κάθε $u = [(\alpha, \alpha)] \in T_x M$. Πράγματι,

$$u(f) = (f \circ \alpha)'(0) = ((f|_C) \circ \alpha)'(0) = ((g|_C) \circ \alpha)'(0) = (g \circ \alpha)'(0) = u(g).$$

As ονομάσουμε τις απεικονίσεις που ικανοποιούν την παραπάνω υπόθεση ισοδύναμες στο $x \in M$.

Δηλ. οι $f, g \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ με $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ θα λέγονται ισοδύναμες στο x , αν υπάρχει ανοικτό C με $x \in C \subset A \cap B$ έτσι ώστε $f|_C = g|_C$. Είναι προφανές ότι ορίζεται στο $\mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ μια σχέση ισοδυναμίας. Την κλάση μιας f θα την ονομάζουμε σπέρμα της f στο x και την συμβολίζουμε με $[f]_x$. Το σύνολο πηλίκο, δηλ. το σύνολο $\mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R}) / \sim$ θα το συμβολίζουμε με $\dot{\mathcal{C}}_x^\infty(M, \mathbb{R})$. Μπορεί εύκολα να αποδείξει κανείς ότι το $\dot{\mathcal{C}}_x^\infty(M, \mathbb{R})$. Μπορεί εύκολα να αποδείξει κανείς ότι το $\dot{\mathcal{C}}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ είναι μία άλγεβρα με πράξεις τις κατά σημείον στους αντιπροσώπους των κλάσεων. Δηλ.

$$[f]_x + [g]_x := [f+g]_x$$

$$\lambda [f]_x := [\lambda f]_x$$

$$[f]_x \cdot [g]_x := [f \cdot g]_x.$$

Εξάλλου, η σχέση (2.33) μας εξασφαλίζει ότι για κάθε $u \in T_x M$, η επιτ $u(f)$ είναι σταθερή για κάθε στοιχείο της κλάσης $[f]_x$, δηλ. ανεξάρτητη του αντιπροσώπου f της κλάσης. Άρα είναι καλά ορισμένη η συνάρτηση:

$$\delta_u : \dot{\mathcal{C}}_x^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} : [f]_x \mapsto \delta_u([f]_x) := \delta_u(f) = u(f).$$

Η απεικόνιση αυτή έχει τις ιδιότητες της Πρότασης 2.3.2 και λέμε ότι είναι μια παραγωγή της άλγεβρας των διαφορίσιμων σπερμάτων στο $x \in M$. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αφού η $\dot{\mathcal{C}}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ είναι γραμμικός χώρος, η ιδιότητα (ii) της Πρότασης 2.3.2 σημαίνει ότι η δ_u είναι γραμμική απεικόνιση.

Τέλος, σημειώνουμε ότι λόγω της ισοτητας

$$\delta_u([f]_x) := \delta_u(f),$$

απλοποιούμε τον συμβολισμό και συχνά γράφοντας $\delta_u(f)$ εννοούμε την $\delta_u([f]_x)$.

2.3.10 ΠΡΟΤΑΣΗ. Έστω $f \in C_x^\infty(M, \mathbb{R})$. Μετά από κατάλληλες ταυτίσεις, είναι

$$T_x f(u) = u(f),$$

για κάθε $u \in T_x M$. Παρόμοια και για $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ ή $f \in C^\infty(A, \mathbb{R})$ [Α.Μ. ανοιχτό]

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $u = [(a, \alpha)] \in T_x M$. Τότε

$$u(f) := \delta_u(f) = (f \circ \alpha)'(0),$$

ενώ

$$T_x f(u) = T_x f([(a, \alpha)]) = [(f \circ \alpha, f'(a))] \in T_{f(a)} \mathbb{R}.$$

Η κλάση $[(f \circ \alpha, f'(a))]$, λόγω της ταύτισης $\text{id}_{\mathbb{R}} : T_{f(a)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ αντιστοιχεί στο

$$\text{id}_{\mathbb{R}}([(f \circ \alpha, f'(a))]) = [D(\text{id}_{\mathbb{R}} \circ f \circ \alpha)(0)](1) = (f \circ \alpha)'(0),$$

οπ' όπου έχουμε το ζητούμενο. ●

2.3.11 ΠΡΟΤΑΣΗ. Έστω $f: M \rightarrow N$ διαφορίσιμη, $x \in M$ και $u \in T_x M$. Τότε το εφαπτόμενο διάνυσμα $T_x f(u) \in T_{f(x)} N$, σαν παραγωγήση, έχει την ιδιότητα

$$[T_x f(u)](g) = u(g \circ f),$$

για κάθε $g \in C_{f(x)}^\infty(N, \mathbb{R})$. Παρόμοια και για $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ή $f \in C^\infty(A, \mathbb{R})$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $g \in C_{f(x)}^\infty(N, \mathbb{R})$. Τότε $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη, όπου $B \subset N$ ανοιχτό με $f(x) \in B$. Η διαφορισιμότητα της f εξασφαλίζει ότι το $A := f^{-1}(B)$ είναι ανοιχτό με $x \in A$ και $g \circ f|_A \in C_x^\infty(M, \mathbb{R})$. Αν $u = [(a, \alpha)] \in T_x M$, τότε

$$T_x f(u) := T_x f([(a, \alpha)]) = [(f \circ \alpha, f'(a))],$$

άρα

$$[T_x f(u)](g) = (g \circ (f \circ \alpha))'(0) = ((g \circ f) \circ \alpha)'(0) = u(g \circ f). \bullet$$

2.3.12 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(Α) Έστω ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $u \in T_x M$. Μέσω του τοπικού συστήματος συντεταγμένων $(x_i)_{i=1, \dots, m}$, που ορίζει ένας κάρτης (U, φ) της M με $x \in U$, έχουμε δει ότι (βλ. σχέση (2.5)):

$$u = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x$$

Ερμηνεύοντας το u και τα $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x$ σαν παραγωγίσεις, για τυχόντα $f \in C_x^\infty(M, \mathbb{R})$

γράφουμε

$$(2.34) \quad u(f) = \left[\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x \right](f) =: \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x.$$

Απλ. θέτουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x := \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x \right)(f).$$

Θα δούμε πιο κάτω πώς υπολογίζονται τα λ_i .

(B) Ας δούμε πώς ερμηνεύονται τα βασικά εδαπόμενα διανύσματα $\frac{\partial}{\partial x_i}|_x$ του $T_x M$, όταν $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ είναι το τοπικό σύστημα συντεταγμένων, που ορίζεται μέσω του χάρτη (U, φ) με $x \in U$. Το $\frac{\partial}{\partial x_i}|_x$ μπορεί να υλοποιηθεί μέσω της καμπύλης $\alpha: J \rightarrow M$, με $\alpha(t) = \varphi^{-1}(\varepsilon(t))$, όπου $\varepsilon(t) = \varphi(x) + t e_i$. Δηλ. $\frac{\partial}{\partial x_i}|_x = [(\alpha, x)]$. Άρα, για κάθε $f \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ είναι

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_x\right)(f) &= (f \circ \alpha)'(0) = [(f \circ \varphi^{-1}) \circ \varepsilon]'(0) = \\ &= [D((f \circ \varphi^{-1}) \circ \varepsilon)(0)](1) = [D(f \circ \varphi^{-1})(\varepsilon(0)) \circ D\varepsilon(0)](1) = \\ &= [D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))] (\varepsilon'(0)) = [D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))] (e_i) = \\ &= \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(x)}. \end{aligned}$$

(Παράρτ. Ε)

Επομένως βρίσκουμε ότι:

$$(2.35) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_x\right)(f) \stackrel{\text{επιβ}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(x)}.$$

Η τελευταία σχέση μας λέει ότι το i -βάσιικό διάνυσμα του $T_x M$ ως προς ένα χάρτη (U, φ) , θεωρούμενο σαν παραγωγή, σε μια τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση f στο $x \in M$ αντιστοιχεί αριθμώς στην i -μερική παράγωγο, στο $\varphi(x)$, της τοπικής παράστασης της f (μέσω του ίδιου χάρτη). Επομένως τα βασικά διανύσματα συνδέονται με τις συνήθεις μερικές παραγωγικές και δικαιολογείται η παράσταση των πρώτων με τον συμβολισμό των τελεστών μερικής παραγωγής.

(Γ) Ας εφαρμόσουμε τώρα την (2.34) στην $f = x_j$. Τότε, λόγω και της (2.35) έχουμε διαδοχικά:

$$(2.36) \quad u(x_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \Big|_x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \frac{\partial (x_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(x)}.$$

Επειδή $x_j \circ \varphi^{-1} = p_{x_j} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = p_{x_j}$ (n j -πρωτοβάθμια του \mathbb{R}^m) είναι φανερόν ότι

$$\frac{\partial (x_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(x)} = \delta_{ij}.$$

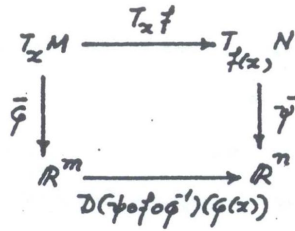
Επομένως, η (2.36) οδηγεί στη

$$(2.37) \quad u(x_j) = \lambda_j, \quad j=1, \dots, n$$

οπότε και

$$(2.38) \quad u = \sum_{i=1}^n u(x_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x.$$

(Δ) Ας θεωρήσουμε δύο πολ/τες M και N καθώς και τη διαφορίσιμη απεικόνιση $f: M \rightarrow N$. Έχουμε δει (Λήμμα 2.2.4) ότι μέσω δύο χαρτών (U, φ) και (V, ψ) των M και N αντίστοιχα, με $x \in U$ και $f(U) \subset V$, ορίζεται το μεταθετικό διάγραμμα



($m = \dim M$, $n = \dim N$).

Η $T_x f$, σαν γραμμική απεικόνιση, αντιστοιχεί σε ένα πίνακα [μέσω των αντιστοιχιών βάσεων $(\frac{\partial}{\partial x_i}|_x)_{i=1, \dots, m}$ και $(\frac{\partial}{\partial y_j}|_{f(x)})_{j=1, \dots, n}$ των $T_x M$ και $T_x N$].
 Ας βρούμε τον πίνακα αυτόν.

Υπολογίζοντας την $T_x f$ δια $\frac{\partial}{\partial x_i}|_x$ έχουμε ότι (βλ. (2.38))

$$T_x f \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x \right) = \sum_{j=1}^n [T_x f \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x \right)](y_j) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(x)} =$$

[βλ. Πρόταση 2.3.9]

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial (y_j \circ f)}{\partial x_i} \Big|_x \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(x)} =$$

[Εφαρμογή B, ανατέρω]

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial (y_j \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i} \Big|_{\varphi(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(x)}$$

Επομένως, παίρνοντας όλα τα $T_x f \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x \right)$ δημιουργείται ο πίνακας

$\left(\frac{\partial (y_j \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i} \Big|_{\varphi(x)} \right)_{\substack{j=1, \dots, n \\ i=1, \dots, m}}$ και ο αντίστροφός του τελευταίου, δηλ. ο πίνακας

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{\partial (y_1 \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_1} \Big|_{\varphi(x)} & \dots & \frac{\partial (y_1 \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_m} \Big|_{\varphi(x)} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial (y_n \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_1} \Big|_{\varphi(x)} & \dots & \frac{\partial (y_n \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_m} \Big|_{\varphi(x)} \end{bmatrix}$$

είναι ο πίνακας της $T_x f$.

Ας βρούμε τώρα και τον πίνακα της $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))$. Σύμφωνα με το Παράρτημα

(H) είναι ο πίνακας Jacobi

$$J_{\varphi(x)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial (p_{r_1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}))}{\partial u_1} \Big|_{\varphi(x)} & \dots & \frac{\partial (p_{r_1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}))}{\partial u_m} \Big|_{\varphi(x)} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial (p_{r_n} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}))}{\partial u_1} \Big|_{\varphi(x)} & \dots & \frac{\partial (p_{r_n} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}))}{\partial u_m} \Big|_{\varphi(x)} \end{bmatrix}$$

Επειδή όμως $\frac{\partial (p_{r_j} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}))}{\partial u_i} \Big|_{\varphi(x)} = \frac{\partial (y_j \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i} \Big|_{\varphi(x)}$ καταλήγουμε στο επιμέ-

ρασμα ότι $\pi = J_{f(z)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$, δηλ.

ο πίνακας της $T_z f$, ως προς τις βάσεις των $T_z M$ και $T_{f(z)} N$, που ορίζουν δύο κάρτες (U, φ) και (V, ψ) των M, N με $z \in U$ και $f(U) \subset V$, συμπίπτει με τον λαμβανόμενο πίνακα της τοπιικής παράστασης της f μέσω των ίδιων καρτών.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να δείχθεί ότι το σύνολο \mathcal{D}_z των παραγωγίσεων του $\mathcal{C}_z^\infty(M, \mathbb{R})$ αποτελεί γραμμικό χώρο (βλ. λήμμα 2.3.4) και ότι $\delta_{zu} = \lambda \delta_z$ (βλ. απόδειξη πρότ. 2.3.5).

2. Αποδείξτε τις λεπτομέρειες της Παρατήρησης 2.3.7.

* Οι επόμενες ασκήσεις να λυθούν χρησιμοποιώντας τα εδαπτόμενα διανύσματα των παραγωγίσεων.

3. Να αποδειχθούν τα θεωρήματα 2.2.7 και 2.2.10.

4. Να δείξετε ότι για κάθε κάρτη (U, φ) της M είναι $T_z \varphi = \bar{\varphi}$ (μετά από κατάλληλη ταύτιση). Επίσης, $T_z id_M = id_{T_z M}$.

5. Αν $\frac{d}{dt}|_{t_0}$ είναι το βασικό διάνυσμα του εδαπτόμενου χώρου $T_{t_0} \mathbb{R}$, δείξτε ότι

$$\left(\frac{d}{dt}\right)|_{t_0}(f) \equiv \frac{df}{dt}\Big|_{t_0} = f'(t_0), \quad \forall t_0 \in \mathbb{R},$$

για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Δηλ. το $\frac{d}{dt}|_{t_0}$ είναι ο συνηθισμένος τελεστής παραγωγίσεως του \mathbb{R} [μετά τις κατάλληλες ταυτίσεις].

6. Αν $v \in T_z M$ και $f = c$ (σταθερή συνάρτηση επί του M), τότε $v(f) = 0$.

[Υπόδειξη: Να δείχθεί με δύο τρόπους: α) βάσει της εφαρμογής (E), β) βάσει της Πρότασης 2.3.2, αφού προηγουμένως δείχθεί ότι $v(1) = 0$].

7. Για ένα κάρτη (U, φ) της M με $z \in U$ και με συντεταγμένες $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$, δείξτε ότι

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\Big|_z = \delta_{ij}.$$

8. Έστω $z \in M$ και $(U, \varphi), (\bar{U}, \bar{\varphi})$ δύο κάρτες της M με $z \in U \cap \bar{U}$ και αντίστοιχα συστήματα συντεταγμένων $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ και $(\bar{x}_j)_{1 \leq j \leq m}$. Έστω $u \in T_z M$. Δείξτε ότι:

$$u(x_i) = \sum_{j=1}^m u(\bar{x}_j) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j}\Big|_z \quad \text{και} \quad u(\bar{x}_j) = \sum_{i=1}^m u(x_i) \cdot \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i}\Big|_z.$$

Συγκρίνετε τους τύπους αυτούς με τους τύπους της Λεκ. 8 (§ 1, Κεφ. 2), για $(Y, \psi) = (\bar{U}, \bar{\varphi})$.

9. Με τις υποθέσεις της Λεκ. 8, δείξτε ότι

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i} \Big|_x \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \Big|_x \quad \text{και} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \Big|_x = \sum_{i=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j} \Big|_x \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x.$$

Συγκρίνετε τους προηγούμενους τύπους με τους τύπους της Εφαρμογής 2.1.15 (Δ).

10. Υποθέτουμε ότι $f: M \rightarrow N$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση και θεωρούμε τους χάρτες (U, φ) της M με $x \in U$ και (V, ψ) της N με $f(U) \subset V$. Αν $(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x)_{1 \leq i \leq m}$ και $(\frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(x)})_{1 \leq j \leq n}$ είναι οι αντίστοιχες βάσεις των $T_x M$ και $T_{f(x)} N$, τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} T_x f(u) &= \sum_{j=1}^n u(y_j \circ f) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(x)} = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m u(x_i) \cdot \frac{\partial (y_j \circ f)}{\partial x_i} \Big|_x \right) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(x)}. \end{aligned}$$

ΕΝΑ ΧΡΗΣΙΜΟ ΣΧΟΛΙΟ

Λόγω των ισομορφισμών $\bar{\varphi}$ και $\bar{\psi}$, σύμφωνα με ω Λήμμα 2.24, ιδιότητες της $T_x f$ αντανακλούν σε ανάλογες ιδιότητες της $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))$ [και αντίστροφα] καθώς και σε αντίστοιχες ιδιότητες του πίνακα $J_{\varphi(x)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$ (βλ. Εφαρμογή (Δ) πιο πάνω). Έτσι, πρακτικά, όταν θέλουμε είτε να υπολογίσουμε την $T_x f$ είτε να βρούμε κάποιες ιδιότητες της, καταφεύγουμε στον υπολογισμό του πίνακα $J_{\varphi(x)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$ με απομεινάρια στην $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))$ ή στην $T_x f$.

2.4. Η ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΔΕΣΜΗ

Θεωρούμε όλους τους εφαπτόμενους χώρους $T_x M$ μιας πολλαίας M και ορίζουμε το σύνολο

$$(2.39) \quad TM = \bigcup_{x \in M} T_x M.$$

Ορίζουμε και την απεικόνιση

$$(2.40) \quad \pi: TM \rightarrow M: u \mapsto \pi(u) = x, \text{ αν } u \in T_x M.$$

Σκοπός της παραγράφου αυτής είναι να αποδείξουμε ότι το TM είναι πολλαία και η π διαφορίσιμη απεικόνιση.

2.4.1 ΟΡΙΣΜΟΣ. Το σύνολο TM καλείται εφαπτομένη δέσμη της M και η π προβολή της εφαπτομένης δέσμης (επί της M).

Τυπικότερα, εφαπτομένη δέσμη είναι η τριάδα (TM, M, π) με ολιυό χώρο τον TM , βάση την M και προβολή την π . Θα υρατήσουμε την απλούστερη ορολογία του ορισμού 2.4.1, αφού δεν πρόκειται να μιλήσουμε για άλλο είδος δέσμης.

2.4.2 ΛΗΜΜΑ. Η απεικόνιση π είναι επί.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $x \in M$. Τότε υπάρχει ο εφαπτόμενος χώρος $T_x M$. Για οποιοδήποτε $u \in T_x M$ είναι $\pi(u) = x$. Άρα η π είναι επί. ●

2.4.3 ΘΕΩΡΗΜΑ. Η TM εφοδιάζεται με δομή πολλαίας, διάστασης $2m$, αν $m = \dim M$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω \mathcal{A} ο μέγιστος άτλας που ορίζει την διαφοριική δομή της M και $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$. Θεωρούμε το ζεύγος $(\pi^{-1}(U), \Phi)$, όπου η απεικόνιση

$$\Phi: \pi^{-1}(U) = \bigcup_{x \in U} T_x M \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

ορίζεται ως εξής:

$$(2.41) \quad \Phi(u) = (\varphi(\pi(u)), \bar{\varphi}(u)), \text{ με } \bar{\varphi}: T_{\pi(u)} M \rightarrow \mathbb{R}^m$$

(1) Το ζεύγος $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ είναι χάρτης της TM . Πράγματι:

(1a) Η Φ είναι 1-1: Αν $u, v \in TM$ με $\Phi(u) = \Phi(v)$, τότε η (2.41) επισημαίνει ότι $\varphi(\pi(u)) = \varphi(\pi(v))$, και επειδή η φ είναι 1-1, $\pi(u) = \pi(v)$, δηλ. τα u, v ανήκουν στον ίδιο εφαπτόμενο χώρο $T_x M$, για $x = \pi(u) = \pi(v)$. Επιπλέον, η (2.41) και η υπόθεση δίνουν $\bar{\varphi}(u) = \bar{\varphi}(v)$, και επειδή η $\bar{\varphi}: T_x M \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι 1-1, έχουμε $u = v$.

(1β) Η εικόνα $\Phi(\pi^{-1}(U))$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{2m}$.
 Θα δείξουμε ότι $\Phi(\pi^{-1}(U)) = \varphi(U) \times \mathbb{R}^m$. Επειδή, προφανώς, $\Phi(\pi^{-1}(U)) \subset \varphi(U) \times \mathbb{R}^m$, αρμεί να δείξουμε ότι η Φ είναι επί. Εστω $(a, h) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^m$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $u \in \pi^{-1}(U)$ με $\Phi(u) = (a, h)$. Επειδή $a \in \varphi(U)$, υπάρχει $x \in U$ με $a = \varphi(x)$. Αφού τώρα η $\bar{\varphi}: T_x M \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι επί, για το $h \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει $u \in T_x M$ με $\bar{\varphi}(u) = h$. Άρα $\Phi(u) = (\varphi(\pi(u)), \bar{\varphi}(u)) = (\varphi(x), \bar{\varphi}(u)) = (a, h)$. Δηλ. η Φ έχει εικόνα αριθμώς το $\varphi(U) \times \mathbb{R}^m$ που είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$.

Θεωρούμε τώρα το σύνολο όλων των καρτών της προηγούμενης μορφής:

$$\mathcal{B} := \{ (\pi^{-1}(U_i), \Phi_i) : (U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A} \}$$

(2) Το σύνολο \mathcal{B} είναι διαφορικός άτλας της TM . Πράγματι:

(2α) Οι κάρτες του \mathcal{B} καλύπτουν την TM , διότι

$$\bigcup_i \pi^{-1}(U_i) = \pi^{-1}\left(\bigcup_i U_i\right) = \pi^{-1}(M) = M.$$

Η τελευταία ιδιότητα ισχύει επειδή π είναι επί.

(2β) Οι κάρτες του \mathcal{B} είναι διαφορικά συμβατάςτοι: Λε πάρουμε δύο τυχόντες κάρτες $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ του \mathcal{A} με $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Θεωρούμε τους αντίστοιχους κάρτες $(\pi^{-1}(U_i), \Phi_i), (\pi^{-1}(U_j), \Phi_j)$ του \mathcal{B} . Τότε, τα πεδία ορισμού των καρτών αυτών τέμνονται στο σύνολο $\pi^{-1}(U_i) \cap \pi^{-1}(U_j) = \pi^{-1}(U_i \cap U_j)$ και $\Phi_i(\pi^{-1}(U_i) \cap \pi^{-1}(U_j)) = \Phi_i(\pi^{-1}(U_i \cap U_j)) = \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m$, που είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, λόγω της συμβατότητας των καρτών (U_i, φ_i) και (U_j, φ_j) . Ομοια αποδεικνύεται ότι $\Phi_j(\pi^{-1}(U_i) \cap \pi^{-1}(U_j)) = \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$.

Θεωρούμε τώρα τις απεικονίσεις μεταφοράς

$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m,$$

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m.$$

Θα δείξουμε ότι είναι C^∞ -διαφορίσιμες απεικονίσεις. Για την πρώτη, έστω ένα $(a, h) \in \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m = \Phi_i(\pi^{-1}(U_i) \cap \pi^{-1}(U_j))$. Τότε, το $\Phi_i^{-1}(a, h) = u$, για κάποιο $u \in \pi^{-1}(U_i \cap U_j)$ με $\Phi_i(u) = (\varphi_i(\pi(u)), \bar{\varphi}_i(u)) = (a, h)$. Άρα

$$\begin{aligned} \Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(a, h) &= \Phi_j(u) = (\varphi_j(\pi(u)), \bar{\varphi}_j(u)) = \\ &= (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(\varphi_i(\pi(u))), \bar{\varphi}_j \circ \bar{\varphi}_i^{-1}(\bar{\varphi}_i(u))) = \\ &= (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(a), \bar{\varphi}_j \circ \bar{\varphi}_i^{-1}(h)) = \\ &= (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(a), [D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(a)](h)) \end{aligned}$$

[βλ. Λήμμα 2.1.10]

Παρατηρούμε ότι η πρώτη συντεταγμένη του δεύτερου μέλους είναι C^∞ , επειδή

$$(2.42) \quad (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(a) = ((\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) \circ \text{pr}_1)(a, h).$$

Απ' το άλλο μέρος, η δεύτερη συντεταγμένη είναι \mathcal{C}^∞ , επειδή μπορεί να γραφεί, σαν σύνθεση των διαφορίσιμων απεικονίσεων του επομένου διαγράμματος

$$(2.43) \quad \begin{array}{ccc} \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^m \ni (a, h) & \xrightarrow{D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) \times id_{\mathbb{R}^m}} & (D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(a), h) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m \\ & \searrow & \downarrow F \\ & & [D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(a)](h) \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

όπου

$$(2.44) \quad F: L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m : (f, h) \mapsto f(h).$$

θυμίζουμε ότι, αφού η $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι \mathcal{C}^∞ , η παράγωγός της $D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}): \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ είναι \mathcal{C}^∞ [Παράρτημα Β], και η F σαν διγραμμική είναι \mathcal{C}^∞ . Συνεπώς η $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}$ είναι \mathcal{C}^∞ .

Άρα ο \mathcal{B} είναι διαφορικός ατλαντας. Επομένως ο αντίστοιχος μέγιστος \mathcal{B}' ορίζει στην TM διαφορική δομή. ●

2.4.4 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ. (1) Στο προηγούμενο θεώρημα υποθέσαμε ότι η M είναι \mathcal{C}^∞ πολλαπλότητα και αποδείξαμε ότι η TM είναι επίσης πολλαπλότητα τάξης \mathcal{C}^∞ . Αν η πολλαπλότητα M είναι (πεπερασμένης) τάξης \mathcal{C}^r ($r \in \mathbb{N}$), τότε η πολλαπλότητα TM είναι τάξης \mathcal{C}^{r-1} . Πράγματι, σ' αυτήν την περίπτωση, η απεικόνιση μεταφοράς $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_j \cap U_i)$ είναι \mathcal{C}^r -διαφορίσιμη, οπότε η παράγωγος $D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}): \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ είναι \mathcal{C}^{r-1} -διαφορίσιμη, και η τάξη διαφορισιμότητας της $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}$ ελαττώνεται κατά μία μονάδα, δηλ. γίνεται \mathcal{C}^{r-1} .

(2) Στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος ευφράδαμε την $\bar{\varphi}_j \circ \bar{\varphi}_i^{-1}$ σαν $D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(a)$. Αυτό γίνεται για να φανεί ότι η $\bar{\varphi}_j \circ \bar{\varphi}_i^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ δεν είναι μία σταθεροποιημένη απεικόνιση με μεταβλητή μόνο το h , αλλά είναι μία ομογώνεια απεικόνιση $\bar{\varphi}_j \circ \bar{\varphi}_i^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow T_{\varphi_i^{-1}(a)} M \rightarrow \mathbb{R}^m$ που αλλάζουν μαζί με το a , και κάθε μία από αυτές έχει μεταβλητή το h .

2.4.5 ΠΟΡΙΣΜΑ. Η π είναι \mathcal{C}^∞ -απεικόνιση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Άρκει να δείξουμε ότι η π είναι \mathcal{C}^∞ , σε τυχόν $u_0 \in TM$. Έστω λοιπόν $u_0 \in TM$ και $z_0 := \pi(u_0)$. Τότε υπάρχει κάρτης (U, φ) της M με $z_0 \in U$. Θεωρούμε τον αντίστοιχο κάρτη $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ της TM . Επειδή $\pi(\pi^{-1}(U)) = U$, έχει έννοια η τοπιική παράσταση της π μέσω των καρτών (U, φ) και $(\pi^{-1}(U), \Phi)$:

$$f \circ \pi \circ \Phi^{-1} : \Phi(\pi^{-1}(U)) = f(U) \times \mathbb{R}^m \rightarrow f(U).$$

Έχουμε ότι: $(f \circ \pi \circ \Phi^{-1})(a, h) = (f \circ \pi)(u) = f(\pi(u))$, όπου $u \in TM$ με $\Phi(u) = ((f \circ \pi)(u), \bar{f}(u)) = (a, h)$. Άρα

$$(f \circ \pi \circ \Phi^{-1})(a, h) = a = \pi_{\mathbb{R}^m}(a, h),$$

δηλ. η τοπική παράσταση της π είναι η πρώτη προβολή $\pi_{\mathbb{R}^m} : f(U) \times \mathbb{R}^m \rightarrow f(U)$, που είναι C^∞ απεικόνιση. ●

2.4.6 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Αν $\pi : M \rightarrow N$ είναι πολλαπλασιασμός τάξης C^r ($r \in \mathbb{N}$), τότε π είναι διαφορίσιμη τάξης C^{r-1} (παρά το γεγονός ότι η τοπική παράστασή της, δηλ. η $\pi_{\mathbb{R}^m}$, είναι C^∞ -απεικόνιση γιατί;).

Έστω τώρα M, N πολλαπλασιασμοί διαστάσεων m, n , αντίστοιχα, και $f : M \rightarrow N$ διαφορίσιμη απεικόνιση.

2.4.7 ΟΡΙΣΜΟΣ. Ονομάζουμε διαφορισμό της f (ή παράγωγο της f , ή εφαπτομένη της f) την απεικόνιση $Tf : TM \rightarrow TN$ που ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$Tf |_{T_x M} := T_x f.$$

δηλ., αν $u = [(\alpha, x)] \in TM$, τότε $Tf(u) = T_x f(u)$.

2.4.8 ΣΧΟΛΙΟ. Ας σημειώσουμε εδώ ότι η Tf δεν είναι γραμμική απεικόνιση, παρά το γεγονός ότι οι περιορισμοί της στα $T_x M$, $x \in M$, είναι γραμμικές απεικονίσεις. Υπενθυμίζουμε επίσης ότι ορισμένοι συγγραφείς χρησιμοποιούν τα σύμβολα f_* και df για την Tf . (βλ. και Σχόλιο 2.2.2).

2.4.9 ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν π_M, π_N συμβολίζουν τις προβολές των εφαπτομένων δεσμών TM, TN , αντίστοιχα, τότε η Tf είναι διαφορίσιμη και το διάγραμμα

$$(2.45) \quad \begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ \pi_M \downarrow & & \downarrow \pi_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

είναι μεταθετικό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αποδεικνύουμε πρώτα την μεταθετικότητα του διαγράμματος: Έστω $u = [(\alpha, x)] \in TM$. Τότε

$$(f \circ \pi_N)(u) = f(\pi_N([(\alpha, x)])) = f(x),$$

$$(\pi_N \circ Tf)(u) = \pi_N(T_x f([(\alpha, x)])) = \pi_N([(f \circ \alpha, f(x))]) = f(x),$$

δηλ. $\pi_N \circ Tf = f \circ \pi_M$, και το διάγραμμα είναι μεταθετικό.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι η Tf είναι διαφορίσιμη σε τυχόν $u_0 = [(\alpha, z_0)] \in TM$.
 Επειδή η f είναι διαφορίσιμη, υπάρχουν χάρτες (U, φ) της M και (V, ψ) της N με $z_0 \in U$, $f(U) \subset V$ και $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ σε άλλο το $\varphi(U)$. Θεωρούμε τους αντίστοιχους χάρτες $(\pi_M^{-1}(U), \Phi)$ και $(\pi_N^{-1}(V), \Psi)$. Τότε $u_0 \in \pi_M^{-1}(U)$, αφού $z_0 = \pi_M(u_0) \in U$ και $Tf(\pi_M^{-1}(U)) \subset \pi_N^{-1}(V)$. Πράγματι, από το (2.45) είναι $(\pi_N \circ Tf)(\pi_M^{-1}(U)) = (f \circ \pi_M)(\pi_M^{-1}(U)) = f(\pi_M(\pi_M^{-1}(U))) = f(U) \subset V$, άρα $Tf(\pi_M^{-1}(U)) \subset \pi_N^{-1}(V)$. Η τοπιική παράσταση της Tf μέσω αυτών των χαρτών είναι η απεικόνιση

$$\Psi \circ Tf \circ \Phi^{-1}: \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(V) \times \mathbb{R}^m.$$

Υπολογίζουμε την $\Psi \circ Tf \circ \Phi^{-1}$ σε ένα $(a, h) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^m$. Για το (a, h) , υπάρχει αυριθμώς ένα $u \in \pi_M^{-1}(U)$ με $\Phi(u) = (\varphi(\pi_M(u)), \bar{\varphi}(u)) = (a, h)$. Τότε:

$$\begin{aligned} (\Psi \circ Tf \circ \Phi^{-1})(a, h) &= \Psi(Tf(u)) = (\psi(\pi_N(Tf(u))), \bar{\psi}(Tf(u))) = \\ &= ((\psi \circ \pi_N \circ Tf)(u), (\bar{\psi} \circ T_{\pi_N(u)} f)(u)) = \\ &= ((\psi \circ f \circ \pi_M)(u), (\bar{\psi} \circ T_{\pi_M(u)} \circ \bar{\varphi}^{-1})(h)) = \\ &= ((\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(\pi_M(u))), [D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(\pi_M(u))](h)) = \\ &= ((\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(a), [D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(a)](h)) = \\ &= ((\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \text{pr}_1, F \circ (D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \times \text{id}_{\mathbb{R}^m}))(a, h), \end{aligned}$$

[μεταθετικότητα του (2.45)]
 [εξέταση (2.19)]

με $F: L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n: (f, h) \mapsto f(h)$ [βλ. Παράρτημα, Λεκ. 2 και την ανάλογη (2.44)]. Άρα η $\Psi \circ Tf \circ \Phi^{-1}$ είναι \mathcal{C}^∞ στο $\varphi(U) \times \mathbb{R}^m$ (πρβλ. και απόδειξη του θεωρήματος 2.4.3), άρα η Tf είναι \mathcal{C}^∞ στο u_0 . •

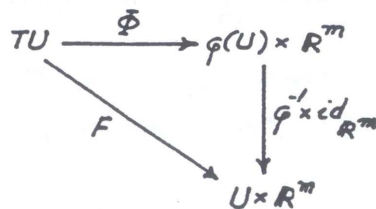
2.4.10 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Αν η $f: M \rightarrow N$ είναι διαφορίσιμη τάξης \mathcal{C}^r ($r \in \mathbb{N}$), η $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ είναι διαφορίσιμη τάξης \mathcal{C}^r , άρα η $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$ είναι διαφορίσιμη τάξης \mathcal{C}^{r-1} , απ' όπου προκύπτει ότι η Tf είναι διαφορίσιμη τάξης \mathcal{C}^{r-1} .

2.4.11 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ.

(Α) Έστω (U, φ) χάρτης της M . Βλέπουμε αμέσως ότι $TU = \pi^{-1}(U)$. Οπότε, σύμφωνα με την απόδειξη του θεωρήματος 2.4.3, η απεικόνιση

$$F := (\varphi^{-1} \times \text{id}_{\mathbb{R}^m}) \circ \Phi: TU \longrightarrow U \times \mathbb{R}^m$$

είναι αμφιδιαφόριση, με κάποιες επιπλέον ιδιότητες (βλ. Εφαρμογή 3.1.14(B), πιο κάτω)



Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η τριάδα (TU, U, π) είναι μια τετριμμένη δέσμη, δηλ. υπάρχει ολικός χάρτης (TU, Φ) που καλύπτει την TU , και η πολλαπλότητα U είναι μια παραλληλοποιήσιμη πολλαπλότητα.

Γενικά, μια πολλαπλότητα M είναι παραλληλοποιήσιμη, αν η εφαπτόμενη δέσμη TM είναι αμφιδιοφοριική με το γινόμενο $M \times \mathbb{R}^m$. Αυτό συμβαίνει στην περίπτωση της δέσμης TU υπεράνω του χάρτη U . Όμως κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει για κάθε πολλαπλότητα. Μερικές περιπτώσεις θα δούμε πιο κάτω. Μερικές συνθήκες κάτω από τις οποίες συμβαίνει κάτι τέτοιο, θα τις δούμε στις εφαρμογές της § 3.1.

(B) Έστω $M = \mathbb{R}^m$. Ας δούμε τη μορφή της $T\mathbb{R}^m$. Μέσω του χάρτη $(\mathbb{R}^m, id_{\mathbb{R}^m})$, παίρνουμε τον ολικό χάρτη $(\pi^{-1}(\mathbb{R}^m), \Phi)$ της $T\mathbb{R}^m$. Όμως $\pi^{-1}(\mathbb{R}^m) = T\mathbb{R}^m$ και $\Phi: \pi^{-1}(T\mathbb{R}^m) = T\mathbb{R}^m \rightarrow id_{\mathbb{R}^m}(\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Εδώ έχουμε

$$F = (id_{\mathbb{R}^m}^{-1} \times id_{\mathbb{R}^m}) \circ \Phi = \Phi.$$

Συνεπώς η $(T\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m, \pi)$ είναι τετριμμένη δέσμη και η \mathbb{R}^m παραλληλοποιήσιμη πολλαπλότητα.

(Γ) Μια γενικότερη περίπτωση της (B) έχουμε όταν $M=A$ ανοικτό $\subset \mathbb{R}^m$. Τότε παίρνουμε $TA \cong A \times \mathbb{R}^m$.

(Δ) Αν θεωρήσουμε την πολλαπλότητα S^1 και ταυτίσουμε κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα $u \in T_p S^1$ με ένα διάνυσμα κάθετο προς το διάνυσμα θέσης του p (βλ. Παράδειγμα 2.2.11 (H)), τότε παρατηρούμε ότι

$$TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R},$$

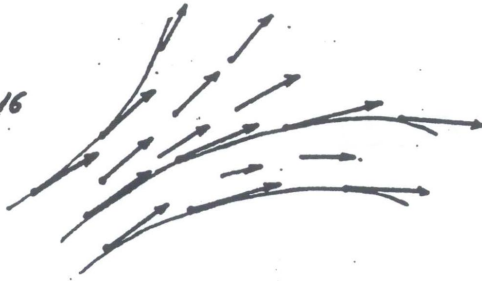
άρα ο κύκλος είναι παραλληλοποιήσιμη πολλαπλότητα. (Για μια άλλη απόδειξη βλ. Εφαρμογή 3.1.14 (B) και Άσκηση 7, § 3.1, πιο κάτω).

(E) Πληροφοριακά αναφέρουμε ότι από τις σφαίρες της μορφής S^{2n+1} ($n=0,1,\dots$) μόνον οι S^1, S^3, S^7 είναι παραλληλοποιήσιμες, ενώ οι σφαίρες της μορφής S^{2n} ($n=1,2,\dots$) δεν είναι παραλληλοποιήσιμες.

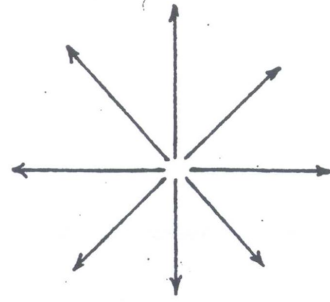
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να δείξετε ότι η απεικόνιση $\rho: \mathbb{R} \times TM \rightarrow TM: (\lambda, u) \mapsto \lambda u$ είναι C^∞ .
2. Αποδείξτε ότι για ένα χάρτη (U, φ) είναι $TU = \pi^{-1}(U)$ και $\Phi = T\varphi$, μετά από κατάλληλη ταύτιση (ποιά;). [Υπόδ: βλ. Εφαρμογή 2.4.11 (Γ)].
3. Αν η πολλαπλότητα M είναι Hausdorff τότε και η TM είναι Hausdorff.
4. Αποδείξτε τη διαφορισιμότητα της απεικόνισης $\Omega: M \rightarrow TM: \Omega(x) = 0_x$ (μηδενικό διαν. του $T_x M$).

Σχ. 16



(Α)



(Β)

3.1.3 ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ 1) Την τιμή $\xi(x)$, του ξ στο x , την γράφουμε συντά (για ευκολία) και με τη μορφή ξ_x , δηλ. $\xi_x := \xi(x)$.

2) Το σύνολο των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων της M συμβολίζουμε με $\mathcal{X}(M)$. Αντίστοιχα γράφουμε $\mathcal{X}(U)$, για το σύνολο των διαφορίσιμων διαν. πεδίων επί ενός ανοικτού $U \subset M$.

Αμέσως μετά τον ορισμό 3.1.3 είναι η

3.1.4 ΠΡΟΤΑΣΗ. Το $\mathcal{X}(M)$ είναι γραμμικός χώρος (ως προς \mathbb{R}).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ορίζουμε τις πράξεις:

$$+ : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M) : (\xi, \eta) \mapsto \xi + \eta$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M) : (\lambda, \xi) \mapsto \lambda \xi$$

μέσω των εκθέσεων

$$(3.2) \quad (\xi + \eta)(x) := \xi_x + \eta_x, \quad (\lambda \cdot \xi)(x) = \lambda \cdot \xi_x, \quad \forall x \in M.$$

Ελέγχουμε ότι το $\mathcal{X}(M)$ είναι κλειστό ως προς τις δύο αυτές πράξεις και ότι ικανοποιεί τα αξιώματα του γραμμικού χώρου. ●

Αν $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ μπορούμε να ορίσουμε και την απεικόνιση

$$(3.3) \quad f \cdot \xi : M \rightarrow TM : x \mapsto (f \cdot \xi)(x) := f(x) \cdot \xi_x.$$

Προφανώς, αυτή είναι εύκολα, αφού (για κάθε $x \in M$), $f(x) \in \mathbb{R}$ και $\xi_x \in T_x M$ (γραμμικός χώρος ως προς \mathbb{R}).

3.1.5 ΠΡΟΤΑΣΗ. 1) Η απεικόνιση $f \cdot \xi$ είναι διαφορίσιμη, δηλ. $f \cdot \xi \in \mathcal{X}(M)$.

ii) Το $\mathcal{X}(M)$ αποτελεί πρότυπο ως προς $C^\infty(M, \mathbb{R})$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. i) Για κάθε $x \in M$, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$(f \cdot \xi)(x) = \rho(f(x), \xi(x)) = [\rho \circ (f, \xi)](x)$$

όπου ρ η απεικόνιση της Ασκησης 1 της § 2.4. Επομένως, λόγω της διαφορισιμότητας των ρ, ξ, f , και η $f \cdot \xi$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση (βλ. επίσης και την Ασκηση 4 της § 2.2). Προφανώς, $\pi[(f \cdot \xi)(x)] = \pi(f(x) \cdot \xi_x) = x$, άρα $f \cdot \xi \in \mathcal{X}(M)$.

ii) Θεωρούμε το $\mathcal{X}(M)$ εφοδιασμένο με την πρόσδεση διανυσματικών πεδίων, όπως και

στην Πρόταση 3.1.4, και με την πράξη του πολ/μοσού επί στοικεία του $C^\infty(M, R)$, δηλ. την

$$\cdot : C^\infty(M, R) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M) : (f, X) \mapsto f \cdot X,$$

όπου το $f \cdot X$ ορίζεται μέσω της (3.3). Η επαλήθευση των αξιωμάτων του προτύπου είναι τώρα άμεση. ●

ΣΗΜΕΙΩΣΗ/ΥΠΕΝΟΥΜΙΣΗ. Ένα πρότυπο, ως προς ένα δακτύλιο R , είναι ένα σύνολο E , το οποίο εφοδιάζεται με δύο πράξεις:

$$+ : E \times E \rightarrow E : (a, b) \mapsto a + b$$

$$\cdot : R \times E \rightarrow E : (r, a) \mapsto r \cdot a,$$

έτσι ώστε να εκπύκνουν ακριβώς τα γνωστά αξιώματα, που ορίζουν ένα γραμμικό χώρο. Η διαφορά των προτύπων από ένα γραμμικό χώρο έγκειται στο ότι ο πολ/μοσός του πρώτου γίνεται με στοικεία από ένα δακτύλιο R ενώ τον δεύτερο με στοικεία ενός σώματος (όπως τα R, \mathbb{C} κ.λπ.).

Μέχρι εδώ είδαμε πώς δρα το R και το $C^\infty(M, R)$ επί του $\mathcal{X}(M)$ (μέσω των πράξεων $f \cdot X$ και $f \cdot X$). Θα δούμε τώρα πώς ένα $\zeta \in \mathcal{X}(M)$ δρα επί των απεικονίσεων του $C^\infty(M, R)$, δηλ. θα ορίσουμε την έκφραση $\zeta(f)$, σε αναλογία με την $\alpha(f)$, για $\alpha \in \mathcal{T}_x M$ [βλ. Σχόλιο 2.3.8].

3.1.6 ΟΡΙΣΜΟΣ. Για κάθε $\zeta \in \mathcal{X}(M)$ και οποιαδήποτε $f \in C^\infty(M, R)$ ορίζουμε την απεικόνιση $\zeta(f) : M \rightarrow R$ με $[\zeta(f)](x) = \zeta_x(f)$

Η έκφραση $\zeta_x(f)$ έχει την έννοια που αναλύθηκε στο Σχόλιο 2.3.8, μετά την ερμηνεία ενός εφαπτομένου διανύσματος σαν παραγωγίσιμης των διαφορίσιμων συναρτήσεων. Ας θυμηθούμε αλλιώς (βλ. Πρόταση 2.3.8)

$$(3.4) \quad [\zeta(f)](x) = \zeta_x(f) = T_x f(\zeta_x), \quad x \in M$$

Επίσης, συντά (για απλούστευση των συμβολισμών) γράβουμε και $\zeta(f) = \zeta f$, οπότε $(\zeta f)(x) = \zeta_x(f)$, όπως στην (3.4).

Παρόμοια μπορούμε να θεωρήσουμε και διαφορίσιμη απεικόνιση με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό $A \subset M$, δηλ. $f \in C^\infty(A, R)$. Τότε, περιορίζεται το ζ επί του A , έχουμε το διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $\zeta|_A : A \rightarrow TA \subset TM$ και την αντίστοιχη απεικόνιση ζf [ή $\zeta(f)$], που ορίζεται με τη σχέση $(\zeta f)(x) := \zeta_x(f)$, για κάθε $x \in A$.

Τυλιμά, στην περίπτωση αυτή θα ήθελε να γράβουμε $\zeta|_A f$ [ή $\zeta|_A(f)$], αλλά δεν υπάρχει λόγος να περιπλέκουμε τους συμβολισμούς μας, εφ' όσον ξέρουμε ότι $f \in C^\infty(A, R)$, οπότε είναι ακόμα αρέται να περιορίσουμε το ζ επί του A .

Ας υποθέσουμε τώρα ότι (U, φ) είναι καρτέσι της M με αντίστοιχο σύστημα συντεταγμένων (x_i) , $i=1, \dots, m$. Επειδή $x_i \in C^\infty(U, R)$ [βλ. Παράδειγμα 1.2.18(B)], ορίζονται

σύμφωνα με τα παραπάνω οι συναρτήσεις $\xi_i := \xi(x_i)$. Δηλαδή,

$$(3.5) \quad \xi_i : U \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \xi_i(x) := [\xi(x_i)](x) = \xi_x(x_i), \quad i=1, \dots, m.$$

3.1.7 ΟΡΙΣΜΟΣ. Οι απεικονίσεις ξ_i λέγονται συντεταγμένες του ξ ως προς τον χάρτη (U, φ) [ή το (κοιμω) σύστημα συντεταγμένων $(x_i)_{i=1, \dots, m}$] της M .

Θα δείξουμε ότι μέσω των ξ_i μπορούμε να εκφράσουμε (κοιμω) το ξ μαζώ επίσης και ότι οι απεικονίσεις ξ_i [ανάλογα και οι $\xi(x_i)$] είναι C^∞ απεικονίσεις. Την αν'αυτο χρειάζομαστε αμώη είναι ορισμό.

3.1.8 ΟΡΙΣΜΟΣ. Έστω (U, φ) χάρτης της M και $(x_i)_{i=1, \dots, m}$ το αντίστοιχο σύστημα συντεταγμένων. Ορίζουμε τα επίμενα διανυσματικά πεδία (επί του U):

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : U \rightarrow TU \subset TM : x \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(x) := \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x, \quad i=1, \dots, m$$

(όπου τα $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x$ είναι τα βασικά διανύσματα του $T_x M$). Τα πεδία αυτά λέγονται βασικά διανυσματικά πεδία, ως προς τον χάρτη (U, φ) .

Θα δείξουμε πιο μώτω ότι τα $\frac{\partial}{\partial x_i}$ είναι διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία, δηλ. $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{X}(U)$. Προς το παρόν ας δώμε πως, με τη βοήθεια αυτή και των ξ_i εκφράζεται κοιμω ένα $\xi \in \mathcal{X}(M)$. Εφ' όσον, για μώδε $x \in M$, $\xi_x = \xi(x) \in T_x M$, σύμφωνα με την (2.8) έχουμε ότι

$$\xi(x) = \xi_x = \sum_{i=1}^m \xi_i(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x$$

ή, σύμφωνα με την (3.5) και την Πρόταση 3.1.5 (ειδικότερα τους ορισμούς των πράξεων αυτής της πρότασης) μαζώ και τον Ορισμό 3.1.8,

$$(3.6') \quad \xi(x) = \sum_{i=1}^m \xi_i(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x = \left(\sum_{i=1}^m \xi_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \right)(x), \quad \forall x \in U,$$

από την οποία μαζώ λήγουμε στην

$$(3.6) \quad \xi \Big|_U = \sum_{i=1}^m \xi_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Στην τελευταία έκθεση εννοείται ότι το ξ έχει περιοριστεί επί του U . Συνεπώς, η (3.6) εκφράζει το ξ κοιμω, πάνω από το U . Παρόμοιες εκφράσεις προωύητουν και για μώδε άλλο χάρτη (και τα αντίστοιχα συστήματα συντεταγμένων).

Ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο για τον έλεγχο της διαφορεσιμότητας ενός διανυσματικού πεδίου μαζώ δίνει το επόμετο θεώρημα

3.1.9 ΘΕΩΡΗΜΑ. Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες

i) Το $\xi : M \rightarrow TM$ είναι διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο, δηλ. $\xi \in \mathcal{X}(M)$.

ii) Για μώδε χάρτη (U, φ) της M , με αντίστοιχα συντεταγμένες x_i ($i=1, \dots, m$), οι συντεταγμένες ξ_i ($i=1, \dots, m$) του ξ είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις.

iii) Για οποιαδήποτε διαφορίσιμη συνάρτηση $f: ACM \rightarrow \mathbb{R}$ (ACM ανοιχτό), η συνάρτηση $\mathbb{F}f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη. Άρα, αν $f \in C_x^m(M, \mathbb{R})$, τότε $\mathbb{F}f \in C_x^m(M, \mathbb{R})$.

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει η i). Άρα το \mathbb{F} είναι διαφορίσιμη απεικόνιση, τότε, για τα κατά ταύτα ζεύγη (U, φ) , και ο περιορισμός του \mathbb{F} επί του (ανοιχτού) U , δηλ. η $\mathbb{F}|_U$ είναι επίσης διαφορίσιμη απεικόνιση (σε κάθε σημείο του U). Από τον ζεύγη (U, φ) κατασκευάζουμε τον αντίστοιχο ζεύγη $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ της TM . Επειδή, για κάθε $x \in U$, $\pi(\mathbb{F}(x)) = x \in U$, βρίσκουμε ότι $\mathbb{F}(x) \in \pi^{-1}(U)$, δηλ. $\mathbb{F}(U) \subset \pi^{-1}(U)$. Άρα, η τοπιική παράσταση του \mathbb{F} , ως προς τους δύο προηγούμενα ζεύγη, δηλ. η

$$(3.7) \quad \Phi \circ \mathbb{F}|_U \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^m$$

είναι διαφορίσιμη απεικόνιση [σε κάθε σημείο του $\varphi(U)$].

Ας δούμε λεπτομερέστερα την (3.7): για τυχόν $\alpha \in \varphi(U)$, θα υπάρχει $x \in U$ με $\varphi(x) = \alpha$, άρα

$$(\Phi \circ \mathbb{F}|_U \circ \varphi^{-1})(\alpha) = (\Phi \circ \mathbb{F})(x) = \Phi(\mathbb{F}_x) = (\varphi(x), \bar{\varphi}(\mathbb{F}_x)) = (\alpha, \bar{\varphi}(\mathbb{F}_x)).$$

Όμως, βάσει της (3.6'), έχουμε ότι

$$\bar{\varphi}(\mathbb{F}_x) = \bar{\varphi}\left(\sum_{i=1}^m \mathbb{F}_i(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x\right) = \sum_{i=1}^m \mathbb{F}_i(x) \cdot \bar{\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x\right) = \sum_{i=1}^m \mathbb{F}_i(x) \cdot e_i$$

ή αλλιώς

$$\bar{\varphi}(\mathbb{F}_x) = \sum_{i=1}^m (\mathbb{F}_i \circ \varphi^{-1})(\alpha) \cdot e_i \equiv ((\mathbb{F}_1 \circ \varphi^{-1})(\alpha), \dots, (\mathbb{F}_m \circ \varphi^{-1})(\alpha))$$

οπότε, τελικά:

$$(\Phi \circ \mathbb{F}|_U \circ \varphi^{-1})(\alpha) = (\alpha, (\mathbb{F}_1 \circ \varphi^{-1})(\alpha), \dots, (\mathbb{F}_m \circ \varphi^{-1})(\alpha)), \quad \forall \alpha \in \varphi(U), \text{ και}$$

$$(3.8) \quad \Phi \circ \mathbb{F}|_U \circ \varphi^{-1} = (id_{\varphi(U)} \circ \mathbb{F}_1 \circ \varphi^{-1}, \dots, \mathbb{F}_m \circ \varphi^{-1}).$$

Επομένως, η υπόθεση ότι το \mathbb{F} είναι διαφορίσιμο πεδίο, συνεπάγεται ότι κάθε τοπιική παράσταση $\Phi \circ \mathbb{F}|_U \circ \varphi^{-1}$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση, άρα [από την (3.8)] και κάθε συνιστώσα συνάρτηση $\mathbb{F}_i \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ θα είναι διαφορίσιμη. Επειδή όμως η φ είναι αμφιδιαφόρητη, τελικά συμπεραίνουμε ότι και κάθε $\mathbb{F}_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη ($i=1, \dots, m$). Δηλ. δείξαμε την συνεπαγωγή $i) \Rightarrow ii)$.

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι ισχύει η ii). Θεωρώντας και πάλι τους ζεύγη (U, φ) και $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ καταλήγουμε στην (3.8). Η υπόθεση τώρα ότι οι \mathbb{F}_i είναι C^∞ -συναρτήσεις επί του U συνεπάγεται, μέσω της (3.8), ότι η τοπιική παράσταση $\Phi \circ \mathbb{F}|_U \circ \varphi^{-1}$ είναι C^∞ , άρα και το $\mathbb{F}|_U$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε ζεύγη (U, φ) , καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το \mathbb{F} είναι (παντού) διαφορίσιμη απεικόνιση, δηλ. $\mathbb{F} \in \mathcal{X}(M)$. Άρα δείξαμε ότι και $ii) \Rightarrow i)$.

Θα δείξουμε τώρα ότι $ii) \Rightarrow iii)$. Πρώτα αν υποθέσουμε ότι $A=U$, για ένα ζεύγη (U, φ) . Τότε [βάσει των σχέσεων (2.34), (3.6) και (3.5)], για κάθε $x \in U$, είναι

$$(\mathbb{F}f)(x) = \mathbb{F}_x(f) = \sum_{i=1}^m \mathbb{F}_i(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x$$

ή, κατά την (2.35),

$$(\mathfrak{F}f)(x) = \sum_{i=1}^m \xi_i(x) \cdot \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i} \Big|_{\varphi(x)} = \sum_{i=1}^m \xi_i(x) \cdot \left[\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i} \circ \varphi \right](x)$$

δηλαδή

$$(3.9) \quad \mathfrak{F}f = \sum \xi_i \cdot \left[\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i} \circ \varphi \right]$$

Επειδή η $f \circ \varphi^{-1}$ είναι C^∞ συνάρτηση επί του $\varphi(U)$, θα είναι C^∞ συνάρτηση και η μερική παράγωγος $\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ [γιατί], άρα και η $\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i} \circ \varphi$ είναι C^∞ και, κατά συνέπεια, κάθε γινόμενο $\xi_i \cdot \left[\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i} \circ \varphi \right]$, δηλ. το άθροισμα η (3.9) είναι διαφορίσιμη συνάρτηση επί του U .

Αν το A δεν συμπίπτει με το πεδίο ορισμού ενός κάρτη, τότε το A θα είναι ένωση πεδίων ορισμού διαφορών καρτών (U_i, φ_i) , δηλ. $A = \bigcup_{i \in J} U_i$. Οπότε, όπως προηγουμένως, η $\mathfrak{F}f$ θα είναι C^∞ σε κάθε U_i , άρα και C^∞ στο A . Επομένως δείξαμε ότι $ii) \Rightarrow iii)$.

Τέλος, η $iii) \Rightarrow ii)$ είναι προφανής. Αρκεί $\mathfrak{F}f$ είναι C^∞ απεικόνιση, για οποιαδήποτε $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ($A \subset M$ αυθαίρετα), τότε θα είναι (σαν ειδικότερη περίπτωση) C^∞ και η $\xi_i(x_i) = \xi_i$ για κάθε $x_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση συντεταγμένων ($i=1, \dots, m$). ●

3.1.10 ΠΟΡΙΣΜΑ. Ισχύουν τα επόμενα συμπεράσματα:

- i) $\mathfrak{F} \in \mathcal{X}(M) \Leftrightarrow \mathfrak{F}f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, για κάθε $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$
- ii) Τα βασικά διανυσματικά πεδία $\frac{\partial}{\partial x_i}$ (ορισμός 3.1.8) είναι διαφορίσιμα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το πρώτο συμπέρασμα αποδεικνύεται με την ίδια μεθοδολογία, την οποία ακολουθήσαμε για την απόδειξη της ισοδυναμίας $ii) \Leftrightarrow iii)$ του θεωρήματος 3.1.9.

Για την απόδειξη του δεύτερου συμπεράσματος αρκεί να εξετάσουμε τη διαφορίσιμότητα των συντεταγμένων κάθε βασικού διαν. πεδίου. Έτσι, για το $\frac{\partial}{\partial x_i}$, η j -συντεταγμένη του έχει τη μορφή

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_j = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

(βλ. σκελετικό και Άσκηση 7 της § 2.3). Επομένως, οι συντεταγμένες των βασικών διαν. πεδίων είναι οι σταθερές συναρτήσεις 0 ή 1, που είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις. Άρα, κατά το θεώρημα 3.1.9, τα $\frac{\partial}{\partial x_i}$ είναι διαφορίσιμα. ●

Βάσει του προηγουμένου πορίσματος βλέπουμε ότι κάθε $\mathfrak{F} \in \mathcal{X}(M)$ ορίζει την απεικόνιση

$$(3.10) \quad \Delta_{\mathfrak{F}} : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) : f \mapsto \Delta_{\mathfrak{F}}(f) := \mathfrak{F}f.$$

3.1.11 ΠΟΡΙΣΜΑ. Η απεικόνιση $\Delta_{\mathfrak{F}}$ είναι γραμμική και ικανοποιεί τη συνθήκη Leibniz: $\Delta_{\mathfrak{F}}(f \cdot g) = \Delta_{\mathfrak{F}}(f) \cdot g + f \cdot \Delta_{\mathfrak{F}}(g) = (\mathfrak{F}f) \cdot g + f \cdot (\mathfrak{F}g) = \mathfrak{F}(f \cdot g)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Άμεση συνέπεια της (3.10) και της Πρότασης 2.3.2 (σε συνδυασμό με τα σκόλια

του εδαφίου 2.3.8). ●

Η απειριστική Δ_f ληψε ότι είναι ένας τελεστής παραγωγικής της άλγεβρας $C^\infty(M, \mathbb{R})$, δηλ. έχει πεδίο ορισμού και τιμών την $C^\infty(M, \mathbb{R})$, σε αντίθεση με την παραγωγική $\delta_u: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, που εισαίρον τα εφαπτόμενα διανύσματα, γι' αυτό και την τελευταία την παρατηρούμε σαν σημειακή παραγωγική. [ας σημειώσουμε ότι η δ_u , που ορίστηκε σαν παραγωγική του $C_2^\infty(M, \mathbb{R})$, προφανώς ορίζει και μία παραγωγική της $C^\infty(M, \mathbb{R}) \subset C_2^\infty(M, \mathbb{R})$].

Αν συμβολίσουμε με \mathfrak{D} το σύνολο των τελεστών παραγωγικής της $C^\infty(M, \mathbb{R})$, τότε ανάλογα προς την πρόταση 2.3.5 και το λήμμα 2.3.4. έχουμε την

3.1.12 ΠΡΟΤΑΣΗ. Το \mathfrak{D} αποτελεί γραμμικό χώρο και η απειριστική $\Delta: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{D}$, με $\Delta(\xi) := \Delta_\xi$ είναι γραμμική και 1-1.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αμεση συνέπεια των 2.3.4, 2.3.5 και των προηγουμένων ορισμών ●

Χρησιμοποιώντας μέσα τα οποία δεν έχουμε μελετήσει εδώ (: διαμερίσει της μονάδας) μπορούμε να δείξουμε τυβια το

3.1.13 ΘΕΩΡΗΜΑ. Η απειριστική $\Delta: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{D}$ είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων.

* Τα προηγούμενα μας επιτρέπουν να δούμε και τα διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία σαν παραγωγικούς (δηλ. τελεστές, που ικανοποιούν τις συνθήκες της πρότασης 3.1.11), όπως ακριβώς κάναμε και για τα εφαπτόμενα διανύσματα.

3.1.14 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

(A) Αν πάρουμε την κάρτη (U, φ) και θεωρήσουμε τον χώρο των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων $\mathfrak{X}(U)$, τότε ο χώρος αυτός είναι γραμμικός χώρος (ως προς \mathbb{R}), όπως και ο ανάλογος χώρος $\mathfrak{X}(M)$. Ο χώρος αυτός όμως δεν έχει πεπερασμένη διάσταση (οληώς συνθήκες συμβαίει στους χώρους συναρτήσεων). Αντίθετα, αν θεωρήσουμε τον $\mathfrak{X}(U)$ σαν πρότυπο, ως προς την άλγεβρα $C^\infty(U, \mathbb{R})$ [όπως ακριβώς έγινε για τον $\mathfrak{X}(M)$, στην πρόταση 3.1.5], τότε ο $\mathfrak{X}(U)$ είναι πρότυπο με πεπερασμένη διάσταση, και μάθιστα έτσι με τη διάσταση n της M .

Πραγματικά, για κάθε $\xi \in \mathfrak{X}(U)$ θα είναι $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$, όπως ακριβώς δείξαμε στην (3.6). Θυμίζουμε ότι $\xi_i \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ και $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(U)$, άρα ο προηγούμενος συνδυασμός είναι παρόμοιος με ένα γραμμικό συνδυασμό σε γραμμικό χώρο, με μόνη διαφορά ότι οι συντελεστές είναι από το $C^\infty(U, \mathbb{R})$ (και όχι το \mathbb{R}).

Μπορούμε να δείξουμε, όπως στους γραμμικούς χώρους, ότι τα $\frac{\partial}{\partial x_i}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (με συντελεστές από το $C^\infty(U, \mathbb{R})$), δηλ.

$$\sum_{i=1}^m f_i \frac{\partial}{\partial x_i} = 0 \iff f_i = 0 \quad , \text{ αν } f_i \in C^\infty(U, \mathbb{R}), i=1, \dots, m.$$

Άρα, από το προηγούμενο συμπέρασμα και το γεγονός ότι κάθε $f \in \mathcal{X}(U)$ παριστάεται σαν συνδυασμός των $\frac{\partial}{\partial x_i}$ με συντελεστές $f_i \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, αυτό σημαίνει (σε αναλογία με τους γραμμικούς χώρους) ότι τα $\frac{\partial}{\partial x_i}$ αποτελούν βάση του προτύπου $\mathcal{X}(U)$.

(B) Ας υποθέσουμε ότι μία πολ/τα M διαδέτει m το πλήθος ($m = \dim M$) ανεξάρτητα C^∞ διανυσματικά πεδία ξ^i ($i=1, \dots, m$) [χρησιμοποιούμε ευθέως αντί δείκτην i , για να μην μπερδέψουμε τα πεδία με τις συνεσταγμένες f_i]. Όταν λήξω ότι τα ξ^i είναι γραμμικώς ανεξάρτητα εννοούμε ότι, γιά κάθε $x \in M$, τα διανύσματα $\xi^i(x) \in T_x M$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (με τη συνήθη έννοια στους γραμμικούς χώρους, ως προς \mathbb{R}). Η ύπαρξη ααζών των ξ^i συνεπάγεται ότι η M είναι παράλληλοποίησηση πολ/τα (βλ. εστιακά και τόλως στο § 2.4), δηλ. $TM \cong M \times \mathbb{R}^m$.

Πραγματικά, μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση $F: TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^m$ με

$$F(u) = (x(u), (\lambda_1, \dots, \lambda_m))$$

όπου τα λ_i προκύπτουν από την ευγραφή $u = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \xi^i(x)$, αν $x = \pi(u)$. [Προφανώς, αυτό γίνεται γιατί τα $\xi^i(x)$ ($i=1, \dots, m$), σαν m το πλήθος ανεξάρτητα διανύσματα του m -διάστατου χώρου $T_x M$, αποτελούν βάση του T . Είναι πολύ ωφέλιμο να δείξουμε ότι η F είναι 1-1 και επί απεικόνιση, δηλ. $TM \cong M \times \mathbb{R}^m$ (μέσω μιας απεικόνισης 1-1 και επί)].

[Στην πραγματικότητα, μπορούμε να δείξουμε με άλλες ιδιότητες της F : α) ότι είναι C^∞ απεικόνιση και β) ότι η $F|_{T_x M}: T_x M \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ισομορφισμός. Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $F: TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^m$ 1-1 και επί, που ικανοποιεί τις α) και β), τότε τα ξ^i με $\xi^i(x) := F^{-1}(x, e_i)$, όπου (e_1, \dots, e_m) η κανονική βάση του \mathbb{R}^m , αποτελούν γραμμικώς ανεξάρτητα διανυσματικά πεδία (δύσκολο είναι) της M].

(Γ) Από τον ορισμό τους τα βασικά διανυσματικά πεδία $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{X}(U)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Επομένως, αυτό σημαίνει ότι η παράλληλοποίησηση U είναι παράλληλοποίησηση, δηλ. $TU \cong U \times \mathbb{R}^m$. Αυτό όμως είναι ένα αποτέλεσμα που το γνωρίζουμε ήδη (!), από την παρατήρηση 2.4 [εφαρμογή 2.4.11 (A)].

(Δ) Μια περίπτωση που συμπεριφερόμαστε όσα είπαμε στο (B) είναι και η περίπτωση $M = \mathbb{R}^n$. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να ορίσουμε επί της $T\mathbb{R}^n$ τον (ολικό) χώρο

χάρτη $\Phi: TR^n = \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, που αντιστοιχεί στον χάρτη $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$ της \mathbb{R}^n . Δηλ. είναι $\Phi(u) = (id_{\mathbb{R}^n}(\pi(u)), id_{\mathbb{R}^n}(u))$, με $u \in TR^n$.

Επομένως, η Φ είναι 1-1, επί και διαφορίσιμη απεικόνιση, που μετασχηματίζει μια ολική 2S σφαιρά ιδιότητες της F , που αναφέρονται στα τεχνικά σχόλια της εφαρμογής (B), συνεπώς η \mathbb{R}^n είναι παραλληλοποιήσιμη πολλα. Μπορούμε να δούμε ότι τα

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \rightarrow TR^n : x \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i} / x := \Phi^{-1}(x, e_i) \quad , i=1, \dots, n$$

είναι n -το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία της \mathbb{R}^n (οπότε έχουμε και μίαν άλλη απόδειξη της παραλληλοποιήσιμότητας της \mathbb{R}^n).

Στην περίπτωση της \mathbb{R}^n [και παρόμοια για τις παραλληλοποιήσιμες πολλα] η μελέτη των (C^∞) διανυσματικών πεδίων ανάγεται στη μελέτη απλούστερων απεικονίσεων. Τόσο συγκεκριμένα, αν $\xi \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$, μέσω της Φ παίρνουμε το επόμενο διάγραμμα

$$(3.11) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \ni x & \xrightarrow{\xi} & \xi_x \in T\mathbb{R}^n \subset TR^n \\ & \searrow & \downarrow \Phi \\ & & (x, id_{\mathbb{R}^n}(\xi_x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

Αρα $\Phi(\xi(x)) = (id_{\mathbb{R}^n}(x), f(x))$, όπου $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι C^∞ -απεικόνιση [$f = \rho \xi = \Phi \circ \xi$].

Επομένως το ξ καθορίζεται πλήρως από την f . Και αντίστροφα, αν διαθέσουμε μία διαφορίσιμη απεικόνιση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, τότε απ' αυτήν κατασκευάζουμε ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο ξ επί της \mathbb{R}^n με $\xi(x) := \Phi^{-1}(x, f(x))$. Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\mathcal{X}(\mathbb{R}^n) \cong C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

[μέσω μιας 1-1 και επί απεικόνισης]. Αυτό αυριανώς εξηγεί (μαλλίτερα) και τα σχήματα 16.

* (E) Υποθέτουμε ότι $f: M \rightarrow N$ είναι μία διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ των πολλα M, N .

Ενα διανυσματικό πεδίο κατά ρήτως της f είναι μια απεικόνιση $\xi: M \rightarrow TN$, έτσι ώστε $\mathcal{I}_N \circ \xi = f$, δηλ. το επόμενο διάγραμμα είναι μεταδετικό.

$$(3.12) \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\xi} & TN \\ & \searrow f & \downarrow \mathcal{I}_N \\ & & N \end{array}$$

Ιδιαίτερα, αν η ξ είναι C^∞ απεικόνιση, τότε το ξ λέγεται διαφορίσιμο (C^∞) διαν. πεδίο κατά ρήτως της f . Συμβολίζουμε με $\mathcal{X}(f)$ το σύνολο των C^∞ διαν. πεδίων κατά ρήτως της f . Από το προηγούμενο διάγραμμα προκύπτει ότι $\xi(x) = \xi_x \in T_x N$.

Σάν δύο πρώτα παραδείγματα αναφέρουμε τα εξής:

1) Κάθε σφαιρικό πεδίο $\xi: M \rightarrow TM$ είναι πεδίο κατά ρήτως της $f = id_M$

ii) Αν $U \subset M$ ανοικτό και $f \in \mathcal{X}(M)$ τότε ο προιρισμός \mathcal{F}_f είναι διατ. πεδίο κατά f -ως της κανονικής εμβύτησης $i: U \hookrightarrow M$.

iii) Αν $\eta \in \mathcal{X}(N)$, τότε $\eta \circ f$ είναι πεδίο κατά f προς f .

iv) Αν $f \in \mathcal{X}(M)$, τότε $\eta \circ f$ είναι πεδίο κατά f προς f .

Για διανυσματικά πεδία κατά f προς f ισχύουν ιδιότητες ανάλογες προς αυτές των συνηθισμένων πεδίων, που μελέτησαμε στην παράγραφο αυτή. Μερικά παραδείγματα (στην επεξεργασία των οποίων αγνησμε τον Αιούση):

(E.1) Ένα \mathcal{F} διατ. πεδίο κατά f προς f είναι C^∞ τότε και μόνον τότε, αν για κάθε $g \in C^\infty(N, \mathbb{R})$, η απεικόνιση $\mathcal{F}(g) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, που ορίζεται με $M \ni x \mapsto \mathcal{F}_x(g) \in \mathbb{R}$

είναι διαφορίσιμη.

(E.2) Η προηγούμενη απεικόνιση $\mathcal{F}(g)$, επιτρέπει να ορίσουμε, για ένα δοσμένο $\mathcal{F} \in \mathcal{X}(f)$, και την απεικόνιση

$$\hat{\mathcal{F}}: C^\infty(N, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}): g \mapsto \hat{\mathcal{F}}(g) := \mathcal{F}(g).$$

Η $\hat{\mathcal{F}}$ είναι είναι γραμμική και ικανοποιεί την (ανάλογη Leibnitz) ιδιότητα

$$\hat{\mathcal{F}}(g \cdot h) = \hat{\mathcal{F}}(g) \cdot (h \circ f) + (g \circ f) \cdot \hat{\mathcal{F}}(h)$$

ή, απλούστερα, $\mathcal{F}(g \cdot h) = \mathcal{F}(g) \cdot (h \circ f) + (g \circ f) \cdot \mathcal{F}(h)$. Άρα η $\hat{\mathcal{F}}$ είναι μία παραγωγήιση.

(E.3) Αν θεωρήσουμε ένα σύστημα συντεταγμένων $(y_j)_{j=1, \dots, n}$ της N (που ορίζεται από κάποιο καρτη (V, ϕ) της N), τότε ορίζονται και οι συντεταγμένες του $\mathcal{F}(y_j)_{j=1, \dots, n}$ του \mathcal{F} . Επομένως, το \mathcal{F} είναι C^∞ τότε και μόνον τότε αν $\mathcal{F}(y_j) = \mathcal{F}_j$ είναι C^∞ , για όλα τα συστήματα συντεταγμένων.

(Z) Μια ειδική περίπτωση των προηγούμενων είναι το πεδίο ταχυτήτων, μιας καμπύλης που ορίζεται ως εξής: Συμβολίζουμε με $\frac{d}{dt}$ το βασικό διανυσματικό πεδίο του \mathbb{R} [ως προς τον καρτη $(\mathbb{R}, id_{\mathbb{R}})$], δηλ. πρόκειται για το ολικό πεδίο $\mathbb{R} \rightarrow T\mathbb{R}$ με

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \left(\frac{d}{dt}\right)(t) := \frac{d}{dt} \Big|_t \in T_t \mathbb{R}.$$

Άρα, αν $\alpha: J \rightarrow M$ είναι C^∞ καμπύλη, μπορούμε να πάρουμε τη σύνθεση $T\alpha \circ \frac{d}{dt}$, η οποία αποτελεί διανυσματικό πεδίο (C^∞) κατά f προς α . Το πεδίο αυτό καλείται πεδίο ταχυτήτων της α και συμβολίζεται με α_* . Δηλ. $\alpha_*: J \rightarrow TM$ και

$$(*) \quad \alpha_*(t) := (T\alpha \circ \frac{d}{dt})(t) = T_t \alpha \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) = \dot{\alpha}(t)$$

[βλ. και Εφαρμογή 2.2.11 (Z)]

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να συμπληρωθεί η απόδειξη της Πρότασης 3.1.4
2. Να αποδειχθεί ο ισχυρισμός ότι τα $\partial/\partial x_i$ ($i=1, \dots, m$) είναι γραμμικά ανεξάρτητα στο πρότυπο $\mathcal{X}(U)$ [βλ. και Εφαρμογή (A)]
3. Αναφερόμενοι στην εφαρμογή (B), εξηγήστε γιατί η F είναι 1-1 και επί. Επαληθεύστε και τους άλλους ισχυρισμούς για την F .
4. Έστω M παραλληλοποιήσιμη πολλαπλότητα, δηλ. $TM \cong M \times \mathbb{R}^m$ ($m = \dim M$). Να δείξετε ότι $\mathcal{X}(M) \cong C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$ [βλ. και τον αντίστοιχο ισχυρισμό για $M = \mathbb{R}^n$ στην εφαρμογή (Δ)].
5. Είναι πολύ ενδιαφέρον να επεξεργαστείτε τις λεπτομέρειες της εφαρμογής (E). Προσπαθήστε το!
6. Αν M και N είναι παραλληλοποιήσιμες πολλαπλότητες, δείξτε ότι και η $M \times N$ είναι παραλληλοποιήσιμη πολλαπλότητα.
7. Αποδείξτε τα συμπράγματα 3.1.11 και 3.1.12 και το γιατί του παραδείγματος 3.1.14 (A).
8. Με τους συμβολισμούς της Ασκήσης 8 της παραγγ. 2.3, υποθέτουμε ότι ένα $\xi \in \mathcal{X}(M)$ έχει τις τοπικές εκφράσεις

$$\xi = \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad , \quad \bar{\xi} = \sum_{j=1}^m \bar{\xi}_j \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j}$$

Να φρεθεί η σχέση μεταξύ των ξ_i και $\bar{\xi}_j$.

3.2 Η ΑΓΚΥΛΗ ΛΙΕ

Θα δείξουμε ότι ο γραμμικός (ως προς \mathbb{R}) χώρος $\mathcal{X}(M)$ διαθέτει μια άλλη έσπεραση πράξη (είδος πολλαπλασιασμού), που τον εφοδίζει (ως $\mathcal{X}(M)$) με τη δομή μιας αλγέβρας Lie.

Θεωρούμε δύο διαφραγμα διανυσματικά πεδία ξ και η της πολ/τας M . Ορίζουμε ένα νέο διαφραγματο διανυσματικό πεδίο (όπως θα αποδειχτεί πιο κάτω), το οποίο συμβολίζουμε με $[\xi, \eta]$ και δίνεται από τη σχέση

$$(3.13) \quad [\xi, \eta](f) = \xi(\eta(f)) - \eta(\xi(f)) \quad , \quad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}).$$

Επομένως, σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1.6 και τη σχέση (3.4), για κάθε $x \in M$ θα είναι

$$(3.14) \quad [\xi, \eta]_x(f) = \xi_x(\eta_x(f)) - \eta_x(\xi_x(f)).$$

Συμβολικά, επίσης, γράφουμε ότι

$$[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi.$$

3.2.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. Για κάθε $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$ είναι και $[\xi, \eta] \in \mathcal{X}(M)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας πάρουμε τυχαία $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Έχουμε ότι $\eta(f) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ [βλ. Πρόβλημα 3.1.10], οπότε και $\xi(\eta(f)) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Παρόμοια $\eta(\xi(f)) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Άρα $[\xi, \eta](f) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ και $[\xi, \eta]: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$. Αν δείξουμε ότι η προηγούμενη απεικόνιση $[\xi, \eta]$ είναι μία παραγωγιστή της $C^\infty(M, \mathbb{R})$ [με την έννοια της ελεγχής, όπως ακριβώς την ορίσαμε στα προηγούμενα, αν ακολουθούσαμε το Πρόβλημα 3.1.11], τότε, κατά το Θεώρημα 3.1.13, η $[\xi, \eta]$ ταυτίζεται με ένα διανυσματικό πεδίο, το οποίο συμβολίζουμε και πάλι $[\xi, \eta]$ και είναι αυτό που ορίζει η σχέση (3.13).

Ερμηνεύοντας τα $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$ σαν παραγωγιστές και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (3.10) και το Πρόβλημα 3.1.11 γι' αυτά έχουμε τα εξής:

i) Για κάθε $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} [\xi, \eta](\lambda f + \mu g) &= \xi(\eta(\lambda f + \mu g)) - \eta(\xi(\lambda f + \mu g)) = \xi(\lambda \eta(f) + \mu \eta(g)) - \\ &- \eta(\lambda \xi(f) + \mu \xi(g)) = \lambda \xi(\eta(f)) + \mu \xi(\eta(g)) - \lambda \eta(\xi(f)) - \mu \eta(\xi(g)) = \\ &= \lambda (\xi(\eta(f)) - \eta(\xi(f))) - \mu (\xi(\eta(g)) - \eta(\xi(g))) = \lambda [\xi, \eta](f) + \mu [\xi, \eta](g), \end{aligned}$$

δηλ. η $[\xi, \eta]$ είναι \mathbb{R} -γραμμική απεικόνιση της $C^\infty(M, \mathbb{R})$ στο $C^\infty(M, \mathbb{R})$.

ii) Για κάθε $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ είναι επίσης:

$$\begin{aligned} [\xi, \eta](f \cdot g) &= \xi(\eta(f \cdot g)) - \eta(\xi(f \cdot g)) = \xi(\eta(f) \cdot g + f \cdot \eta(g)) - \eta(\xi(f) \cdot g + f \cdot \xi(g)) = \\ &= \xi(\eta(f)) \cdot g + \eta(f) \cdot \xi(g) + \xi(f) \cdot \eta(g) + f \cdot \xi(\eta(g)) - \eta(\xi(f)) \cdot g - \xi(f) \cdot \eta(g) - \\ &- \eta(f) \cdot \xi(g) - f \cdot \eta(\xi(g)) = (\xi(\eta(f)) - \eta(\xi(f))) \cdot g + f \cdot (\xi(\eta(g)) - \eta(\xi(g))) = \\ &= [\xi, \eta](f) \cdot g + f \cdot [\xi, \eta](g) \end{aligned}$$

Δηλ. ικανοποιείται και η συνθήκη Leibniz, άρα $[\xi, \eta]$ είναι γνήσια παραγωγιστή όπως ηνωσαμε να δείξουμε. ●

3.2.2 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Μία άλλη απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος μπορεί να γίνει χωρίς χρήση του θεωρήματος 3.1.13, αλλά με την αντίστοιχη ερμηνεία των εφαρμοσμένων διανυσμάτων ως παραγωγιστών (βλ. ενότητα § 2.3). Στην περίπτωση αυτή όμως ακολουθούμε ακριβώς τον ίδιο διαδικασια για την ευχρηστική (3.14). Ακριβέστερα δυνάμουμε ότι το $[\xi, \eta]_x$ ορίζει μία απεικόνιση από χώρο $[\xi, \eta]_x: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ με τις ιδιοότητες:

$$[\xi, \eta]_x (\lambda f + \mu g) = \lambda \cdot [\xi, \eta]_x (f) + \mu \cdot [\xi, \eta]_x (g) \quad \text{[Γραμμικότητα]}$$

$$[\xi, \eta]_x (f \cdot g) = [\xi, \eta]_x (f) \cdot g + f \cdot [\xi, \eta]_x (g) \quad \text{[Ισοδυναμία Leibniz]},$$

όρα η $[\xi, \eta]_x$ είναι (στηριχαστή) παραγωγιστή της αλγεβρας $C^\infty(M, \mathbb{R})$, άρα ένα εφαπτόμενο διανύσμα στο x , δηλ. $[\xi, \eta]_x \in T_x M$. Επομένως, η $[\xi, \eta]$ ορίζει διανυσματικό πεδίο.

Η διαφορισιμότητα των πεδίων $[\xi, \eta]$ ελέγχεται μέσω του θεωρήματος 3.1.9 [ισοδυναμία i) \Leftrightarrow ii)]. Ακριβέστερα, θεωρούμε κάποια κάρτη (U, φ) και το αντίστοιχο σύστημα συντεταγμένων $(x_i)_{i=1, \dots, m}$. Τότε οι συντεταγμένες $[\xi, \eta](x_i)$ δίνονται από τη σχέση

$$[\xi, \eta](x_i) = \xi(\eta(x_i)) - \eta(\xi(x_i)), \quad i=1, \dots, m.$$

Επειδή το 2ο μέλος της προηγούμενης είναι C^∞ απεικόνιση [σύμφωνα με το θεώρημα 3.1.9, για τα ξ, η (εδώ χρησιμοποιούμε και τις τρεις ισοδυναμίες)], καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι και $[\xi, \eta](x_i)$ είναι C^∞ συναρτήσεις. Αυτό συμβαίνει για κάθε κάρτη, άρα, τελικά, $[\xi, \eta] \in \mathcal{X}(M)$.

3.2.3 ΟΡΙΣΜΟΣ. Το διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $[\xi, \eta]$ λέγεται χινόμενο ή αγκύλη Lie των ξ, η .

Μέσω της αγκύλης Lie $[,]$ ορίζεται η απεικόνιση

$$(3.15) \quad [,]: \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M) : (\xi, \eta) \longmapsto [\xi, \eta].$$

3.2.4 ΠΡΟΤΑΣΗ. Η $[,]$ έχει τις ιδιότητες:

- i) Είναι αντισυμμετρική, δηλ. $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$
- ii) Είναι δυναμική ως προς \mathbb{R} , δηλ. $[\lambda\xi + \mu\eta, \zeta] = \lambda[\xi, \zeta] + \mu[\eta, \zeta]$, (και παρόμοια για τη δεύτερη μεταβλητή), για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- iii) Ικανοποιεί την ταυτότητα του Jacobi, δηλ.

$$[[\xi, \eta], \zeta] + [[\eta, \zeta], \xi] + [[\zeta, \xi], \eta] = 0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η i) είναι άμεση συνέπεια της (3.13). Όμοια και η ii), λαμβάνοντας υπόψη την πρόταση 3.1.4. Για την iii) παρατηρούμε ότι, για κάθε $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, είναι

$$\begin{aligned} [[\xi, \eta], \zeta](f) &= [\xi, \eta](\zeta(f)) - \zeta([\xi, \eta](f)) = \\ &= \xi(\eta(\zeta(f))) - \eta(\xi(\zeta(f))) - \zeta(\xi(\eta(f))) + \zeta(\eta(\xi(f))) \end{aligned}$$

Με συνδυαστή εναλλαγή όρισουμε και τις εκφράσεις των δύο άλλων προσδεσίων της ταυτότη-

των του Jacobi, οπότε καταλήγουμε στο αποτέλεσμα. ●

Η συμπεριφορά όμως στο $[,]$ ως προς τους συνεπιδεστές από την $C^\infty(M, \mathbb{R})$ δεν είναι τόσο "καλή", όπως για τους συνεπιδεστές από το \mathbb{R} . Ακριβέστερα έχουμε την

3.2.5 ΠΡΟΤΑΣΗ. Για $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$ και $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ισχύει η εξίσωση

$$[f \cdot \xi, \eta] = f \cdot [\xi, \eta] - \eta(f) \cdot \xi$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω οποιδήποτε $x \in M$ και οποιαδήποτε $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Τότε, βάσει της (3.14) έχουμε:

$$\begin{aligned} [f \cdot \xi, \eta]_x(h) &= ((f \cdot \xi)(\eta(h)) - \eta((f \cdot \xi)(h)))(x) = (f \cdot \xi)_x(\eta(h)) - \eta_x((f \cdot \xi)(h)) = \\ & \text{[βλ. εκ. (3.3)]} = f(x) \cdot \xi_x(\eta(h)) - \eta_x(f \cdot \xi(h)) = \\ \text{[Λείβνιζ για } \eta_x] &= f(x) \cdot \xi_x(\eta(h)) - \eta_x(f) \cdot (\xi(h))(x) - f(x) \cdot \eta_x(\xi(h)) = \\ &= f(x) \cdot (\xi_x(\eta(h)) - \eta_x(\xi(h))) - \eta_x(f) \cdot \xi_x(h) = \\ &= f(x) \cdot [\xi, \eta]_x(h) - \eta_x(f) \cdot \xi_x(h) = \\ &= (f(x) \cdot [\xi, \eta]_x - \eta_x(f) \cdot \xi_x)(h) \end{aligned}$$

άρα, για κάθε $x \in M$.

$$[f \cdot \xi, \eta]_x = f(x) \cdot [\xi, \eta]_x - \eta_x(f) \cdot \xi_x = (f \cdot [\xi, \eta] - \eta(f) \cdot \xi)(x),$$

από όπου και το αποτέλεσμα. ●

3.2.6 ΠΟΡΙΣΜΑ. Η $[,]$ δεν είναι διγραμμική ως προς $C^\infty(M, \mathbb{R})$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα έπρεπε να ισχύει η $[f \cdot \xi, \eta] = f \cdot [\xi, \eta]$ (και ανάλογα για τη δεύτερη μεταβλητή). Αυτό όμως αντικρούεται στην πρόταση 3.2.5. ●

3.2.7 ΟΡΙΜΟΣ Η τριάδα $(\mathcal{X}(M), +, [,])$ λέμε ότι αποτελεί μια άλγεβρα Lie ως προς \mathbb{R} . (δηλ. διευκρινίζοντας τους συνεπιδεστές από τον \mathbb{R} και ότι την $C^\infty(M, \mathbb{R})$).

Γενικότερα, μία άλγεβρα Lie ως προς \mathbb{R} είναι μία τετράδα $(A, +, \cdot, *)$, όπου $(A, +, \cdot)$ αποτελεί γραμμικό χώρο (ως προς \mathbb{R}) και η $*$ είναι ένας "πρόσληπτικός" $A \times A \ni (a, b) \mapsto a * b \in A$, ο οποίος εκτελεί τις ιδιότητες:

- i) είναι διγραμμική απεικόνιση (ως προς \mathbb{R}),
- ii) είναι αντισυμμετρική απεικόνιση, δηλ. $a * b = -b * a$,
- iii) ικανοποιεί την ταυτότητα του Jacobi: $(a * b) * c + (b * c) * a + (c * a) * b = 0$.

Ας σημειωθεί ότι η διγραμμικότητα των ποσ/δυσών σημαίνει ότι κλύουν οι επιμνησθέντες ιδιότητες

$$\begin{aligned} (a+b) * c &= (a * c) + (b * c) & , & \quad a * (b+c) = (a * b) + (a * c) \\ (\lambda a) * c &= \lambda \cdot (a * c) & , & \quad a * (\mu \cdot b) = \mu \cdot (a * b) \end{aligned}$$

Επομένως, μία άλγεβρα Lie διαφέρει από μία συνηθισμένη μεταθετική άλγεβρα ως προς το ότι είναι αντιμεταθετική (άρα μη μεταθετική) και δεν είναι προεξαρτημένη ως προς το $*$, δηλ. δεν κλύει η $a*(b*c) = (a*b)*c$, αλλά η ταυτότητα των Jacobi.

Από τα προηγούμενα, βλέπουμε ότι η $(\mathcal{X}(M), +, \cdot, [, \cdot])$ είναι άλγεβρα Lie με $[\cdot, \cdot] := *$ του γενικού ορισμού Προσ. 4, θεωρώντας το $\mathcal{X}(M)$ με συντελεστές από το $C^\infty(M, \mathbb{R})$ έχουμε ένα πρότυπο, αλλά όχι μία άλγεβρα Lie, λόγω του Παρίεματος 3.2.7

3.2.8 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

(Α) Ένα κλασικό παράδειγμα άλγεβρας Lie είναι ο γραμμικός χώρος των πινάκων $M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε τον πολλαπλασιασμό ή αλλιώς την έκφραση

$$A * B = [A, B] := A \cdot B - B \cdot A, \quad \forall A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

Η παράσταση του τελευταίου μέλους της παραπάνω ισότητας λέγεται μεταθέτης των πινάκων $(A \neq B)$. Το $A \cdot B$ συμβολίζει το συνηθισμένο γινόμενο πινάκων.

(Β) Ιδιαίτερα ενδιαφέρον έχουν οι άλγεβρες Lie, που προκύπτουν από ομάδες Lie (όπως θα δούμε πιο ύστερα, στο κεφ. 4). Στις ομάδες αυτές, κάθε αναλλετέμενος χώρος έχει τη δομή μιας άλγεβρας Lie.

(Γ) Έστω $U \subset M$ ανοικτό (είναι πεδίο ορισμού κάποια). Θεωρούμε και πάντα $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$. Προφανώς, $(\xi|_U)(x) = \xi(x)$, για κάθε $x \in U$, δηλ. $\xi|_U - \xi = 0$ επί του U . Άρα, λόγω της διγραμμικότητας της $[\cdot, \cdot]$, έχουμε ότι

$$0 = [\xi|_U - \xi, \eta]_x = [\xi|_U, \eta]_x - [\xi, \eta]_x$$

$$\eta \quad [\xi|_U, \eta]_x = [\xi, \eta]_x, \quad \forall x \in U$$

$$\eta \quad [\xi|_U, \eta] = [\xi, \eta]|_U$$

Παρόμοια και $[\xi, \eta|_U] = [\xi, \eta]|_U$, άρα

$$[\xi|_U, \eta|_U] = [\xi, \eta]|_U.$$

(Δ) Ας πάρουμε τα βασικά διανυσματικά πεδία $(\frac{\partial}{\partial x^i})_{i=1, \dots, n}$, που φέρει ένας χώρος (U, ρ) και το αντίστοιχο σύστημα συντεταγμένων του. Θεωρούμε μια δίο $\xi, \eta \in \mathcal{X}(M)$. Όπως μπορούμε να βρούμε τις συντεταγμένες των ξ και η , ως προ.

ως προς τον (U, φ) , παρόμοια μπορούμε να βρούμε και τις συντεταγμένες του $[ξ, η]$ και την έκφραση του $[ξ, η]$ ως προς τα βασικά πεδία $(\frac{\partial}{\partial x_i})_{i=1, \dots, m}$.

Πρώτα, η j -συντεταγμένη του $[ξ, η]$ βρίσκεται ως εξής:

$$[ξ, η]_j := [ξ, η](x_j) = ξ(η(x_j)) - η(ξ(x_j)) = ξ(η_j) - η(ξ_j)$$

Κι ακόμη περισσότερο, χρησιμοποιώντας την (3.6),

$$(3.16) \quad [ξ, η]_j = ξ(η_j) - η(ξ_j) = \sum_{i=1}^m (\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i})$$

Επομένως, οι (3.6) και (3.16) οδηγούν στην τελική έκφραση:

$$(3.17) \quad \left\{ \begin{aligned} [ξ, η] &= \sum_{j=1}^m [ξ, η]_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^m (\xi(η_j) - η(ξ_j)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} = \\ &= \sum_{i,j=1}^m (\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \end{aligned} \right.$$

(*) Η (3.17) Μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ένας άλλος ορισμός της $[ξ, η]$ ως εξής.

Ορίζουμε πρώτα το πεδίο με $[ξ, η]_U := \sum_{i,j=1}^m (\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$. Πραγματικά η έκφραση αυτή είναι ένα C^∞ διανυσματικό πεδίο επί του U . Παρόμοια ορίζουμε όλα τα $[ξ, η]_V$, για όλους τους χάρτες (V, ψ) της M . Κατόπιν λέγουμε ότι για δύο χάρτες (U, φ) και (V, ψ) με $U \cap V \neq \emptyset$ είναι

$$(3.18) \quad [ξ, η]_U|_{U \cap V} = [ξ, η]_V|_{U \cap V}$$

[Ο έλεγχος αυτός βασίζεται στον συσκευασισμό των βασικών πεδίων $\frac{\partial}{\partial x_i}$ του (U, φ) με τα βασικά πεδία $\frac{\partial}{\partial y_j}$ του (V, ψ) και τις αντίστοιχες εκφράσεις των $ξ, η$ ως προς (U, φ) και (V, ψ) . Φυσικά πρέπει να καινι καινις αρκετές απλές (αλλά υπογραμμισμένες) πράξεις!]. Η παραπάνω σχέση (3.18) δείχνει ότι το $[ξ, η]$, που δίνεται με τη σχέση $[ξ, η]|_U := [ξ, η]_U$, είναι ένα καλά ορισμένο C^∞ διανυσματικό πεδίο, που το λέμε αγκυλά $Li\bar{e}$ των $[ξ, η]$. (*)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Συμπληρώστε τις διητοιμέρειο της Πρότασης 3.24 και της Εφαρμογής (A).
2. Για ένα χάρτη (U, φ) και τα αντίστοιχα βασικά πεδία $(\frac{\partial}{\partial x_i})_{i=1, \dots, m}$, είναι $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$ για οποιαδήποτε $i, j = 1, \dots, m$
3. Δείξτε ότι $[ξ, ξ] = 0, \forall \xi \in \mathcal{X}(M)$.
4. Για κάθε $ξ, η \in \mathcal{X}(M)$ και $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ισχύει η σχέση $[f \cdot \xi, g \cdot \eta] = f \cdot g \cdot [ξ, η] + f \cdot \xi(g) \cdot \eta - g \cdot \eta(f) \cdot \xi$.

3.3 f -ΣΥΣΧΕΤΙΣΜΕΝΑ ΠΕΔΙΑ.

Θεωρούμε τους χώρους των διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων $\mathcal{X}(M)$ και $\mathcal{X}(N)$, που αποτελούνται από τις πολ/τες M και N . Θα συσχετίσουμε τα στοιχεία των $\mathcal{X}(M)$ και $\mathcal{X}(N)$ με τη βοήθεια μιας απεικόνισης από τη M στη N .

3.3.1 ΟΡΙΣΜΟΣ. Υποθέτουμε ότι $f: M \rightarrow N$ είναι C^∞ απεικόνιση. Τα πεδία $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και $\eta \in \mathcal{X}(N)$ λέγονται f -συσχετισμένα αν ισχύει η συνθήκη

$$(3.19) \quad T_x f \circ \xi = \eta \circ f$$

Ο προηγούμενος ορισμός σημαίνει ότι το διαγράμμα

$$(3.20) \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\xi} & TM \\ \downarrow f & & \downarrow T_x f \\ N & \xrightarrow{\eta} & TN \end{array}$$

είναι μεταθετικό. Επίσης, βλέπουμε ότι τα $T_x f \circ \xi$ και $\eta \circ f$ είναι δύο διανυσματικά πεδία κατά μήκος της f [βλ. Όρισμο 3.1.14(ε)] που συμπίπτουν.

Ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο, με το οποίο ελέγχουμε αν δύο πεδία είναι f -συσχετισμένα, αποτελεί η

3.3.2 ΠΡΟΤΑΣΗ. Δύο διανυσματικά πεδία $\xi \in \mathcal{X}(M)$ και $\eta \in \mathcal{X}(N)$ είναι f -συσχετισμένα τότε και μόνον τότε αν, για κάθε g τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση της N .

$$\xi(g \circ f) = \eta(g) \circ f$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $x \in M$ έχουμε διαδοικώς ως εξής

$$[\xi(g \circ f)](x) = \xi_x(g \circ f)$$

$$\begin{aligned} & \text{[βλ. Πρόταση 2.3.7]} & = [T_x f(\xi_x)](g) & = [(T_x f \circ \xi)(x)](g) \\ & \text{[βλ. (3.19) υπολογισμένη στο } x \text{]} & = [(\eta \circ f)(x)](g) & = [\eta(f(x))](g) \\ & \text{[βλ. συμβολισμό των Ορισμ. 3.1.6]} & = \eta_{f(x)}(g) & = [\eta(g)](f(x)) \\ & & = [\eta(g) \circ f](x), \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει η σχέση της πρότασης και αποδεικνύεται ότι αυτή αποτελεί για ένα αντικείμενο συνθήκη.

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει η σχέση της πρότασης για κάθε $g \in C^\infty(N, \mathbb{R})$. Τότε, για κάθε $x \in M$, η σχέση αυτή συνεπάγεται ότι

$$\xi_x(g \circ f) = [\xi(g \circ f)](x) = [\eta(g) \circ f](x) = [\eta(g)](f(x)) = \eta_{f(x)}(g)$$

$$\text{η. επειδή } \xi_x(g \circ f) = [T_x f(\xi_x)](g),$$

$$[T_x f(\xi_x)](g) = \eta_{f(x)}(g), \quad (\forall g \text{ όπως στην ευρωπότητα})$$

άρα και

$$T_x f(\xi_x) = \eta_{f(x)}$$

ή

$$(Tf \circ \xi)(x) = (\eta \circ f)(x), \quad \forall x \in M,$$

δηλ τα πεδία είναι f -συσχετισμένα, οπότε δεικνύεται ότι η συνάρτηση είναι και ισαρή.

Συνέπεια του προηγούμενου συμπέρασματός είναι το

3.3.3 ΠΟΡΙΣΜΑ Θεωρούμε δυο διανυσματικά πεδία $\xi, \xi' \in \mathcal{X}(M)$ και υποθέτουμε ότι είναι f -συσχετισμένα με τα διανυσματικά πεδία $\eta, \eta' \in \mathcal{X}(N)$ αντίστοιχα. Τότε και τα $[\xi, \xi']$, $[\eta, \eta']$ είναι f -συσχετισμένα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω εκούσια $g \in C^\infty(N, \mathbb{R})$. Τότε, σύμφωνα με τον ορισμό της γωνιάς Lie είναι

$$\begin{aligned} [\xi, \xi'](g \circ f) &= \xi(\xi'(g \circ f)) - \xi'(\xi(g \circ f)) \\ &= \xi(\eta'(g) \circ f) - \xi'(\eta(g) \circ f) \end{aligned}$$

[Πρόταση 3.3.2]

Επειδή το ξ είναι f -συσχετισμένο με το η , εφαρμόζοντας και πάλι την πρόταση 3.3.2 για τη συνάρτηση $\eta'(g) \in C^\infty(N, \mathbb{R})$, έχουμε ότι

$$(3.21) \quad \xi(\eta'(g) \circ f) = \eta(\eta'(g)) \circ f$$

και ανάλογα, για τα ξ' και η' και την $\eta(g) \in C^\infty(N, \mathbb{R})$,

$$(3.22) \quad \xi'(\eta(g) \circ f) = \eta'(\eta(g)) \circ f.$$

Άρα, μέσω των (3.21) και (3.22), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} [\xi, \xi'](g \circ f) &= \xi(\eta'(g) \circ f) - \xi'(\eta(g) \circ f) = \\ &= \eta(\eta'(g)) \circ f - \eta'(\eta(g)) \circ f = (\eta(\eta'(g)) - \eta'(\eta(g))) \circ f = \\ &= ([\eta, \eta'](g)) \circ f, \end{aligned}$$

η οποία, και πάλι, μέσω της πρότασης 3.3.2, αποδεικνύει το τεύχος. ●

3.3.4 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(A) Λό υποθέτουμε ότι $f: M \rightarrow N$ είναι αμφιδιαφορίσιμη. Αν $\xi \in \mathcal{X}(M)$, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε το $\eta \in \mathcal{X}(N)$ με τη σχέση

$$(3.23) \quad \eta := Tf \circ \xi \circ f^{-1}.$$

(ο έλεγχος ότι $\eta \in \mathcal{X}(N)$ είναι προφανής). Επομένως, η (3.23) συνεπάγεται (λόγω της αμφιδιαφορισιμότητας της f) ότι τα ξ και η είναι f -συσχετισμένα, δηλ.

$$(3.24) \quad Tf \circ \xi = \eta \circ f.$$

Το η είναι και το μοναδικό πεδίο της N , που είναι f -συσχετισμένο με το ξ .

θεί ζ. Πραγματικά, αν υπάρχει με ένα άλλο $\bar{\eta} \in \mathcal{X}(N)$, ρ -ευσχεζόμενο με το ξ , θα είχαμε ότι

$$(3.25) \quad T_f \circ \xi = \bar{\eta} \circ \rho,$$

άρα οι (3.24) και (3.25) θα έδιναν ότι $\eta \circ \rho = \bar{\eta} \circ \rho$ και $\eta = \bar{\eta}$.

Για ένα δοσμένο $\xi \in \mathcal{X}(M)$, το μονοσημάντα ορισμένο $\eta \in \mathcal{X}(N)$, που κατασκευάστηκε μέσω της (3.23), το συμβολίζουμε με $f_*(\xi)$. Οπότε

$$(3.26) \quad f_*(\xi) := T_f \circ \xi \circ f^{-1}$$

(B) Έστω $\alpha: J \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ διαφορίσιμη καμπύλη και $\xi \in \mathcal{X}(M)$. Αν $\frac{d}{dt}$ είναι το βασικό διανυσματικό πεδίο του \mathbb{R} [βλ. και Εφαρμογή 3.1.14 (z)], τότε τα $\frac{d}{dt}$ και ξ είναι α -ευσχεζόμενα αν

$$T\alpha \circ \frac{d}{dt} = \xi \circ \alpha,$$

ή, συμφώνητα και πάλι με την ίδια εφαρμογή [εξείσηση],

$$(3.27) \quad \dot{\alpha}(t) = \xi(\alpha(t)), \quad \forall t \in J$$

ΑΣΚΗΣΗ

1. Έστω $f: M \rightarrow N$ αμφιδιαφορίσιμη. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$f_*: \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(N)$$

μέ

$$f_*(\xi) := T_f \circ \xi \circ f^{-1}$$

[βλ. και Εφαρμογή (A)]. Να δείξετε ότι η f_* είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων

2. Στην προηγούμενη άσκηση αποδείξετε ότι

$$f_*([\xi, \eta]) = [f_*(\xi), f_*(\eta)]$$

[Η f_* , με τις παραπάνω ιδιότητες, λέμε ότι αποτελεί έναν (160) μορφοϊσομορφισμό αλγεβρωί Lie]

3.4 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.

Θα κάνουμε μια ποδο σύνομη σύνδεση των διανυσματικών πεδίων με (συνήθως) διαφορι-
 μες εξισώσεις, όπως είπαμε και στην αρχή της §.3.1.

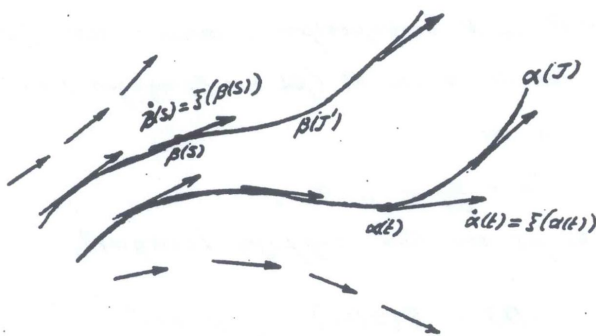
3.4.1 ΟΡΙΣΜΟΣ. Έστω $\xi \in \mathcal{X}(M)$. Μια ολοκληρωτική καμπύλη του ξ είναι μια διαφορίσιμη
 καμπύλη $\alpha : J \rightarrow M$, έτσι ώστε

$$(3.28) \quad \dot{\alpha}(t) = \xi(\alpha(t)) \quad \eta \quad \dot{\alpha} = \xi \circ \alpha$$

Θα λέμε ότι η α έχει αρχική συνθήκη το $x_0 \in M$ (ή ότι διέρχεται από το x_0) αν είναι

$$(3.29) \quad \alpha(0) = x_0$$

Σκ. 17



Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι το ξ , περιορισμένο στην εικόνα $\alpha(J) \subset M$ της
 καμπύλης α , συμπίπτει με το πεδίο ταχυτήτων της α [βλ. Εφαρμογή 3.1.14(2)].
 Επίσης, η α συνδέει τα $\frac{d}{dt}$ (βάσιμο πεδίο του \mathbb{R}) και το ξ έτσι ώστε να είναι α -συσχε-
 τισμένα [βλ. εκ. (3.27), Εφαρμογή 3.3.4(β)]. Τέλος, παρατηρούμε συχνά να ισχύει η (3.28), αλλά
 αρκούμε η α να είναι διαφορίσιμη τάξης C^1 .

Ας δούμε πως εκφράζονται τοπικά οι συνθήκες (3.28) και (3.29).

Θεωρούμε ένα κάρτη (U, φ) της M , με $x \in U$, και τις σφαιρικές τομίες συστήματι-
 κες $(x_i)_{i=1, \dots, m}$. Παίρνουμε έναν ανοιχτό περιγύρο της α επί ενός ανοιχτού
 διαστήματος $J' \subset J$ ($J' \ni 0$), έτσι ώστε $\alpha(J') \subset U$. Επομένως, μπορούμε να
 οπηρεάσουμε και τις απειμοδίες (πραγματικές συναρτήσεις)

$$(3.30) \quad \alpha_i := x_i \circ \alpha : \mathbb{R} \supset J' \rightarrow \mathbb{R} \quad (i=1, \dots, m).$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό του πεδίου ταχυτήτων [Εφαρμογή 3.1.14(2)], την Πρόταση
 2.3.9 και την ευγραφή ενός διανύσματος μέσω των βασικών διανυσμάτων [βλ. εκ. (2.38)
 της Εφαρμογής 2.3.10(γ)], το πρώτο μέλος της (3.28) μετασχηματίζεται διαδοχικά
 ως εξής:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &:= T_t \alpha \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) = \sum_{i=1}^m \left(T_t \alpha \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) \right) (x_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)} = \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{d(x_i \circ \alpha)}{dt} \Big|_t \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^m \frac{d\alpha_i}{dt} \Big|_t \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)} \end{aligned}$$

Επειδή όμως $\frac{d\alpha_i}{dt} \Big|_t = \alpha'_i(t)$ [η εσθιάση παράγωγος πραγματικώς συναρτήσεων μιας μετα-
λητής, βλ. Ακυσση 5 επί § 2.3], η προηγούμενη σχέση γράφεται με τη μορφή

$$(3.31) \quad \dot{\alpha}(t) = \sum_{i=1}^m \alpha'_i(t) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} / \alpha(t)$$

Ανά λογα, το πρώτο μέλος της (3.28) μετασχηματίζεται ως εξής

$$\xi(\alpha(t)) = \xi_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^m \xi_{\alpha(t)}(x_i) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} / \alpha(t) =$$

$$[\text{βλ. (3.4)}] \quad = \sum_{i=1}^m \xi_i(\alpha(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} / \alpha(t)$$

δηλαδή

$$(3.32) \quad \xi(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^m \xi_i(\alpha(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} / \alpha(t)$$

Επομένως, από την (3.28) και τις (3.31) και (3.32), βρίσκουμε ότι

$$(3.33) \quad \alpha'_i(t) = \xi_i(\alpha(t)) \quad , \quad t \in J' \quad (i=1, \dots, m)$$

Ομοίως, και η (3.30) οδηγεί στις σχέσεις

$$(3.34) \quad \alpha_i(0) = x_i(\alpha(0)) = x_i(x_0) = \overset{\text{συμβολ.}}{=} (x_0)_i \in \mathbb{R} \quad (i=1, \dots, m)$$

Άρα, τελικά, οι (3.28) και (3.29) οδηγούν στο επόμενο σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης

$$(3.35) \quad \begin{cases} \alpha'_i(t) = \xi_i(\alpha(t)) = (\xi_i \circ \varphi^{-1})(\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t)) \\ \alpha_i(0) = (x_0)_i \end{cases} \quad (i=1, \dots, m)$$

Χρησιμοποιώντας πιο οικεία συμβολισμούς (από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων), βρίσκουμε ότι οι α_i αποτελούν λύσεις του συστήματος

$$(3.35') \quad \begin{cases} \frac{dy_i}{dt} = F_i(y_1, \dots, y_m) \\ y_i(0) = (x_0)_i \end{cases} \quad ; \quad F_i = \xi_i \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

(όπου τώρα βέβαια τα y_i δεν είναι συνεπαγμένα ποσά, αλλά σύμβολα "αγνώστων" συναρτήσεων).

Είναι γνωστό ότι τέτοια συστήματα έχουν πάντοτε μία (μοναδική) λύση που ικανοποιεί τη δοσμένη συνθήκη.

Η προηγούμενη ανάλυση ουσιαστικώς λύνει το πρόβλημα της ύπαρξης μιας ολοκληρωτικής μαμνήλης του ξ με αρχική συνθήκη x_0 : Θεωρούμε το ποσά (U, φ) με $x_0 \in U$ και λύνουμε το σύστημα (3.35'). Επομένως, υπάρχουν οι

$\alpha_i : J' \rightarrow \mathbb{R} \quad (i=1, \dots, m)$ με $\alpha_i(0) = (x_0)_i$. Άρα η $\alpha : J' \rightarrow M$ με $\alpha(t) = \varphi^{-1}(\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t))$ είναι η ολοκληρωτική μαμνήλη του ξ με $\alpha(0) = x_0$.

Τα προηγούμενα συνοψίζονται στην

| 3.4.2 ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν $\xi \in \mathcal{X}(M)$, τότε, για κάθε $x \in M$, υπάρχει μία ολοκληρωτι-

μη αμφιπλάτη $\alpha: J \rightarrow M$ με $\alpha(0) = x$

Η προηγούμενη πρόταση μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ολοκληρωσιμών αμφιπλάτων, όχι και το μονοσήμαντό τους (για κάθε αρχική συνθήκη), παρά το γεγονός ότι τοιμίμα, δηλ. το σύστημα (3.35') έχει μονοσήμαντα ορισμένους λύσεις. Και τέτοιο δεν συμβαίνει αυτόματα και στην πολλαπλότητα. Εντούτοις, σε πολλαπλότητα Hausdorff εξασφαλίζεται το "μονοσήμαντο" των ολοκληρωσιμών αμφιπλάτων με την έννοια που θα εξηγήσουμε πιο κάτω.

Προηγουμένως αναφέρουμε το επόμενο γινώστω, από την τοπολογία, αποτέλεσμα.

3.4.3 ΛΗΜΜΑ. Έστω Y τοπολογικός χώρος Hausdorff. Τότε η διαγώνιος Δ_Y του Y , δηλ. το

$$\Delta_Y = \{(y, y) \mid y \in Y\} \subset Y \times Y$$

είναι κλειστό υποσύνολο του $Y \times Y$.

Μπορούμε τώρα να δείξουμε το επόμενο θεμελιώδες

3.4.4 ΘΕΩΡΗΜΑ. Έστω M πολλαπλότητα Hausdorff (βλ. §. 1.3) και $\xi \in \mathcal{X}(M)$.

Τότε, για κάθε $x \in M$, οι ολοκληρωσιμές αμφιπλάτες του ξ με την ίδια αρχική συνθήκη x συμπίπτουν στην τομή των πεδίων ορισμού τους.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο ολοκληρωσιμές αμφιπλάτες του ξ , οι $\alpha: J_\alpha \rightarrow M$ και $\beta: J_\beta \rightarrow M$, με $\alpha(0) = \beta(0) = x$. Θέτουμε

$$J = \{t \mid \alpha(t) = \beta(t)\} \subset J_\alpha \cap J_\beta.$$

Προφανώς $J \neq \emptyset$ [αφού $0 \in J$, επειδή $\alpha(0) = \beta(0)$]. Θα δείξουμε ότι το J είναι κλειστό υποσύνολο του $J_\alpha \cap J_\beta$. Πραγματικά, βλεπούμε ότι

$$J = f^{-1}(\Delta_M)$$

όπου $f := (\alpha, \beta): J_\alpha \cap J_\beta \rightarrow M \times M$ [δηλ. $f(t) = (\alpha(t), \beta(t))$], η οποία είναι C^∞ απεικόνιση, άρα και συνεπής. Επομένως, κατά το Λήμμα 3.4.3, το J είναι κλειστό.

Θα δείξουμε τώρα ότι το J είναι και ανοικτό υποσύνολο του $J_\alpha \cap J_\beta$: Έστω ένα οποιοδήποτε $s \in J$, οπότε $\alpha(s) = \beta(s) = y_0$. Αν (U, φ) είναι ένα κάρτης της M με $y_0 \in U$, τότε, όπως στην ανάλυση που προηγήθηκε της Πρότασης 3.4.2, θα έχουμε τα συστήματα

$$\alpha'_i(t) = \xi_i(\alpha(t)) \quad ; \quad i = 1, \dots, m$$

και

$$\beta'_i(t) = \xi_i(\beta(t)) \quad ; \quad i = 1, \dots, m$$

με την ίδια συνθήκη

$$\alpha_i(s) = \beta_i(s) = (y_0)_i \quad ; \quad i = 1, \dots, m$$

Τότε, και παρά από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων, είναι γνωστό ότι υπάρχει ανοιχτή περιοχή A του S , έτσι ώστε $\alpha_i/A = \beta_i/A$ ($i=1, \dots, m$), άρα $A \subset J$. Επομένως για κάθε $S \in J$, υπάρχει ανοιχτή περιοχή του S (στο \mathbb{R}) με $S \cap A \subset J$, δηλ. το J είναι και ανοιχτό υποσύνολο του $J_\alpha \cap J_\beta$.

Άρα, τελικά, δείξαμε ότι το J είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $J_\alpha \cap J_\beta$, που είναι ταυτόχρονα ανοιχτό και κλειστό. Επειδή, όμως, το $J_\alpha \cap J_\beta$ είναι συνεκτικό σύνολο (στο ανοιχτό διάστημα του \mathbb{R}), αναγκαστικά $J = J_\alpha \cap J_\beta$, οπότε και $\alpha|_{J_\alpha \cap J_\beta} = \beta|_{J_\alpha \cap J_\beta}$, που αποδεικνύει το θεώρημα. ●

3.4.5 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Όπως φάνηκε στην προηγούμενη απόδειξη (ιδίαιτερα στη χρήση του Λήμματος 3.4.3), η απαίτηση να είναι η M χωρίς κλασμούς είναι ουσιώδης (βλ. σχετικά (αντί)παράδειγμα πιο κάτω).

3.4.5 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

(Α) [Ένα κλασικό παράδειγμα].

Ας θεωρήσουμε την πολλαπλότητα $M = \mathbb{R}^2$ και τον χώρο της $(\mathbb{R}^2, id_{\mathbb{R}^2})$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε δύο συνεταγμένες $x_i := \rho_i \circ id_{\mathbb{R}^2} = \rho_i$, ($i=1,2$), άρα και δύο αντίστοιχα βασικά διανυσματικά πεδία $\frac{\partial}{\partial x_1}$ και $\frac{\partial}{\partial x_2}$. Θεωρούμε και το διανυσματικό πεδίο $\xi \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ του οποίου οι συνεταγμένες ξ_i συμπίπτουν με τις συναρτήσεις x_i . Δηλ. το ξ έχει την έκφραση

$$\xi = x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}$$

[Άρα, σε τυχόν $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, το ξ δίνει το εφαπτομένο διάνυσμα

$$\begin{aligned} \xi_{(x,y)} &= \xi(x,y) = x_1(x,y) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} /_{(x,y)} + x_2(x,y) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} /_{(x,y)} = \\ &= x \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} /_{(x,y)} + y \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} /_{(x,y)}] \end{aligned}$$

Για να βρούμε τις οθολογικές μακρύνει $\alpha: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ του ξ πληθαίνομε στο αντίστοιχο σύστημα (3.35), το οποίο στην περίπτωση μας δίνει τις εξισώσεις

$$\alpha_i'(t) = \xi_i(\alpha(t)) = \xi_i(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \quad (i=1,2)$$

ή, σύμφωνα με τον ορισμό των ξ_i ,

$$\alpha_1'(t) = \alpha_1(t)$$

$$\alpha_2'(t) = \alpha_2(t)$$

Αν συμβολίσουμε με y_i τις α_i , θα έχουμε, με το συνηθισμένο συμβολισμό των διαφορικών εξισώσεων το σύστημα

$$(3.36) \quad \frac{dy_1}{dt} = y_1 \quad \text{και} \quad \frac{dy_2}{dt} = y_2$$

Επιλύοντας την κάθε εξίσωση των (3.36) έχουμε ότι

$$y_1(t) = y_1(t) = C_1 \cdot e^{pt}, \quad y_2(t) = y_2(t) = C_2 \cdot e^{pt}, \quad t \in \mathbb{R}$$

και τελικά

$$\alpha(t) = (C_1 \cdot e^{pt}, C_2 \cdot e^{pt}), \quad t \in \mathbb{R}$$

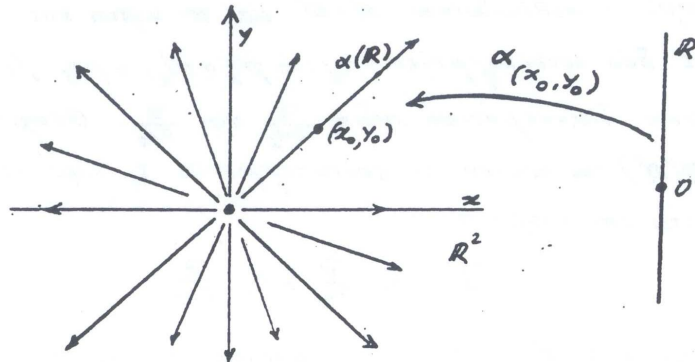
όπου C_1 και C_2 σταθερές.

Αν ζητήσουμε τώρα μια συγκεκριμένη οδοληρωτική καμπύλη, δηλ. μια καμπύλη με αρχική συνθήκη $\alpha(0) = (x_0, y_0)$, τότε αυτή είναι απλώς η

$$\alpha(t) = (x_0 \cdot e^{pt}, y_0 \cdot e^{pt}), \quad t \in \mathbb{R}$$

Εδώ λέμε ότι όλες οι οδοληρωτικές καμπύλες του ξ έχουν πεδίο ορισμού ολόκληρο το \mathbb{R} [και τέτοιο δεν συμβαίνει πάντοτε, δηλ. για κάθε M και $\xi \in \mathcal{X}(M)$].

Ιδιαίτερα, η οδοληρωτική καμπύλη με αρχική συνθήκη $\alpha(0) = (0,0)$, δηλ. $\alpha(0) = (0,0)$ είναι η σταθερή απεικόνιση $\alpha(t) = (0,0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Επομένως, οι οδοληρωτικές καμπύλες του ξ παραστάονται στο επόμενο σχήμα



Σχ. 18

As προεξέτι ότι όλες οι οδοληρωτικές καμπύλες, εκτός της σταθερής $(0,0)$, παραστάουν ημιωθείες του \mathbb{R}^2 [διαφορετικά, αν περνούσαν από το $(0,0)$, θα έπρεπε να συμπίπτουν με τη σταθερή καμπύλη $(0,0)$.!]

(B) και πάλι με τους συμβολισμούς και τις προϋποθέσεις της (A), θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο $\xi \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2)$ με

$$\xi = x_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}$$

Με την ίδια διαδικασία, για να βρούμε τις οδοληρωτικές καμπύλες του ξ , αρκεί να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1$$

οπότε βρίσκουμε ότι $y_1(t) = c_1 \cdot \sin(t+c_2)$ και $y_2(t) = c_1 \cdot \cos(t+c_2)$, άρα

$$\alpha(t) = (c_1 \cdot \sin(t+c_2), c_1 \cdot \cos(t+c_2)), t \in \mathbb{R}$$

Επομένως, οι οδοαληθωσιμεία καμπύλες του ξ είναι οι κύκλοι με κέντρο $(0,0)$ και ακτίρες $r = |c_1|$, μαζώς και η εσαδέρη καμπύλη $\alpha_0: t \rightarrow (0,0)$ (που προκύπτει για $c_1 = 0$) [βλ. Σκλήμα 17].

Ας αναζητήσουμε τώρα μια συγκεκριμένη οδοαληθωσιμεία καμπύλη, με αρχική εσαδέρη $\alpha(0) = (2, 2\sqrt{3})$. Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε ότι

$$(*) \quad c_1 \cdot \sin c_2 = 2, \quad c_1 \cdot \cos c_2 = 2\sqrt{3}$$

άρα $\tan c_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ και $c_2 = \frac{\pi}{6}$ ή $\frac{7\pi}{6}$. Αντιμαδισατάς την c_2 εις ± 1 βρίσκουμε αντίστοιχα ότι $c_1 = 4$ ή -4 . Επομένως, βρίσκουμε τω αντίστοιχω καμπύλες

$$\alpha(t) = (4 \cdot \sin(t+\frac{\pi}{6}), 4 \cdot \cos(t+\frac{\pi}{6})), t \in \mathbb{R}$$

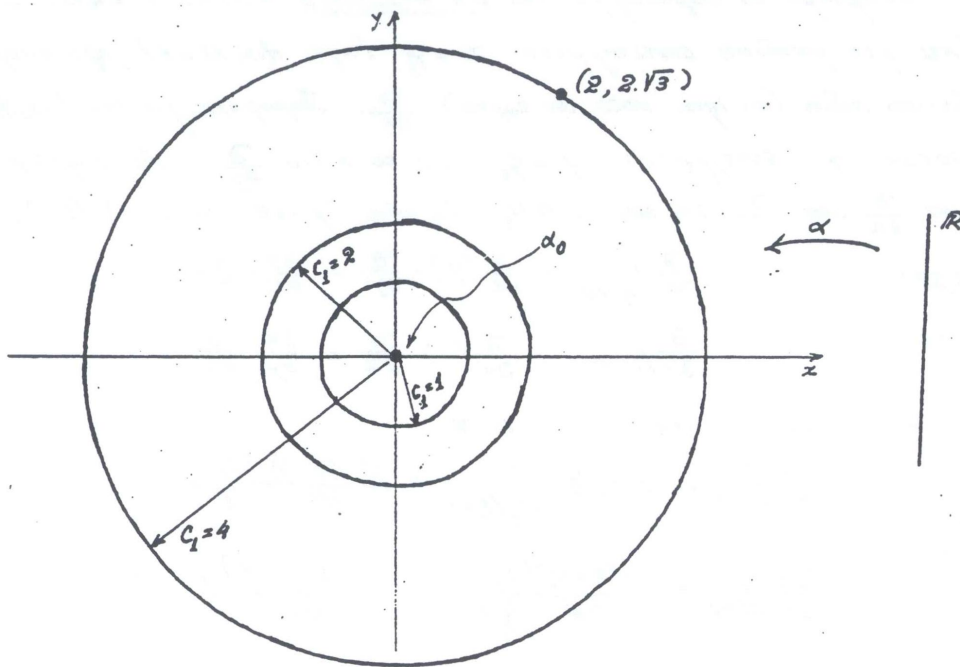
$$\alpha(t) = (-4 \cdot \sin(t+\frac{7\pi}{6}), -4 \cdot \cos(t+\frac{7\pi}{6})), t \in \mathbb{R}$$

Φυσικά και οι δύο εκφράσεις ορίζουν την ίδια καμπύλη, αφού

$$\sin(t+\frac{\pi}{6}) = -\sin(t+\frac{7\pi}{6}), \quad \cos(t+\frac{\pi}{6}) = -\cos(t+\frac{7\pi}{6})$$

[Πράγμα που αναμενόμεν, λόγω του μονοσημάντω των ηύσεων (θεώρημα 3.5.4)].

Σκ. 19



(Γ) Έστω $\alpha: J=(a,b) \rightarrow M$ η οδοαληθωσιμεία καμπύλη ενός διαυσεματιωσίου ηώδιου ξ τωσ πολλανλήσετασ M με αρχική εσαδέρη $\alpha(0) = z_0$ [δεν παίρνουμε το J συμμετρίωσ αναγυαία, μόνον απαιτούμε να είναι $0 \in J$]. Ορίζουμε την μεταφορά των \mathbb{R} ματά τ ($\tau \in \mathbb{R}$ εσαδέρω) $\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\mu(t) = t+\tau$. Θεωρούμε και την καμπύλη $\beta(t) := (\alpha \circ \mu)(t) = \alpha(t+\tau)$. Θα δείξουμε ότι και η β

είναι οδοαληθική μαγνήλη του ξ .

Πραγματικά έχουμε τις διαδοχικές εξέσεις

$$\begin{aligned} \beta(t) &= (\alpha \circ \mu_r)'(t) = (T_t(\alpha \circ \mu_r))\left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right) = \\ &= (T_{t+r}\alpha \circ T_t\mu_r)\left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right) = T_{t+r}\alpha\left(T_t\mu_r\left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right)\right) = \end{aligned}$$

[βλ. 2.2.11(Δ), για $r=\mu$, $s=t$]
$$= T_{t+r}\alpha\left(\mu_r'(t) \cdot \frac{d}{dt}\Big|_{t+r}\right) =$$

$$= \mu_r'(t) \cdot (T_{t+r}\alpha\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t+r}\right))$$

[α οδοαλ. μαγνήλη του ξ]
$$= 1 \cdot \alpha'(t+r) = \xi(\alpha(t+r))$$

$$= \xi(\beta(t)),$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. Προφανώς, το πεδίο ορισμού της β είναι το $(a-r, b-r)$. Ας σημειωθεί ότι τώρα η αρχική συνθήκη είναι $\beta(x) = \alpha(0)$.

(Δ) Ας δείξουμε πόσο αναγκαία είναι η υποθεση ότι η M πρέπει να είναι Hausdorff για να εξασφαλιστεί το μονοσήμαντο των οδοαληθικών μαγνήλων, με την έννοια του θεωρήματος 3.4.4, με το εξής αντιπαράδειγμα:

Θεωρούμε το παράδειγμα της μη Hausdorff πολλαπλ. M 1.2.15. Ο χώρος (U, φ_1) δίνει μια μοναδιαία συνεγγραμμένη $x = \varphi_1$ [αφού $\dim M = 1$, άρα υπάρχει και ένα μόνο βασικό πεδίο (ως προς αυτήν την γάρτη) $\frac{\partial}{\partial x}$. Παρόμοια, για τον (U_2, φ_2) έχουμε την μοναδιαία συνεγγραμμένη $y = \varphi_2$ και το πεδίο $\frac{\partial}{\partial y}$. Αν πάρουμε τους περιορισμούς των $\frac{\partial}{\partial x}$ και $\frac{\partial}{\partial y}$ επί του $U_1 \cap U_2$ θα είναι [βασει των (3.4), (3.5), (3.6), για $i=1$]

$$(3.37) \quad \frac{\partial}{\partial x}\Big|_{U_1 \cap U_2} = \frac{\partial}{\partial x}(y) \cdot \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y}$$

$$(3.38) \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big|_{U_1 \cap U_2} = \frac{\partial}{\partial y}(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}$$

Ομως, για κάθε $(t,0) \in U_1 \cap U_2$, είναι

$$\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{(t,0)} = \frac{\partial(y \circ \varphi_1^{-1})}{\partial u}\Big|_{\varphi_1(t,0)} = \frac{d(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})}{dt}\Big|_t = 1$$

και

$$\frac{\partial x}{\partial y}\Big|_{(t,0)} = \frac{\partial(x \circ \varphi_2^{-1})}{\partial u}\Big|_{\varphi_2(t,0)} = \frac{d(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})}{dt}\Big|_t = 1$$

[αφού $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \varphi_2 \circ \varphi_2^{-1} = id/\mathbb{R}$, βλ. Παράδ. 135].

Άρα τελικά $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial y} = 1$, οπότε οι (3.37) και (3.38) δίνουν ότι

$$(3.39) \quad \frac{\partial}{\partial x}\Big|_{U_1 \cap U_2} = \frac{\partial}{\partial y}\Big|_{U_1 \cap U_2}$$

Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε ένα ολικό διαν. πεδίο $\xi \in \mathcal{X}(M)$ με

$$\xi|_{U_1} = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{και} \quad \xi|_{U_2} = \frac{\partial}{\partial y} \quad [\text{φυσικά είναι καλά ορισμένα λόγω της (3.39)].$$

Θεωρούμε την αμφύλη

$$(3.40) \quad \alpha: \mathbb{R} \rightarrow M : \alpha(t) = (t-1, 0)$$

Παρατηρούμε ότι $\alpha(0) = (-1, 0)$. Επίσης, είναι ολοκληρωτική αμφύλη του ξ επειδή

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= T_t \alpha \left(\frac{d}{dt} / t \right) = [T_t \alpha \left(\frac{d}{dt} / t \right)](\alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial x} /_{\alpha(t)} = \frac{d}{dt} / t \cdot (x \circ \alpha) \cdot \frac{\partial}{\partial x} /_{\alpha(t)} \\ &= \frac{d(\varphi_1 \circ \alpha)}{dt} / t \cdot \frac{\partial}{\partial x} /_{\alpha(t)} = (t-1)' \cdot \frac{\partial}{\partial x} /_{\alpha(t)} = \frac{\partial}{\partial x} /_{\alpha(t)} = \frac{\partial}{\partial x} (\alpha(t)) \equiv \xi(\alpha(t)) \end{aligned}$$

αφού $\alpha(t) \in U_1$ και $\frac{\partial}{\partial x} = \xi / U_1$. Ορίζουμε και την αμφύλη

$$(3.41) \quad \beta: \mathbb{R} \rightarrow M \text{ με } \beta(t) = \begin{cases} (t-1, 0) & , t \neq 1 \\ (0, 1) & t = 1 \end{cases}$$

Επίσης $\beta(0) = (-1, 0)$ [ίδια αρχική συνθήκη όπως η α]. Ανωμα, βλέπουμε ότι

$\beta(t) \in U_2$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Άρα,

$$\dot{\beta}(t) = T_t \beta \left(\frac{d}{dt} / t \right) = [T_t \beta \left(\frac{d}{dt} / t \right)](\beta) \cdot \frac{\partial}{\partial y} /_{\beta(t)} = \dots = \xi(\beta(t)) \text{ , } t \neq 1$$

και

$$\begin{aligned} \dot{\beta}(1) &= T_1 \beta \left(\frac{d}{dt} / 1 \right) = [T_1 \beta \left(\frac{d}{dt} / 1 \right)](\beta) \cdot \frac{\partial}{\partial y} /_{\beta(1)} = \frac{d(\varphi_2 \circ \beta)}{dt} / 1 \cdot \frac{\partial}{\partial y} /_{\beta(1)} = \\ &= 1 \cdot \frac{\partial}{\partial y} /_{\beta(1)} = \frac{\partial}{\partial y} (\beta(1)) \equiv \xi(\beta(1)) \end{aligned}$$

δηλ και η β είναι ολοκληρωτική αμφύλη του ξ



Επομένως, βρίσκουμε δύο ολοκληρωτικές αμφύλες, με την ίδια αρχική συνθήκη $\alpha(0) = \beta(0) = (-1, 0)$ οι οποίες δεν συμπίπτουν στο κοινό πεδίο ορισμού τους \mathbb{R} , αφού $\alpha(1) = (0, 0) \neq (0, 1) = \beta(1)$

Εδώ βλέπεις μανείς και γιατί άλλο: ενώ η β σαν αμφύλη της M είναι παντού C^∞ (ο έλεγχος μέσω των κερταίων), άρα συνετής, σαν αμφύλη του \mathbb{R}^2 παρουσιάζει ασυνέχεια στο $t=1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Με τους συμβολισμούς στη Εφαρμογή (Α), να βρεθούν οι οθολοκληρωτικές μαγνητές των διανυσματικών πεδίων του \mathbb{R}^2 , που δίνονται με τις παρακάτω εκφράσεις

α)
$$\xi = x_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}$$

β)
$$\xi = x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}$$

γ)
$$\xi = x_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}$$

2. Θεωρούμε το $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ με τη δομή της ανοιχτής υποπολλαδικότητας του \mathbb{R}^2 , να βρεθούν οι οθολοκληρωτικές μαγνητές του $\xi \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$ με

$$\xi = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}$$

3. Έστω η πολλα \mathbb{R}^3 με τη συνήθη διαφορική δομή, που ορίζεται $\{(R^3, \omega_{R^3})\}$. Με παρόμοιους συμβολισμούς όπως στην Εφαρμογή (Α), ορίζουμε το διανυσματικό πεδίο $\xi \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ με

$$\xi = x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \cdot \frac{\partial}{\partial x_3}$$

Ποιές οι οθολοκληρωτικές μαγνητές του;

4. Ποιές είναι οι οθολοκληρωτικές μαγνητές του $\xi \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^3)$ με

$$\xi = x_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_3} ;$$

5. Έστω το \mathbb{R} με τη συνήθη διαφορική δομή πολλα. Ποιές οι οθολοκληρωτικές μαγνητές του βασικού πεδίου $\frac{d}{dt}$? Ποιά είναι η ολκή μαγνητή με αρχική συνθήκη $\alpha(0) = 0$;

6. Έστω τυχαία πολλα M και τάρτη (U, φ) με συντεταγμένες $(x_i)_{i=1, \dots, m}$. Ποιές είναι οι οθολοκληρωτικές μαγνητές του $\frac{\partial}{\partial x_j}$; Αν, ιδιαιτερα $\alpha \in U$ είναι σημείο με συντεταγμένες $\alpha_i := x_i(\alpha)$, να βρεθεί η οθολοκληρωτική μαγνητή του $\frac{\partial}{\partial x_j}$ με αρχική συνθήκη $\alpha(0) = \alpha$.

7. Αν α, β είναι οθολοκληρωτικές μαγνητές ενός $\xi \in \mathcal{X}(M)$, με πεδίο ορισμού J_α και J_β , και υποθέσουμε ότι υπάρχει $t_0 \neq 0$ με $t_0 \in J_\alpha \cap J_\beta$ και $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$, τότε να δείξετε ότι $\alpha|_{J_\alpha \cap J_\beta} = \beta|_{J_\alpha \cap J_\beta}$ [M Hausdorff].

3.5 Η ΡΟΗ ΕΝΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Υποθέτουμε ότι M είναι μια πολλα (Hausdorff) και $\xi \in \mathcal{X}(M)$. Όπως είδαμε στην §3.4, για ένα δοσμένο $x_0 \in M$ και ένα ζεύγη (U, φ) με $x_0 \in U$, υπάρχει μια (μοναδιαία) ολοκληρωτική καμπύλη, ως τη συμβολίζουμε α_{x_0} , η οποία έχει αρχική συνθήκη x_0 ($\alpha_{x_0}(0) = x_0$) και προσδιορίζεται από το σύστημα διαφοριών εξισώσεων (3.35). Αν θέσουμε $h_0 = \varphi(x_0) = ((x_0)_1, \dots, (x_0)_m)$. Παρόμοια, και για οποιοδήποτε άλλο $x \in U$, η αντίστοιχη ολοκληρωτική καμπύλη του ξ με αρχική συνθήκη x , ως τη συμβολίζουμε α_x , θα προσδιορίζεται από το ίδιο σύστημα και την τελική συνθήκη $h = \varphi(x) = (x_1, \dots, x_m)$ [ζωρα τα x_i είναι οι συντεταγμένες του $\varphi(x)$ και όχι οι συναρτήσεις συντεταγμένων του ζεύγους].

Στη θεωρία των διαφοριών εξισώσεων αποδεικνύεται ότι οι λύσεις του (3.35) εξαρτώνται διαφορίσιμα από τις αρχικές συνθήκες. Δηλ., αποδεικνύεται ότι υπάρχει ανοικτό δίσκωμα $J = (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$, ένα ανοικτό $A_0 \subset \mathbb{R}^m$ με $h_0 \in A_0 \subset \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ και μία C^∞ απεικόνιση $\partial: J \times A_0 \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$, τέτοια ώστε, για κάθε $h \in A_0$, η (C^∞) μερική απεικόνιση $\partial_h: J \rightarrow \varphi(U)$ να είναι λύση του (3.35) με $\partial_h(0) = h$. Επομένως, επιστρέφοντας στην M (μέσω του ζεύγους (U, φ)), μπορούμε να ορίσουμε το ανοικτό σύνολο $U_0 = \varphi^{-1}(A_0) \subset M$ με $x_0 \in U_0$ και τη C^∞ απεικόνιση $\Theta: J \times U_0 \rightarrow U_0$ με $\Theta := \varphi^{-1} \circ \partial \circ (id_J \times \varphi)$, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} J \times A_0 & \xrightarrow{\partial} & \varphi(U) \\ \uparrow id_J \times \varphi & & \downarrow \varphi^{-1} \\ J \times U_0 & \xrightarrow{\Theta} & U_0 \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in U_0$, η μερική απεικόνιση $\Theta_x: J \rightarrow U_0$ (με $\Theta_x(t) = \Theta(t, x)$) είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ με αρχική συνθήκη x . Πραγματικά, αν $h = \varphi(x)$, τότε $\Theta_x(t) = \Theta(t, x) = \varphi^{-1}(\partial(t, h)) = \varphi^{-1}(\partial_h(t))$, $\forall t \in J$, άρα η καμπύλη $\partial_h(t) = \varphi(\Theta_x(t))$ είναι λύση του (3.5) με $\partial_h(0) = h$, πράγμα που αποδεικνύει τον ισχυρισμό για τη Θ_x .

Ας μελετήσουμε τώρα και τη συμπεριφορά των μερικών απεικονίσεων $\Theta_t: U_0 \rightarrow U_0$ (όπου $\Theta_t(x) = \Theta(t, x)$). Προφανώς, κάθε τέτοια απεικόνιση είναι διαφορίσιμη (C^∞). Σταθεροποιούμε ένα $x \in U_0$ και παίρνουμε δύο στοιχεία $t, s \in J$ τέτοια ώστε και $t+s \in J$. Ορίζουμε τις (C^∞) καμπύλες $\alpha: J \rightarrow M$ και $\beta: J \rightarrow M$ με

$$\alpha(t) := \Theta(t+s, x); \quad \beta(t) := \Theta(t, \Theta(s, x)).$$

Θέτοντας $y := \Theta(s, x)$, έχουμε ότι

$$\beta(t) = \Theta(t, y) = \Theta_y(t), \quad t \in J$$

δηλ. η β είναι οδουληρωσιμη καμπυλη του ξ με αρχικη συνθηκη $\beta(0) = \gamma$.

Απ' το άλλο μέρος, για την καμπυλη α μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\alpha(t) = \Theta_x(t+s) = (\Theta_x \circ \Theta_s)(t),$$

όπου $\Theta_s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η (C^∞) απεικόνιση με $\Theta_s(t) = t+s$. Επομένως, έχουμε διαδοχικά ότι:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= T_t \alpha \left(\frac{d}{dt} / t \right) = T_t (\Theta_x \circ \Theta_s) \left(\frac{d}{dt} / t \right) = T_{t+s} \Theta_x \left(T_t \Theta_s \left(\frac{d}{dt} / t \right) \right) = \\ &= T_{t+s} \Theta_x \left(\Theta_s' (t) \cdot \frac{d}{dt} / t+s \right) = T_{t+s} \Theta_x \left(\frac{d}{dt} / t+s \right). \end{aligned}$$

Επειδή όμως η Θ_x είναι οδουληρωσιμη καμπυλη του ξ , οι προηγούμενες σχέσεις οδηγούν στην

$$\dot{\alpha}(t) = T_{t+s} \Theta_x \left(\frac{d}{dt} / t+s \right) = \dot{\Theta}_x(t+s) = \xi(\Theta_x(t+s)) = \xi(\alpha(t)),$$

δηλ. βρίσκουμε ότι και η α είναι οδουληρωσιμη καμπυλη του ξ με αρχικη συνθηκη $\alpha(0) = \Theta(s, x) = \gamma$, όπως και η β . Συνεπώς $\alpha = \beta$, πράγμα που σημαίνει ότι $\Theta(t+s, x) = \Theta(t, \Theta(s, x))$. Η σχέση αυτή ισχύει με παρόμοιο τρόπο, και για κάθε άλλο $x \in U_0$ και για οποιαδήποτε $t, s \in J$ με $t+s \in J$. Επομένως

$$\Theta_{t+s}(x) = \Theta(t+s, x) = \Theta(t, \Theta(s, x)) = \Theta_t(\Theta_s(x)) = (\Theta_t \circ \Theta_s)(x),$$

δηλ. καταλήγουμε στην

$$(3.41) \quad \boxed{\Theta_{t+s} = \Theta_t \circ \Theta_s} \quad t, s, t+s \in J$$

Επίσης, για $t=0$ και για κάθε $x \in U_0$ είναι $\Theta_0(x) = \Theta(0, x) = \Theta_x(0) = x$, άρα

$$(3.42) \quad \boxed{\Theta_0 = id_{U_0}}$$

Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις, για $s = -t$ προκύπτει ότι

$$\Theta_t \circ \Theta_{-t} = \Theta_0 = id_{U_0},$$

άρα καταλήγουμε στην

$$(3.43) \quad \boxed{\Theta_{-t} = (\Theta_t)^{-1}}$$

Επειδή κάθε Θ_t είναι απεικόνιση C^∞ , θα είναι C^∞ και η Θ_t δηλ. η $(\Theta_t)^{-1}$, που σημαίνει ότι κάθε $\Theta_t: U_0 \rightarrow U_0$ είναι αμφιδιαφορίση

Για διευκρίνιση εισάγουμε την επόμενη ορολογία:

3.5.1 ΟΡΙΣΜΟΣ. Η απεικόνιση $\Theta: J \times U_0 \rightarrow U_0$ καλείται τοπιμη ροή του ξ (παίω από το U_0), η οικογένεια $\{\Theta_t\}_{t \in J}$ καλείται τοπιμη μοτοπαραμετρικη ομάδα μετασχηματισμών του και το ξ καλείται απεροστικός γεννήτορας της $\{\Theta_t\}_{t \in J}$ (και της Θ).

Με την προηγούμενη ορολογία, τα παραπάνω συμπεράσματα ενοψίζονται ως εξής:

| **3.5.2 ΠΡΟΤΑΣΗ.** Η τοπιμη ροή $\Theta: J \times U_0 \rightarrow U_0$ του ξ (παίω από το U_0) είναι μια

Διαφορίσιμη απεικόνιση έτσι ώστε :

i) Κάθε απεικόνιση $\Theta_x: J \rightarrow U_0$ να είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ με αρχική συνθήκη x .

ii) Οι απεικονίσεις $\Theta_x: U_0 \rightarrow U_0$ αποτελούν μία μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών του U_0 , δηλ. είναι αμφιδιαφορίσιμες (: μετασχηματισμοί) και ικανοποιούν τις σχέσεις (3.41), (3.42) [και κατά συνέπεια και την (3.43)]

3.5.3 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ. 1) Από τις (3.41)-(3.43) φαίνεται αμέσως ότι το $\{\Theta_x | x \in J\}$ αποτελεί ομάδα, υποομάδα της ομάδας $\text{Diff}(U_0)$ όλων των αμφιδιαφορίσεων του U_0 (βλ. βεβαιώς και την Αξίωμα 14 της §1.3)

2) Υπάρχουν παραδείγματα διανυσματικών πεδίων όπου η ροή ορίζεται ολικά (ολική ροή) δηλ. είναι της μορφής $\Theta: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, οπότε $\Theta_x: \mathbb{R} \rightarrow M$ και $\{\Theta_x\}_{t \in \mathbb{R}}$. Τέτοια πεδία, τα λεγόμενα και πλήρη, εμφανίζονται σε αρκετές περιπτώσεις (π.χ. στις ομάδες Lie, που θα μελετήσουμε πιο κάτω).

Βρίσκουμε πιο πάνω τη ροή Θ , λοιπόν παίρνουμε από το U_0 , ξεκινώντας από κάποιο $x_0 \in M$. Αν τώρα πάρουμε ένα άλλο σημείο, έστω $x'_0 \in M$, θα βρούμε την ανάλογη ολική ροή $\Theta': J' \times U'_0 \rightarrow U'_0$ και την αντίστοιχη ομάδα μετασχηματισμών $\{\Theta'_t\}_{t \in J'}$. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, για όλα τα σημεία της M , βρίσκουμε μία οικογένεια

$$(3.44) \quad \{U_\alpha, J_\alpha, \{\Theta_t^\alpha\}_{t \in J_\alpha} | \alpha \in \mathcal{Q}\}$$

(\mathcal{Q} : σύνολο δειγμάτων), για την οποίαν ισχύουν (3.41)-(3.42) [και φυσικά και η (3.43), που είναι συνέπεια τους]. Επιπλέον, κάθε $\Theta_t^\alpha: U_\alpha \rightarrow U_\alpha$ είναι αμφιδιαφορίση και κάθε $\Theta^\alpha: J_\alpha \times U_\alpha \rightarrow U_\alpha$, με $\Theta^\alpha(t, x) = \Theta_t^\alpha(x)$, είναι διαφορίσιμη απεικόνιση.

Παρατηρούμε ότι τα U_α ($\alpha \in \mathcal{Q}$) αποτελούν κάλυψη του M . Επιπλέον, αν $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ($\alpha, \beta \in \mathcal{Q}$), τότε, για τυχόν $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, οι Θ_x^α και Θ_x^β είναι ολοκληρωτικές καμπύλες του ξ με την ίδια αρχική συνθήκη x , άρα $\Theta_x^\alpha = \Theta_x^\beta$ στο $J_\alpha \cap J_\beta$. Επομένως, για κάθε $t \in J_\alpha \cap J_\beta$, η $\Theta_t^\alpha \equiv \Theta_t^\beta: U_\alpha \cap U_\beta \xrightarrow{\cong} U_\alpha \cap U_\beta$ είναι αμφιδιαφορίση.

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι δίνεται μία οικογένεια της μορφής (3.44) και έτσι ώστε να ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

(3.45 i) Τα U_α ($\alpha \in \mathcal{Q}$) καλύπτουν την M .

(3.45 ii) Κάθε Θ_t^α ($\alpha \in \mathcal{Q}, t \in J_\alpha$) ικανοποιεί τις (3.41), (3.42)

(3.45 iii) Κάθε $\Theta^\alpha: J_\alpha \times U_\alpha \rightarrow M$, με $\Theta^\alpha(t, x) = \Theta_t^\alpha(x)$, είναι C^∞ απεικόνιση.

(3.45 iv) Για οποιαδήποτε U_α και U_β με $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ και για κάθε $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, υπάρχει ανοικτή περιοχή V του x με $x \in V \subset U_\alpha \cap U_\beta$, έτσι ώστε

$$\Theta_x^\alpha|_V = \Theta_x^\beta|_V \quad ; \quad x \in J_\alpha \cap J_\beta.$$

Τότε ορίζεται ένα $\xi \in \mathcal{X}(M)$, το οποίο είναι ο απειροστικός γεννήτορας κάθε τοπικής μοιροπαραμετρικής ομάδας μετασχηματισμών $\{\Theta_x^\alpha\}_{x \in J_\alpha}$ ($\alpha \in \mathcal{C}$).

Το ξ κατασκευάζεται ως εξής: για τυχόν $x \in M$ υπάρχει κάποιο U_α με $x \in U_\alpha$, οπότε θεωρούμε την απεικόνιση Θ_x^α και την αντίστοιχη διαφορίσιμη καμπύλη Θ_x^α και θέτουμε

(3.46)

$$\xi(x) = \dot{\Theta}_x^\alpha(0)$$

3.5.4 ΠΡΟΤΑΣΗ. Η σχέση (3.46) ορίζει πραγματικά ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο της M . Επιπλέον, κάθε Θ_x^α ($\alpha \in \mathcal{C}$, $x \in U_\alpha$) είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ , οπότε και κάθε Θ^α είναι ροή του ξ . Προφανώς το ξ είναι απειροστικός γεννήτορας κάθε ομάδας $\{\Theta_x^\alpha\}_{x \in J_\alpha}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από τον ορισμό του εραποτομένου διανύσματος της καμπύλης Θ_x^α έχουμε ότι $\xi(x) \in T_{\Theta_x^\alpha(0)} M = T_x M$. Άρα η (3.46) ορίζει ένα διανυσματικό πεδίο της M .

Για τη διαφορίσιμότητα του παρατηρούμε ότι η (3.46) μπορεί να μετασχηματιστεί ως εξής:

$$\xi(x) = \dot{\Theta}_x^\alpha(0) = T_0 \Theta_x^\alpha \left(\frac{d}{dt} \Big|_0 \right)$$

$$\text{[τύπος Λαίβνιτς για τη } \Theta^\alpha] \quad = T_{(0,x)} \Theta^\alpha \left(\frac{d}{dt} \Big|_0, 0_x \right) \quad (0_x \equiv 0 \in T_x M)$$

$$\begin{aligned} \text{[ορισμός ολισμίου διαφορισμού]} \\ \equiv T \Theta^\alpha \left(\frac{d}{dt} \Big|_0, 0_x \right) \\ = [T \Theta^\alpha \circ (\sigma, \Omega)](x), \end{aligned}$$

όπου $\sigma: U_\alpha \rightarrow TR$ η σταθερή απεικόνιση $x \mapsto \sigma(x) := \frac{d}{dt} \Big|_0$ και $\Omega: U_\alpha \rightarrow TU_\alpha$ η μηδενική τομή (= μηδενικό διαν. πεδίο).

Επειδή η σχέση $\xi(x) = [T \Theta^\alpha \circ (\sigma, \Omega)](x)$ ισχύει για κάθε $x \in U_\alpha$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το $\xi|_{U_\alpha}$ είναι διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο επί του U_α , σαν σύνθεση διαφορίσιμων απεικονίσεων. Με την ίδια διαδικασία αποδεικνύεται ότι $\xi|_{U_\alpha}$ είναι διαφορίσιμο, για κάθε $\alpha \in \mathcal{C}$, άρα, τελικά, $\xi \in \mathcal{X}(M)$.

Φυσικά το ξ είναι καλά ορισμένο, δηλ. αν $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, για κάποιους δείκτες α, β , τότε

$$\xi(x) = \dot{\Theta}_x^\alpha(0) = \dot{\Theta}_x^\beta(0)$$

επειδή $\Theta_x^\alpha = \Theta_x^\beta$ επί του $J_\alpha \cap J_\beta$ (βλ. (3.45 iv)).

Θα δείξουμε τώρα ότι η Θ_x^α είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ , δηλ.

$$(3.47) \quad \mathfrak{F}(\Theta_x^\alpha(s)) = \dot{\Theta}_x^\alpha(s), \quad \forall s \in J_\alpha.$$

Για το σκοπό αυτό εστιάροποιούμε ένα $s \in J_\alpha$ και θέτουμε $y := \Theta_x^\alpha(s)$. Αν πάρουμε και την αντίστοιχη καμπύλη Θ_y^α , τότε, για κάθε t τέτοιο ώστε $t+s \in J_\alpha$, θα είναι

$$\begin{aligned} \Theta_y^\alpha(t) &= \Theta_t^\alpha(y) = \Theta_t^\alpha(\Theta_x^\alpha(s)) = \Theta_t^\alpha(\Theta_x^\alpha(x)) = \\ &= \Theta_{t+s}^\alpha(x) = \Theta_x^\alpha(t+s) = (\Theta_x^\alpha \circ \varrho_s)(t) \end{aligned}$$

δηλ. $\Theta_y^\alpha = \Theta_x^\alpha \circ \varrho_s$ (σε κατάλληλο διάστημα), όπου $\varrho_s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: t \mapsto t+s$.

Επομένως

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\Theta_y^\alpha(s)) &= \mathfrak{F}(y) = \dot{\Theta}_y^\alpha(0) = T_0 \Theta_y^\alpha \left(\frac{d}{dt} \Big|_0 \right) = T_0 (\Theta_x^\alpha \circ \varrho_s) \left(\frac{d}{dt} \Big|_0 \right) = \\ &= T_s \Theta_x^\alpha \left(T_0 \varrho_s \left(\frac{d}{dt} \Big|_0 \right) \right) = T_s \Theta_x^\alpha \left(\frac{d}{dt} \Big|_s \right) = \dot{\Theta}_x^\alpha(s) \end{aligned}$$

δηλ. μεταλήγαμε στην (3.47) για το δοθέν (άρα, παρόμοια, και για κάθε άλλο) s .

Τα υπόλοιπα συμπεράσματα της πρότασης είναι προφανή. ●

3.5.5 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(A) Ας θεωρήσουμε το διανυσματικό πεδίο του παραδείγματος (A) της παραγράφου 3.4.5.

Βρήκαμε ότι, για τυκόν $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, η ολοκληρωτική καμπύλη του με αρχική συνθήκη $\alpha_{(x,y)}$ είναι η καμπύλη $\alpha_{(x,y)}(t) = (x \cdot \exp t, y \cdot \exp t)$, $t \in \mathbb{R}$ [άρα το ξ είναι πλήρες].

Επομένως η ροή του ξ είναι μία ολική ροή, η οποία δίνεται από την απεικόνιση

$$(3.48) \quad \Theta: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: (t, (x,y)) \mapsto (x \cdot \exp t, y \cdot \exp t).$$

Η Θ (προφανώς) είναι C^∞ απεικόνιση. Επίσης, από κατασκευή, κάθε $\Theta_{(x,y)}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $\Theta_{(x,y)}(t) = (x \cdot \exp t, y \cdot \exp t)$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ . Δείκνουμε τώρα ότι $\{\Theta_t\}$ είναι μονοπαροματρική ομάδα μετασχηματισμών της \mathbb{R}^2 : παρατηρούμε ότι για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$ και $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ είναι

$$\begin{aligned} \Theta_{t+s}(x,y) &= (x \cdot \exp(t+s), y \cdot \exp(t+s)) = (x \cdot \exp t \cdot \exp s, y \cdot \exp t \cdot \exp s) = \\ &= ((x \cdot \exp s) \cdot \exp t, (y \cdot \exp s) \cdot \exp t) = \Theta_t(x \cdot \exp s, y \cdot \exp s) = \\ &= \Theta_t(\Theta_s(x,y)) = (\Theta_t \circ \Theta_s)(x,y), \end{aligned}$$

δηλ. ισχύει η (3.41). Επίσης, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, είναι

$$\Theta_0(x,y) = (x \cdot \exp 0, y \cdot \exp 0) = (x,y)$$

δηλ. ισχύει η (3.42). Επειδή Θ_t είναι C^∞ απεικόνιση, θα είναι C^∞ και η $(\Theta_t)^{-1} = \Theta_{-t}$, άρα κάθε Θ_t είναι αμφιδιαγώριστη.

Αντίστροφα, ας επαληθεύσουμε ότι ο απειροστικός γεννήτορας της (3.48) ή της $\{\Theta_t: (x,y) \mapsto (x \cdot \exp t, y \cdot \exp t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ είναι ακριβώς το αρχικό πεδίο $\xi = x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}$.

πραγματικά, σύμφωνα με την (3.46), για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ είναι

$$\zeta(x,y) = \dot{\Theta}_{(x,y)}(0) = T_0 \Theta_{(x,y)}$$

ή, μέσω του γνωστού μεταθετικού διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc} T_0 \mathbb{R} & \xrightarrow{T_0 \Theta_{(x,y)}} & T_{(x,y)} \mathbb{R}^2 \\ \text{id}_{\mathbb{R}} \downarrow & & \downarrow \text{id}_{\mathbb{R}^2} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\mathcal{D}\Theta_{(x,y)}(0)} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

η τελευταία σχέση μετασχηματίζεται στην

$$\begin{aligned} \zeta(x,y) &= T_0 \Theta_{(x,y)} \left(\frac{d}{dt} \Big|_0 \right) = \left[\text{id}_{\mathbb{R}^2}^{-1} \circ \mathcal{D}\Theta_{(x,y)}(0) \circ \text{id}_{\mathbb{R}} \right] \left(\frac{d}{dt} \Big|_0 \right) = \\ &= \left(\text{id}_{\mathbb{R}^2}^{-1} \circ \mathcal{D}\Theta_{(x,y)}(0) \right) (1) = \text{id}_{\mathbb{R}^2}^{-1} \left((\mathcal{D}\Theta_{(x,y)}(0))(1) \right) = \\ &= \text{id}_{\mathbb{R}^2}^{-1} \left(\Theta'_{(x,y)}(0) \right) = \text{id}_{\mathbb{R}^2}^{-1} (x,y) = \text{id}_{\mathbb{R}^2}^{-1} (x \cdot e_1 + y \cdot e_2) = \\ &= x \cdot \text{id}_{\mathbb{R}^2}^{-1}(e_1) + y \cdot \text{id}_{\mathbb{R}^2}^{-1}(e_2) = x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x,y)} + y \cdot \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(x,y)} \\ &= \left(x_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + x_2 \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right) (x,y), \end{aligned}$$

που αποδεικνύει και τον ισχυρισμό.

(B) Ορίζουμε την απεικόνιση $\Theta: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $\Theta(t; x_1, \dots, x_n) := (\lambda t + x_1, \dots, x_n)$, όπου το λ είναι σταθερός πραγματικός αριθμός. Θεωρούμε την ομογένεια $\{\Theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, όπου $\Theta_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $\Theta_t(x_1, \dots, x_n) = \Theta(t; x_1, \dots, x_n) = (\lambda t + x_1, \dots, x_n)$. Είναι άμεσο ότι κάθε Θ_t είναι διαφορίσιμη απεικόνιση. Επίσης, για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$ είναι

$$\Theta_{t+s}(x_1, \dots, x_n) = \Theta(t+s; x_1, \dots, x_n) = (\lambda(t+s) + x_1, \dots, x_n) =$$

$$(\lambda t + (\lambda s + x_1), x_2, \dots, x_n) = \Theta_t(\lambda s + x_1, \dots, x_n) = (\Theta_t \circ \Theta_s)(x_1, \dots, x_n),$$

που ισχύει για κάθε $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Ακόμη,

$$\Theta_0(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Επομένως $\{\Theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ είναι μία μισοπαραμετρίσιμη ομάδα μετασχηματισμών του \mathbb{R}^n . Προφανώς, κάθε Θ_t είναι αμφιδιαφορίσιμη, αφού η Θ_t είναι διαφορίσιμη όπως και η αντίστροφή της $(\Theta_t)^{-1} = \Theta_{-t}$, που είναι απεικόνιση του ίδιου τύπου.

Υπολογίζουμε τον αντίστοιχο απειροεπιπέδιο γεννητόρα: Αν θέσουμε, για ευκολία, $x = (x_1, \dots, x_n)$, θα είναι [ανάλογα προς τη διαδικασία του παραδείγματος (A)]

$$\begin{aligned} \xi(x) &= \dot{\Theta}_x(0) = T_0 \Theta_x \left(\frac{d}{dt} \Big|_0 \right) = (\overline{id}_{\mathbb{R}^n}^{-1} \circ D\Theta_x(0) \circ \overline{id}_{\mathbb{R}}) \left(\frac{d}{dt} \Big|_0 \right) = (\overline{id}_{\mathbb{R}^n}^{-1} \circ D\Theta_x(0))(1) = \\ &= \overline{id}_{\mathbb{R}^n}^{-1} (D\Theta_x(0)(1)) = \overline{id}_{\mathbb{R}^n}^{-1} (\Theta'_x(0)) = \overline{id}_{\mathbb{R}^n}^{-1} (\lambda, 0, \dots, 0) = \\ &= \overline{id}_{\mathbb{R}^n}^{-1} (\lambda \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_n) = \lambda \cdot \overline{id}_{\mathbb{R}^n}^{-1}(e_1) + \dots + 0 \cdot \overline{id}_{\mathbb{R}^n}^{-1}(e_n) = \\ &= \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_x + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_x + \dots + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_x \end{aligned}$$

δηλ. τελικά, $\xi = \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_n} \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$.

As επαληθεύσουμε (πραγματικά) ότι κάθε Θ_x είναι ολοκληρωσιμη μαθητιλη του ξ , δηλ. $\xi(\Theta_x(t)) = \dot{\Theta}_x(t)$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το επόμενο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} T_t \mathbb{R} & \xrightarrow{T_t \Theta_x} & T_{\Theta_x(t)} \mathbb{R}^n \\ \downarrow \overline{id}_{\mathbb{R}} & & \downarrow \overline{id}_{\mathbb{R}^n} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{D\Theta_x(t)} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Συγκεκριμένα,

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}_x(t) &= T_t \Theta_x \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) = (\overline{id}_{\mathbb{R}^n}^{-1} \circ D\Theta_x(t) \circ \overline{id}_{\mathbb{R}}) \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) = \overline{id}_{\mathbb{R}^n}^{-1} (D\Theta_x(t)(1)) = \\ &= \overline{id}_{\mathbb{R}^n}^{-1} (\Theta'_x(t)) = \overline{id}_{\mathbb{R}^n}^{-1} (\lambda, 0, \dots, 0) = \overline{id}_{\mathbb{R}^n}^{-1} (\lambda e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_n) = \\ &= \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_{\Theta_x(t)} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_{\Theta_x(t)} + \dots + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_{\Theta_x(t)} \equiv \xi(\Theta_x(t)). \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογίσετε τις ροές και τις αντίστοιχες μονοπαραμετρικές ομάδες μετασχηματισμών των διανυσματικών πεδίων, που δίνονται στις Ασκήσεις 4-6 ως παραγράφου 3.4.

Να επαληθεύσετε ότι οι αντίστοιχοι απειροεπιμύοι γεννητόρες είναι ακριβώς τα δοθέντα διανυσματικά πεδία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΟΜΑΔΕΣ LIE

4.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ.

Μία ομάδα Lie είναι μία (αλγεβρική) ομάδα, η οποία διαθέτει και μία διαφορευτική δομή συμβατή με τη δομή της ομάδας. Ακριβέστερα έχουμε τον επόμενο ορισμό.

4.1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ. Μία ομάδα Lie είναι μία ομάδα G η οποία έχει και τη δομή μιας διαφορευτικής πολλαπλότητας, έτσι ώστε:

i) η απεικόνιση γινόμενο (ή πολλαπλασιασμός)

$$\gamma: G \times G \rightarrow G: (x, y) \mapsto \gamma(x, y) \stackrel{\text{συμλ.}}{=} x \cdot y, \text{ και}$$

ii) η απεικόνιση αντίστροφη

$$\alpha: G \rightarrow G: x \mapsto \alpha(x) \stackrel{\text{συμλ.}}{=} x^{-1}$$

να είναι διαφορευσιμες (C^∞).

Θα δεχθούμε (χωρίς απόδειξη) ότι

κάθε ομάδα Lie είναι χώρος Hausdorff

πράγμα που θα χρησιμοποιηθεί στην παράγραφο 4.3 (μειοψήφισμα οθουληρωτικών καμπύλων).

4.1.2 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Οι συνθήκες του προηγούμενου ορισμού ισοδυναμούν με τη μοναδική συνθήκη: " η απεικόνιση $G \times G \rightarrow G: (x, y) \mapsto x \cdot y^{-1}$ είναι C^∞ "

4.1.3 ΑΜΕΣΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1) Το $(\mathbb{R}^n, +)$ είναι ομάδα Lie.

2) Το σύνολο των αντιστρεπτών $n \times n$ πινάκων $GL(n, \mathbb{R})$ ζέρουμε ότι είναι αλγεβρική ομάδα (με πράξη τον συνήθη πολλαπλασιασμό πινάκων). Αν τώρα εφοδιάσουμε το $GL(n, \mathbb{R})$ και με τη διαφορευτική δομή της ανοιχτής υποπολλαπλότητας των $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ [βλ. Άσκηση 14, §1.1], τότε το $GL(n, \mathbb{R})$ αποτελεί ομάδα Lie.

3) Το \mathbb{R}_* , εφοδιασμένο με τον συνήθη πολλαπλασιασμό και τη δομή της ανοιχτής υποπολλαπλότητας του \mathbb{R} αποτελεί ομάδα Lie.

4.1.4 ΟΡΙΣΜΟΣ. Έστω ένα (επαθεροποιημένο) $x \in G$. Η αριστερή μετατόπιση (ματά x) L_x της G είναι η απεικόνιση $L_x: G \rightarrow G$ με $L_x(y) := x \cdot y, \forall y \in G$. Αντίστοιχα, η δεξιά μετατόπιση (ματά x) R_x είναι η $R_x: G \rightarrow G$ με $R_x(y) = y \cdot x, \forall y \in G$. [αριστερή μετατόπιση χρησιμοποιείται και ο όρος μεταφορά]

| 4.1.5 ΠΡΟΤΑΣΗ. Κάθε αριστερή (αριστερ. δεξιά) μετατόπιση L_x (αριστερ. R_x) είναι

1. αμφισβητούμενη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Παρατηρούμε αμέσως ότι έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$(4.1) \quad \begin{array}{ccc} G \ni y & \xrightarrow{f} & (x,y) \in G \times G \\ & \searrow L_x & \downarrow \gamma \\ & & x,y \in G \end{array}$$

Η f γράφεται με τη μορφή $f(y) = (c(y), id_G(y))$, όπου $c: G \rightarrow G$ η σταθερή απεικόνιση $c(y) = x \ \forall y \in G$. Άρα η f είναι C^∞ , οπότε [λόγω της συνθήκης ε) του ορισμού 4.1.1] και η L_x είναι C^∞ απεικόνιση. Θεωρούμε τώρα και την $L_{x^{-1}}$. Διαπιστώνουμε αμέσως ότι η L_x είναι αντιστροφή της L_x [:(L_x)⁻¹ = $L_{x^{-1}}$]. Επιπλέον, όπως πιο πάνω η L_x , και η $L_{x^{-1}}$ είναι διαφορίσιμη, οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα. Παρόμοια και για την R_x . •

4.1.6 ΕΝΑ ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Συμβολίζουμε με $S_{n \times n}(\mathbb{R})$ το σύνολο των απεικονιζόμενων μετρίων πινάκων [θυμίζουμε ότι $A \in S_{n \times n}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A = A^t$, όπου A^t ο αντιστροφός του A]. Το $S_{n \times n}(\mathbb{R})$ διαθέτει διαφορίσιμη δομή, διάστασης $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$. Για να το δούμε αυτό παρατηρούμε η συνθήκη $A = A^t$ ισοδυναμεί με την $a_{ij} = a_{ji}, \ \forall i, j = 1, \dots, n$.

Άρα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

που σημαίνει ότι ο A είναι πλήρως γνωστός από τα στοιχεία που βρίσκονται επί και πάνω από τη διαγώνιο (αυτά είναι πλήρως ακριβώς $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$). Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση $\Psi: S_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^N, \ N := \frac{n \cdot (n+1)}{2}$, με

$$A \mapsto \Psi(A) := (a_{11}, \dots, a_{1n}; a_{22}, \dots, a_{2n}; \dots; a_{nn})$$

Διαπιστώνουμε ότι $(S_{n \times n}(\mathbb{R}), \Psi)$ είναι καλής, άρα $\{(S_{n \times n}(\mathbb{R}), \Psi)\}$ ορίζει άτλαντα, ο μέγιστος των οποίων εφοδιάζει το $S_{n \times n}(\mathbb{R})$ με τη δομή πολ/ταδ. Όμως το $S_{n \times n}(\mathbb{R})$ δεν είναι ομάδα Lie, αφού δεν είναι καν αλγεβρική ομάδα. Πράγματι, αν $A, B \in S_{n \times n}(\mathbb{R})$ δεν είναι και $A \cdot B \in S_{n \times n}(\mathbb{R})$ αναγκαστικά, αφού

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t = B \cdot A$$

4.1.7 ΟΡΙΣΜΟΣ. Μια απεικόνιση $f: G \rightarrow G'$ μεταξύ ομάδων Lie λέγεται μορφισμός ομάδων Lie αν είναι διαφορίσιμη και ομομορφισμός ομάδων.

4.1.8 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Η απεικόνιση $f: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_*^*$ με $f(A) := \det(A)$ είναι μορφισμός ομάδων Lie.

4.1.9 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(Α) Ας υπολογίσουμε το διαφορικό $T_{(x,y)} \gamma : T_{(x,y)}(G \times G) \cong T_x G \times T_y G \rightarrow T_{x,y} G$

Σύμφωνα με τον τύπο των Leibniz για τα διαφορικά (θεώρημα 2.2.10), για ευθείς $(u,v) \in T_x G \times T_y G \cong T_{(x,y)}(G \times G)$, θα είναι

(4.2) $T_{(x,y)} \gamma (u,v) = T_x \gamma_y (u) + T_y \gamma_x (v)$

Παρατηρούμε ότι

$\gamma_y : G \rightarrow G : \alpha \mapsto \gamma_y(\alpha) = \gamma(\alpha, y) = \alpha \cdot y = R_y(\alpha)$ και

$\gamma_x : G \rightarrow G : b \mapsto \gamma_x(b) = \gamma(x, b) = x \cdot b = L_x(b)$

δηλ. $\gamma_y = R_y$ και $\gamma_x = L_x$, άρα η (4.1) παίρνει τη μορφή

(4.3) $T_{(x,y)} \gamma (u,v) = T_x R_y (u) + T_y L_x (v)$

(Β) Ας υπολογίσουμε και το διαφορικό $T_x \alpha : T_x G \rightarrow T_{x^{-1}} G$.

Πρώτα παρατηρούμε ότι η α είναι αμφιδιαφορίση [αφού $\alpha^{-1} = \alpha$!]. Επιπλέον, μπορούμε να πάρουμε το μεταθετικό διάγραμμα

(4.4)
$$\begin{array}{ccc} G \ni x & \xrightarrow{(id_G, \alpha)} & (x, x^{-1}) \in G \times G \\ & \searrow c & \downarrow \gamma \\ & & e = x \cdot x^{-1} \in G \end{array}$$

όπου c η βλαβερή απεικόνιση $G \ni x \mapsto c(x) \equiv e \in G$. Επομένως θεωρώντας το διαφορικό (δεξιά και αριστερά) της σχέσης $c = \gamma \circ (id_G, \alpha)$ έχουμε [βάσει και της εφαρμογής

(Α)]:
$$0 = T_x c (u) = T_x [\gamma \circ (id_G, \alpha)](u) = T_{(x, x^{-1})} \gamma (T_x id_G (u), T_x \alpha (u)) = T_{(x, x^{-1})} \gamma (u, T_x \alpha (u)) = T_x R_{x^{-1}} (u) + T_{x^{-1}} L_x (T_x \alpha (u))$$

άρα (4.5) $T_{x^{-1}} L_x (T_x \alpha (u)) = - T_x R_{x^{-1}} (u)$

Εποδή [βλ Άσκηση 4 ή το θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης]

(4.6) $(T_{x^{-1}} L_x)^{-1} = T_e L_{x^{-1}}$

επομένως η (4.5) οδηγεί στην $T_x \alpha (u) = - (T_e L_{x^{-1}} \circ T_x R_{x^{-1}})(u)$, απ' όπου και

(4.7) $T_x \alpha (u) = - T_x (L_{x^{-1}} \circ R_{x^{-1}})(u)$

(Γ) Θεωρούμε την εφαπτόμενη δέσμη TG μιας ομάδας Lie. Θα δείξουμε ότι η TG αποτελεί ομάδα Lie με γινόμενο την $T\gamma : T(G \times G) \cong TG \times TG \rightarrow TG$ και αντίστρο-

ρή την $T\alpha: TG \rightarrow TG$. Οι δύο προηγούμενες απεικονίσεις είναι C^∞ (βλ. πρόταση 2.4.9), άρα, κατά τον ορισμό 4.1.1, αρμεί να δείξουμε ότι η TG (με τις προηγούμενες απεικονίσεις αποτελεί δαφνή ομάδα).

Για ευκολία, ας θέσουμε $u \cdot v := T\gamma(u, v)$, $\forall u, v \in TG$ και $u^{-1} := T\alpha(u)$. Προφανώς, $u \cdot v \in TG$ και $u^{-1} \in TG$. Ας ελεγκθούμε και τα άλλα αξιώματα της ομάδας. Ισχυριζόμαστε ότι το ουδέτερο στοιχείο ^{είναι} ταυρίθως το μηδενικό διάνυσμα των $T_x G$, που το συμβολίζουμε με O_x . Πραγματικά, για οποιοδήποτε $u \in TG$, υπάρχει $x \in G$ έτσι ώστε $u \in T_x G$, οπότε

$$u \cdot O_x := T\gamma(u, O_x) \equiv (T\gamma|_{T_x G \times T_x G})(u, O_x) = T_{(x, O_x)} \gamma(u, O_x).$$

Άρα, εφαρμόζοντας την (4.3) για $x=x$, $y=e$, $u=u$ και $v=O_x$ έχουμε ότι

$$u \cdot O_x = T_x R_x(u) + T_x L_x(O_x) = T_x id_G(u) + 0 = u$$

Παρόμοια και $O_x \cdot u = u$.

Θα δείξουμε τώρα ότι $u \cdot u^{-1} = u^{-1} \cdot u = O_x$. Και πάλι ας υποθέσουμε ότι $u \in T_x G$.

Τότε έχουμε ότι $u \in T_x G \Rightarrow u^{-1} = T\alpha(u) = T_x \alpha(u) \in T_{\alpha(x)} G = T_{x^{-1}} G$, άρα

$$u \cdot u^{-1} := T\gamma(u, u^{-1}) \equiv T_{(\alpha, x^{-1})} \gamma(u, u^{-1}) =$$

$$[\text{βλ. (4.3) για } x=x, y=x^{-1}, u=u, v=u^{-1}] = T_x R_{x^{-1}}(u) + T_{x^{-1}} L_x(u^{-1})$$

$$[\text{ορισμός } u^{-1}] = T_x R_{x^{-1}}(u) + T_{x^{-1}} L_x(T_x \alpha(u))$$

$$[\text{βλ. (4.7)}] = T_x R_{x^{-1}}(u) - T_{x^{-1}} L_x \circ T_x (L_{x^{-1}} \circ R_{x^{-1}})(u)$$

$$[\text{υαντίως αλυσίδας}] = T_x R_{x^{-1}}(u) - (T_{x^{-1}} L_x \circ T_x L_{x^{-1}} \circ T_x R_{x^{-1}})(u)$$

$$[\text{---}] = T_x R_{x^{-1}}(u) - (T_x (L_x \circ L_{x^{-1}}) \circ T_x R_{x^{-1}})(u)$$

$$= T_x R_{x^{-1}}(u) - (T_x id_G \circ T_x R_{x^{-1}})(u) =$$

$$[\text{εφαρμ. 2.2.11(A)}] = T_x R_{x^{-1}}(u) - (id|_{T_x G} \circ T_x R_{x^{-1}})(u)$$

$$= T_x R_{x^{-1}}(u) - T_x R_{x^{-1}}(u) = O_x$$

(επειδή $T_x R_{x^{-1}}: T_x G \rightarrow T_x G$!). Παρόμοια και $u^{-1} \cdot u = O_x$.

Τέλος, ελέγξτε και η προεξαρτιστική ιδιότητα: Πραγματικά, αν θεωρήσουμε τριπλά $u, v, w \in TG$ και υποθέσουμε π.χ ότι είναι $u \in T_x G, v \in T_y G$ και $w \in T_z G$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$(u \cdot v) \cdot w = T\gamma(u \cdot v, w) = T\gamma(T\gamma(u, v), w) = [T\gamma \circ (T\gamma \times id_{T_z G})](u, v, w)$$

και ανάλογα

$$u \cdot (v \cdot w) = T\gamma(u, v \cdot w) = T\gamma(u, T\gamma(v, w)) = [T\gamma \circ (id_{T_x G} \times T\gamma)](u, v, w)$$

Επειδή $(u, v, w) \equiv (u, v, w) \equiv (u, v, w)$, για την απόδειξη της προεξαρτιστικότητας αρμεί να δείξουμε ότι

$$T\gamma \circ (T\gamma \times id_{T_z G}) = T\gamma \circ (id_{T_x G} \times T\gamma)$$

ή, επειδή $id_{TG} = T id_G$ και ισχύει το αποελλέμα της Ασκήσης 5, § 2.2, αρμεί να δείξουμε ότι $T\gamma \circ T(\gamma \times id_G) = T\gamma \circ T(id_G \times \gamma)$ ή, ισοδύναμα, ότι $T(\gamma \circ (\gamma \times id_G)) = T(\gamma \circ (id_G \times \gamma))$.

Η τελευταία όμως ισχύει διότι $\gamma \circ (\gamma \times id_G) = \gamma \circ (id_G \times \gamma)$, αφού η σχέση αυτή δεν εκφράζει τίποτα άλλο παρά την προετααριστική ιδιότητα του πολ/ομού της G .

(Δ) Η μηδενική τμήση της TG δηλ. η απεικόνιση $\Omega: G \rightarrow TG$ με $\Omega(x) := O_x$ (το μηδενικό διάνυσμα του αντίστοιχου εφαπτόμενου χώρου) είναι μορφοϊσμός ομάδων Lie, όταν η TG εξοδιασσει με τη δομή της προηγουμένης εφαρμογής (Γ).

Η διαμορφωσιμότητα της Ω ελέγχεται μέσω τοπικών καρτών (Ασκηση!). Επιπλέον είναι ομομορφοϊσμός ομάδων: θα πρέπει να δείξουμε ότι $\Omega(x \cdot y) = \Omega(x) \cdot \Omega(y)$ δηλ. $O_x \cdot O_y = O_{x \cdot y}$ [αν $O_x \in T_x G$, $O_y \in T_y G$, $O_{x \cdot y} \in T_{x \cdot y} G$ τα αντίστ. μηδενικά διαν. J. Εξουμε [βάσει της (4.3)] ότι:

$$O_x \cdot O_y := T\gamma(O_x, O_y) = O_{x \cdot y} \in T_{x \cdot y} G.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. επαληθεύστε την Παρατήρηση 4.1.2 και συμπληρώστε τον ισχυρισμό της Πρότασης 4.1.5 για την R_x . Επίσης δείξτε ότι, αν G είναι αβελιανή ομάδα Lie, τότε είναι και η TG .
2. επαληθεύστε τα Παραδείγματα 4.1.3 και το Παραλ. 4.1.8.
3. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x, y \in G$ ισχύουν οι σχέσεις $L_x \circ L_y = L_{x \cdot y}$, $R_x \circ R_y = R_{y \cdot x}$, $L_x \circ R_y = R_y \circ L_x$
4. Αποδείξτε ότι, $\forall x, y \in G$, $(T_x L_y)^{-1} = T_{yx}(L_{y^{-1}})$ και $(T_x R_y)^{-1} = T_{x \cdot y}(R_{y^{-1}})$
5. Εξηγήστε γιατί $\gamma \circ (\gamma \times id_G) = \gamma \circ (id_G \times \gamma)$ [εφαρμογή (Γ)].
6. Γιατί η (4.7) μπορεί να πάρει τη μορφή $T_x \alpha(u) = -T_x(R_{x^{-1}} \circ L_{x^{-1}})(u)$;
7. Να δείξετε ότι το S^1 με τη συνηθ. διαμορφωσιμ. δομή και πολ/ομό που ορίζεται με την απεικόνιση f της Εφαρμογής 1.2.18 (D) αποτελεί ομάδα Lie. Υποδείξτε τα διαμορφωσιμ. του πολ/ομού και της αντιστροφής ε' ένα σημείο.
8. Αν G, H ομάδες Lie, τότε και το $G \times H$ είναι ομάδα Lie
9. Δείξτε ότι οι χώροι $T_x G$ και $T_y G$ είναι ισομορφικοί [χωρίς κάρτες, αλλά με κατάλληλες μετατοπίσεις]
10. Βρείτε την ευφροση των αριστερών/δεξιών μετατοπίσεων του $GL(n, \mathbb{R})$

4.2 Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΛΙΕ ΜΙΑΣ ΟΜΑΔΑΣ ΛΙΕ

Θα δείξουμε ότι ο εφαπτόμενος χώρος $T_e G$ μίας ομάδας Lie έχει τη δομή μίας άλγεβρας Lie [βλ. εκόδια μετά τον ορισμό 3.2.7], που προκύπτει μέσω μίας ειδικής κατηγορίας διανυσματικών πεδίων του G .

4.2.1 ΟΡΙΣΜΟΣ. Ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο $\xi: G \rightarrow T_e G$ της G λέγεται αριστερά αναλλοίωτο, αν για κάθε $\alpha \in G$ ισχύει η σχέση

$$(4.8) \quad T L_\alpha \circ \xi = \xi \circ L_\alpha$$

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι, για κάθε $x \in G$ (και κάθε $\alpha \in G$), είναι $(T L_\alpha \circ \xi)(x) = T L_\alpha(\xi_x) \equiv T_x L_\alpha(\xi_x) = (\xi \circ L_\alpha)(x) = \xi(\alpha \cdot x) = \xi_{\alpha \cdot x}$, δηλ. ισοδύναμα, το ξ είναι αριστερά αναλλοίωτο τότε και μόνον τότε αν

$$(4.9) \quad T_x L_\alpha(\xi_x) = \xi(L_\alpha(x)) = \xi_{\alpha \cdot x}$$

Το σύνολο των αριστερά αναλλοίωτων C^∞ διανυσματικών πεδίων της G συμβολίζουμε με $\mathcal{L}(G)$ ή $\mathcal{X}_L(G)$ (αιώτη και \mathcal{X}_L). Ανάλογα ορίζονται και τα δεξιά αναλλοίωτα πεδία, δηλ. πεδία με $T R_\alpha \circ \xi = \xi \circ L_\alpha$, για κάθε $\alpha \in G$.

4.2.2 ΠΡΟΤΑΣΗ. Ένα $\xi \in \mathcal{X}(G)$ είναι αριστερά αναλλοίωτο, δηλ. $\xi \in \mathcal{L}(G)$ τότε και μόνον τότε αν είναι L_α συσχετισμένο με τον εαυτό του, για κάθε μεταφορά L_α ($\alpha \in G$).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Άμεση συνέπεια των Ορισμών 3.3.1 και 4.2.1. ●

4.2.3 ΠΡΟΤΑΣΗ. Ένα $\xi \in \mathcal{L}(G)$ είναι εντελώς γνωστό αν είναι γνωστή η τιμή του στο $e \in G$, δηλ. αν είναι γνωστό το διάνυσμα $\xi_e \in T_e G$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν $x \in G$, τότε [βάσει της (4.9)] έχουμε ότι

$$(4.10) \quad \xi_x := \xi(x) \equiv \xi(x \cdot e) = \xi(L_x(e)) = T_x L_x(\xi_e)$$

δηλαδή

$$(4.11) \quad \xi_x = T_x L_x(\xi_e)$$

από όπου και το συμπέρασμα. ●

4.2.3 ΘΕΩΡΗΜΑ. Το σύνολο των C^∞ αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων $\mathcal{L}(G)$ αποτελεί άλγεβρα Lie, υποάλγεβρα Lie της $\mathcal{X}(G)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προφανώς, αρκεί να δείξουμε ότι το $\mathcal{L}(G)$ είναι κλειστό ως προς τις δύο πράξεις του γραμμικού χώρου και την $[\cdot, \cdot]$.

Το πρώτο είναι συμπέρασμα είναι άμεσο: αν $\xi, \eta \in \mathcal{L}(G)$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε

με τη βοήθεια της (4.9) βρίσκουμε ότι, για κάθε $\alpha, \alpha \in G$, είναι:

$$T_x L_\alpha (\lambda \xi + \mu \eta) = T_x L_\alpha (\lambda \xi_x + \mu \eta_x) = T_x L_\alpha (\lambda \xi_x) + T_x L_\alpha (\mu \eta_x) = \lambda \xi_{\alpha \cdot x} + \mu \eta_{\alpha \cdot x} = (\lambda \xi + \mu \eta)_{\alpha \cdot x}$$

που αποδεικνύει ότι $\lambda \xi + \mu \eta \in \mathcal{L}(G)$.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό παρατηρούμε τα εξής: το ξ είναι L_α -συμμετρίσιμο με τον εαυτό του και, όμοια, το η είναι L_α -συμμετρίσιμο με τον εαυτό του [Πρόταση 4.2.2]. Επομένως, κατά το Πρόγραμμα 3.3.3, και το $[\xi, \eta]$ θα είναι L_α -συμμετρίσιμο με τον εαυτό του (για κάθε $\alpha \in G$), άρα

$$T L_\alpha \circ [\xi, \eta] = [\xi, \eta] \circ L_\alpha$$

δηλ. $[\xi, \eta] \in \mathcal{L}(M)$, που αποδεικνύει, τελικά, το θεώρημα. ●

Έστω $v \in T_x G$ οποιοδήποτε διάνυσμα. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$(4.12) \quad \mathfrak{Z}: G \rightarrow TG : x \mapsto \mathfrak{Z}(x) := T_x L_x(v)$$

Από τον ορισμό της $T_x L_x$ έχουμε αμέσως ότι $T_x L_x(v) = \mathfrak{Z}(x) \in T_x G$, άρα και $\pi_G(\mathfrak{Z}(x)) = x$. Δηλ. η \mathfrak{Z} είναι διανυσματικό πεδίο της G [προφανώς $\mathfrak{Z}_e = v$]

Δείχνουμε ότι το \mathfrak{Z} είναι διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο: θέτοντας στην (4.3) $x=x$, $y=e$, $u = 0_x \in T_x G$ [το μηδενικό διάνυσμα του $T_x G$] και $v=v$, έχουμε ότι

$$\mathfrak{Z}(x) = T_x L_x(v) = T_x R_e(0_x) + T_x L_x(v) = T_{(x,e)} \gamma(0_x, v) \equiv T \gamma(0_x, v),$$

ή, με τον συμβολισμό της μηδενικής τομής Ω [Εφαρμογή 4.1.9 (Δ)],

$$\mathfrak{Z}(x) = T \gamma(\Omega(x), \sigma(x))$$

όπου $\sigma: G \rightarrow TG$ η σταθερή απεικόνιση $\sigma(x) \equiv v$. Επομένως

$$\mathfrak{Z}(x) = (T \gamma \circ (\Omega, \sigma))(x)$$

Το δεξιό μέλος της τελευταίας είναι C^∞ απεικόνιση, σαν σύνθεση C^∞ απεικονίσεων, άρα και το πρώτο μέλος είναι C^∞ απεικόνιση, όπως ζητούσαμε.

Θα δείξουμε ότι και $\mathfrak{Z} \in \mathcal{L}(G)$, δηλ. είναι αριστερά αναλλοίωτο: πραγματικά, για κάθε $\alpha \in G$, δάσει της (4.12), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} T_x L_\alpha(\mathfrak{Z}(x)) &= T_x L_\alpha(T_x L_x(v)) = (T_x L_\alpha \circ T_x L_x)(v) = \\ &= T_x(L_\alpha \circ L_x)(v) = T_x L_{\alpha \cdot x}(v) = \mathfrak{Z}(\alpha \cdot x), \end{aligned}$$

οπότε (θέτοντας $\mathfrak{Z}(x) = \xi_x$, $\mathfrak{Z}(\alpha \cdot x) = \xi_{\alpha \cdot x}$) μεταληγούμε στην (4.9) και $\xi \in \mathcal{L}(G)$.

Μετά την προηγούμενη ανάλυση μεταληγούμε στο

4.2.4 ΘΕΩΡΗΜΑ. Η απεικόνιση $\ell: T_x G \rightarrow \mathcal{L}(G)$, η οποία ορίζεται με $\ell(v) := \mathfrak{Z}$, όπου το \mathfrak{Z} είναι το αριστερά αναλλοίωτο διαν. πεδίο της G , που καθορίζεται από τη σχέση (4.12), είναι γραμμικός ισομορφισμός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η ℓ είναι της μορφής αυτής (δηλ. παίρνει τιμές στην $\mathcal{L}(G)$), σύμφωνα με την ανάλυση που έγινε πιο πάνω.

Η ℓ είναι 1-1: Αν υποθέσουμε ότι $u, v \in \mathcal{T}_e G$ και $\xi = \ell(u), \eta = \ell(v)$ είναι τα αντίστοιχα πεδία με $\xi = \eta$, τότε και

$$u = \xi(e) = \eta(e) = v.$$

Η ℓ είναι επί: Έστω $\xi \in \mathcal{L}(G)$. Καλούμε $u := \xi(e) = \xi_e$. Θα δείξουμε ότι $\ell(u) = \xi$. Πραγματικά, θέτουμε $\eta := \ell(u)$, η (4.12) συνεπάγεται ότι (μαζί με το ότι το ξ είναι αριστερά αναλλοίωτο)

$$\eta(x) = T_e L_x(u) = T_e L_x(\xi_e) = T_e L_x(\xi_e) = \xi_x = \xi(x), \quad \forall x \in G$$

δηλ. $\eta = \xi = \ell(u)$. Η γραμμικότητα της ℓ είναι άμεση. ●

4.2.5 ΠΟΡΙΣΜΑ. Μέσω της αντιστοιχίας του προηγούμενου θεωρήματος, ο $\mathcal{T}_e G$ αποκτά τη δομή μιας άλγεβρας Lie, έτσι ώστε η ℓ να είναι ισομορφισμός αλγεβρών Lie.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρχικά να ορίσουμε την αγκώλη Lie $[u, v]$, για οποιονδήποτε $u, v \in \mathcal{T}_e G$.

Θέτουμε

$$(4.13) \quad [u, v] := [\xi, \eta](e)$$

αν $\xi = \ell(u)$ και $\eta = \ell(v)$. Προφανώς $[u, v] \in \mathcal{T}_e G$. Θέτουμε, για ευκολία, $\zeta = \ell([u, v])$, για κάθε $x \in G$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= T_e L_x([u, v]) = T_e L_x([\xi, \eta](e)) = [\xi, \eta](e \cdot x) \\ &= [\xi, \eta](x) = [\ell(u), \ell(v)](x) \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\ell([u, v]) = \zeta = [\ell(u), \ell(v)]$$

που σημαίνει ότι η ℓ διατηρεί την αγκώλη. Ομοια και η ℓ^{-1} . Επειδή η απεικόνιση ℓ είναι γραμμική (βλ. 4.2.3), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ℓ είναι ισομορφισμός αλγεβρών Lie. ●

4.2.6 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(Α) Λόγω της ισομορφίας αλγεβρών Lie $\ell: \mathcal{T}_e G \cong \mathcal{L}(G)$ πολλοί συγγραφείς καλούν άλγεβρα Lie μιας ομάδας Lie τον εφαστάσιμο χώρο $\mathcal{T}_e G$, εφοδισμένο με τη δομή της άλγεβρας Lie, που ορίζεται (4.13).

Έτσι, αν θεωρήσουμε την ομάδα Lie $GL(n, \mathbb{R})$, μπορούμε να δείξουμε [με αρκετό κόπο] ότι

$$\mathcal{L}(GL(n, \mathbb{R})) \cong T_{\mathbb{I}}(GL(n, \mathbb{R})) \cong (M_{n \times n}(\mathbb{R}), [,])$$

όπου \mathbb{I} ο ταυτοτικός πίνακας και $(M_{n \times n}(\mathbb{R}), [,])$ σημαίνει την άλγεβρα Lie του παραδείγματος 3.2.8 (Α).

(B) Στην Εφαρμογή 3.1.14(A) είπαμε ότι το $\mathcal{X}(U)$, των γραμμικών πεδίων ως προς \mathbb{R} , δεν έχει πεπερασμένη διάσταση. Το ίδιο βέβαια ισχύει και για τον $\mathcal{X}(M)$. Παρόμοια και για $M=G$ (ομάδα Lie). Επομένως, αν πάρουμε τον $\mathcal{L}(G) \subset \mathcal{X}(G)$, ο χώρος αυτός είναι γραμμικός χώρος, ως προς \mathbb{R} , με πεπερασμένη διάσταση. Πραγματικά, με τη βοήθεια της απεικόνισης ℓ [θεώρημα 4.2.4] ορίζουμε τα διανυσματικά πεδία

$$\mathcal{L}(G) \ni \xi^i := \ell \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_e \right) ; i=1, \dots, n = \dim G,$$

όπου $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_e$ είναι τα βασικά διανύσματα του $T_e G$ (ως προς κάποιο κάρτη). Επομένως, επειδή η ℓ είναι (και γραμμικός) ισομορφισμός, τα ξ^i αποτελούν βάση.

Αρα,

η άλγεβρα Lie $\mathcal{L}(G)$ μιας ομάδας Lie G , με $\dim G = n$, είναι πεπερασμένης διάστασης (ακριβώς n) γραμμικός χώρος ως προς \mathbb{R} .

(Γ) Τα προηγούμενα ξ^i ($i=1, 2, \dots, n = \dim G$) πεδία, αν βάση, είναι και γραμμικώς ανεξάρτητα [βλ. Εφαρμογή 3.1.14(B)], δηλ., για κάθε $x \in G$, τα $(\xi^i(x))_{i=1, \dots, n}$ αποτελούν βάση του κάθε $T_x G$. Πραγματικά, από τον ορισμό της ℓ και των ξ^i είναι

$$\xi^i(x) = T_x L_x \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_e \right) ; i=1, \dots, n,$$

από την οποία, αμέσως, προκύπτει ο ισομορφισμός. Αρα, βάση της ίδιας και πάλι, εφαρμογής 3.1.14(B), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η G είναι παραλληλοποιήσιμη πολλα, δηλ. $TG \cong G \times \mathbb{R}^n$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Συμπληρώστε τις ζητούμενες του Θεωρήματος 4.2.5 και των Εφαρμογών (B), (Γ).
2. Δείξτε ότι $\xi \in \mathcal{L}(G) \Leftrightarrow \xi_x = T_x L_x (\xi_e), \forall x \in G$.
3. Με τη βοήθεια του θεωρήματος 4.2.4 δείξτε ότι κάθε μορφισμός ομάδων Lie $\varphi: G \rightarrow H$ ορίζει ένα μορφισμό αλγεβρών Lie $\tilde{\varphi}: \mathcal{L}(G) \rightarrow \mathcal{L}(H)$.
4. Βρείτε τη συνθήκη που παρατηρείται τα αριστερά αναλλοίωτα πεδία της ομάδας $GL(n, \mathbb{R})$
5. Με τους συμφορισμούς της Εφαρμογής (B) αυτής της παραγράφου να δείξετε ότι υπάρχουν n^3 σταθερές C_{ij}^k [οι δομικές σταθερές του G ως προς τη βάση (ξ^i) , οι οποίες δίνονται με τις σχέσεις $[\xi^i, \xi^j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k \xi^k$ ($i, j=1, \dots, n$). Επιπλέον, οι ιδιότητες της αγωγάς $[\cdot, \cdot]$ συνεπάγονται τις σχέσεις: 1) $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$ ($\forall i, j, k=1, \dots, n$) και 2) $\sum_{l=1}^n (C_{il}^m C_{jk}^l + C_{jl}^m C_{ki}^l + C_{kl}^m C_{ij}^l) = 0$ ($\forall i, j, k, m=1, \dots, n$).

4.3. ΜΟΝΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΥΠΟΜΑΔΕΣ.

Θα σκεδύουμε την άλγεβρα Lie $\mathcal{L}(G)$ της ομάδας Lie G με τις οδουλθρωτικές καμπύλες των αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων της G .

4.3.1 ΟΡΙΣΜΟΣ. Μία μονοπαραμετρίκη (ή 1-παραμετρίκη) υπομάδα της G είναι ένας (C^∞) μορφισμός ομάδων Lie $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow G$, όπου το \mathbb{R} νοείται με τη δομή της αβελιανής ομάδας Lie $(\mathbb{R}, +)$ [Παραδείγμα 4.1.3 (1)].

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι η απεικόνιση α είναι διαφορίσιμη καμπύλη (με πεδίο ορισμού ολόκληρο το \mathbb{R}), με την επιπλέον συνθήκη

(4.14)
$$\alpha(t+s) = \alpha(t) \cdot \alpha(s); \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Προφανώς $\alpha(0) = e$, δηλ. η α διαφέρει από το ουδέτερο στοιχείο e της G .

Η χρησιμοποιούμενη ορολογία διευκρινίζεται στην Άσκηση 1. Το σύνολο των μονοπαριμετρίκων υπομαδών της G συμβολίζουμε με $\mathcal{H}om(\mathbb{R}, G)$.

4.3.2 ΠΡΟΤΑΣΗ. Έστω $\alpha \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}, G)$. Τότε η α είναι η οδουλθρωτική καμπύλη, με αρχική συνθήκη $\alpha(0) = e$, του αριστερά αναλλοίωτου πεδίου ξ , το οποίο αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\dot{\alpha}(0) \in T_e G$ [δηλ. $\xi = \mathcal{L}(\dot{\alpha}(0))$, κατά τον συμβολισμό του θεωρήματος 4.2.4].

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα πρέπει να δείξουμε ότι $\dot{\alpha}(t) = \xi(\alpha(t))$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ (βλ. ορισμό 3.4.1). Επειδή $\xi \in \mathcal{L}(G)$, βάσει της Εφαρμογής 3.1.14 (2), και της σχέσης (4.12), έχουμε

(4.15)
$$\xi(\alpha(t)) = T_e L_{\alpha(t)}(\dot{\alpha}(0)) = T_e L_{\alpha(t)}(T_0 \alpha(\frac{d}{dt}|_0)) = T_0(L_{\alpha(t)} \circ \alpha)(\frac{d}{dt}|_0)$$

Ας επεξεργαστούμε την έκφραση που εμφανίζεται στην τελευταία ισότητα. Για κάθε $s \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι [βλ. και ορισμό 4.3.1]:

$$(L_{\alpha(t)} \circ \alpha)(s) = L_{\alpha(t)}(\alpha(s)) = \alpha(t) \cdot \alpha(s) = \alpha(t+s) = (\alpha \circ \lambda_t)(s)$$

όπου $\lambda_t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: s \mapsto \lambda_t(s) := t+s$ [η αριστερή μετατόπιση (κατά t) του \mathbb{R}]. Άρα, σύμφωνα με την Εφαρμογή 2.2.11 (Δ) [και ανάλογο τρόπο όπως για την μ της Εφαρμογής 3.4.5 (Γ)] βρίσκουμε ότι

$$T_0(L_{\alpha(t)} \circ \alpha)(\frac{d}{dt}|_0) = T_0(\alpha \circ \lambda_t)(\frac{d}{dt}|_0) = (T_t \alpha \circ T_0 \lambda_t)(\frac{d}{dt}|_0) = T_t \alpha(T_0 \lambda_t(\frac{d}{dt}|_0)) = T_t \alpha(\lambda_t'(0) \cdot \frac{d}{dt}|_{\lambda_t(0)}) = T_t \alpha(1 \cdot \frac{d}{dt}|_t) = \dot{\alpha}(t)$$

Επομένως, η τελευταία και η (4.15) αποδεικνύουν τη ζητούμενη σχέση. ●

4.3.3 ΠΡΟΤΑΣΗ. Έστω $\xi \in \mathcal{L}(G)$. Αν $\alpha: \mathcal{J} \rightarrow G$ είναι η οδουλθρωτική καμπύλη του ξ με αρχική συνθήκη $\alpha(0) = e$, τότε, για κάθε $t, s \in \mathcal{J}$ με $t+s \in \mathcal{J}$, ισχύει ότι

(*)
$$\alpha(s+t) = \alpha(s) \cdot \alpha(t)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα δείξουμε ότι τα δύο μέλη της (*) ορίζουν ολοκληρωτικές καμπύλες του ξ με την ίδια αρχική συνθήκη, οπότε [από το θεώρημα 3.4.4] θα συμπίπτουν στο κοινό πεδίο ορισμού τους. Για το σκοπό αυτό ετ'α θεωρούμε ένα s , όπως στην εμφάνιση, και ορίζουμε τις καμπύλες β και γ με

$$(4.16) \quad \beta(t) := \alpha(s+t) = (\alpha \circ \lambda_s)(t), \quad t \in J$$

$$(4.17) \quad \gamma(t) := \alpha(s) \cdot \alpha(t) = (L_{\alpha(s)} \circ \alpha)(t), \quad t \in J$$

όπου λ_s είναι η μεταφορά που χρησιμοποιήθηκε και στην προηγούμενη απόδειξη. Οι β και γ είναι, προφανώς, διαφορίσιμες καμπύλες και έχουν την αρχική συνθήκη

$$(4.18) \quad \beta(0) = \alpha(s) = \alpha(s) \cdot e = \gamma(0).$$

Επομένως μένει να δείξουμε ότι οι β και γ είναι ολοκληρωτικές καμπύλες του ξ . Για την πρώτη έχουμε διαδοχικά τις εκθέσεις:

$$\dot{\beta}(t) = T_t \beta \left(\frac{d}{dt} / t \right) = T_t (\alpha \circ \lambda_s) \left(\frac{d}{dt} / t \right) = T_{s+t} \left(T_t \lambda_s \left(\frac{d}{dt} / t \right) \right) =$$

$$T_{s+t} \alpha \left(\lambda_s' \left(t \right) \cdot \frac{d}{dt} / \lambda_s(t) \right) = T_{s+t} \alpha \left(\frac{d}{dt} /_{s+t} \right) = \dot{\alpha}(s+t)$$

Κι επειδή η α είναι ολοκληρωτική καμπύλη, η τελευταία δίνει ότι

$$\dot{\beta}(t) = \dot{\alpha}(s+t) = \xi(\alpha(s+t)) = \xi(\beta(t)), \quad t \in J,$$

δηλ. η β είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ . Παρόμοια, για τη γ έχουμε:

$$\dot{\gamma}(t) = T_t \gamma \left(\frac{d}{dt} / t \right) = T_t (L_{\alpha(s)} \circ \alpha) \left(\frac{d}{dt} / t \right) = T_{\alpha(s)} L_{\alpha(s)} \left(T_t \alpha \left(\frac{d}{dt} / t \right) \right) =$$

$$T_{\alpha(s)} L_{\alpha(s)} (\dot{\alpha}(t)) = T_{\alpha(s)} L_{\alpha(s)} (\xi(\alpha(t))).$$

Επειδή όμως το ξ είναι αριστερά αναλλοίωτο [βλ. εκέση (4.9)], η προηγούμενη μετασχηματίζεται στην

$$\dot{\gamma}(t) = T_{\alpha(s)} L_{\alpha(s)} (\xi(\alpha(t))) = \xi(\alpha(s) \cdot \alpha(t)) = \xi(\gamma(t)), \quad t \in J,$$

δηλ. και η γ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ . Άρα, όπως εξηγήσαμε πιο πάνω, $\beta(t) = \gamma(t)$, $\forall t \in J$, δηλ. $\alpha(s+t) = \alpha(s) \cdot \alpha(t)$, για το σταθεροποιημένο s .

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι ισχύει η (*) και για οποιοδήποτε άλλο s (με τις προϋποθέσεις της Πρότασης). ●

4.3.4 ΠΟΡΙΣΜΑ. Αν υποθέσουμε ότι μια διαφορίσιμη καμπύλη $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow G$ [όπου το πεδίο ορισμού της είναι ολοκληρωτικό στο \mathbb{R}] διέρχεται από το e [$\alpha(0) = e$] και είναι ολοκληρωτική καμπύλη ενός $\xi \in \mathcal{L}(G)$, τότε η α είναι μονοπαράμετρο ή υποομάδα του G , δηλ. $\alpha \in \text{Hom}(\mathbb{R}, G)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η εκέση (*) της προηγούμενης πρότασης ισχύει τώρα για κάθε t και s του \mathbb{R} , άρα $\alpha \in \text{Hom}(\mathbb{R}, G)$. ●

Στην πραγματικότητα το συμπέρασμα του προτάματος 4.3.4 ισχύει για την ολοκληρωτική καμπύλη, που δίδεται από το e , οποιοδήποτε αριστερά αναλλοίωτου $\xi \in \mathcal{L}(G)$, αφού κάτω το επόμενο θεμελιώδες

4.3.5 ΘΕΩΡΗΜΑ. Έστω τυχαίο $\xi \in \mathcal{L}(G)$. Τότε κάθε ολοκληρωτική του καμπύλη έχει πεδίο ορισμού ολοκληρό το \mathbb{R} . [Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το ξ είναι ένα ηλίρες διανυσματικό πεδίο].

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας συμβολίσουμε με $\alpha_0: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ την ολοκληρωτική καμπύλη του ξ με αρχική συνθήκη $\alpha_0(0) = e$. Θα δείξουμε ότι μπορούμε να την επεκτείνουμε σε μία ολοκληρωτική καμπύλη του ξ , με την ίδια αρχική συνθήκη και με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} ολοκληρό.

Έτσι, για τυχόν $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ και οποιοδήποτε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε την καμπύλη

$$(4.19) \quad \alpha_n: (n \cdot t_0 - \varepsilon, n \cdot t_0 + \varepsilon) \rightarrow G: \alpha_n(t) := \alpha_0(t_0)^n \cdot \alpha_0(t - n \cdot t_0).$$

Παρατηρούμε ότι

$$(4.20) \quad \alpha_n(t) = L_{\alpha_0(t_0)^n}(\alpha_0(t - n \cdot t_0))$$

δηλ. έχουμε το διάγραμμα

$$(4.21) \quad \begin{array}{ccc} (n \cdot t_0 - \varepsilon, n \cdot t_0 + \varepsilon) \ni t & \xrightarrow{\mu} & t - n \cdot t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ \downarrow \alpha_n & & \downarrow \alpha_0 \\ G \ni L_{\alpha_0(t_0)^n}(\alpha_0(t - n \cdot t_0)) & \xleftarrow{L_{\alpha_0(t_0)^n}} & \alpha_0(t - n \cdot t_0) \in G \end{array}$$

από το οποίο προκύπτει ότι κάθε α_n είναι C^∞ απεικόνιση [θυμίζουμε ότι $\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η C^∞ απεικόνιση $t \mapsto \mu(t) := t - n \cdot t_0$]. Επομένως, υπολογίζοντας το πεδίο ταχυτήτων της (4.20) έχουμε διαδοχικά τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_n(t) &= T_t \alpha_n \left(\frac{d}{dt} / t \right) = T_t [L_{\alpha_0(t_0)^n} \circ \alpha_0 \circ \mu] \left(\frac{d}{dt} / t \right) = \\ &= (T_{\alpha_0(t - n \cdot t_0)} L_{\alpha_0(t_0)^n} \circ T_{t - n \cdot t_0} \alpha_0) \left(T_t \mu \left(\frac{d}{dt} / t \right) \right) = \\ &= (T_{\alpha_0(t - n \cdot t_0)} L_{\alpha_0(t_0)^n} \circ T_{t - n \cdot t_0} \alpha_0) \left(1 \cdot \frac{d}{dt} / t - n \cdot t_0 \right) = \\ &= T_{\alpha_0(t - n \cdot t_0)} L_{\alpha_0(t_0)^n} \left(T_{t - n \cdot t_0} \alpha_0 \left(\frac{d}{dt} / t - n \cdot t_0 \right) \right) = \\ &= T_{\alpha_0(t - n \cdot t_0)} L_{\alpha_0(t_0)^n} (\dot{\alpha}_0(t - n \cdot t_0)) \end{aligned}$$

Επειδή $t \in (n \cdot t_0 - \varepsilon, n \cdot t_0 + \varepsilon)$, έπεται ότι $t - n \cdot t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ και επειδή α_0 είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ , που ως εκ τούτου με τη σειρά του είναι αριστερά αναλλοίωτο, οι προηγούμενες σχέσεις μετασχηματίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_n(t) &= T_{\alpha_0(t-n.t_0)} L_{\alpha_0(t_0)}^n (\dot{\alpha}_0(t-n.t_0)) = T_{\alpha_0(t-n.t_0)} L_{\alpha_0(t_0)}^n (\xi(\alpha_0(t-n.t_0))) = \\ &= \xi(\alpha_0(t_0)^n \cdot \alpha_0(t-n.t_0)) = \xi(\alpha_n(t)). \end{aligned}$$

δηλαδή, κάθε α_n είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ . Εξάλλου βλέπουμε ότι

$$\alpha_{n-1}(n.t_0) = \alpha_0(t_0)^{n-1} \cdot \alpha_0(n.t_0 - (n-1).t_0) = \alpha_0(t_0)^{n-1} \cdot \alpha_0(t_0) = \alpha_0(t_0)^n,$$

οπότε, λόγω της Πρότασης 4.3.3, η τελευταία δίνει ότι

$$\alpha_{n-1}(n.t_0) = \alpha_0(t_0)^n = \alpha_0(t_0) \cdot \dots \cdot \alpha_0(t_0) = \alpha_0(t_0 + \dots + t_0) = \alpha_0(n.t_0)$$

Η τελευταία εξέταση σημαίνει ότι οι καμπύλες α_{n-1} και α_0 , που είναι ολοκληρωτικές του ξ , συμπίπτουν στο σημείο $n.t_0$. Επομένως, κατά την Ασκηση 7 της §. 3.4, οι καμπύλες αυτές συμπίπτουν στην τομή των πεδίων ορισμού τους. Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε μία οδική καμπύλη $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow G$ έτσι ώστε $\alpha(t) = \alpha_n(t)$, αν $t \in (n.t_0 - \varepsilon, n.t_0 + \varepsilon)$. Η καμπύλη α είναι καλά ορισμένη αφού κατασκευάζεται από τη συμμόρφωση των α_n , $n \in \mathbb{Z}$, όπου δύο διαδοχικές α_{n-1}, α_n συμπίπτουν στην τομή των πεδίων ορισμού τους. Επίσης, η α είναι C^∞ , αφού κάθε α_n είναι C^∞ . Τέλος $\alpha(0) = e$ και είναι ολοκληρωτική καμπύλη επειδή οι α_n είναι ολοκληρωτικές καμπύλες.

Επομένως, το ξ διαθέτει μία ολοκληρωτική καμπύλη α με αρχική συνθήκη $\alpha(0) = e$ και πεδίων ορισμού το \mathbb{R} , δηλ. $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow G$ [η α είναι και η μοναδική καμπύλη με τις ιδιότητες αυτές].

Θα δείξουμε τώρα ότι κάθε άλλη ολοκληρωτική καμπύλη του ξ έχει πεδίων ορισμού το \mathbb{R} . Έστω τυχόν $x \in G$. Θέτουμε $\beta(t) := x \cdot \alpha(t) \equiv (L_x \circ \alpha)(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $\beta(0) = x$ [δηλ. η β διέρχεται από το x] και (επειδή ξ είναι αριστερά αναλλοίωτο)

$$\begin{aligned} \dot{\beta}(t) &= T_x \beta \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) = T_x (L_x \circ \alpha) \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) = T_{\alpha(t)} L_x \left(T_x \alpha \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) \right) = \\ &= T_{\alpha(t)} L_x (\dot{\alpha}(t)) = T_{\alpha(t)} L_x (\xi(\alpha(t))) = \xi(x \cdot \alpha(t)) = \xi(\beta(t)), \end{aligned}$$

δηλ. η β είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ . Άρα, λόγω του μονοσημαντού της ολοκλ. καμπύλης με δοθείσα συνθήκη, η β είναι ακριβώς η ολοκληρωτική καμπύλη του ξ που διέρχεται από το x και έχει πεδίων ορισμού το \mathbb{R} . ●

Στο τελευταίο μέρος της απόδειξης του θεωρήματος 4.3.5 ουσιαστικά δείχτηκε το

4.3.6 ΠΟΡΙΣΜΑ. Έστω $\xi \in \mathcal{L}(G)$ και $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow G$ η ολοκληρωτική καμπύλη του ξ με $\alpha(0) = e$. Τότε η ολοκληρωτική καμπύλη του ξ , που διέρχεται από το $x \in G$ είναι ακριβώς η καμπύλη $\beta: \mathbb{R} \rightarrow G$ με $\beta(t) = x \cdot \alpha(t)$.

Επίσης, συνέπεια του Πορίσματος 4.3.4 και το θεωρήματος 4.3.5 είναι το

4.3.7 ΠΟΡΙΣΜΑ. Αν $\xi \in \mathcal{L}(G)$ και α η ολοκληρωτική του καμπύλη με $\alpha(0) = e$ τότε

| η α είναι μονοπαραμετρική υποομάδα του G, δηλ. α ∈ Hom(R, G).

Όλα τα προηγούμενα συμπεράσματα επιτρέπουν τη σύνδεση της L(G) με το Hom(R, G). Ακριβέστερα, ισχύει το

| 4.3.8 ΘΕΩΡΗΜΑ. Υπάρχει μία 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των L(G) και Hom(R, G).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ορίζουμε την απεικόνιση H: L(G) → Hom(R, G), η οποία ε'είναι ξ ∈ L(G) αντιστοιχεί σαν εισία H(ξ) την ολοκληρωτική καμπύλη του ξ με αρχική συνθήκη e. Η καμπύλη αυτή είναι μονοσήμαντα ορισμένη, για το δοθέν ξ, και κατά το Πόρημα 4.3.7 είναι και μονοπαραμετρική υποομάδα. Άρα η H είναι μία καλά ορισμένη απεικόνιση με πεδίο τιμών το Hom(R, G).

Η απεικόνιση H είναι 1-1. Πραγματικά αν υποθέσουμε ότι για δύο ξ, η ∈ L(G) είναι H(ξ) = α και H(η) = β με α = β. Τότε, επειδή τα ξ, η είναι αριστερά αναλλοίωτα και οι α, β είναι αντίστοιχοι ολοκληρωτικοί καμπύλες, έχουμε ότι

$$\xi(x) = T_e L_x(\xi(e)) = T_e L_x(\alpha(0)) = T_e L_x(\beta(0)) = T_e L_x(\eta(e)) = \eta(x),$$

για κάθε x ∈ G, άρα ξ = η και H απεικόνιση 1-1.

Η απεικόνιση H είναι επί. Έστω α ∈ Hom(R, G). Τότε α(0) ∈ T_e G, άρα υπάρχει ξ ∈ L(G) με ξ(e) = α(0) [βλ. Θεώρημα 4.2.4]. Ισχυρίζομαστε ότι H(ξ) = α. Όμως αυτό είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.3.2, αφού η α είναι η ολοκληρωτική καμπύλη του ξ με α(0) = e. ●

4.3.9 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(Α) Είδαμε στα προηγούμενα ότι σε κάθε ξ ∈ L(G) αντιστοιχεί, κατά τρόπο αμφιμονοσήμαντο, μία μονοπαραμετρική υποομάδα α: R → G, η οποία είναι και η ολοκληρωτική καμπύλη του ξ με α(0) = e. Επομένως ξ(α(t)) = α(t), ∀ t ∈ R, οπότε για t = 0 είναι α'(0) = ξ(e) = ξ_e. Αν θέσουμε ξ_e = v. Για να δηλώσουμε ότι η α είναι η μονοπαραμετρική υποομάδα / ολοκληρωτική καμπύλη, η οποία αντιστοιχεί στο ξ, το οποίο αντιστοιχεί με τη σειρά του αμφιμονοσήμαντα στο v, γράψουμε α_v (απεία). Άρα

$$\alpha_v(0) = e \text{ και } \alpha_v'(0) = v = \xi_e$$

Έστω τώρα τυχαίο s ∈ R. Στο διάνυσμα s·v αντιστοιχεί αμφιμονοσήμαντα το πεδίο s·ξ, άρα και μία μονοπαραμετρική υποομάδα, που τη συμβολίζουμε (όπως πιο πάνω) με α_{s,v}. Αν φέρουμε πάλι συσχετιστεί η α_{s,v} με την α_v.

Θεωρούμε την καμπύλη β: R → G με β(t) = α_v(s+t), t ∈ R. Προφανώς μπορούμε να γράψουμε ότι β(t) = (α_v ∘ ρ_s)(t), όπου ρ_s: R → R: t ↦ ρ_s(t) = s+t.

Παρατηρούμε ότι η β είναι διαφορίσιμη ασυμπίλη. Επίσης διαφέρει από το e , επειδή

$$\beta(0) = \alpha_v(s \cdot 0) = \alpha_v(0) = e.$$

Ακόμη διαπιστώνουμε ότι η β είναι μονοπαραμετρική υποομάδα:

$$\beta(t+t') = \alpha_v(st+st') = \alpha_v(s \cdot t) \cdot \alpha_v(s \cdot t') = \beta(t) \cdot \beta(t'), \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}.$$

Από το άλλο μέρος, η β θα αντιστοιχεί αμφιμονοσήμοντα σε ένα $\eta \in \mathcal{L}(G)$ έτσι ώστε

$$\beta(0) = \eta_e. \quad \text{Ομως}$$

$$\begin{aligned} \beta(0) &= T_0(\alpha_v \circ \rho_s)\left(\frac{d}{dt}\Big|_0\right) = (T_0\alpha_v \circ T_0\rho_s)\left(\frac{d}{dt}\Big|_0\right) = \\ &= T_0\alpha_v\left(s \cdot \frac{d}{dt}\Big|_0\right) = s \cdot T_0\alpha_v\left(\frac{d}{dt}\Big|_0\right) = s \cdot \dot{\alpha}(0) = s \cdot v = s \cdot \xi_e \end{aligned}$$

Άρα $\eta_e = s \cdot \xi_e$, οπότε $\eta = s \cdot \xi$ και $\beta = \alpha_{s \cdot v}$. Δηλ. καταλήγουμε στη σχέση

(4.22)

$$\alpha_{s \cdot v}(t) = \alpha_v(s \cdot t), \quad \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

(B) Ας υποθέσουμε ότι $f: G \rightarrow G'$ είναι μορφοϊσμός ομάδων Lie και α η μονοπαραμετρική υποομάδα του G με $\dot{\alpha}(0) = \xi_e \in T_0G$, για ένα (μποσήμαντα ορισμένο) $\xi \in \mathcal{L}(G)$.

Παρατηρούμε ότι $\gamma = f \circ \alpha$ είναι μονοπαραμετρική υποομάδα του G' επειδή:

$$(f \circ \alpha)(t+s) = f(\alpha(t+s)) = f(\alpha(t) \cdot \alpha(s)) = f(\alpha(t)) \cdot f(\alpha(s)) = \gamma(t) \cdot \gamma(s)$$

Άρα θα αντιστοιχεί σε ένα σφαιρικά ανυπαλλοίωτο πεδίο του G' , ες το πούμε η . Το ίδιο είναι ακόμα, επειδή $\eta_e = \dot{\gamma}(0)$, θα είναι

$$\eta_e = \dot{\gamma}(0) = T_0(f \circ \alpha)\left(\frac{d}{dt}\Big|_0\right) = T_{0\alpha}f\left(T_0\alpha\left(\frac{d}{dt}\Big|_0\right)\right) = T_0f(\dot{\alpha}(0)) = T_0f(\xi_e)$$

Άρα, για κάθε $y \in G'$ θα είναι [συμβολίζουμε με e' το ουδέτερο στοιχείο του G']

$$\eta_y = \pi(y) = T_{e'}L_{y'}(T_0f(\xi_e)) = T_{e'}(L_{y'} \circ f)(\xi_e).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Εστω $\alpha \in \text{Hom}(\mathbb{R}, G)$. Να δείξετε ότι η $\alpha(\mathbb{R})$ είναι αβελιανή (αλγεβρική) υποομάδα της G . Άρα τα στοιχεία της $\alpha(\mathbb{R})$ είναι στοιχεία μιάς (υπο)ομάδας, που εξαρτώνται από μία παράμετρο.
2. Με του συμβολισμού της Εφαρμογής (A), να δείξετε ότι, αν G είναι αβελιανή ομάδα, τότε ισχύει η σχέση $\alpha_{u+v} = \alpha_u \cdot \alpha_v$, για κάθε $u, v \in T_0G$.
3. Εστω $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η γνωστή εκθετική απεικόνιση $\exp t = e^t$. Να δείξετε ότι αποτελεί μονοπαραμετρική υποομάδα της (\mathbb{R}_+, \cdot) [βλ. Παράδειγμα 4.1.3 (3)].
4. Αν $f: G \rightarrow H$ είναι ένας ισομορφοϊσμός ομάδων Lie, τότε να δείξετε ότι ορίζεται μια 1-1 και επί απεικόνιση μεταξύ των $\text{Hom}(\mathbb{R}, G)$ και $\text{Hom}(\mathbb{R}, H)$.
5. Εστω G αβελιανή ομάδα και $\xi, \eta \in \mathcal{L}(G)$ με αντιστοιχίες μονοπαραμετρικές υποομάδες α και β . Δείξτε ότι $\alpha \cdot \beta [t \mapsto (\alpha \cdot \beta)(t) = \alpha(t) \cdot \beta(t)]$ είναι μονοπαραμ. υποομάδα και άρα έχει το αντίστοιχο πεδίο της. Ποιά η μονοπ. υποομ. που αντιστοιχεί στο $\lambda \cdot \xi$;

4.4 Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΑΠΕΙΘΩΝΙΚΗ ΜΙΑΣ ΟΜΑΔΑΣ

Θα ορίσουμε μία απειθώνικη που έχει θεμελιώδη σημασία για τη μελέτη μιας ομάδας Lie G . Η απειθώνικη αυτή γεννηθείς τις ιδιότητες της συνηθούς εκθετικής e^t του \mathbb{R} και επιτρέπει να ορίσουμε μία ειδική κατηγορία καρτών του G , έτσι ώστε οι μονοπαραμετρικές υποομάδες να απειθώνίζονται (μέσω των καρτών) σε εκθετικές του \mathbb{R}^n .

Θεωρούμε πάντοτε μία ομάδα Lie G , ως πούμε με διάσταση n , και την αντίστοιχη άλγεβρα Lie $\mathcal{L}(G)$. Όπως είδαμε στην εφαρμογή 4.3.9(A), σε τυχόν $v \in \mathcal{T}_e G$ αντιστοιχεί αμφιμότως ένα $\xi \in \mathcal{L}(G)$ [με $\xi_e = v$] και ε'αυτό μία μονοπαραμετρική υποομάδα α_v , που είναι και η ολοκληρωτική καμπύλη του ξ με αρχική συνθήκη $\alpha_v(0) = e$. Επιπλέον, $\dot{\alpha}_v(0) = \xi_e = v$ [Υπενθυμίζουμε ότι ο δείκτης v στην α_v μπαίνει για να δηλώνει ότι η α_v προέρχεται από το ξ , που με τη σειρά του προέρχεται από το v]

4.4.1 ΟΡΙΣΜΟΣ Καλούμε εκθετική απειθώνικη της ομάδας Lie G την απειθώνικη $\text{exp}: \mathcal{T}_e G \rightarrow G$, η οποία δίνεται με τη σχέση $\text{exp}(v) := \alpha_v(1)$

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι η exp είναι διαφορίσιμη απειθώνικη. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει ο $\mathcal{T}_e G$ να εφοδιαστεί με μία διαφοριακή δομή. Κάτι τέτοιο επιτυγχάνεται ως εξής: αν πάρουμε έναν οποιοδήποτε κάρτη της G , ως πούμε (U, φ) , με $e \in U$, τότε η $\bar{\varphi}: \mathcal{T}_e G \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικός ισομορφισμός. Διαπιστώνουμε άμεσα ότι το ζεύγος $(\mathcal{T}_e G, \Psi)$ με $\Psi := \bar{\varphi}$ είναι κάρτης του $\mathcal{T}_e G$ και $\mathcal{A} := \{(\mathcal{T}_e G, \Psi)\}$ είναι ατθάντας του $\mathcal{T}_e G$. Επομένως, το $(\mathcal{T}_e G, \mathcal{A}')$, όπου \mathcal{A}' ο μέγιστος ατθάντας του \mathcal{A} , αποτελεί διαφοριακή ποχτα.

Με τη βοήθεια της θεωρίας των διαφοριακών εξισώσεων [επί οποιες μας οδηγούν ταπεινά τα διανυσματικά πεδία] και της προηγούμενης διαφοριακής δομής επί του $\mathcal{T}_e G$ αποδεικνύεται το

4.4.2 ΛΗΜΜΑ. Η απειθώνικη $\Theta: \mathbb{R} \times G \times \mathcal{T}_e G \rightarrow G$ με $\Theta(t, x, v) := x \cdot \alpha_x(t)$ είναι διαφορίσιμη.

[Η απόδειξη είναι αρκετά τεχνική και παραλείπεται].

4.4.3 ΠΟΡΙΣΜΑ. Η $\text{exp}: \mathcal{T}_e G \rightarrow G$ είναι διαφορίσιμη απειθώνικη. Επιπλέον, ικανοποιεί τη σχέση

$$(*) \quad \text{exp}(t \cdot v) = \alpha_v(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, v \in \mathcal{T}_e G.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για το πρώτο συμπέρασμα έχουμε ότι

$$\text{exp}(v) = \alpha_v(1) = \Theta(1, e, v).$$

Επομένως η \exp είναι διαφορίσιμη απεικόνιση εάν συνδέσει διαφορίσιμων συναρτήσεων όπως γαίνεται στο επόμενο (μεταδεύτερο) διάγραμμα

$$(4.23) \quad \begin{array}{ccc} T_0G \ni v & \xrightarrow{(\xi_1, \xi_2, id_{T_0G})} & (1, e, v) \in \mathbb{R} \times G \times T_0G \\ & \searrow \exp & \downarrow \theta \\ & & \theta(1, e, v) = \exp(v) \in G \end{array}$$

όπου $\xi_1: T_0G \rightarrow \mathbb{R}$ η σταθερή απεικόνιση $\xi_1(u) := 1$ και $\xi_2: T_0G \rightarrow G$ η σταθερή απεικόνιση $\xi_2(u) := e$.

Το δεύτερο συμπέρασμα προκύπτει από τον ορισμό της \exp και τη σχέση (4.22):

$$\exp(tv) := \alpha_{t,v}(1) = \alpha_v(t, 1) = \alpha_v(t)$$

[όπου στην (4.22) θέτουμε $s=t$ και $t=1$]. ●

4.4.4 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Η σχέση (*) της Πρότασης 4.4.3 συνδέει την \exp με όλα τις μητρομα-
μετρικές υποομάδες της G . Δηλ. αν γνωρίζουμε την \exp , γνωρίζουμε όλα τις τελεστικές
και αντίστροφά

4.4.5 ΠΡΟΤΑΣΗ. Η \exp ικανοποιεί και τις επόμενες συνθήκες

- i) $\exp((t+s)v) = \exp(tv) \cdot \exp(sv) = \exp(sv) \cdot \exp(tv)$; $\forall t, s \in \mathbb{R}, v \in T_0G$.
- ii) $\exp(n \cdot v) = \exp(v)^n$; $\forall v \in T_0G, n \in \mathbb{Z}$.
- iii) $\exp(0) = e$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για την i) έχουμε:

$$\exp((t+s)v) = \alpha_v(t+s) = \alpha_v(t) \cdot \alpha_v(s) = \exp(tv) \cdot \exp(sv)$$

Επειδή $t+s = s+t$ επέεται και η τελεστική ιδιότητα της i).

Η ii) είναι άμεση συνέπεια της i) για $t \in \mathbb{Z}$, ενώ $\exp(0) = \exp(0 \cdot v) = \alpha_v(0) = e$
[για τυχόν $v \in T_0G$], οπότε παίρνουμε την iii). ●

Θεωρούμε και πάλι την πολ/σα T_0G , με τη δομή που περιγράψαμε στη συζήτηση
μετά τον ορισμό 4.4.1. Επομένως, όπως για όλες τις πολλαπλότητες (βλ. θεωρ. 2.1.9)
ο χώρος (T_0G, Ψ) θα ορίζει και μια γραμμική ισομορφία $\bar{\Psi}: T_0(T_0G) \rightarrow \mathbb{R}^n$, όπου
0 είναι το μηδενικό στοιχείο (διάνυσμα) του T_0G .

Επίσης, ως πάρουμε την απεικόνιση $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow T_0G$ με $\gamma(t) := tv$, όπου v είναι ένα
εσταθεροποιημένο διάνυσμα του T_0G . Η γ είναι, επομένως, μια ισομορφία T_0G με
 $\gamma(0) = 0$. Εμφάνει, είναι C^∞ όπως ληφεί άμεσα μάλιστα, χρησιμοποιώντας την ταύτιση
της παράστασης μέσω των χαρτών $(\mathbb{R}, id_{\mathbb{R}})$ και (T_0G, Ψ) των πολ/σων \mathbb{R} και T_0G
απείστωτα. [Άμεση!]

Τέλος βλέπουμε πάλι ότι ο εξαντόμενος χώρος $T_0(T_0G)$ μπορεί να ταυτιστεί με τον T_0G . Αυτό προκύπτει από το επόμενο διάγραμμα, αφού $\bar{\Psi}: T_0(T_0G) \rightarrow \mathbb{R}^n$ και $\Psi = \bar{\Phi}: T_0G \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικοί ισομορφισμοί

$$(4.24) \quad \begin{array}{ccc} T_0(T_0G) & & \\ \bar{\Psi} \downarrow \cong & \searrow \cong & \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow[\cong]{\Psi^{-1} = \bar{\Phi}^{-1}} & T_0G \end{array}$$

Τα προηγούμενα μας επιτρέπουν να δείξουμε το

4.4.5 ΘΕΩΡΗΜΑ. Το διαφορικό $T_0 \exp: T_0(T_0G) \rightarrow T_0G$ της \exp , στο στατικό $0 \in T_0G$, είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων. Ιδιαίτερα, μετά την ταύτιση $T_0(T_0G) \cong T_0G$, μπορούμε να γράψουμε ότι $T_0 \exp = id|_{T_0G}$. Επομένως, η \exp είναι τοπική αμφιδιαφορίση στο 0, δηλ. υπάρχει περιοχή V_0 του 0 στον T_0G και περιοχή N_e του e στην G , έτσι ώστε $\exp|_{V_0}: V_0 \rightarrow N_e$ να είναι αμφιδιαφορίση.

ΑΠÓΔΕΙΞΗ. Η $T_0 \exp$ είναι απεικόνιση μεταξύ των χώρων που γράψαμε, λόγω της ιδιότητας (ii) της Πρότασης 4.4.5.

Από το άλλο μέρος, έχουμε ότι

$$(4.25) \quad \alpha_\gamma(t) = \exp(t \cdot v) = (\exp \circ \gamma)(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

όπου γ η καμπύλη που αναφέρεται πριν την εμφάνιση του θεωρήματος ($\gamma(t) = t \cdot v$). Επομένως, σύμφωνα με ότι είπαμε και στην αρχή της παραγράφου αυτής, από την (4.25) βρίσκουμε ότι

$$(4.26) \quad v = \dot{\alpha}_\gamma(0) = \dot{(\exp \circ \gamma)}(0) = T_0(\exp \circ \gamma)\left(\frac{d}{dt}\Big|_0\right) = T_0 \exp\left(T_0 \gamma\left(\frac{d}{dt}\Big|_0\right)\right)$$

Ας βρούμε την έκφραση του εξαντόμενου διανύσματος $T_0 \gamma\left(\frac{d}{dt}\Big|_0\right)$. Παρατηρούμε ότι $\frac{d}{dt}\Big|_0 = [(id_{\mathbb{R}}, 0)]$, όπου η $id_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μπορεί να θεωρηθεί (ηροφανώς) σαν καμπύλη του \mathbb{R} . Αρα (βλ. ορισμό 2.2.1), $T_0 \gamma\left(\frac{d}{dt}\Big|_0\right) = T_0 \gamma([(id_{\mathbb{R}}, 0)]) = [(\gamma, 0)]$. Επομένως, η (4.26) παίρνει τη μορφή

$$(4.27) \quad v = T_0 \exp([(\gamma, 0)]).$$

Επειδή $[(\gamma, 0)] \in T_0(T_0G)$, θα είναι (βλ. Πρόταση 2.1.7)

$$\bar{\Psi}([(\gamma, 0)]) = (\Psi \circ \gamma)'(0),$$

και επειδή $(\Psi \circ \gamma)(t) = \Psi(t \cdot v) = \bar{\Phi}(t \cdot v) = t \cdot \bar{\Phi}(v) \in \mathbb{R}^n$, η προηγούμενη δίνει την

$$\bar{\Psi}([(\gamma, 0)]) = (t \cdot \bar{\Phi}(v))'_{t=0} = \bar{\Phi}(v) \equiv \Psi(v)$$

Αρα, η (4.27) οδηγεί στην

$$(4.28) \quad v = [(T_0 \exp) \circ (\bar{\Psi}^{-1} \circ \Psi)](v).$$

Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $u \in T_e G$ [Η απόδειξη γίνεται με τον ίδιο τρόπο και με την αναλόγη επιλογή ταμηνύλης γ , κάθε φορά που το u μεταβάλλεται]. Δηλ. τελικά βρίσκουμε ότι $(T_e \exp) \circ (\bar{\Psi}^{-1} \circ \Psi) = id / T_e G$. Επειδή $\bar{\Psi}^{-1} \circ \Psi$ είναι γραμμικός ισομορφισμός έχουμε το πρώτο συμπέρασμα. Κι ακόμα, με την ταύτιση $T_e(T_e G) \cong T_e G$, μπορούμε να παραλείψουμε τον όρο $\bar{\Psi}^{-1} \circ \Psi$ και να γράψουμε ότι $T_e \exp \cong id / T_e G$ [μέσω ισομορφισμού].

Σε κάθε περίπτωση (χρησιμοποιώντας την ταύτιση $T_e(T_e G) \cong T_e G$ είτε ίσως) η $T_e \exp : T_e(T_e G) \rightarrow T_e G$ είναι γραμμικός ισομορφισμός. Επομένως, κατά το θεώρημα της αντιστροφής συνάρτησης (βλ. θεώρημα 2.2.8) η \exp είναι τοπική αμφιδιαφορίση στο e , άρα συμπεραίνουμε και την τελευταία ιδιότητα του θεωρήματος. ●

Ας πάρουμε τις προηγούμενες περιοχές V_0 και N_e του θεωρήματος 4.4.5. Λόγω της αμφιδιαφορίας της $\exp|_{V_0} : V_0 \rightarrow N_e$ ορίζεται και η $\exp^{-1} : N_e \rightarrow V_0$ [Για ευκολία γράβουμε \exp^{-1} αντί $(\exp|_{V_0})^{-1}$]. Αν θεωρήσουμε και τον αρχικό χάρτη (U, φ) , που χρησιμοποιήσαμε στην μέχρι τώρα μελέτη μας, μπορούμε να έχουμε την απεικόνιση $\gamma : \bar{\varphi} \circ \exp^{-1} : N_e \rightarrow \bar{\varphi}(V_0)$, δηλ.

$$(4.29) \quad \begin{array}{ccc} G = N_e & \xrightarrow{\exp^{-1}} & V_0 \subset T_e G \\ & \searrow \gamma & \downarrow \bar{\varphi} \\ & & \bar{\varphi}(V_0) \subset \mathbb{R}^n \end{array}$$

Επειδή $\bar{\varphi}(V_0)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n [αφού η $\bar{\varphi}$ είναι ομοιομορφισμός] και γ είναι 1-1 και επί, συνάγεται ότι το ζεύγος (N_e, γ) είναι χάρτης του G με $e \in N_e$. Προφανώς, η γ είναι αμφιδιαφορίση (αφού \exp και $\bar{\varphi}$ είναι αμφιδιαφορίσεις).

4.4.6 ΟΡΙΣΜΟΣ. Ο χάρτης (N_e, γ) λέγεται κανονικός χάρτης της G , που περιέχει το e .

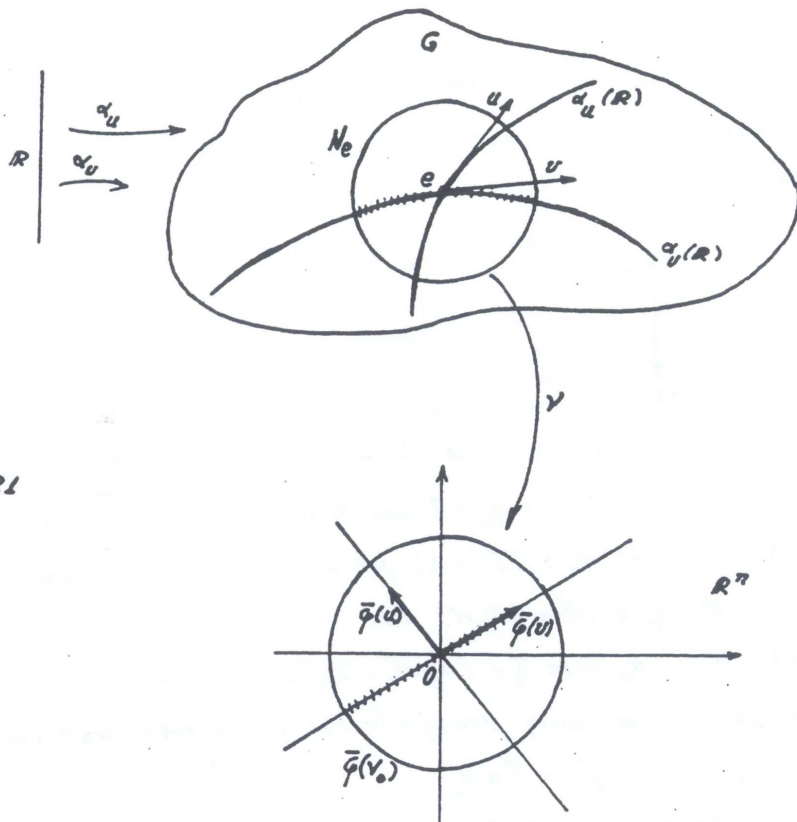
4.4.7 ΠΟΡΙΣΜΑ. Έστω $\alpha \in \text{Hom}(\mathbb{R}, G)$. Τότε το τμήμα της α , που περιέχεται στην περιοχή N_e [δηλ. το $\alpha(\mathbb{R}) \cap N_e$], απεικονίζεται μέσω της γ σε τμήμα ευθείας του \mathbb{R}^n , η οποία διέρχεται από το $0 \in \mathbb{R}^n$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτοντας $\alpha(0) = u$ έχουμε ότι $\alpha \equiv \alpha_u$. Τότε, για κάθε $t \in \mathbb{R}$, τέτοιω ώστε $\alpha_u(t) \in N_e$, θα είναι

$$\gamma(\alpha_u(t)) = (\bar{\varphi} \circ \exp^{-1})(\alpha_u(t)) = \bar{\varphi}(\exp^{-1}(\exp(t \cdot u))) = \bar{\varphi}(t \cdot u) = t \cdot \bar{\varphi}(u),$$

που αποδεικνύει και το πορίσμα. ●

Το συμπέρασμα του Θεώρηματος απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα.



Σκ. 21

4.4.10 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

(Α) Θεωρούμε το χάρτη (U, φ) που περιέχει το e [όπως ε'ολόκληρη αυτή την παράγραφο] και τον μακρομικρο χάρτη (N_e, ν) . Θα συμπίνωμε τις απεικονίσεις $\bar{\varphi} = \Psi$ και $\bar{\nu}$ (που είναι και οι δύο γραμμικοί ισομορφισμοί της μορφής $T_e G \rightarrow \mathbb{R}^n$).

Από τον ορισμό του ν έχουμε ότι $\nu \circ \exp = \bar{\varphi} =: \Psi$. Επομένως, παίρνοντας το διαφορικό στο 0 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} T_0 \Psi &= T_0 (\nu \circ \exp) = T_e \nu \circ T_0 \exp \\ [\text{βλ. αποδ. θεωρ. 4.4.5}'] &= T_e \nu \circ \Psi^{-1} \circ \bar{\Psi} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την Εφαρμογή 2.2.11 (β), η προηγούμενη σχέση μετασχηματίζεται στην

$$\overline{Id_{\mathbb{R}^n}}^{-1} \circ \bar{\Psi} = \overline{Id_{\mathbb{R}^n}}^{-1} \circ \bar{\nu} \circ \Psi^{-1} \circ \bar{\Psi}$$

απ' όπου βρίσκουμε ότι και

$$\bar{\nu} = \Psi = \bar{\varphi}.$$

Μια άμεση συνέπεια της προηγούμενης σχέσης είναι και η εξής: αν συμβολίσουμε με $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_e$ ($i=1, \dots, n$) τα βασικά διανύσματα του $T_e G$, ως προς τον χάρτη (U, φ) , και με $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_e \right\}$ τα βασικά διανύσματα του $T_e G$, ως προς

τον κανονικό χώρο (N_e, ν) , τότε

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_e = \bar{\nu}^{-1}(e_i) = \bar{\varphi}^{-1}(e_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_e \quad (i=1, \dots, n).$$

(B) Θεωρούμε δύο ομάδες Lie G και H και συμβολίζουμε με \exp_G και \exp_H τις αντίστοιχες εκθετικές απεικονίσεις. Αν $f: G \rightarrow H$ είναι μορφισμός ομάδων Lie, τότε το επόμενο διαγράμμα είναι μεταδετιμίο:

$$\begin{array}{ccc} T_e G & \xrightarrow{T_e f} & T_e H \\ \exp_G \downarrow & & \downarrow \exp_H \\ G & \xrightarrow{f} & H \end{array}$$

Πραγματικά, αν $v \in T_e$ είναι ζυγόν διάνυσμα, θέτουμε $T_e f(v) := u \in T_e H$. Επομένως, $(\exp_H \circ T_e f)(v) = \exp_H(u) = \gamma_u(1)$ όπου $\gamma_u \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}, H)$ με $\gamma_u(0) = e'$ (το ουδέτερο στοιχείο της H) και $\dot{\gamma}_u(0) = u$. Αν $\alpha_v \in \mathcal{H}(\mathbb{R}, G)$ με $\alpha(0) = e$ και $\dot{\alpha}(0) = v$, είδαμε στην Εφαρμογή 4.3.9(B) ότι $f \circ \alpha_v \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}, H)$ και

$$\dot{(f \circ \alpha_v)}(0) = T_e(f \circ \alpha_v)(0) = T_e f(\dot{\alpha}_v(0)) = T_e f(v) = u,$$

δηλ. η $f \circ \alpha$ είναι η μονοπαραμετρική υποομάδα των H , που αντιστοιχεί στο u , οπότε

$$\gamma_u = f \circ \alpha_v.$$

Συνεπώς, για οποιοδήποτε $v \in T_e G$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (\exp_H \circ T_e f)(v) &= \exp_H(u) = \gamma_u(1) = (f \circ \alpha_v)(1) = \\ &= f(\alpha_v(1)) = f(\exp_G(v)) = (f \circ \exp_G)(v), \end{aligned}$$

όπως αυριβώς ζητούσαμε.

(Γ) Έστω $\xi \in \mathcal{L}(G)$. Θα δείξουμε ότι ισχύει η σχέση

$$\boxed{\xi_x(f) = (f(x \cdot \exp(t \cdot \xi_e)))'(0)}$$

για οποιοδήποτε $x \in G$ και $f \in C^\infty(G, \mathbb{R})$. [Το θ° μέλος παριστάνει τη συνήθη παράγωγο της πραγματικής συνάρτησης $t \mapsto f(x \cdot \exp(t \cdot \xi_e))$].

Πραγματικά, επειδή το ξ είναι αριστερά αναλλοίωτο, έχουμε ότι

$$\xi_x(f) = (T_e L_x(\xi_e))(f) = \xi_e(f \circ L_x).$$

Αν θέσουμε $\xi_e = v$, τότε γνωρίζουμε ότι $v = \dot{\alpha}_v(0)$. Επομένως,

$$\xi_x(f) = (\dot{\alpha}_v(0))(f \circ L_x) = \left(T_e \alpha_v \left(\frac{d}{dt} \Big|_0 \right) \right) (f \circ L_x) =$$

$$\frac{d}{dt} \Big|_0 (f \circ L_x \circ \alpha_v) = (f \circ L_x \circ \alpha_v)'(0) \quad [\text{η συνήθης παράγωγος}]$$

Επειδή $\alpha_v(t) = \exp(tv)$, θα είναι και

$$(f \circ L_x \circ \alpha_v)(t) = f(L_x(\alpha_v(t))) = f(x \cdot \exp tv)$$

και τελικά

$$\xi_x(\varphi) = (\varphi \circ L_x \circ \alpha_v)'(0) = (\varphi(x \cdot \exp tv))'(0) = (\varphi(x \cdot \exp(t\xi_x)))'(0).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν G είναι αβελιανή ομάδα Lie, να δείξετε ότι $\exp(u+v) = \exp(u) \cdot \exp(v)$, για κάθε $u, v \in T_e G$.
2. Εξηγείστε γιατί η μαμπίλη $t \mapsto t \cdot v$ (όπου $v \in T_e G$ είναι σταθερό διάνυσμα) είναι διαφορίσιμη [βλ. τέλος σελ. 128].
3. Να δικαιολογήσετε γιατί ο κανονικός κάρτης (N_e, ν) είναι συμβατός με τους κάρτες της ομάδας Lie G (συνεπώς είναι κάρτης της διαφορικής δομής της).
4. Έστω (N_e, ν) ο κανονικός κάρτης της ομάδας Lie G . Αν $x \in G$, να δείξετε ότι το ζεύγος (N_x, ν_x) , όπου $N_x = L_x(N_e)$ και $\nu_x = \nu \circ L_x^{-1}$, είναι κάρτης της G , που περιέχει το x . Επίσης, αν γ είναι η ολοκληρωτική μαμπίλη ενός $\xi \in \mathfrak{L}(G)$ με $\gamma(0) = x$, να δείξετε ότι η $\nu_x(\gamma(\mathbb{R}) \cap N_x)$ είναι ευθεία του \mathbb{R}^n , που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

4.5 ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ

Σ' ολόκληρη την παράγραφο αυτή το G παριστά μία ομάδα Lie.

4.5.1 ΟΡΙΣΜΟΣ. Έστω M διαφορική πολ/τα. Θα πούμε ότι η G δρα επί της M (από δεξιά), αν υπάρχει μία διαφορίσιμη (C^∞) απεικόνιση (η οποία καλείται δράση)

$$\delta: M \times G \rightarrow M: (x, g) \mapsto \delta(x, g)$$

έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι επόμενες συνθήκες:

(Δ.1)
$$\delta(\delta(x, g), g') = \delta(x, g \cdot g') \quad ; \quad x \in M; g, g' \in G.$$

(Δ.2) Για κάθε $g \in G$, η απεικόνιση

$$\delta_g: M \rightarrow M: x \mapsto \delta_g(x) = \delta(x, g) \quad , \quad x \in M$$

είναι αμφιδιαφορίσιμη.

Συνήθως την τιμή $\delta(x, g)$ συμβολίζουμε (για διωνυμολυση) με $x \cdot g$, δηλ. θέτουμε $\delta(x, g) \equiv x \cdot g$, οπότε η (Δ.1) παίρνει τη μορφή: $(x \cdot g) \cdot g' = x \cdot (g \cdot g')$. Επίσης, συχνά, η απεικόνιση δ_g συμβολίζεται και με R_g και καλείται δεξιά μετατόπιση της M κατά g .

4.5.2 ΠΡΟΤΑΣΗ. Ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} R_e &= \delta_e = id_M \\ x \cdot e &= x \quad , \quad \forall x \in M \\ (R_g)^{-1} &= R_{g^{-1}} \quad , \quad \forall g \in G. \end{aligned}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω τυχόν $x \in M$. Αφού, κατά τη (Δ.2), η R_e είναι αμφιδιαφορίσιμη, θα υπάρχει $x' \in M$ έτσι ώστε $x = R_e(x')$. Άρα

$$R_e(x) = R_e(R_e(x')) = R_e(x' \cdot e) = (x' \cdot e) \cdot e = x' \cdot (e \cdot e) = x' \cdot e = R_e(x') = x,$$

η οποία αποδεικνύει την πρώτη σχέση.

Η δεύτερη σχέση είναι προφανής συνέπεια της πρώτης.

Τέλος, για κάθε $x \in M$, είναι

$$(R_g \circ R_{g^{-1}})(x) = R_g(x \cdot g^{-1}) = (x \cdot g^{-1}) \cdot g = x \cdot (g \cdot g^{-1}) = x \cdot e = x$$

δηλ.

(4.30)
$$R_g \circ R_{g^{-1}} = id_M$$

Ανάλογα βρίσκουμε ότι και

(4.31)
$$R_{g^{-1}} \circ R_g = id_M.$$

Η τρίτη σχέση προκύπτει απ'όπου από τις (4.30) και (4.31).

Θα δείξουμε τώρα ότι σε κάθε αριστερή αναλλοίωτο διαν. πεδίο ξ της G αντιστοιχεί, μέσω μιας δράσης, ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο της M .

Θεωρούμε τη μερική απεικόνιση

$$(4.32) \quad \delta_x: G \rightarrow M: g \mapsto \delta_x(g) = \delta(x, g) = x \cdot g,$$

όπου, φυσικά, το x είναι σταθεροποιημένο στοιχείο της M . Προφανώς η δ_x είναι C^∞ απεικόνιση, όπως φαίνεται και από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} G \ni g & \xrightarrow{C_x \times id_G} & (x, g) \in M \times G \\ & \searrow \delta_x & \downarrow \delta \\ & & x \cdot g \in M \end{array}$$

όπου C_x είναι η σταθερή απεικόνιση $G \ni g \mapsto x \in M$. Θεωρούμε και το διαφορίσιο της δ_x στο $e \in G$, δηλ. την απεικόνιση $T_e \delta_x: T_e G \rightarrow T_x M$. Επομένως, θεωρώντας τυχόν $\xi \in \mathcal{L}(G)$ μπορούμε να πάρουμε την $T_e \delta_x(\xi_e)$, οπότε θέτουμε

$$(4.33) \quad \xi^*(x) := T_e \delta_x(\xi_e)$$

Από την προηγούμενη σχέση είναι φανερό ότι το ξ^* είναι συνάρτηση του x και $\xi^*(x) \in T_x M$ [εφ' όσον έχουμε σταθεροποιήσει το x].

4.5.3 ΟΡΙΣΜΟΣ. Το διανυσματικό πεδίο ξ^* , που ορίζεται μέσω της (4.33) καλείται πεδίο Killing [ή θεμελιώδες πεδίο] της πάλτας M , το οποίο αντιστοιχεί στο $\xi \in \mathcal{L}(G)$.

4.5.4 ΘΕΩΡΗΜΑ. Το πεδίο Killing ξ^* είναι διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Χρησιμοποιώντας τον τύπο Leibniz για τη δ , έχουμε διαδοχικά τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \xi^*(x) &= T_e \delta_x(\xi_e) = O_x + T \delta_x(\xi_e) = [O_x = 0 \in T_x M] \\ &= T_x \delta_e(O_x) + T_e \delta_x(\xi_e) = T_{(x,e)} \delta(O_x, \xi_e) = \\ &= T \delta(O_x, \xi_e) = [T \delta \circ (\Omega, C)](x) \quad [\forall x \in M] \end{aligned}$$

όπου $\Omega: M \rightarrow TM: x \mapsto O_x$ είναι η μηδενική τομή και $C: M \rightarrow TG$ η σταθερή απεικόνιση $x \mapsto \xi_e$. Επομένως το ξ^* είναι διαφορίσιμο απεικόνιση εάν συνάδει διαφορίσιμων απεικονίσεων.

Ας προσδιορίσουμε και τις οδωληρωτικές μακρύνες του ξ^* . Ουμίζουμε ότι στο ξ αντιστοιχεί (μονοσήματα) μία μονοπαρμετρική υποομάδα $\alpha \in \text{Hom}(\mathbb{R}, G)$ με $\alpha(0) = e$

και $\alpha(0) = \xi_e$. Επιπλέον, $\exp(t \cdot \xi_e) = \alpha(t)$.

Με τους προηγούμενους συμβολισμούς μπορούμε να δείξουμε το

4.5.5 ΘΕΩΡΗΜΑ. Η ολοκληρωτική μακρύλη γ του ξ^* με αρχική συνθήκη x ($\gamma(0) = x$) είναι η μακρύλη

$$\gamma(t) = x \cdot \alpha(t) = x \cdot \exp(t \cdot \xi_e), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, το \mathfrak{g}^* είναι πλήρες διανυσματικό πεδίο

Αποδειξη. Η μακρύλη γ έχει αρχική συνθήκη x , αφού (βλ. και Πρόταση 4.5.2)

$$\gamma(0) = x \cdot \alpha(0) = x \cdot e = x.$$

Επιπλέον είναι διαφοροίσιμη επειδή μπορεί να γραφτεί με τη μορφή (συνθεση C^∞ -απεικονίσεων)

$$\gamma(t) = (\delta_x \circ \alpha)(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Τέλος, είναι και ολοκληρωτική μακρύλη του ξ^* :

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= T_t \dot{\gamma} \left(\frac{d}{dt} / t \right) = T_t (\delta_x \circ \alpha) \left(\frac{d}{dt} / t \right) = T_{\alpha(t)} \delta_x \left(T_t \alpha \left(\frac{d}{dt} / t \right) \right) = T_{\alpha(t)} \delta_x (\dot{\alpha}(t)) = \\ &= T_{\alpha(t)} \delta_x (\xi(\alpha(t))) = T_{\alpha(t)} \delta_x (T_e L_{\alpha(t)} (\xi_e)) = T_e (\delta_x \circ L_{\alpha(t)}) (\xi_e). \end{aligned}$$

Επειδή όμως (μαθώς διαπιστώνεται αμέσως) $\delta_x \circ L_{\alpha(t)} = \delta_{x \cdot \alpha(t)} = \delta_{\gamma(t)}$, οι προηγούμενες σχέσεις μετασχηματίζονται στην [βλ. και εκένη (4.33)]

$$\dot{\gamma}(t) = T_e (\delta_x \circ L_{\alpha(t)}) (\xi_e) = T_e \delta_{\gamma(t)} (\xi_e) = \mathfrak{g}^*(\dot{\gamma}(t)),$$

η οποία αποδεικνύει πλήρως το θεώρημα. ●

4.5.5. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

(Α) Κάθε ομάδα Lie G δρα στον εαυτό της με τη συνήθη πράξη του πολλαπλασιασμού. Πραγματικά αν πάρουμε $\delta = \gamma: G \times G \rightarrow G$, τότε η δ είναι μία διαφορίσιμη απεικόνιση η οποία ικανοποιεί την (δ.1), που τώρα δεν ευφράζει τίποτε άλλο παρά την προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού. Επίσης η (δ.2) ικανοποιείται, αφού η R_g της δράσης συμπίπτει με τη μετατόπιση R_g της ομάδας G .

(Β) Στο προηγούμενο παράδειγμα ας υπολογίσουμε τα πεδία Killing. Έστω λοιπόν $\xi \in \mathfrak{L}(G)$. Το αντίστοιχο πεδίο Killing θα δίνεται τώρα από την

$$\mathfrak{g}^*(x) = T_e \delta_x (\xi_e) = T_e L_x (\xi_e)$$

(L_x η αριστερή μετατόπιση της G). Επειδή όμως το ξ είναι αριστερά αναλλοίωτο θα είναι

$$\mathfrak{g}^*(x) = T_e L_x (\xi_e) = \xi(x)$$

δηλ., τελικά,

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να ορίσετε την έννοια της δράσης από αριστερά $\delta: G \times M \rightarrow M$ και να δείξετε γι' αυτήν τα ανάλογα συμπεράσματα αυτής της παραγράφου.

2. Να δείξετε ότι μια οδμή ροή $\odot: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ ορίζει μία δράση από τα αριστερά της προσθετικής ομάδας \mathbb{R} επί της ποσότητας M . Προσδιορίστε το πεδίο Killing ξ^* ενός $\xi \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$.

[Υπόδειξη: Δείξετε ότι, θεωρώντας το \mathbb{R} σαν προσθετική ομάδα Lie, ένα $\xi \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ είναι αριστερά αναλλοίωτο αν έχει τη μορφή $\xi = \lambda \frac{d}{dt}$, όπου λ είναι σταθερός πραγματικός αριθμός].

3. Αν $\delta: M \times G \rightarrow M$ είναι διαφορίσιμη δράση, τότε και το διαφορικό της $T\delta: T(M \times G) \cong TM \times TG \rightarrow TM$ ορίζει μία διαφορίσιμη δράση της ομάδας TG [βλ. παράδειγμα 4.1.8(β)] επί της TM .

4. Δείξτε ότι η γενική γραμμική ομάδα $GL(n, \mathbb{R})$ ορίζει μία διαφορίσιμη δράση επί του \mathbb{R}^n .

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1 [Για το κεφάλαιο 1]

ΣΥΝΤΟΜΗ ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Ⓐ Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ απεικόνιση, με U ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Λέμε ότι η f παραγωγίζεται (ή διαφορίζεται) στο σημείο $a \in U$, αν υπάρχει μία γραμμική απεικόνιση $Df(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ [δηλ. $Df(a) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$] έτσι ώστε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - [Df(a)](h)\|}{\|h\|} = 0$$

Η γραμμική απεικόνιση $Df(a)$ λέγεται παραγωγός (ή διαφορικός) της f στο σημείο a .

Στο παραπάνω πηλίκο, η ποσότητα του αριθμητή είναι η ποσότητα του \mathbb{R}^m , ενώ αυτή του παρονομαστή είναι η ποσότητα του \mathbb{R}^n . Επίσης, το διάνυσμα $h \in \mathbb{R}^n$ είναι τέτοιο ώστε $h \neq 0$ και $a+h \in U$.

Παρατηρούμε ακόμη ότι μπορεί να είναι και $U = \mathbb{R}^n$. Τέτοιια, η παραγωγική ε' είναι σημείο a μπορεί να οριστεί αν το σημείο a ανήκει σε κάποιο ανοιχτό υποσύνολο (του \mathbb{R}^n).

Άμεσα συμπεραίνουμε τα εξής:

- 1. Αν υπάρχει η $Df(a)$, τότε αυτή είναι μονοσήμαντα ορισμένη.
- 2. Αν υπάρχει η $Df(a)$, τότε η f είναι συνεχής στο $a \in \mathbb{R}^n$.

Ⓑ Έστω ότι μια απεικόνιση $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ παραγωγίζεται (διαφορίζεται) ολικά στο U , δηλ. υπάρχει η παραγωγός $Df(a) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, για κάθε $a \in U$, όπως πιο πάνω. Τότε ορίζεται η απεικόνιση

$$Df: U \ni a \mapsto Df(a) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),$$

που λέγεται (ολικό) διαφορικός ή (ολική) παραγωγός απεικόνιση της f .

Θα λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη τάξης C^1 [ή, απλούστερα: η f είναι απεικόνιση (τάξης) C^1] αν η Df είναι συνεχής. Αυτό, φυσικά, έχει έννοια αφού ο χώρος $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ είναι ένας γραμμικός χώρος (και μάλιστα $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong M(n \times m) \cong \mathbb{R}^{n \cdot m}$).

Επειδή η Df είναι απεικόνιση της ίδιας μορφής όπως η f (δηλ. μεταξύ γραμμικών χώρων), μπορούμε να δούμε κατά πόσον υπάρχει η παραγωγός της Df στο a ,

δηλ. η $D(Df)(\alpha)$ ή, με απλούστερο συμβολισμό, η $D^2f(\alpha)$ [η δεύτερη παράγωγος της f στο α]. Μια τέτοια απεικόνιση, αν υπάρχει,

$$D^2f(\alpha) \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \cong L_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m). \text{ Αν υπάρχει η } D^2f(\alpha),$$

για κάθε $\alpha \in U$, τότε ορίζεται το διαφορίσιμο (ή παράγωγος) δεύτερης τάξης της f , δηλ. η $D^2f: U \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Ιδιαίτερα, αν η D^2f είναι και συνεπής, τότε η f είναι μία απεικόνιση διαφορίσιμη τάξης C^2 .

Με ανάλογο τρόπο ορίζεται η r -τάξης παράγωγος της f στο α , δηλ. η

$$D^r f(\alpha) \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \dots))) \cong L_r(\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

και το διαφορίσιμο $D^r f: U \rightarrow L_r(\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Αν η $D^r f$ είναι συνεπής, τότε η f λέγεται διαφορίσιμη τάξης C^r . Ιδιαίτερα, αν η f είναι C^r , για κάθε $r=1, 2, \dots$ τότε λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη τάξης C^∞ .

Μερικά βασικά συμπεράσματα είναι τα εξής:

-1. Αν η $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι σταθερή ($f(u) = C, u \in U$), τότε $Df(\alpha) = 0, \forall \alpha \in U$.

Αντίστροφα, αν για μία $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, είναι $Df(\alpha) = 0 \forall \alpha \in U$, τότε η f είναι σταθερή σε κάθε συνεκτιμή συνιστώσα του U . Ιδιαίτερα, αν το U είναι συνεκτιμώ σύνολο, τότε $f = C$ (σταθερή, ολόκληρο το U).

-2. Αν η f είναι γραμμική απεικόνιση, δηλ. $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, τότε, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^n$, είναι $Df(\alpha) = f$.

-3. Αν $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και καθίσουμε $f_i := p_i \circ f$, όπου $p_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η i -πρόβολη [δηλ. $p_i(x_1, \dots, x_m) = x_i$], τότε $Df(\alpha) = (Df_1(\alpha), \dots, Df_m(\alpha))$.

-4. Για μία f όπως πριν, η $D^r f(\alpha)$ (αν υπάρχει) είναι συμμετρική. Δηλ., επειδή $D^r f(\alpha) \in L_r(\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, τότε θα είναι, για κάθε $(h_1, \dots, h_r) \in \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$: $[D^r f(\alpha)](h_1, \dots, h_r) = [D^r f(\alpha)](h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(r)})$, για οποιαδήποτε μετάθεση σ των δεικτών.

© Θυμίζουμε δύο βασικά θεωρήματα.

1. ΘΕΩΡΗΜΑ [της αντίστροφης συνάρτησης]: Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό) διαφορίσιμη απεικόνιση τάξης C^r ($r \geq 1$). Αν η παράγωγος $Df(\alpha_0)$ της f στο $\alpha_0 \in U$ είναι γραμμικώς ισομορφισμός (δηλ. 1-1 και επί και γραμμική), τότε υπάρχει (ανοικτή) περιοχή U_0 του α_0 με $\alpha_0 \in U_0 \subset U$ και (ανοικτή) περιοχή V_0 του $f(\alpha_0)$, έτσι ώστε να ισχύουν τα εξής:

i) Ο περιορισμός της f επί του U_0 είναι απεικόνιση 1-1 (αρα η $f|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ είναι 1-1 και επί απεικόνιση)

ii) Η αντίστροφη απεικόνιση της $f|_{U_0}$ (ας τη συμβολίσουμε με $g : V_0 \rightarrow U_0$) είναι διαφορίσιμη επί της V_0 [αρα η $f|_{U_0}$ είναι μία αμφιδιαφορίσιμη].

iii) Για κάθε $a \in U_0$, ισχύει η σχέση

$$Dg(b) = [Df(a)]^{-1}, \text{ αν } b = f(a).$$

2. ΘΕΩΡΗΜΑ [της σύνδεσης υπέρθεσης]. Υποθέτουμε ότι $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και $g : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις στα σημεία $a \in U$ και $f(a) \in V$ με $f(U) \subset V$. Τότε και η (σύνδεση) $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^l$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση στο a και ισχύει η σχέση

$$[D(g \circ f)](a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

ⓓ Ας υποθέσουμε ότι $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, όπου I ένα διάστημα του \mathbb{R} (ανοιχτό) ή $I = \mathbb{R}$. Σύμφωνα με ό,τι είπαμε στο ⓐ, αν η f παραγωγίζεται σε ένα $t_0 \in I$, θα υπάρχει η γραμμική απεικόνιση παράγωγος $Df(t_0) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Αν το άλλο μέρος, σύμφωνα με ό,τι μάθαίμε κανείς στον απειροστικό λογισμό, ορίζεται και η συνήθης παράγωγος $f'(t_0) \in \mathbb{R}$ με $f'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$. Συγκρίνοντας τους δύο ορισμούς της παράγωγου, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι $f'(t_0) = [Df(t_0)](1)$ και, κατά συνέπεια, $[Df(t_0)](t) = t \cdot f'(t_0)$, για κάθε $t \in I$. Παρόμοια, αν $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, τότε $f'(t_0) = (f'_1(t_0), \dots, f'_n(t_0))$.

ⓔ Εστω τώρα μια $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό). Λέμε ότι η f παραγωγίζεται κατά την i -μεταβλητή στο $a \in U$ ή ότι υπάρχει η i -μερική παράγωγος της f στο $a \in U$, αν υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης $t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$ στο a_i όπου $a = (a_1, \dots, a_n)$. Σύμφωνα με το ⓓ, η προηγούμενη παράγωγος μπορεί να ερμηνευτεί είτε σαν ένας αριθμός, που συμβολίζεται με $\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_a$, είτε σαν μία γραμμική απεικόνιση, που συμβολίζεται με $D_i f(a)$. Η σχέση των δύο παραγωγών είναι: $\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_a = [D_i f(a)](1)$. Αν τώρα υποθέσουμε ότι η f παραγωγίζεται στο a , δηλ. υπάρχει η $Df(a) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, τότε, μεταξύ των πρώτων παραγωγών, ισχύει η

$$(*) \quad [D_i f(a)](1) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_a = [Df(a)](e_i), \quad i=1, \dots, n,$$

όπου $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ η κανονική βάση του \mathbb{R}^n .

ⓐ Υποθέτουμε ότι η $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό) είναι διαφορίσιμη στο a , δηλ. υπάρχει η $Df(a) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Συνδυάζοντας το ⓑ [συμπέρασμα 3] με το ⓔ, διαπιστώνουμε ότι \exists όλες οι μερικές παραγώγοι $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Big|_a$ ($i=1, \dots, n, j=1, \dots, m$). Ιδιαίτερα, αν η f είναι C^1 , τότε και οι προηγούμενες μερικές παραγώγοι είναι συνεχείς. Αντίστροφα, η ύπαρξη των μερικών παραγώγων δεν συνεπάγεται την ύπαρξη της $Df(a)$. Αν όμως υπάρχουν οι μερικές παραγώγοι και είναι συνεχείς, τότε υπάρχει η $Df(a)$ [και η f είναι τάξης C^1].

Επειδή κάθε f_j είναι απεικόνιση n μεταβλητών [$f_j: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, βλ. ⓑ συμπ.3], αν η f διαφορίζεται παντού, θα ορίζεται και η απεικόνιση

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} : U \ni a \mapsto \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Big|_a \in \mathbb{R},$$

όποτε μπορεί κανείς να διερωτηθεί για την k -μερική παράγωγο της εσθρευταίας σε οποιοδήποτε σημείο $a \in U$, δηλ. για την $\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \Big|_a = \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial x_i} \Big|_a$, $k=1, \dots, n$.

Αν η f είναι διαφορίσιμη τάξης 2 (αντ. διαφορίσιμη τάξης C^2), τότε υπάρχουν όλες οι μερικές παραγώγοι 2-τάξης, δηλ. όλες οι $\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial x_i} \Big|_a$ [$i, k=1, \dots, n, j=1, \dots, m$], για κάθε $a \in U$ (αντιστ. υπάρχουν όλες οι μερικές παραγώγοι τάξης 2 και είναι συνεχείς). Αντίστροφα, αν οι 2-τάξης μερικές παραγώγοι υπάρχουν και είναι συνεχείς, τότε και η f είναι διαφορίσιμη τάξης C^2 .

Ανάλογα έχουμε ως μερικές παραγώγους τάξης r , για κάθε $r=1, 2, \dots$. Ιδιαίτερα, η f είναι διαφορίσιμη τάξης C^∞ [βλ. και ⓑ] τότε και μόνον τότε αν υπάρχουν οι μερικές παραγώγοι κάθε τάξης και είναι συνεχείς.

ⓓ Έστω $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ διαφορίσιμη απεικόνιση στο $a \in U$, δηλ. υπάρχει η $Df(a) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Συνεπώς, υπάρχουν και όλες οι $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Big|_a$ ($i=1, \dots, n, j=1, \dots, m$) και ισχύει η σχέση

(*) του Β (για κάθε i και j). δηλ. έχουμε ότι

$$[Df(a)](e_1) = (Df_1(a))(e_1), \dots, (Df_m(a))(e_1) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_a, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \Big|_a \right)$$

$$[Df(a)](e_n) = (Df_1(a))(e_n), \dots, (Df_m(a))(e_n) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Big|_a, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \Big|_a \right)$$

δηλ. καταλήγουμε στο σχηματισμό του πίνακα

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_a, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \Big|_a \\ \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Big|_a, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \Big|_a \end{pmatrix}.$$

Ο αντίστροφος του προηγούμενου, δηλ. ο πίνακας

$$J_a^f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} / a, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n} / a \\ \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} / a, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_n} / a \end{pmatrix}$$

ονομάζεται Ιακωβιανός πίνακας (ή πίνακας Jacobi) της f στο $a \in U$.

Όπως βλέπαμε παλαιά από την προηγούμενη ματρίαι, ο $J_a f$ είναι ακριβώς ο πίνακας που αντιστοιχεί σε μία γραμμική απεικόνιση (μέσω των φυσικών βάσεων) και αντίστροφα.

Στις περιπτώσεις που έχουμε υπολογίσαμε τον Ιακωβιανό πίνακα και αναγόμαστε μαζί-πιν στη γραμμική απεικόνιση $Df^p(a)$, μέσω της σχέσης

$$(*) \quad [Df^p(a)](h_1, \dots, h_n) = (J_a f) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix},$$

για κάθε $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$.

⊙ Έστω $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ διαφορίσιμη συνάρτηση στο $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, δηλ. υπάρχει η $Df^p(a, b) \in L(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ [επίσης θα μπορούσε η f να ορίζεται σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, που περιέχει το (a, b) . Όπως π.χ. ένα σύνολο της μορφής $U \times V$, όπου $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό ($a \in U$) και $V \subset \mathbb{R}^m$ ανοιχτό ($b \in V$)]. Μπορούμε να δούμε ότι (μέσω των μερικών παραγώγων) ισχύει η σχέση [ΤΥΠΟΣ ΛΕΙΒΝΙΖ]:

$$(*) \quad [Df^p(a, b)](h, k) = [Df_a^p(b)](k) + [Df_b^p(a)](h), \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

όπου f_a και f_b είναι οι (μερικές) απεικονίσεις

$$f_a: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l: u \mapsto f_a(u) := f(a, u)$$

$$f_b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l: v \mapsto f_b(v) := f(v, b)$$

Σαν εφαρμογή της (*) ας πάρουμε την περίπτωση μιας $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ διγραμμικής. Παρατηρούμε ότι οι απεικονίσεις f_a και f_b είναι γραμμικές, άρα (βλ. ⊙ συμπ. 2) $Df_a^p(b) = f_a$ και $Df_b^p(a) = f_b$, οπότε η (*) παίρνει τώρα τη μορφή

$$(**) \quad [Df^p(a, b)](h, k) = f_a(k) + f_b(h) = f(a, k) + f(h, b)$$

Ⓢ ΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η απεικόνιση με $f(x, y) = \sin x$. Να υπολογιστεί η παράγωγος $Df^p(a, b) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, σε ένα $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

α' ερώτος [Με τον πίνακα Jacobi και τη μέθοδο του ⊙]:

Παρατηρούμε ότι υπάρχει αριθμός για συνιστώσα $f_1 = f$, άρα $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a,b) = \cos \alpha$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a,b) = 0$. Άρα $J_a f = (\cos \alpha, 0)$ και

$$[Df(a,b)](h,k) = (\cos \alpha, 0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = h \cdot \cos \alpha$$

β' τρόπος [Με τη μέθοδο του ②]:

Εδώ είναι $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_a(y) = f(a,y) = \sin \alpha$ (σταθερά)

$f_b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_b(x) = f(x,b) = \sin x$

οπότε [βλ. ①]

$$[Df_a(b)](k) = [Df_a(b)](k \cdot 1) = k \cdot [Df_a(b)](1) = k \cdot f'_a(b) = k \cdot (\sin \alpha)'_b = 0$$

$$[Df_b(a)](h) = [Df_b(a)](h \cdot 1) = h \cdot [Df_b(a)](1) = h \cdot f'_b(a) = h \cdot (\sin x)'_a = h \cdot \cos \alpha$$

Επομένως, $[Df(a,b)](h,k) = h \cdot \cos \alpha$, όπως και πριν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να διατυπώσετε το θεώρημα της σφαιρικής συνάρτησης και το θεώρημα της αντιστροφής συνάρτησης με τη βοήθεια τριγωνικών συναρτήσεων και οριζοντίων.

* 2. Έστω $F: L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ η απεικόνιση που ορίζεται με τη σχέση

$$F(f, u) := f(u)$$

για κάθε $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ και $u \in \mathbb{R}^n$. Να δείξετε ότι η παραγωγός $DF(f, u)$ της F στο σημείο $(f, u) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n$ δίνεται με τη σχέση

$$[DF(f, u)](g, v) = f(v) + g(u),$$

για κάθε $(g, v) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^n$.

* 3. Έστω $f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ (U, V ανοικτά) μία αμφιδιαφορίσιμη [δηλ. η f είναι απεικόνιση 1-1, επί και τέτοια ώστε να διαφορίζεται αυτή και η f^{-1}]. Να δείξετε ότι η $Df(a)$ είναι γραμμικός ισομορφισμός ($\forall a \in U$), όπου $m = n$ και

$$Df^{-1}(f(a)) = [Df(a)]^{-1}$$

ΛΥΣΕΙΣ
Μερισμών αδιήθεων

Άσκηση 9, σελ. 38.

Άρκει να δείξουμε ότι η f είναι 1-1, επί και τοπ. αμφιδιαφορίσιμη:

f 1-1: Αν $(x,y), (z,w) \in D^2$ με $f(x,y) = f(z,w)$, τότε

$$(1) \quad \frac{x}{1-x^2-y^2} = \frac{z}{1-z^2-w^2} \quad \text{και} \quad \frac{y}{1-x^2-y^2} = \frac{w}{1-z^2-w^2}$$

Τετραγωνίζουμε και προσθέτουμε κατά μέλη:

$$(2) \quad \frac{x^2+y^2}{[1-(x^2+y^2)]^2} = \frac{z^2+w^2}{[1-(z^2+w^2)]^2}$$

Απαλοοίγουμε παρονομαστές, μεταφέρουμε στο α' μέλος, παραγοντοποιούμε και έχουμε:

$$[(x^2+y^2)-(z^2+w^2)] \cdot [(x^2+y^2)(z^2+w^2)-1] = 0 \Rightarrow$$

$$x^2+y^2 = z^2+w^2 \quad \text{ή} \quad (x^2+y^2)(z^2+w^2) = 1$$

Επειδή $(x,y), (z,w) \in D^2 \Rightarrow x^2+y^2 < 1$ και $z^2+w^2 < 1$, η δεύτερη λύση απορρίπτεται. Άρα στο (1) έπουμε παντού ίσους παρονομαστές $\Rightarrow x=z, y=w$.

f επί: Εστω $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Ζητάμε $(x,y) \in D^2 : f(x,y) = (a,b) \Rightarrow$

$$\frac{x^2+y^2}{[1-(x^2+y^2)]^2} = a^2+b^2. \quad \text{Θέτουμε } x^2+y^2 = \lambda \text{ και υποκαθίζουμε στην}$$

$$(a^2+b^2)\lambda^2 - [2(a^2+b^2)+1]\lambda + (a^2+b^2) = 0.$$

Αν $a^2+b^2 = 0 \Rightarrow \lambda = x^2+y^2 = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$.

Αν $a^2+b^2 \neq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2(a^2+b^2)+1 \pm \sqrt{1+4a^2+4b^2}}{2(a^2+b^2)}$.

Επειδή πρέπει $0 \leq \lambda = x^2+y^2 < 1$, απορρίπτεται η $\frac{2(a^2+b^2)+1 + \sqrt{1+4a^2+4b^2}}{2(a^2+b^2)}$ (είναι > 1). Η άλλη είναι δευτή. Άρα

$$x = a(1-\lambda) = a \frac{-1 + \sqrt{1+4a^2+4b^2}}{2(a^2+b^2)} = \frac{2a}{1 + \sqrt{1+4a^2+4b^2}},$$

$$y = b(1-\lambda) = b \frac{-1 + \sqrt{1+4a^2+4b^2}}{2(a^2+b^2)} = \frac{2b}{1 + \sqrt{1+4a^2+4b^2}}.$$

Είναι προφανές ότι η λύση είναι δευτή, δηλ. $(x,y) \in D^2$.

f τοπ. αμφιδιαφορίσιμη: $f = (f_1, f_2)$, όπου $f_1(x,y) = \frac{x}{1-x^2-y^2}$, $f_2(x,y) = \frac{y}{1-x^2-y^2}$.

Βρίσκουμε τον πίνακα Jacobi $J_{(x,y)} f$ σε ένα $(x,y) \in D^2$, και μετά την ορίζουδά του:

$$J_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \Big|_x & \frac{\partial f_1}{\partial y} \Big|_y \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \Big|_x & \frac{\partial f_2}{\partial y} \Big|_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+2x^2}{(1-x^2-y^2)^2} & \frac{2xy}{(1-x^2-y^2)^2} \\ \frac{2xy}{(1-x^2-y^2)^2} & \frac{1+2y^2}{(1-x^2-y^2)^2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$|J_{(x,y)} f| = \frac{1}{(1-x^2-y^2)^4} \begin{vmatrix} 1+2x^2 & 2xy \\ 2xy & 1+2y^2 \end{vmatrix} = \frac{1+2x^2+2y^2}{(1-x^2-y^2)^4} \neq 0.$$

Άρα, $\forall (x,y) \in D^2$, ο $J_{(x,y)} f$ αντιστρέφεται $\Rightarrow \forall (x,y) \in D^2$,
 $Df(x,y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ισομορφισμός γραμμ. χώρων $\Rightarrow f$ τοπική αμφιδιαφορίση
 σε κάθε $(x,y) \in D^2$ (από το θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης).

Άσκηση 12, σελ. 39.

(1) Έστω $(x_0, y_0, z_0) \in S^2 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$. Έστω $x_0 \neq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x_0 > 0$ ή $x_0 < 0 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0) \in U_x^+$ ή $(x_0, y_0, z_0) \in U_x^-$. Ας υποθέ-
 σουμε ότι $(x_0, y_0, z_0) \in U_x^+$. Θεωρούμε τους χώρους (U_x^+, φ_x^+) της S^2
 και (U_x, φ_x) της $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Είναι $(x_0, y_0, z_0) \in U_x^+$ και $\pi(U_x^+) =$
 $= \{[(x,y,z)]: (x,y,z) \in U_x^+\} = \{[(x,y,z)]: (x,y,z) \in S^2 \text{ με } x > 0\} \subset$
 $\subset \{[(x,y,z)]: (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ με } x \neq 0\} = U_x$. Δηλ. έχει έννοια η
 τοπ. παράσταση

$$\varphi_x \circ \pi \circ (\varphi_x^+)^{-1}: \varphi_x^+(U_x^+) = D^2 \longrightarrow \varphi_x(U_x)$$

(όπου $D^2 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2: a^2 + b^2 < 1\}$). Αν $(a,b) \in D^2$, τότε:

$$\begin{aligned} \varphi_x \circ \pi \circ (\varphi_x^+)^{-1}(a,b) &= \varphi_x \circ \pi(\sqrt{1-a^2-b^2}, a, b) = \\ &= \varphi_x([(\sqrt{1-a^2-b^2}, a, b)]) = \left(\frac{a}{\sqrt{1-a^2-b^2}}, \frac{b}{\sqrt{1-a^2-b^2}} \right), \end{aligned}$$

δηλ. η $\varphi_x \circ \pi \circ (\varphi_x^+)^{-1}$ είναι διαφορίσιμη στο D^2 , άρα στο $(y_0, z_0) =$
 $= \varphi_x^+(x_0, y_0, z_0) \in D^2$. Ανάλογα γίνεται η απόδειξη στις άλλες περιπτώσεις
 (αν $x_0 < 0$ ή αν $y_0 \neq 0$ ή $z_0 \neq 0$).

(2) Η π δεν είναι αμφιδιαφορίση, γιατί δεν είναι 1-1: Πράγματι, αν
 $(x,y,z) \in S^2$ τότε $(-x,-y,-z) \in S^2$ και $\pi(x,y,z) = \pi(-x,-y,-z)$ διότι
 $(-x,-y,-z) = (-1)(x,y,z) \Rightarrow [(x,y,z)] = [(-x,-y,-z)]$.

Άσκηση 20, σελ. 40.

(1). Θα δείξει ότι η f είναι 1-1 και τοπική αμφιδιαφορίση, οπότε
 η $f: U \rightarrow f(U)$ είναι αμφιδιαφορίση, γιατί είναι και επί.

f 1-1: Αν $(\tau, u, v), (s, \alpha, \gamma) \in U$ με $f(\tau, u, v) = f(s, \alpha, \gamma)$, τότε:

(i) $\tau \cos u \cos v = s \cos \alpha \cos \gamma$, (ii) $\tau \sin u \cos v = s \sin \alpha \cos \gamma$, (iii) $\tau \sin v = s \sin \gamma$.

Τετραγωνίζοντας & προσθέτοντας τας (i), (ii) $\Rightarrow r^2 \cos^2 v = s^2 \cos^2 \gamma$ (iv).

Τετραγωνίζοντας την (iii) και προσθέτοντας στην (iv) $\Rightarrow r^2 = s^2 \Rightarrow r = s$,

αφού $r, s \in (0, 1)$. Οπότε (iii) $\Rightarrow \sin v = \sin \gamma \Rightarrow v = \gamma$, αφού $v, \gamma \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

Επίσης $\cos v = \cos \gamma \neq 0$, άρα (i), (ii) $\Rightarrow \cos u = \cos x$, $\sin u = \sin x \Rightarrow u = x$.

f τοπ. αμφιδιαδρόση: Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα του Jacobi

$J_{(x,y,z)}$ f σε ένα $(x, y, z) \in U$:

$$|J_{(x,y,z)} f| = \begin{vmatrix} \cos u \cos v & -r \sin u \cos v & -r \cos u \sin v \\ \sin u \cos v & r \cos u \cos v & -r \sin u \sin v \\ \sin v & 0 & r \cos v \end{vmatrix} =$$

$$= (r^2 \sin^2 v \sin^2 u \cos v + r^2 \sin^2 v \cos^2 u \cos v) + (r^2 \cos^3 v \cos^2 u + r^2 \cos^3 v \sin^2 u) =$$

$$= r^2 \sin^2 v \cos v + r^2 \cos^3 v = r^2 \cos v > 0, \text{ (αφού } v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$$

Επομένως έχουμε ότι $Df(x, y, z): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ γραμμ. ισομορφισμός $\Rightarrow f$ τοπ. αμφιδιαδρόση στο (x, y, z) .

(2) Παρατηρούμε ότι $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2: f(u, v) \in S^2$, αφού

$$(\cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u \sin^2 v) + \cos^2 v = \sin^2 v + \cos^2 v = 1,$$

δηλ. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$.

Εστω $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. Τότε $v_0 \neq 2k\pi \forall k \in \mathbb{Z}$ ή $v_0 = 2k\pi$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$.

Αν $v_0 \neq 2k\pi \Rightarrow (u_0, v_0) \in U_0 := \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{2k\pi: k \in \mathbb{Z}\})$ ανοικτό $\subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, και

$\cos v_0 \neq 1 \Rightarrow f(u, v) \neq (0, 0, 1) = N \in S^2 \Rightarrow f(u, v) \in U_N, \forall (u, v) \in U_0$. Θεωρώ τους χάρτες

(U_0, id_{U_0}) του \mathbb{R}^2 και (U_N, φ_N) του S^2 . Τότε έχει έννοια η τοπ. παράσταση

$$\varphi_N \circ f \circ id_{U_0}^{-1}: id_{U_0}(U_0) = U_0 \rightarrow \varphi_N(U_N) = \mathbb{R}^2.$$

Για $(u, v) \in U_0$, είναι:

$$\begin{aligned} \varphi_N \circ f \circ id_{U_0}^{-1}(u, v) &= \varphi_N(f(u, v)) = \varphi_N(\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v) = \\ &= \left(\frac{\sin u \sin v}{1 - \cos u \sin v}, \frac{\cos v}{1 - \cos u \sin v} \right), \end{aligned}$$

δηλ. είναι C^∞ -απεικόνιση σε κάθε $(u, v) \in U_0$, άρα και στο (u_0, v_0) .

Αν $v_0 = 2k\pi$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (u_0, v_0) \in U'_0 := \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{2k\pi + \pi: k \in \mathbb{Z}\})$

και η διαφορισιμότητα της f αποδεικνύεται με χρήση των χαρτών

$(U'_0, id_{U'_0})$ της \mathbb{R}^2 και (U_S, φ_S) της S^2 .

Άσκηση 21, βελ. 40.

Θεωρούμε την απεικόνιση $\pi: S^2 \rightarrow P_2(\mathbb{R}): (x, y, z) \mapsto [(x, y, z)]$. Δείξαμε (Άσκ. 11, βελ. 1.30) ότι η π είναι \mathcal{C}^∞ , άρα είναι συνεχής. Είναι και επί: $[(x, y, z)] \in P_2(\mathbb{R}) \Rightarrow (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x, y, z) \in [(x, y, z)]$, και, προφανώς, $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x, y, z) \in S^2$. Άρα $P_2(\mathbb{R}) = \pi(S^2)$, δηλ. $P_2(\mathbb{R})$ είναι εικόνα του συνεκτικού και συμπαγούς S^2 μέσω της συνεπούς π , επομένως είναι συνεκτικό και συμπαγές.

Άσκηση 1, βελ. 51

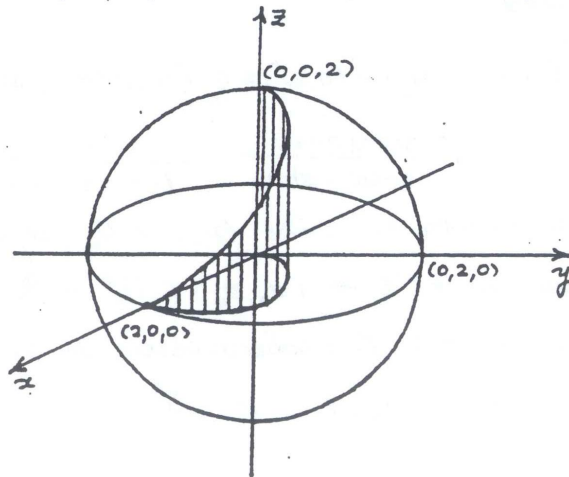
(1) $4\cos^4 t + \sin^2 2t + 4\sin^2 t = 4(\cos^4 t + \cos^2 t \sin^2 t + \sin^2 t) = 4(\cos^4 t + \sin^2 t(1 + \cos^2 t)) = 4(\cos^4 t + (1 - \cos^2 t)(1 + \cos^2 t)) = 4(\cos^4 t + 1 - \cos^4 t) = 4$, δηλ. η εικόνα της f περιέχεται στην επιφάνεια της σφαίρας με κέντρο $(0, 0, 0)$ και ακτίνα 2.

(2) Επειδή $2\cos^2 t > 0$ για κάθε $t \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow f(t) \in U_x^+, \forall t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Θεωρούμε τους χάρτες $((0, \frac{\pi}{2}), id)$ του $(0, \frac{\pi}{2})$ και (U_x^+, φ_x^+) του S^2 . Είναι $f((0, \frac{\pi}{2})) \subset U_x^+$ και η τοπ. παράσταση

$$\varphi_x^+ \circ f \circ id^{-1}: id((0, \frac{\pi}{2})) \rightarrow \varphi_x^+(U_x^+): t \mapsto \varphi_x^+(f(t)) = (\sin 2t, 2\sin t)$$

είναι \mathcal{C}^∞ -απεικόνιση. Δηλ. η f είναι \mathcal{C}^∞ -καμπύλη.

(3) Ο κύλινδρος είναι το σύνολο $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x-1)^2 + y^2 = 1\}$. Για κάθε $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ είναι $(2\cos^2 t - 1)^2 + \sin^2 2t = \cos^2 2t + \sin^2 2t = 1$, δηλ. το $f(t)$ ανήκει και στον κύλινδρο, άρα είναι σημείο της τομής κυλίνδρου & σφαίρας



Άσκηση 2, σελ. 51.

Έστω (U, φ) με $x \in U$.

$$u+v = [\gamma, x] \iff (\varphi \circ \gamma)'(0) = \bar{\varphi}(u+v).$$

Παίρνω $\gamma(t) := \bar{\varphi}^{-1}(\varphi(x) + t(\bar{\varphi}(u+v)))$, για t σε κατάλληλο διάστημα (βλ. και (iii) στην απόδειξη της Πρότασης 2.1.F). Διαπιστώνουμε ότι πραγματικά

$$(\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi(x) + t\bar{\varphi}(u+v))'(0) = \bar{\varphi}(u+v).$$

Επίσης

$$\lambda u = [\delta, x] \iff (\varphi \circ \delta)'(0) = \bar{\varphi}(\lambda u).$$

Παίρνουμε $\delta(t) := \bar{\varphi}^{-1}(\varphi(x) + t\bar{\varphi}(\lambda u))$, για κατάλληλα t , και διαπιστώνουμε ότι:

$$(\varphi \circ \delta)'(0) = (\varphi(x) + t\bar{\varphi}(\lambda u))'(0) = \lambda \bar{\varphi}(u) = \bar{\varphi}(\lambda u).$$

Το μηδενικό διάνυσμα του $T_x M$ υλοποιεί η σταθερή αμφιμόλη $t \mapsto x$

Άσκηση 5, σελ. 51.

Έστω (U, φ) με $x \in U$. Είναι εξ'ορισμού $\frac{\partial}{\partial x_i} / x := \bar{\varphi}^{-1}(e_i)$, δηλ.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} / x = [\alpha, x] \iff (\varphi \circ \alpha)'(0) = \bar{\varphi}(\frac{\partial}{\partial x_i} / x) = e_i.$$

Θέτουμε $\alpha(t) := \bar{\varphi}^{-1}(\varphi(x) + te_i)$, για κατάλληλα t (βλ. (ii)). Τότε:

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi(x) + te_i)'(0) = e_i.$$

Άσκηση 2, σελ. 60.

$$\begin{aligned} \bar{id}_{\mathbb{R}} \circ T_x \alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} / x \right) &= \bar{id}_{\mathbb{R}} \circ T_x \alpha_i \circ \bar{\varphi}^{-1}(e_j) = [D(\bar{id}_{\mathbb{R}} \circ \alpha_i \circ \bar{\varphi}^{-1})(\varphi(x))](e_j) = \\ &= [D(\rho_{e_i} \circ \varphi \circ \bar{\varphi}^{-1})(\varphi(x))](e_j) = [D\rho_{e_i}(\varphi(x))](e_j) = \rho_{e_i}(e_j) = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Δηλαδή:

$$\bar{id}_{\mathbb{R}} \circ T_x \alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} / x \right) = 1 \Rightarrow T_x \alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} / x \right) = \bar{id}_{\mathbb{R}}^{-1}(1) =: \frac{d}{dt} / \alpha_i(x),$$

$$\bar{id}_{\mathbb{R}} \circ T_x \alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} / x \right) = 0 \Rightarrow T_x \alpha_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} / x \right) = \bar{id}_{\mathbb{R}}^{-1}(0) = 0, \text{ για } i \neq j.$$

Άσκηση 1, σελ. 60.

Έστω (V, ψ) κέρως του N με $c \in V$. $\forall (U, \varphi)$ κέρως του M : $f(U) = \{c\} \in V$.

Θεωρούμε την τοπ. παράσταση

$$\psi \circ f \circ \bar{\varphi}^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V): h \mapsto \psi(f(\bar{\varphi}^{-1}(h))) = \psi(c) \text{ σταθερό } \in \psi(V).$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα, } \forall x \in U: D(\psi \circ f \circ \bar{\varphi}^{-1})(\varphi(x)) &= 0 \Rightarrow T_x f = \bar{\psi}^{-1} \circ D(\psi \circ f \circ \bar{\varphi}^{-1})(\varphi(x)) \circ \bar{\varphi} = \\ &= \bar{\psi}^{-1} \circ 0 \circ \bar{\varphi} = 0. \end{aligned}$$

Άσκηση 8, βελ. 61.

Παρατηρούμε πρώτα ότι η f είναι καλά ορισμένη, αφού $f(t) \in S^1$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

$f(1/8) = (\sin \pi/4, \cos \pi/4) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \in U_2^+ = \{(x,y) \in S^1 : x > 0\}$. Εξάλλου

$\frac{1}{8} \in (0, 1/4)$ και $t \in (0, 1/4) \Rightarrow 0 < 2\pi t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \sin 2\pi t < 1 \Rightarrow f((0, 1/4)) \subset U_2^+$.

Θεωρούμε τους χάρτες $((0, 1/4), id)$ του \mathbb{R} και (U_2^+, φ_2^+) του S^1 . Αφού $\frac{1}{8} \in (0, 1/4)$ και $f((0, 1/4)) \subset U_2^+$, μπορούμε να πάρουμε την τοπ. παράσταση

$$F: \varphi_2^+ \circ f \circ id^{-1}: id((0, 1/4)) \rightarrow \varphi_2^+(U_2^+) : t \mapsto \varphi_2^+(f(t)) = \cos 2\pi t.$$

Η F είναι \mathcal{C}^∞ και $F': (0, 1/4) \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto -2\pi \sin 2\pi t$, άρα $F'(\frac{1}{8}) = -\pi\sqrt{2}$.

Δηλ. η $DF(1/8)$ είναι η γραμμική απεικόνιση: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto (-\pi\sqrt{2}) \cdot t$.

Αυτή προφανώς είναι 1-1, άρα και η $T_{1/8} f = \varphi_2^+ \circ DF(1/8) \circ id^{-1}$ είναι 1-1.

Άσκηση 7, βελ. 61.

Θεωρούμε (U, φ) χάρτη του M με $x \in U$ και J διάστημα, υπούνολο του πεδίου ορισμού της α με $\alpha(J) \subset U$. Υπάρχει η τοπιική παράσταση της α μέσω των χαρτών (J, id_J) και (U, φ) , και είναι \mathcal{C}^∞ :

$$\varphi \circ \alpha \circ id_J^{-1}: id_J(J) = J \rightarrow \varphi(U) \cong \mathbb{R}^m.$$

Τότε $T_0 \alpha = \bar{\varphi}^{-1} \circ D(\varphi \circ \alpha \circ id_J^{-1})(id_J(0)) \circ id_J = \bar{\varphi}^{-1} \circ D(\varphi \circ \alpha)(0) \circ id_J$. Εξάλλου

$$\dot{\alpha}(0) = u \iff \bar{\varphi}(\dot{\alpha}(0)) = \bar{\varphi}(u) = (\varphi \circ \alpha)'(0).$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\dot{\alpha}(0)) &= \bar{\varphi}(T_0 \alpha(\frac{d}{dt}|_0)) = D(\varphi \circ \alpha)(0) \circ id_J(\frac{d}{dt}|_0) = \\ &= [D(\varphi \circ \alpha)(0)](1) = (\varphi \circ \alpha)'(0). \end{aligned}$$

Άσκηση 8, βελ. 69

Γνωρίζουμε ότι

$$(1) \quad u = \sum_{i=1}^m u(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x$$

και

$$(2) \quad u(f) = \sum_{i=1}^m u(x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_x, \quad \forall f \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R}).$$

Θέτουμε στην (2) $f = \bar{x}_j$, παίρνουμε

$$u(\bar{x}_j) = \sum_{i=1}^m u(x_i) \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i} \Big|_x.$$

Ανάλογα, γράφοντας το u σαν $u = \sum_{j=1}^m u(\bar{x}_j) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \Big|_x$, παίρνουμε ότι

$$u(x_i) = \sum_{j=1}^m u(\bar{x}_j) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j} \Big|_x.$$

Εξάλλου θέτουμε $(V, \psi) = (\bar{U}, \bar{\varphi})$, έχουμε $y_j = \bar{x}_j$, $x_i = u(x_i)$, $\mu_j = u(y_j) = u(\bar{x}_j)$, $\frac{\partial(x_i \circ \psi^{-1})}{\partial u_j} \Big|_{\psi(x)} = \frac{\partial(x_i \circ \bar{\varphi}^{-1})}{\partial u_j} \Big|_{\bar{\varphi}(x)} = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j} \Big|_x$ και $\frac{\partial(y_j \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i} \Big|_{\varphi(x)} = \frac{\partial(\bar{x}_j \circ \bar{\varphi}^{-1})}{\partial u_i} \Big|_{\bar{\varphi}(x)} = \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i} \Big|_x$, δηλ. πρόκειται για τους ίδιους τύπους.

Άσκηση 9, βελ. 70.

Επειδή, $\forall u \in T_x M$ είναι $u = \sum_{j=1}^m u(\bar{x}_j) \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \Big|_x$, για $u = \frac{\partial}{\partial x_i}$ έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x (\bar{x}_j) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \Big|_x = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i} \Big|_x \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \Big|_x$$

Ανάλογα αποδεικνύεται η άλλη ισότητα. Αν τώρα $(V, \psi) = (\bar{U}, \bar{\varphi})$, δουλεύοντας όπως στην προηγούμενη άσκηση, βρίσκουμε τους τύπους της Εφαρμογής 2.15(Δ).

Άσκηση 10, βελ. 70.

Επειδή για κάθε $z \in V$ και για κάθε $v \in T_z N$ ισχύει

$$v = \sum_{j=1}^n v(y_j) \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_z,$$

για $v = T_x f(u)$ είναι

$$(1) \quad T_x f(u) = \sum_{j=1}^n [T_x f(u)](y_j) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(x)} = \sum_{j=1}^n u(y_j \circ f) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(x)}.$$

Επειδή τώρα $y_j \circ f \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ και για κάθε $h \in \mathcal{C}_x^\infty(M, \mathbb{R})$ ισχύει

$$u(h) = \sum_{i=1}^m u(x_i) \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} \Big|_x,$$

για $h = y_j \circ f$ είναι

$$u(y_j \circ f) = \sum_{i=1}^m u(x_i) \cdot \frac{\partial (y_j \circ f)}{\partial x_i} \Big|_x.$$

Αντικαθιστώντας τα $u(y_j \circ f)$ στην (1), έχουμε

$$T_x f(u) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m u(x_i) \cdot \frac{\partial (y_j \circ f)}{\partial x_i} \Big|_x \right) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{f(x)}$$

Άσκηση 7, βελ. 104.

Έστω $\alpha: J_\alpha = (-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha) \rightarrow M$, $\beta: J_\beta = (-\varepsilon_\beta, \varepsilon_\beta) \rightarrow M$ ολοκληρωτικές καμπύλες του ξ και $0 \neq t_0 \in J_\alpha \cap J_\beta$ με $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$. Θεωρούμε τις καμπύλες:

$$\tilde{\alpha}: J_{\tilde{\alpha}} = (-\varepsilon_\alpha - t_0, \varepsilon_\alpha - t_0) \rightarrow M: \tilde{\alpha}(t) = \alpha(t + t_0),$$

$$\tilde{\beta}: J_{\tilde{\beta}} = (-\varepsilon_\beta - t_0, \varepsilon_\beta - t_0) \rightarrow M: \tilde{\beta}(t) = \beta(t + t_0).$$

Παρατηρούμε ότι $\tilde{\alpha}(t) = \alpha \circ \varrho(t)$, όπου $\varrho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: t \mapsto t + t_0$

Άρα $\forall t \in J_{\tilde{\alpha}}$:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\alpha}}(t) &= \dot{\alpha \circ \varrho}(t) = T_t(\alpha \circ \varrho) \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) = (T_{t+t_0} \alpha \circ T_t \varrho) \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) = \\ &= T_{t+t_0} \alpha \left(\varrho'(t) \cdot \frac{d}{dt} \Big|_t \right) = T_{t+t_0} \alpha \left(1 \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{t+t_0} \right) = \\ &= \dot{\alpha}(t+t_0) = \xi(\alpha(t+t_0)) = \xi(\tilde{\alpha}(t)), \end{aligned}$$

δηλ. $\tilde{\alpha}$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ . Ομοίως και η $\tilde{\beta}$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ , και

$$\tilde{\alpha}(0) = \alpha(t_0) = \beta(t_0) = \tilde{\beta}(0),$$

οπότε κατά το θεώρημα 3.4.4 έχουμε

$$\tilde{\alpha}|_{J_{\tilde{\alpha}} \cap J_{\tilde{\beta}}} = \tilde{\beta}|_{J_{\tilde{\alpha}} \cap J_{\tilde{\beta}}},$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$\alpha|_{J_\alpha \cap J_\beta} = \beta|_{J_\alpha \cap J_\beta}.$$

Πράγματι, αν $t \in J_\alpha \cap J_\beta$ τότε $-\varepsilon_\alpha < t < \varepsilon_\alpha$ και $-\varepsilon_\beta < t < \varepsilon_\beta$, δηλ. $-\varepsilon_\alpha - t_0 < t - t_0 < \varepsilon_\alpha - t_0$ και $-\varepsilon_\beta - t_0 < t - t_0 < \varepsilon_\beta - t_0$, άρα $t - t_0 \in J_{\tilde{\alpha}} \cap J_{\tilde{\beta}}$, δηλ. $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(t - t_0) = \tilde{\beta}(t - t_0) = \beta(t)$.

Άσκηση 2, βελ 126.

Αν η G είναι αβελιανή, δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ αριστερών και δεξιών μετατοπίσεων. Πράγματι, $\forall a, x \in G$:

$$(1) \quad L_a(x) = ax = xa = R_a(x),$$

$$\text{δηλ. } L_a = R_a.$$

Θεωρούμε την διαφορίσιμη καμπύλη $\beta(t) := \alpha_u(t) \cdot \alpha_v(t)$.

Προφανώς $\beta(0) = e$. Απ' το άλλο μέρος (βλ. Εφαρμογή 4.1.9 (α)):

$$\dot{\beta}(t) = T_t \beta \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) = T_t (\gamma \circ (\alpha_u, \alpha_v)) \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) =$$

*) γ συμβολίζει το γινόμενο του G .

$$\begin{aligned}
 &= T_{(\alpha_u(t), \alpha_v(t))} \mathcal{Y} \left(T_t \alpha_u \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right), T_t \alpha_v \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) \right) = \\
 &= T_{(\alpha_u(t), \alpha_v(t))} \mathcal{Y} (\dot{\alpha}_u(t), \dot{\alpha}_v(t)) = \\
 &= T_{\alpha_u(t)} R_{\alpha_v(t)} (\dot{\alpha}_u(t)) + T_{\alpha_v(t)} L_{\alpha_u(t)} (\dot{\alpha}_v(t)) = \\
 &\stackrel{(1)}{=} T_{\alpha_u(t)} L_{\alpha_v(t)} (\dot{\alpha}_u(t)) + T_{\alpha_v(t)} L_{\alpha_u(t)} (\dot{\alpha}_v(t)).
 \end{aligned}$$

Επειδή $\dot{\alpha}_u(t) = \xi(\alpha_u(t))$, όπου $\xi \in \mathcal{L}(G)$ με $\xi(e) = u = \dot{\alpha}_u(0)$ και, ανάλογα $\dot{\alpha}_v(t) = \eta(\alpha_v(t))$, όπου $\eta \in \mathcal{L}(G)$ με $\eta(e) = v = \dot{\alpha}_v(0)$, ισχύει:

$$\begin{aligned}
 \dot{\beta}(t) &= T_{\alpha_u(t)} L_{\alpha_v(t)} (\xi(\alpha_u(t))) + T_{\alpha_v(t)} L_{\alpha_u(t)} (\eta(\alpha_v(t))) = \\
 [\xi, \eta \text{ αριστερά αναλλοίωτα}] &= \xi(\alpha_v(t) \cdot \alpha_u(t)) + \eta(\alpha_u(t) \cdot \alpha_v(t)) = \\
 [G \text{ αβελιανή}] &= \xi(\alpha_u(t) \cdot \alpha_v(t)) + \eta(\alpha_u(t) \cdot \alpha_v(t)) = \\
 &= (\xi + \eta)(\alpha_u(t) \cdot \alpha_v(t)) = (\xi + \eta)(\beta(t)).
 \end{aligned}$$

δηλ. $\dot{\beta}$ είναι ομοιόμορφη καμπύλη του $\xi + \eta$ με $\beta(0) = e$, συνεπώς

$$\dot{\beta}(0) = (\xi + \eta)e = \xi e + \eta e = u + v.$$

Άρα, σύμφωνα με το συμβολισμό της Εφαρμογής 4.3.9(A), είναι $\beta = \alpha_{u+v}$.

ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ (\mathbb{R}_+, \cdot) ΩΣ ΟΜΑΔΑΣ LIE

Είδαμε στο Παράδειγμα 4.1.3 (3) ότι το $\mathbb{R}_+ := \mathbb{R} - \{0\}$ με τον συνηθισμένο πολλαπλασιασμό είναι ομάδα Lie. Ας μελετήσουμε διάφορα στοιχεία αυτής της ομάδας.

(A) Η άλγεβρα $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$.

Η πολλαπλασιαστική \mathbb{R} έχουμε δει ότι διαθέτει ένα \mathcal{C}^∞ ολινό βασικό διανυσματικό πεδίο $\frac{d}{dt}$. Άρα, επειδή \mathbb{R}_+ είναι ανοικτή υποπολλαπλασιαστική, ο περιορισμός $\frac{d}{dt}|_{\mathbb{R}_+}$ ορίζει ένα \mathcal{C}^∞ ολινό βασικό διανυσματικό πεδίο του \mathbb{R}_+ . Για να υποδείξουμε τους δύσκολους συμβολισμούς, συμβολίζουμε με $\frac{d}{dt}$ και το πεδίο αυτό (ενί της \mathbb{R}_+) [αφού δεν υπάρχει ζυγισμός σύγκρισης]. Επομένως, κάθε $\xi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$ (όπως άνω και κάθε $\xi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$) έχει την έκφραση

$$(1) \quad \xi = f \cdot \frac{d}{dt},$$

όπου f είναι αριθμός π συστήματα του ξ .

Το γεγονός ότι $\xi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$ συνεπάγεται κάποια ιδιαίτερη μορφή της f .
 Λς τη θρούμε: Επειδή $\xi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$ θα είναι [βλ. ανάλογη σχέση (4.11)]

$$(2) \quad \xi(s) = T_1 L_s(\xi(1)), \quad \forall s \in \mathbb{R}_+,$$

όπου 1 είναι το μοναδιαίο στοιχείο του \mathbb{R}_+ και π αριστερή μετατόπιση $L_s: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ δίνεται από τη σχέση $L_s(t) = st$.

Επομένως [βλ. σχετικά και την Εφαρμογή 2.2 11 (Δ)], οι (1), (2) γίνονται αντίστοιχα:

$$(3) \quad \xi(s) = f(s) \frac{d}{dt} \Big|_s, \quad \forall s \in \mathbb{R}_+ \quad [f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})]$$

και

$$\begin{aligned} \xi(s) &= T_1 L_s(\xi(1)) = T_1 L_s\left(f(1) \frac{d}{dt} \Big|_1\right) = f(1) \cdot T_1 L_s\left(\frac{d}{dt} \Big|_1\right) = \\ &= f(1) \cdot L'_s(1) \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{L_s(1)} = f(1) \cdot s \cdot \frac{d}{dt} \Big|_s, \end{aligned}$$

δηλ.

$$(4) \quad \xi(s) = f(1) \cdot s \cdot \frac{d}{dt} \Big|_s.$$

Συμπεριφέροντας τις (3), (4) έχουμε ότι

$$f(s) = f(1) \cdot s = f(1) \cdot \text{id}_{\mathbb{R}_+}(s),$$

δηλ. $f = f(1) \cdot \text{id}_{\mathbb{R}_+}$, ή, θέτοντας $\lambda := f(1) \in \mathbb{R}$, βρίσκουμε ότι $f = \lambda \cdot \text{id}_{\mathbb{R}_+}$, οπότε π (1) δίνει ότι

$$(5) \quad \xi = \lambda \cdot \text{id}_{\mathbb{R}_+} \frac{d}{dt}.$$

Τς σημειωθεί ότι η σχέση $f(s) = s f(1)$, σημαίνει ότι π f είναι γραμμική απεικόνιση: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Αντίστροφα, για τυχόν $\lambda \in \mathbb{R}$, η έκφραση (5) ορίζει ένα αριστερό αναλλοίωτο δ.η. του \mathbb{R}_+ (προφανώς \mathcal{C}^∞). Πράγματι, για κάθε $s, x \in \mathbb{R}_+$ είναι:

$$\begin{aligned} T_x L_s(\xi_x) &\stackrel{(5)}{=} T_x L_s\left(\lambda x \frac{d}{dt} \Big|_x\right) = \lambda x T_x L_s\left(\frac{d}{dt} \Big|_x\right) = \\ &= \lambda x \cdot L'_s(x) \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{L_s(x)} = \lambda x s \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{sx} = \\ &= \lambda \left((xs) \frac{d}{dt} \Big|_{xs} \right) \stackrel{(5)}{=} \xi(sx). \end{aligned}$$

Άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}_+) = \left\{ \xi = \lambda \cdot \text{id}_{\mathbb{R}_+} \cdot \frac{d}{dt}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(B) Οι ολοκληρωτικές καμπύλες ενός $\xi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_*)$.

Επειδή ένα $\xi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_*)$ έχει τη μορφή $\xi = \lambda \cdot id_{\mathbb{R}_*} \cdot \frac{d}{dt}$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$, η μοναδική συντεταγμένη του είναι η $\lambda \cdot id_{\mathbb{R}_*}$ άρα η εξίσωση (335) που δίνει τις ολοκληρωτικές καμπύλες γίνεται

$$\alpha'(t) = f(\alpha(t)) = \lambda \alpha(t),$$

δηλ. η $\alpha(t)$ είναι λύση της εξίσωσης $\frac{dy}{dt} = \lambda y$, οπότε

$$(6) \quad \alpha(t) = c \cdot e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(Γ) Οι μονοπαραμετρικές υποομάδες της \mathbb{R}_* .

Εστω $\xi = \lambda \cdot id_{\mathbb{R}_*} \cdot \frac{d}{dt} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_*)$. Η μονοπαραμετρική υποομάδα που αντιστοιχεί στο ξ είναι αριθμώς η ολοκληρωτική καμπύλη α του ξ με

$$(7) \quad \alpha(0) = 1.$$

Επομένως, για $t=0$, οι (6), (7) δίνουν ότι

$$1 = \alpha(0) = c \cdot e^{\lambda \cdot 0} = c \cdot 1 = c,$$

άρα η μονοπαραμετρική υποομάδα του ξ είναι αριθμώς η

$$(8) \quad \alpha(t) = e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(Δ) Η ευδεκτική απεικόνιση του \mathbb{R}_*

Έχουμε ότι $\exp: T_1 \mathbb{R}_* \rightarrow \mathbb{R}_* : v \mapsto \exp(v) := \alpha_v(1)$, όπου α_v η μονοπαραμετρική υποομάδα του \mathbb{R}_* που αντιστοιχεί στο v , που με τη βερά του αντιστοιχεί στο $\xi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_*)$ με $\xi(1) = v$.

Όμως, το ξ έχει τη μορφή (5), άρα είναι $v = \lambda \frac{d}{dt} \Big|_1$.

Επιπλέον, η αντίστοιχη μονοπαραμετρική υποομάδα έχει τη μορφή (8), οπότε

$$\exp(v) = \alpha_v(1) = e^{\lambda}.$$

Δηλ., για κάθε

$$T_1 \mathbb{R}_* \ni v := \lambda \frac{d}{dt} \Big|_1 \Rightarrow \exp(v) = e^{\lambda}.$$

(E) Συγκεκριμένος της $\exp: T_1 \mathbb{R}_* \rightarrow \mathbb{R}_*$ με την συνηθι ευδεκτική συάρτυση

Έχουμε από τα προηγούμενα το επόμενο μεταδεκτικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} T_1 \mathbb{R}_* \ni v = \lambda \frac{d}{dt} \Big|_1 & \xrightarrow{\exp} & e^{\lambda} \in \mathbb{R}_* \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow id_{\mathbb{R}_*} \\ \mathbb{R} \ni \lambda & \xrightarrow{\exp} & e^{\lambda} \in \mathbb{R}_* \end{array}$$

όπου η κάτω απεικόνιση είναι η συνήθης ευθεία:

$$\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_* : t \mapsto e^t.$$

Άρα

$$\exp = e^{\cdot} \cdot \overline{id_{\mathbb{R}}},$$

ή, μετά την ταύτιση

$$T_1 \mathbb{R}_* \cong \mathbb{R},$$

η \exp της ομάδας Lie \mathbb{R}_* , ταυτίζεται με τη συνήθη ευθεία απεικόνιση του \mathbb{R} , όπως την ξέρουμε από τον απειροστικό λογισμό, δηλ.

$$\exp \cong t \mapsto e^t.$$

Ανάλογα μπορεί να μελετήσει κανείς και την (προσθετική) ομάδα $(\mathbb{R}, +)$, σαν ομάδα Lie. Συμμετρώνουμε τα αντίστοιχα διηλεκτικά, αρθρώνοντας στην απαγωγή τη φροντίδα των αποδείξεων.

(Α) Η άλγεβρα Lie $\mathcal{L}((\mathbb{R}, +))$ αποτελείται από όλα τα διανυσματικά πεδία της μορφής $\xi = \lambda \cdot \frac{d}{dt}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Δηλ.

$$\mathcal{L}((\mathbb{R}, +)) = \{ \xi = \lambda \cdot \frac{d}{dt} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

(Β) Οι ολοκληρωτικές καμπύλες ενός $\xi = \lambda \cdot \frac{d}{dt}$ είναι της μορφής

$$\alpha(t) = \lambda \cdot t + c, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Άρα, η ολοκληρωτική καμπύλη με αρχική συνθήκη α είναι η

$$\alpha(t) = \lambda \cdot t + \alpha$$

(Γ) Η μονοπαραμετρική υποομάδα του $\xi = \lambda \cdot \frac{d}{dt}$ είναι (σύμφωνα με το (Β)) η καμπύλη

$$\alpha(t) = \lambda \cdot t.$$

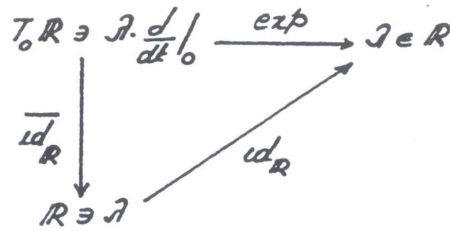
Προφανώς, για κάθε διαφορετικό λ θα έχουμε και μία άλλη μονοπαραμετρική υποομάδα, που θα αντιστοιχεί στο ανάλογο πεδίο.

(Δ) Αν τώρα $v \in T_0 G$, όπως γνωρίζουμε, θα υπάρχει κάποιο $\xi \in \mathcal{L}((\mathbb{R}, +))$ με $\xi_0 = v$.

Άρα $v = \xi_0 = \lambda \cdot \frac{d}{dt} \Big|_0$. Οπότε, ελεεινή η αντίστοιχη μονοπαραμετρική υποομάδα είναι η $\alpha(t) = \lambda \cdot t$, θα έχουμε ότι

$$\exp(v) = \alpha(1) = \lambda.$$

Επομένως έχουμε και το μεταθετικό διάγραμμα



άρα, μέσω της $\overline{id}_{\mathbb{R}}$, η \exp του $(\mathbb{R}, +)$ μπορεί να ταυτιστεί με την $id_{\mathbb{R}}$.

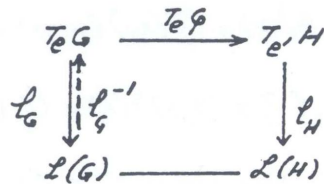
Άσκηση 4, σελ. 120

Συμβολίζουμε με e (αντίστ. e') το ουδέτερο στοιχείο της G (αντ. G'). Επίσης με L_x ($x \in G$) τις αριστερές μετατοπίσεις της G και με L'_y ($y \in H$) τις μετατοπίσεις της H . Ακόμη έχουμε και τους εσομορφισμούς $\ell_G: T_0 G \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}(G)$ και $\ell_H: T_0 H \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}(H)$ [βλ. Θεώρημα 4.2.4].

Ορίζουμε την απεικόνιση $\tilde{\varphi}: \mathcal{L}(G) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ με τη σχέση

$$\tilde{\varphi} := \ell_H \circ T_0 \varphi \circ \ell_G^{-1},$$

όπως φαίνεται και στο διαγράμμα:



Αν θέσουμε, για ευκολία, $\tilde{\xi} := \tilde{\varphi}(\xi)$, βλέπουμε ότι πραγματικά κάθε $\tilde{\xi}$ είναι ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο της H , αριστερά αναλλοίωτο. Επίσης, λαμβάνοντας υπόψη υπόψη τον ορισμό των ℓ_G και ℓ_H έχουμε ότι

$$\tilde{\xi} = (\ell_H \circ T_0 \varphi \circ \ell_G^{-1})(\xi) = (\ell_H \circ T_0 \varphi)(\xi_e) = \ell_H(T_0 \varphi(\xi_e))$$

απ' όπου
(*)

$$\tilde{\xi}(y) = T_0 L'_y(T_0 \varphi(\xi_e))$$

και

(**)

$$\tilde{\xi}_e = T_0 \varphi(\xi_e)$$

[Από τις τελευταίες φαίνεται ότι, επειδή $\tilde{\xi}$ είναι αριστερά αναλλοίωτο, το $\tilde{\xi}$ καθορίζεται πλήρως από το διάνυσμα $T_0 \varphi(\xi_e)$].

Ο ορισμός της $\tilde{\varphi}$ δείχνει ότι η απεικόνιση αυτή είναι γραμμική. Επομένως, το μόνο που μένει είναι να δείξουμε ότι

$$\tilde{\varphi}([\xi, \eta]) = [\tilde{\varphi}(\xi), \tilde{\varphi}(\eta)]$$

ή, με τον απλούστερο συμβολισμό,

$$[\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}] = [\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}].$$

Επειδή τα πεδία της προηγούμενης εξέσης είναι αριστερά αναλλοίωτα, αρκεί να επαληθεύσουμε τη σχέση στο $e \in H$, δηλ. να δείξουμε ότι $[\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}]_e = [\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}]_e$ ή, ισοδύναμα, ότι

$$(\diamond) \quad [\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}]_e(h) = [\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}]_e(h) \quad , \quad \forall h \in C^\infty(H, \mathbb{R}).$$

Το πρώτο μέλος της (\diamond) μετασχηματίζεται ως εξής (βλ. ορισμό σχήματος $[,]$ στη $(\Phi\Phi)$):

$$(*) \quad [\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}]_e(h) = (T_e \varphi ([\xi, \eta]_e))(h) = [\xi, \eta]_e(h \circ \varphi) = \xi_e(\eta(h \circ \varphi)) - \eta_e(\xi(h \circ \varphi))$$

Αναλόγα το δεύτερο μέλος παίρνει τη μορφή

$$(**) \quad \left\{ \begin{aligned} [\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}]_e(h) &= \widetilde{\xi}_e(\widetilde{\eta}(h)) - \widetilde{\eta}_e(\widetilde{\xi}(h)) = (T_e \varphi(\xi_e))(\widetilde{\eta}(h)) - (T_e \varphi(\eta_e))(\widetilde{\xi}(h)) = \\ &= \xi_e(\widetilde{\eta}(h) \circ \varphi) - \eta_e(\widetilde{\xi}(h) \circ \varphi) \end{aligned} \right.$$

Επομένως, συγκρίνοντας τις $(*)$ και $(**)$, θα εγεί αποδειχθεί η (\diamond) αν δείξουμε ότι

$$\xi_e(\eta(h \circ \varphi)) = \xi_e(\widetilde{\eta}(h) \circ \varphi) \quad ; \quad \eta_e(\xi(h \circ \varphi)) = \eta_e(\widetilde{\xi}(h) \circ \varphi).$$

Ας δείξουμε την πρώτη. Για να ισχύει η σχέση αυτή, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\eta(h \circ \varphi) = \widetilde{\eta}(h) \circ \varphi.$$

Πραγματικά, για κάθε $x \in G$ έχουμε ότι:

$$[\text{βλ. ορ. 3.1.6}] \quad (\widetilde{\eta}(h) \circ \varphi)(x) = (\widetilde{\eta}(h))(\varphi(x)) = \widetilde{\eta}_{\varphi(x)}(h) =$$

$$[\text{βλ. εξέση } (\Phi)] \quad (T_e L'_{\varphi(x)} (T_e \varphi(\eta_e)))(h) = (T_e (L'_{\varphi(x)} \circ \varphi)(\eta_e))(h) =$$

$$[L'_{\varphi(x)} \circ \varphi = \varphi \circ L_x !] \quad ((T_e (\varphi \circ L_x))(\eta_e))(h) = (T_x \varphi (T_e L_x(\eta_e)))(h) =$$

$$(T_x \varphi(\eta_x))(h) = \eta_x(h \circ \varphi) = (\eta(h \circ \varphi))(x),$$

δηλ. επαληθεύουμε στη ζητούμενη σχέση. Ανάλογα δείχνεται και η δεύτερη σχέση, οπότε η λύση είναι πλήρης.

$$[! \text{ Επαληθεύστε τη σχέση } L'_{\varphi(x)} \circ \varphi = \varphi \circ L_x \text{ , για κάθε } x \in G]$$