Χ. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΗΣ - Γ. ΚΑΛΟΓΕΡΟΠΟΥΛΟΣ - Ι. ΣΤΡΑΤΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Σημειώσεις παραδόσεων

ΑΘΗΝΑ, 1990

VIII. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΓΙΑ ΣΥΝΗΘΕΙΣ Δ.Ε. ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.

Ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών (π.σ.τ.) συνίσταται στην αναζήτηση της λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης, που ικανοποιεί κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, δηλαδή συνθήκες πάνω στο σύνορο του πεδίου ορισμού της λύσης. Προβλήματα συνοριακών τιμών αναφέρονται σε όλα τα είδη και τις τάξεις των διαφορικών εξισώσεων. Από πλευράς εφαρμογών τα σημαντικότερα π.σ.τ. είναι εκείνα στα οποία η διαφορική εξίσωση είναι συνήθης β' τάξης και ειδικότερα γραμμική. Η επίλυση πολλών κλασικών προβλημάτων της φυσικής, που τα μαθηματικά τους μοντέλα περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, όπως π.χ. η διάδοση της θερμότητας, η παλλόμενη χορδή, η στήριξη δοκού κ.α., οδηγεί σε π.σ.τ. τέτοιου τύπου.

Έτσι, λοιπόν, στα επόμενα θα γίνει μελέτη π.σ.τ. για γραμμικές δ.ε. δεύτερης τάξης.

Θεωρούμε τη δ.ε.

$$L[x]=x''+p(t)x'+q(t)x=r(t),\quad t\in I=[\alpha,\beta] \qquad (1.1)$$

με $p,q,r\in C(I)$.

Αναζητούμε λύση της (1) που να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες

$$\left.\begin{aligned} b_1[x]&=\alpha_{11}x(\alpha)+\alpha_{12}x'(\alpha)+\beta_{11}x(\beta)+\beta_{12}x'(\beta)=\gamma_1 \\ b_2[x]&=\alpha_{21}x(\alpha)+\alpha_{22}x'(\alpha)+\beta_{21}x(\beta)+\beta_{22}x'(\beta)=\gamma_2 \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

Υποθέτουμε ότι η μία συνοριακή συνθήκη δεν προκύπτει από την άλλη με πολλαπλασιασμό επί κατάλληλο αριθμό.

Ορισμός 1.1

Εάν η δ.ε. (1.1) είναι ομογενής ($r(t)=0$, $\forall t\in I$) και οι συνοριακές συνθήκες (2.1) επίσης ομογενείς ($\gamma_1=\gamma_2=0$), τότε το πρόβλημα $\big((1.1),(1.2)\big)$ λέγεται γραμμικό ομογενές π.σ.τ.. Εάν η (1.1) είναι μη ομογενής ή μία τουλάχιστον συνοριακή συνθήκη είναι μη ομογενής ($|\gamma_1|+|\gamma_2|>0$), τότε το πρόβλημα $\big((1.1),(1.2)\big)$ είναι ένα μη ομογενές π.σ.τ..

Ένα π.σ.τ. μπορεί να μην έχει λύση ή να έχει μία λύση μόνο ή ακόμη και άπειρες λύσεις, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.1

$$\begin{cases} x''+\pi^2 x=1, & t\in[0,1] \\ x(0)+x'(0)=0 \\ x(1)+x'(1)=0 \end{cases}$$

Η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$x(t)=\frac{1}{\pi^2}+c_1\text{συν}\pi t+c_2\text{ημ}\pi t,\quad t\in[0,1]$$

και η απαίτηση να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες οδηγεί στο σύστημα

$$\begin{cases} c_1+\pi c_2=-\dfrac{1}{\pi^2} \\ -c_1-\pi c_2=-\dfrac{1}{\pi^2} \end{cases}$$

που είναι αδύνατο. Δηλαδή το π.σ.τ. δεν έχει λύση.

Παράδειγμα 1.2

$$\begin{cases} x''+x=t, & t\in[0,\pi] \\ x(0)-x(\pi)=0 \\ x'(0)-x'(\pi)=0 \end{cases}$$

Η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$x(t)=t+c_1\text{συν}t+c_2\text{ημ}t,\quad t\in[0,\pi]$$

Οι σταθερές c_1,c_2 λόγω των συνοριακών συνθηκών ικανοποιούν το σύστημα:

$$\begin{cases} 2c_1-\pi=0 \\ 2c_2=0 \end{cases}$$

που έχει τη μοναδική λύση $(c_1,c_2)=\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$.

Άρα το π.σ.τ. έχει μία, μοναδική, λύση την

$$x(t)=t+\frac{\pi}{2}\text{συν}t,\ t\in[0,\pi]$$

Παράδειγμα 1.3

$$\begin{cases} x''+x=0,\ t\in[0,\pi] \\ x(0)=0 \\ x(\pi)=0 \end{cases}$$

Η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$x(t)=c_1\text{συν}t+c_2\text{ημ}t,\ t\in[0,\pi]$$

Οι σταθερές c_1 και c_2 ικανοποιούν το σύστημα:

$$\begin{cases} c_1\cdot 1+c_2 0=0 \\ c_1\cdot(-1)+c_2\cdot 0=0 \end{cases}$$

που έχει τις λύσεις $(c_1,c_2)=(0,c)$, $c\in\mathbb{R}$.

Επομένως το π.σ.τ. έχει άπειρες λύσεις

$$x(t)=c\text{ημ}t,\ t\in[0,\pi].$$

2. ΓΡΑΜΜΙΚΑ Π.Σ.Τ. ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ.

Παράδειγμα 2.1.

Θεωρούμε το π.σ.τ.:

$$\begin{cases} x''+\lambda x=0,\ t\in[0,\pi] \\ x(0)=0 \\ x(\pi)=0 \end{cases}$$

όπου λ είναι πραγματική παράμετρος.

Για την επίλυσή του διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) Εάν $\lambda=0$ τότε η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$x(t)=c_1t+c_2$$

και η απαίτηση να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες δίνει:

$$x(t)=0,\ t\in[0,\pi]\ (\text{τετριμένη λύση}).$$

(ii) Εάν $\lambda<0$ τότε η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$x(t)=c_1\exp\left(\sqrt{-\lambda}t\right)+c_2\exp\left(\sqrt{-\lambda}t\right)$$

και οι συνοριακές συνθήκες δίνουν $(c_1,c_2)=(0,0)$, δηλαδή

$$x(t)=0,\ t\in[0,\pi]$$

(iii) Εάν $\lambda>0$ τότε η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$x(t)=c_1\text{συν}\sqrt{\lambda}t+c_2\text{ημ}\sqrt{\lambda}t,\ t\in[0,\pi]$$

Από τη συνοριακή συνθήκη $x(0)=0$ συνάγεται ότι $c_1=0$ και λόγω της $x(\pi)=0$ έχουμε

$$c_2\text{ημ}\sqrt{\lambda}\pi=0$$

Για να έχει το π.σ.τ. μη τετριμένες λύσεις, δηλαδή "γνήσιες λύσεις", όπως λέμε, πρέπει:

$$\sqrt{\lambda}\pi=n\pi,\ n=1,2,...$$

δηλαδή για τις τιμές

$$\lambda_n=n^2,\ n=1,2,...$$

της παραμέτρου λ, το π.σ.τ. έχει τη λύση

$$x_n(t)=c\text{ημ}(nt),\ t\in[0,\pi],\ n=1,2,...$$

Έτσι γενικότερα, εάν θεωρήσουμε το π.σ.τ.

$$\begin{cases} x''+P(t,\lambda)x'+Q(t,\lambda)x=R(t),\ t\in[\alpha,\beta] \\ b_1[x]=\gamma_1,\ b_2[x]=\gamma_2 \end{cases} \qquad (\pi)$$

όπου λ πραγματική (ή και μιγαδική) παράμετρος, τότε η ύπαρξη ή μη λύσης του εξαρτάται από τις τιμές του λ.

Ορισμός 2.1

Οι τιμές του λ για τις οποίες το π.σ.τ. (π) έχει λύση, ονομάζονται <u>ιδιοτιμές</u> και οι αντίστοιχες λύσεις, <u>ιδιοσυναρτήσεις</u> ή <u>ιδιολύσεις</u> του (π). Το σύνολο των ιδιοτιμών ονομάζεται <u>φάσμα</u> του π.σ.τ. (π).

Στην περίπτωση του ομογενούς π.σ.τ., ιδιοσυναρτήσεις είναι οι μη μηδενικές (μη τετριμένες) λύσεις του.

Στο παράδειγμα (2.1) οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_n=n^2$, $n=1,2,\ldots$ και οι ιδιοσυναρτήσεις $x_n(t)=c\eta\mu(nt)$, $t\in[0,\pi]$, $n=1,2,\ldots$.

Επίλυση του ομογενούς π.σ.τ.

$$\begin{cases} x''+P(t,\lambda)x'+Q(t,\lambda)x=0, \ t\in[\alpha,\beta], \ \lambda\in\mathbb{R} \\ b_1[x]=0 \ , \ b_2[x]=0 \end{cases} \qquad (\pi_0)$$

Αν $u_\lambda(t)$, $v_\lambda(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της δ.ε. του (π_0), τότε η γενική λύση της είναι

$$x_\lambda(t)=c_1u_\lambda(t)+c_2v_\lambda(t), \ t\in[\alpha,\beta].$$

Συνεπώς το π.σ.τ. (π_0) θα έχει μη τετριμένες λύσεις τότε και μόνο τότε αν το σύστημα (ως προς c_1,c_2)

$$\begin{cases} b_1[u_\lambda]c_1+b_1[v_\lambda]c_2=0 \\ b_2[u_\lambda]c_1+b_2[v_\lambda]c_2=0 \end{cases}$$

έχει λύση διάφορη της μηδενικής, δηλαδή τότε και μόνο τότε αν το λ είναι ρίζα της εξίσωσης:

$$\begin{vmatrix} b_1[u_\lambda] & b_1[v_\lambda] \\ b_2[u_\lambda] & b_2[v_\lambda] \end{vmatrix}=0 \qquad (2.1)$$

Το σύνολο των ριζών της (2.1) είναι το φάσμα του π.σ.τ. (π_0).

3. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ STURM-LIOUVILLE.

Θεωρούμε τη δ.ε.

$$a_0(t)x''+a_1(t)x'+a_2(t)x=0 \qquad (E)$$

με $a_0(t)\neq0$ $\forall t\in I$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη επί

$$\frac{1}{a_0(t)}\exp\left\{\int\frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt\right\}$$

και θέτουμε

$$p(t)=\exp\left\{\int \frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt\right\},\ q(t)=\frac{a_2(t)}{a_0(t)}\exp\left\{\int \frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt\right\}$$

Τότε η (Ε) γίνεται

$$p(t)x''+p'(t)x'+q(t)x=0$$

ή

$$(p(t)x')'+q(t)x=0 \qquad (3.1)$$

Η δ.ε. (3.1) είναι η <u>αυτοσυζυγής</u> μορφή της (Ε) και όπως είναι φανερό η (Ε) με $a_0,a_1,a_2\in C(I)$ ανάγεται πάντοτε στη μορφή αυτή.

Θεωρούμε τη δ.ε. αυτοσυζυγούς μορφής με παράμετρο λ

$$(p(t)x'(t))'+(q(t)+\lambda r(t))x(t)=0,\ t\in I=[a,\beta] \qquad (3.2)$$

Ορισμός 3.1

Η δ.ε. (3.2), όπου $p\in C^1(I)$, $q,r\in C(I)$, με $p(t)\geq 0$ και $r(t)>0$ $\forall t\in I$ ονομάζεται εξίσωση <u>Sturm-Liouville</u>. Εάν $p(t)>0$ $\forall t\in I$ τότε η (3.2) ονομάζεται <u>ομαλή</u> (κανονική) <u>εξίσωση</u> <u>Sturm-Liouville</u> και εάν $p(\alpha)=0$ ή $p(\beta)=0$ τότε η (3.2) ονομάζεται <u>ιδιάζουσα</u> (μη κανονική) <u>εξίσωση</u> <u>Sturm-Liouville</u>.

Είναι φανερό ότι η εξίσωση Sturm-Liouville έχει λύσεις αφού γράφεται

$$p(t)x''+p'(t)x'+(q(t)+\lambda r(t))x=0$$

και οι p, p', $q-\lambda r$ είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Ορισμός 3.2

Μία ακολουθία συναρτήσεων (φ_n) $n=1,2,\ldots$ με $\varphi_n:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ λέμε ότι αποτελεί ένα <u>ορθογώνιο</u> <u>σύστημα</u> στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με συνάρτηση βάρους $r:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ τότε και μόνον τότε αν:

$$\int_\alpha^\beta \varphi_k(t)\varphi_\lambda(t)r(t)dt=\begin{cases}0, & k\neq\lambda\\ a_k, & k=\lambda\end{cases}$$

Αν $a_k=1$ $\forall k\in\mathbb{N}$ τότε το σύστημα ονομάζεται <u>ορθοκανονικό</u> και γράφουμε

$$\int_\alpha^\beta \varphi_k(t)\varphi_\lambda(t)r(t)dt=\delta_{k\lambda}$$

όπου $\delta_{k\lambda}$ είναι το δέλτα του Kronecker, δηλαδή

$$\delta_{k\lambda}=\begin{cases}1, & k=\lambda\\ 0, & k\neq\lambda\end{cases}$$

Σημείωση 3.1

Για $\varphi_k=\varphi_\lambda=\varphi$ η συνάρτηση με τύπο

$$\|\varphi(t)\|=\left(\int_\alpha^\beta[\varphi(t)]^2r(t)dt\right)^{1/2}$$

ορίζει μία norm στο χώρο $C([\alpha,\beta])$.

Είναι προφανές ότι εάν η ακολουθία (φ_n) $n=1,2,\dots$ αποτελεί ένα ορθογώνιο σύστημα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ τότε η ακολουθία (f_n) με $f_n(t)=\dfrac{\varphi_n(t)}{\|\varphi_n(t)\|}$, $n=1,2,\dots$ είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα στο $[\alpha,\beta]$ ως προς την ίδια συνάρτηση βάρους.

Λήμμα 3.1 (Ταυτότητα Lagrange)

Εάν

$$L=\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{d}{dt}\right)+q(t)$$

με $p,p',q\in C([\alpha,\beta])$ είναι ένας αυτοσυζυγής διαφορικός τελεστής στο $[\alpha,\beta]$ και εάν x_1,x_2 είναι συναρτήσεις δύο φορές παραγωγίσιμες στο $[\alpha,\beta]$, τότε:

$$x_1L[x_2]-L[x_1]x_2=\left[p(x_1x_2'-x_1'x_2)\right]'$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό του ορισμού L έχουμε:

$$\begin{aligned}x_1L[x_2]-L[x_1]x_2&=x_1\left[(px_2')'+qx_2\right]-x_2\left[(px_1')+qx_1\right]=x_1(px_2')'-x_2(px_1')'\\&=x_1(p'x_2'+px_2'')-x_2(p'x_1'+px_1'')\\&=p'(x_1x_2'-x_1'x_2)+p(x_1x_2''-x_1''x_2)\\&=\left[p(x_1x_2'-x_1'x_2)\right]'.\end{aligned}$$

Θεωρούμε την εξίσωση Sturm-Liouville:

$$L[x]=(px')'+qx=-\lambda rx \tag{3.3}$$

$$\left(p\in C^1([\alpha,\beta]),\ q,r\in C([\alpha,\beta])\right)$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$b_1[x]=0,\ b_2[x]=0 \tag{3.4}$$

όπου b_1,b_2 είναι οι "συνοριακοί τελεστές", όπως έχουν οριστεί στην (1.2).

Θεώρημα 3.1

Αν x_1,x_2 είναι ιδιοσυναρτήσεις του π.σ.τ. $\big((3.3),(3.4)\big)$ που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1,λ_2, τότε

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_\alpha^\beta x_1(t)x_2(t)r(t)dt=p(\beta)W(\beta)-p(\alpha)W(\alpha)$$

όπου $W(\alpha)$, $W(\beta)$ είναι οι τιμές της ορίζουσας Wronski για τις x_1,x_2 στα α,β.

Απόδειξη.

Αφού x_1,x_2 είναι λύσεις της δ.ε. (3.3) θα έχουμε

$$L[x_1]=-\lambda_1 rx_1,\ L[x_2]=-\lambda_2 rx_2$$

Αντικαθιστούμε στην ταυτότητα Lagrange και παίρνουμε

$$(\lambda_1-\lambda_2)rx_1x_2=\Big[p(x_1x_2'-x_1'x_2)\Big]'.$$

Ολοκληρώνουμε στο $[\alpha,\beta]$

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_\alpha^\beta r(t)x_1(t)x_2(t)dt=\Big[p(x_1x_2'-x_1'x_2)\Big]_\alpha^\beta=$$

$$=p(\beta)\Big[x_1(\beta)x_2'(\beta)-x_1'(\beta)x_2(\beta)\Big]-p(\alpha)\Big[x_1(\alpha)x_2'(\alpha)-x_1'(\alpha)x_2(\alpha)\Big]=$$

$$=p(\beta)W(\beta)-p(\alpha)W(\alpha).$$

Παρατηρούμε ότι εάν οι ιδιοτιμές λ_1,λ_2 είναι διαφορετικές και οι συνοριακές συνθήκες είναι τέτοιες ώστε $p(\alpha)W(\alpha)=p(\beta)W(\beta)$, τότε οι ιδιοσυναρτήσεις x_1,x_2 είναι ορθογώνιες.

Ορισμός 3.3

Ένα π.σ.τ. που αποτελείται από μία δ.ε. Sturm-Liouville και συνοριακές συνθήκες τέτοιες ώστε οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές να είναι ορθογώνιες, λέγεται <u>πρόβλημα</u> (ή σύστημα) <u>Sturm-Liouville</u>.

Αναφέρουμε τρεις, τις πιο σημαντικές, περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών στα προβλήματα Sturm-Liouville.

Περίπτωση 1.

$$\begin{cases}\alpha_1x(\alpha)+\alpha_2x'(\alpha)=0, & |\alpha_1|+|\alpha_2|>0\\ \beta_1x(\beta)+\beta_2x'(\beta)=0, & |\beta_1|+|\beta_2|>0\end{cases} \tag{3.5}$$

που ονομάζονται χωρισμένες συνορικές συνθήκες και το αντίστοιχο π.σ.τ. ονομάζεται πρόβλημα Sturm-Liouville με χωρισμένες συνοριακές συνθήκες.

Περίπτωση 2

$$\begin{cases} x(\alpha)=x(\beta) \\ x'(\alpha)=x'(\beta) \end{cases} \qquad (3.6)$$

που ονομάζονται περιοδικές συνθήκες και το αντίστοιχο π.σ.τ. με την επιπλέον υπόθεση $p(\alpha)=p(\beta)$, ονομάζεται περιοδικό πρόβλημα Sturm-Liouville.

Περίπτωση 3

Εάν $p(\alpha)=p(\beta)=0$, δηλαδή η δ.ε. είναι ιδιάζουσα, τότε είναι προφανές (από το θεώρημα 3.1) ότι οι x_1, x_2 είναι ορθογώνιες. Το αντίστοιχο π.σ.τ. ονομάζεται ιδιάζον πρόβλημα Sturm-Liouville.

Για τις περιπτώσεις 1 και 2 αποδεικνύουμε τα επόμενα θεωρήματα.

Θεώρημα 3.2

Θεωρούμε το π.σ.τ. (τύπου Sturm-Liouville με χωρισμένες συνοριακές συνθήκες)

$$\begin{cases} L[x]=(px')'+qx=-\lambda rx, \quad p, p'q, r \in C([\alpha,\beta]), \quad p,r>0 \\ \alpha_1 x(\alpha)+\alpha_2 x'(\alpha)=0, \quad |\alpha_1|+|\alpha_2|>0 \\ \beta_1 x(\beta)+\beta_2 x'(\beta)=0, \quad |\beta_1|+|\beta_2|>0 \end{cases}$$

Εάν x_i, x_j είναι δύο ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις διαφορετικές ιδιοτιμές λ_i, λ_j, τότε οι x_i, x_j είναι ορθογώνιες στο $[\alpha,\beta]$ με συνάρτηση βάρους r.

Απόδειξη

Αφού x_i, x_j είναι ιδιοσυναρτήσεις του π.σ.τ. θα ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες στο άκρο α, δηλαδή:

$$\begin{cases} \alpha_1 x_i(\alpha)+\alpha_2 x_i'(\alpha)=0 \\ \alpha_1 x_j(\alpha)+\alpha_2 x_j'(\alpha)=0 \end{cases} \qquad (3.7)$$

Το ομογενές γραμμικό σύστημα (3.7) έχει λύση $(\alpha_1,\alpha_2)\neq(0,0)$, γιατί, $|\alpha_1|+|\alpha_2|>0$. Επομένως είναι

$$\begin{vmatrix} x_i(\alpha) & x_i'(\alpha) \\ x_j(\alpha) & x_j'(\alpha) \end{vmatrix}=0$$

δηλαδή

$$W(\alpha)=0. \qquad (3.8)$$

Με τον ίδιο τρόπο για το άκρο β βρίσκουμε:

$$W(\beta)=0. \tag{3.9}$$

Από τις (3.8), (3.9) και το θεώρημα (3.1) έπεται:

$$(\lambda_i-\lambda_j)\int_{\alpha}^{\beta} r(t)x_i(t)x_j(t)dt=0$$

και επειδή $\lambda_i \neq \lambda_j$, είναι

$$\int_{\alpha}^{\beta} r(t)x_i(t)x_j(t)dt=0$$

δηλαδή οι ιδιοσυναρτήσεις x_i,x_j είναι ορθογώνιες με συνάρτηση βάρους $r(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$.

Θεώρημα 3.3

Εάν x_i,x_j είναι δύο ιδιοσυναρτήσεις του π.σ.τ. (περιοδικό πρόβλημα Sturm-Liouville)

$$\begin{cases} (px')'+q(x)=-\lambda rx, \; p,p',q,r\in C([\alpha,\beta]), \quad p,r>0 \\ x(\alpha)=x(\beta) \qquad \text{με } p(\alpha)=p(\beta) \\ x'(\alpha)=x'(\beta) \end{cases}$$

που αντιστοιχούν στις διαφορετικές ιδιοτιμές λ_i,λ_j τότε οι x_i,x_j είναι ορθογώνιες με συνάρτηση βάρους την r.

Απόδειξη

Οι ιδιοσυναρτήσεις x_i,x_j ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$\begin{cases} x_i(\alpha)=x_i(\beta) \\ x_i'(\alpha)=x_i'(\beta) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_j(\alpha)=x_j(\beta) \\ x_j'(\alpha)=x_j'(\beta) \end{cases}$$

Επομένως για την ορίζουσα Wronski $W(x_i,x_j)(t)$ ισχύει

$$W(\alpha)=W(\beta) \tag{3.10}$$

Από την (3.10), την υπόθεση $p(\alpha)=p(\beta)$ και το θεώρημα (3.1) έπεται

$$(\lambda_i-\lambda_j)\int_{\alpha}^{\beta} r(t)x_i(t)x_j(t)dt=0$$

και επειδή $\lambda_i \neq \lambda_j$, θα είναι

$$\int_{\alpha}^{\beta} r(t)x_i(t)x_j(t)dt=0$$

δηλαδή οι ιδιοσυναρτήσεις x_i,x_j είναι ορθογώνιες στο $[\alpha,\beta]$ με συνάρτηση βάρους r.

Παράδειγμα 3.1.

Να επιλυθεί το ακόλουθο π.σ.τ.:

$$\begin{cases} x''+4x'+(4+9\lambda)x=0 \\ x(0)=0,\ x(\alpha)=0 \quad ,\alpha>0 \end{cases}$$

Το π.σ.τ. γράφεται

$$\begin{cases} (e^{4t}x')'+4e^{4t}x=-\lambda(9e^{4t})x \\ x(0)=0,\ x(\alpha)=0 \end{cases}$$

που είναι ένα πρόβλημα Sturm-Liouville με χωρισμένες συνοριακές συνθήκες (περίπτωση 1) και σύμφωνα με το θεώρημα (3.2) έχει ορθογώνιες ιδιοσυναρτήσεις με συνάρτηση βάρους $r(t)=9e^{4t}$. Για την εύρεση των ιδιοσυναρτήσεων διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $\underline{\lambda<0}$: Η γενική λύση της δ.ε. είναι:

$$x(t)=c_1\exp\left[(-2+3\sqrt{-\lambda})t\right]+c_2\exp\left[(-2-3\sqrt{-\lambda})t\right]$$

και η απαίτηση να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες δίνει $(c_1,c_2)=(0,0)$ δηλαδή το π.σ.τ. δεν έχει αρνητικές ιδιοτιμές.

(ii) $\underline{\lambda=0}$: Η γενική λύση είναι:

$$x(t)=(c_1+c_2t)e^{-2t}$$

και από τις συνοριακές συνθήκες παίρνουμε $(c_1,c_2)=(0,0)$ δηλαδή και η $\lambda=0$ δεν είναι ιδιοτιμή.

(iii) $\underline{\lambda>0}$: Η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$x(t)=e^{-2t}\left(c_1\sigma\upsilon\nu 3\sqrt{\lambda}t+c_2\eta\mu 3\sqrt{\lambda}t\right)$$

Η συνοριακή συνθήκη $x(0)=0$ δίνει $c_1=0$, και η $x(\alpha)=0$ δίνει $c_2\eta\mu 3\sqrt{\lambda}\alpha=0$. Το πρόβλημα έχει λύσεις (γνήσιες) τότε και μόνο τότε αν

$$\eta\mu 3\sqrt{\lambda}\alpha=0$$

Επομένως οι ιδιοτιμές είναι:

$$\lambda_n=\frac{\pi^2n^2}{9\alpha^2}, \quad n=1,2,\ldots$$

και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις:

$$x_n(t)=ce^{-2t}\eta\mu\frac{n\pi t}{\alpha}, \quad n=1,2,\ldots$$

Θεώρημα 3.4.

Κάθε πρόβλημα Sturm-Liouville με χωρισμένες συνοριακές συνθήκες έχει μόνο απλές ιδιοτιμές (με πολλαπλότητα 1).

Απόδειξη

Έστω φ_1, φ_2 ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή λ. Οι φ_1, φ_2 ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες για t=α, δηλαδή:

$$\begin{cases} \alpha_1\varphi_1(\alpha)+\alpha_2\varphi_1'(\alpha)=0 \\ \alpha_1\varphi_2(\alpha)+\alpha_2\varphi_2'(\alpha)=0 \end{cases}$$

και επειδή $(\alpha_1,\alpha_2)\neq(0,0)$ θα είναι

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(\alpha) & \varphi_1'(\alpha) \\ \varphi_2(\alpha) & \varphi_2'(\alpha) \end{vmatrix}=0$$

δηλαδή:

$$W(\varphi_1,\varphi_2)(\alpha)=0.$$

Άρα οι φ_1, φ_2 είναι γραμμικά εξαρτημένες. Επομένως η ιδιοτιμή λ είναι απλή.

Παράδειγμα 3.2.

Θεωρούμε το σύστημα Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} x''+\lambda x=0 & , \ 0\le t\le 1 \\ x(0)=0 & \\ x(1)+hx'(1)=0, \ h>0: \text{σταθ.} & \end{cases}$$

Εδώ είναι p=1, q=0, r=1.

Για $\lambda\le 0$ το πρόβλημα δεν έχει ιδιοσυναρτήσεις.

Για λ>0 η λύση της εξίσωσης Sturm-Liouville είναι:

$$\varphi(t)=c_1\text{συν}\sqrt{\lambda}t+c_2\text{ημ}\sqrt{\lambda}t$$

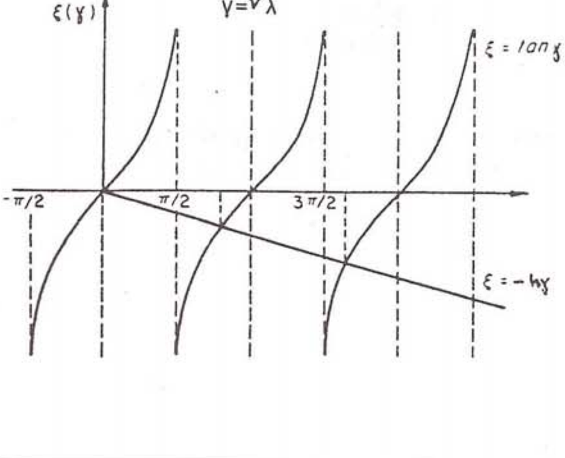
$$x(0)=0\Rightarrow c_1=0, \text{ οπότε } \varphi(t)=c_2\text{ημ}\sqrt{\lambda}t$$

$$x(1)+hx'(1)=0\Rightarrow \text{ημ}\sqrt{\lambda}+h\sqrt{\lambda}\text{συν}\sqrt{\lambda}=0 \text{ για } c_2\neq 0$$

που γράφεται

$$\text{εφ}\gamma=-h\gamma$$

όπου $\gamma=\sqrt{\lambda}$



Οι λύσεις αυτής της εξίσωσης δεν εκφράζονται με ένα απλό τρόπο, μπορούμε όμως να σχεδιάσουμε τις συναρτήσεις

$$\xi = \varepsilon\varphi\gamma$$

$$\text{και } \xi = -h\gamma$$

Οι ρίζες βρίσκονται από τις τομές των δύο καμπυλών, (όπως φαίνεται στο σχήμα) και μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχουν απείρου πλήθους ρίζες γ_n, $n=1,2,\ldots$

Σε κάθε γ_n αντιστοιχεί μία ιδιοτιμή

$$\lambda_n = \gamma_n^2, \quad n=1,2,\ldots$$

Έτσι υπάρχει μία ακολουθία ιδιοτιμών:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$$

με:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$$

Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι οι $\varphi_n(t) = \eta\mu\sqrt{\lambda_n}\,t$.

Παρατήρηση 3.1

Τα περιοδικά προβλήματα Sturm-Liouville μπορεί να έχουν και διπλές ιδιοτιμές, όπως φαίνεται στο επόμενο

Παράδειγμα 3.3.

Το περιοδικό πρόβλημα:

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0 \\ x(-\alpha) = x(\alpha) \\ x'(-\alpha) = x'(\alpha) \end{cases}$$

έχει ιδιοτιμές:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2, \quad n=1,2,\ldots$$

και αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις:

$$y_n(t) = A_n \sigma\upsilon\nu\frac{n\pi t}{\alpha}, \qquad \varphi_n(t) = B_n \eta\mu\frac{n\pi t}{\alpha}, \quad n=1,2,\ldots$$

όπου κάθε y_n είναι γραμμικά ανεξάρτητη με κάθε φ_n στο διάστημα $[-\alpha,\alpha]$. Δηλαδή κάθε ιδιοτιμή λ_n είναι διπλή.

Θεώρημα 3.5.

Όλες οι ιδιοτιμές ενός προβλήματος Sturm-Liouville είναι πραγματικές.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία μιγαδική ιδιοτιμή $\lambda=k+i\mu$, $k,\mu\in\mathbb{R}$ και $\mu\neq 0$ και έστω $\varphi(t)=u(t)+iv(t)$ η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση. Τότε ισχύει:

$$[p(t)(u(t)+iv(t))']'+(q(t)+(k+i\mu)r(t))(u(t)+iv(t))=0 \qquad (3.11)$$

και παίρνοντας τη συζυγή παράσταση της (3.11) συμπεραίνουμε ότι η $\overline{\varphi}(t)=u(t)-iv(t)$ είναι μία ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\overline{\lambda}=k-i\mu$. Επειδή $\lambda\neq\overline{\lambda}$, οι ιδιοσυναρτήσεις $\varphi,\overline{\varphi}$ είναι ορθογώνιες (θεώρημα 3.3), δηλαδή

$$\int_{\alpha}^{\beta} r(t)(u(t)+iv(t))(y(t)-iv(t))dt=\int_{\alpha}^{\beta} r(t)\left[(u(t))^2+(v(t))^2\right]dt=0$$

που είναι άτοπο γιατί, $r(t)>0$ $\forall t\in[\alpha,\beta]$ και η φ είναι διάφορη της μηδενικής αφού είναι ιδιοσυνάρτηση. Επομένως δεν υπάρχει μιγαδική ιδιοτιμή.

Θεώρημα 3.6.

Κάθε κανονικό πρόβλημα Sturm-Liouville με χωρισμένες δυνοριακές συνθήκες, έχει μία ακολουθία πραγματικών ιδιοτιμών

$$\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\dots \quad \text{με} \lim_{n\to -\infty}\lambda_n=+\infty.$$

Για κάθε m η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση φ_m έχει ακριβώς m ρίζες στο (α,β).

Θεώρημα 3.7.

Κάθε περιοδικό πρόβλημα Sturm-Liouville έχει μία ακολουθία πραγματικών ιδιοτιμών $\lambda_0<\lambda_1\leq\lambda_2<\lambda_3\leq\lambda_4<\dots$ με $\lim_{n\to+\infty}\lambda_n=+\infty$.

Η απόδειξη των θεωρημάτων 3.6 και 3.7 μπορεί να βρεθεί στο [16].

4. ΙΔΙΑΖΟΝΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Αν η εξίσωση Sturm-Liouville:

$$(px')'+qx=-\lambda rx, \quad t\in[\alpha,\beta] \tag{4.1}$$

είναι ιδιάζουσα, δηλαδή $p(\alpha)=0$ ή $p(\beta)=0$, τότε το αντίστοιχο πρόβλημα Sturm-Liouville λέγεται ιδιάζον πρόβλημα. Ιδιάζοντα προβλήματα έχουμε και στην περίπτωση που οι συναρτήσεις p, q, r απειρίζονται στα α,β, καθώς επίσης και όταν α ή β είναι το $-\infty$ ή το $+\infty$ αντίστοιχα.

Περίπτωση $p(\alpha)=0$

Εκείνο που μας ενδιαφέρει σε ένα πρόβλημα Sturm-Liouville είναι η ορθογωνιότητα των ιδιοσυναρτήσεων.
Για $\varepsilon>0$ (αρκετά μικρό) έχουμε (θεώρημα 3.1):

$$\int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta} r(t)x_1(t)x_2(t)dt=p(\beta)W(\beta)-p(\alpha+\varepsilon)W(\alpha+\varepsilon)$$

όπου $W(t)=W(x_1,x_2)(t)$ η ορίζουσα Wronski για τις λύσεις της (4.1) x_1,x_2.
Επομένως αν προκαθορίσουμε συνθήκες για τις x_1,x_2 έτσι ώστε να είναι:

$$\lim_{t\to\alpha^+} p(t)W(t)=0 \text{ και } p(\beta)W(\beta)=0$$

τότε εξασφαλίζεται η ορθογωνιότητά τους. Οι συνοριακές συνθήκες στην περίπτωση αυτή είναι:

$$\left|\lim_{t\to\alpha^+} x(t)\right|<+\infty, \quad \left|\lim_{t\to\alpha^+} x'(t)\right|<+\infty$$

$$\gamma_1x(\beta)+\delta_1x'(\beta)=0 \text{ με } |\gamma_1|+|\delta_2|>0$$

Περίπτωση $p(\beta)=0$

Η ιδιάζουσα περίπτωση $p(\beta)=0$ αντιμετωπίζεται εάν εργαστούμε στο διάστημα $[\alpha,\beta-\varepsilon]$ με $\varepsilon\to0$. Οι συνοριακές συνθήκες που εξασφαλίζουν την ορθογωνιότητα των x_1,x_2 είναι:

$$\left|\lim_{t\to\beta^-} x(t)\right|<+\infty,\ \left|\lim_{t\to\beta^-} x'(t)\right|<+\infty$$

$$\gamma_2 x(\alpha)+\delta_2 x'(\alpha)=0 \text{ με } |\gamma_2|+|\delta_2|>0$$

Περίπτωση $p(\alpha)=p(\beta)=0$

Στην περίπτωση αυτή οι συνοριακές συνθήκες εκφυλίζονται στις:

$$\left|\lim_{t\to\alpha^+} x(t)\right|<+\infty,\ \left|\lim_{t\to\alpha^+} x'(t)\right|<+\infty$$

$$\left|\lim_{t\to\beta^-} x(t)\right|<+\infty,\ \left|\lim_{t\to\beta^-} x'(t)\right|<+\infty$$

και σύμφωνα με το θεώρημα 3.1 οι x_1,x_2 είναι ορθογώνιες στο $[\alpha,\beta]$.

Στη συνέχεια αναφέρουμε δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα ιδιαζόντων προβλημάτων συνοριακών τιμών που αντιστοιχούν στις διαφορικές εξισώσεις Bessel και Legendre.

Παράδειγμα 4.1

Θεωρούμε το π.σ.τ.:

$$\begin{cases} t^2x''+tx'+(\lambda t^2-\alpha^2)x=0,\ 0<t\leq 1,\ \alpha\geq 0 & (E_1) \\ x(1)=0 & (\sigma_1) \\ \lim\limits_{t\to 0^+} x(t)<+\infty,\ \lim\limits_{t\to 0^+} x'(t)<+\infty & (\sigma_2) \end{cases}$$

Η δ.ε. (E_1) για $\lambda=1$ είναι η εξίσωση Bessel τάξης α. Πολλαπλασιάζοντας επί $1/t$ ανάγεται στην αυτοσυζυγή μορφή:

$$(tx')'+\left(\lambda t-\frac{\alpha^2}{t}\right)x=0.$$

Είναι δηλαδή

$$p(t)=t,\ q(t)=-\frac{\alpha^2}{t}\ r(t)=t$$

και επειδή

$$p(0)=0,\ \lim_{t\to 0^+} q(t)=-\infty$$

το π.σ.τ. $((E_1),(\sigma_1),(\sigma_2))$ είναι ένα ιδιάζον πρόβλημα Sturm-Liouville.

Για να βρούμε τις ιδιοτιμές του διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $\lambda=0$:

η (E_1) γίνεται:

$$t^2x''+tx'-\alpha^2x=0$$

που είναι η δ.ε. Euler και έχει τη γενική λύση:

$$x(t)=c_1t^{\alpha}+c_2t^{-\alpha},\quad \alpha>0$$

$$x(t)=c_1+c_2\ln t,\quad \alpha=0$$

Και στις δύο περιπτώσεις πρέπει να είναι $c_2=0$, λόγω της συνοριακής συνθήκης (σ_2). Επίσης, λόγω της (σ_1) είναι και $c_1=0$. Δηλαδή η μοναδική λύση είναι η μηδενική και έτσι το $\lambda=0$ δεν είναι ιδιοτιμή.

(ii) $\lambda>0$:

Με το μετασχηματισμό

$$t\sqrt{\lambda}=s$$

η (E_1) ανάγεται στη δ.ε. Bessel

$$s^2\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dx}{ds}+(s^2-\alpha^2)x=0$$

με γενική λύση:

$$x(s)=c_1J_\alpha(s)+c_2Y_\alpha(s)$$

δηλαδή:

$$x(\sqrt{\lambda}t)=c_1J_\alpha(\sqrt{\lambda}t)+c_2Y_\alpha(\sqrt{\lambda}t)$$

όπου J_α και Y_α είναι οι συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους, αντίστοιχα.

Η συνοριακή συνθήκη (σ_2) δίνει $c_2=0$, γιατί η Y_α απειρίζεται στο 0. Άρα οι ιδιοτιμές λ_n του προβλήματος είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$J_\alpha\left(\sqrt{\lambda_n}\right)=0,\quad n=1,2,\ldots$$

και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι:

$$x_n(t)=J_\alpha\left(\sqrt{\lambda_n}\,t\right),\quad n=1,2,\ldots$$

(iii) $\lambda<0$

Έστω $\lambda=-\mu^2$, $\mu>0$. Η δ.ε. (E_1) γίνεται:

$$t^2x''+tx'-(\mu^2t^2+\alpha^2)x=0$$

που είναι η τροποποιημένη εξίσωση Bessel και έχει λύση:

$$x(t)=c_1I_\alpha(\mu t)+c_2k_\alpha(\mu t)$$

όπου I_α, k_α είναι οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel[1].

Λόγω της (σ_2) είναι $c_2=0$, αφού η k_α απειρίζεται στο $t=0$. Η συνοριακή συνθήκη (σ_1) δίνει:

$$c_1 I_\alpha(\mu)=0$$

και επειδή η I_α δεν μηδενίζεται για $\mu>0$, συμπεραίνουμε ότι $c_1=0$, δηλαδή το πρόβλημα συνοριακών τιμών δεν έχει αρνητικές ιδιοτιμές.

Παράδειγμα 4.2

Η δ.ε. Legendre:

$$[(1-t^2)x']'+\lambda x=0,\quad 1-<t<1 \qquad (E_2)$$

είναι τύπου Sturm-Liouville με $p(t)=1-t^2$, $q(t)=0$, $r(t)=1$.

Υποθέτουμε ότι:

$$\left|\lim_{t\to -1^+} x(t)\right|<+\infty \qquad \left|\lim_{t\to -1^+} x'(t)\right|<+\infty$$

$$\left|\lim_{t\to 1^-} x(t)\right|<+\infty \qquad \left|\lim_{t\to 1^-} x'(t)\right|<+\infty \qquad (\sigma)$$

Το π.σ.τ. $((E_2),\ (\sigma))$ είναι ένα ιδιάζον πρόβλημα Sturm-Liouville και έχει ιδιοτιμές:

$$\lambda_n=n(n+1),\ n=0,1,2,\ldots$$

και ιδιοσυναρτήσεις:

$$x_n(t)=P_n(t),\ n=0,1,2,\ldots$$

όπου $P_n(t)$ είναι τα πολυώνυμα Legendre βαθμού n και δίνονται από τον τύπο (Rodrigues):

$$P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dt^n}\cdot(t^2-1)^n,\ P_0(t)=1$$

---

1 $$I_\alpha(z)=\frac{J_\alpha(iz)}{i^\alpha},\ K_\alpha(z)=\frac{\pi i}{2}i^\alpha\{J_\alpha(iz)+iY_\alpha(iz)\},\ i^2=1,\ z\in\mathbb{C}.$$