

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ε.Κ.Π.Α.
411. ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΙΣΩΣΕΙΣ Ι
ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ
13 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2021

I. 3.5M Να λυθεί το ακόλουθο ΠΑΤ

$$\begin{cases} xu_x + yu_y = u, & y > x^2, \\ u(x, x^2) = 1. \end{cases} \quad (1)$$

II. 3M Να λυθεί με τη μέθοδο αλλαγής συντεταγμένων η ακόλουθη μερική διαφορική εξίσωση

$$u_x + u_y + u = e^{x+2y}. \quad (2)$$

III. 3.5M Να λυθεί το ακόλουθο ΠΑΤ

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & \text{στο } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases} \end{cases} \quad (3)$$

Υποδείξεις

I. Λύνεται όπως το Παράδειγμα 2.12 των σημειώσεων (αντί για την καμπύλη $\Gamma: x = -1$, εδώ έχουμε την $y = x^2$), και έχει λύση

$$u(x, y) = \frac{x^2}{y}.$$

II. Λύνεται όπως το Παράδειγμα 2.3 των σημειώσεων (χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό παράγοντα e^u για τη λύση της ΣΔΕ), και έχει λύση

$$u(x, y) = \frac{1}{4}e^{x+2y} + e^{-x}f(y-x).$$

III. Βλ. Παραδείγματος 3, σελ. 142 στο βιβλίο του Evans.

Evans L. C. (2010) *Partial Differential Equations*, 2nd ed., American Mathematical Society. (βλ. Βοηθητικό Υλικό στην Eclass)