ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ε.Κ.Π.Α.

411. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι

Εξέταση 18 Φεβρουαρίου 2021

Θέμα 1. (i) Θεωρούμε το πρόβλημα Cauchy:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{u^2}{2}\right)_x + u_t = 0, \;\; x \in \mathbb{R}, \; t > 0, \\ u\left(x,0\right) = \phi\left(x\right) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ 1-x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x \ge 1. \end{cases} \end{cases}$$

(α΄) Να βρεθεί ο χρόνος θραύσης.

(β΄) Να βρεθεί η γενικευμένη λύση του προβλήματος.

(γ΄) Να σχεδιαστούν στιγμιότυπα της λύσης (δηλ. οι γραφικές παραστάσεις της u ως προς x) για διάφορες χρονικές στιγμές.

(ii) Να λυθεί το πρόβλημα Cauchy:

$$\begin{cases} u_t + u_x u = 0, \;\; x \in \mathbb{R}, \; t > 0, \\ u\left(x,0\right) = \phi\left(x\right) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases} \end{cases}$$

Θέμα 2. Να δοθεί σε ολοκληρωτική αναπαράσταση μια λύση του ακόλουθου προβλήματος Cauchy:

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} = 0, & \text{στο} \quad \mathbb{R} \times (0,\infty)\,, \\ u = g, & \text{στο} \quad \mathbb{R} \times \{t=0\}, \end{cases}$$

για $g \in L^1\left(\mathbb{R}\right) \cap L^2\left(\mathbb{R}\right)$.

Θέμα 3. Δίνεται το πρόβλημα

$$\begin{cases} \Delta_{\text{κυκ}} u\left(r,\theta\right) = 0, & r < a \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} = f\left(\theta\right), & r = a. \end{cases} \tag{1}$$

(α΄) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί η αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη λύσης.

(β′) Να βρεθεί η λύση σε μορφή σειράς με τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών.

(γ′) Να δοθεί η λύση σε κλειστή μορφή.

Θέμα 4. (i) Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(t) = e^t g(t)$.

(ii) Να λυθεί το πρόβλημά Cauchy:

$$\begin{cases} u_{tt} + 2u_t + u = u_{xx}, & \text{στο} \quad \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u = x, & \text{στο} \quad \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \\ u_t = 1, & \text{στο} \quad \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

με κατάλληλο μετασχηματισμό.

Θέμα 5. Δίνεται το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t - 9u_{xx} = 0, & \text{στο} \quad (0,3) \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{στο} \quad \{x = 0\} \times [0, \infty), \\ u = 0, & \text{στο} \quad \{x = 3\} \times [0, \infty), \\ u = 6 \sin \dfrac{\pi x}{3} + 2 \sin \pi x, & \text{στο} \quad [0, 3] \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι $0 \le u(x,t) \le 4\sqrt{2}$.

<u>Βοηθητικό υλικό:</u>

- $2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} = \sin a + \sin b$
- $2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} = \sin a - \sin b$
- $2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} = \cos a + \cos b$
- $-2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} = \cos a - \cos b$
- $-\dfrac{1}{2} \ln\left(1 + y^2 - 2y \cos \phi\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} y^n \cos(n\phi)$
- $(u * v)\hat{} = \sqrt{2\pi}\,\hat{u}\hat{v}$ για $u, v \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.
- $\Delta_{\text{κυκ}} = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}$
- $\displaystyle\iint\limits_U v \Delta u \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_U \nabla v \cdot \nabla u \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial U} v \nabla u \cdot \vec{n} \,\mathrm{d}S = \int_{\partial U} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \,\mathrm{d}S$ για $u \in C^2(U) \cap C^1\left(\bar{U}\right)$ και $v \in C^1(U) \cap C\left(\bar{U}\right)$, όπου n εξωτερικό κανονικό διάνυσμα κάθετο στο ∂U
- $\displaystyle\iint\limits_U (v \Delta u - u \Delta v) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial U} \left(v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\right) \mathrm{d}S$ για $u, v \in C^2(U) \cap C^1\left(\bar{U}\right)$, όπου n εξωτερικό κανονικό διάνυσμα κάθετο στο ∂U

Λύσεις

Θέμα 1. (i) (Βλ. Παραδείγματα 2.34 και 2.50 των σημειώσεων)

(α′) Μέθοδος των χαρακτηριστικών

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = z, & x(0) = x_0, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0, & z(0) = \phi(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow x(t;x_0) = \phi(x_0)\, t + x_0, \tag{2}$$

δηλαδή

$$x(t;x_0) = \begin{cases} t + x_0, & x_0 < 0, \\ (1 - x_0)\, t + x_0, & x_0 \in [0,1], \\ x_0, & x_0 > 1. \end{cases} \tag{3}$$

Οι δύο «ακραίες» χαρακτηριστικές $x(t;0) = t$ και $x(t;1) = 1$ τέμνονται στο σημείο $(1,1)$, και όλες οι ενδιάμεσες χαρακτηριστικές διέρχονται επίσης από το σημείο αυτό (βλ. Σχήμα 1). Ο χρόνος θραύσης είναι τέτοιος ώστε:

$$t_\theta = 1. \tag{4}$$

Εναλλακτικά ο χρόνος θραύσης προκύπτει από τη σχέση (2.53) των σημειώσεων

$$t_\theta = \inf_{x_0 \in [0,1]} \left[-\frac{1}{\phi'(x_0)} \right] = \inf_{x_0 \in [0,1]} \left[-\frac{1}{-1} \right] = 1,$$

(β′) Η κλασική λύση του ΠΑΤ για $0 \le t < 1$ δίνεται από τη σχέση

$$u_{\kappa\lambda\alpha\sigma.}(x,t) = \begin{cases} 1, & x \le t, \\ \dfrac{1-x}{1-t}, & t < x < 1, \\ 0, & x \ge 1, \end{cases} \tag{5}$$

Τη χρονική στιγμή $t = 1$ η λύση του ΠΑΤ είναι ασυνεχής

$$u(x,1) = \begin{cases} 1, & x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Από την συνθήκη Rankine-Hugoniot έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} \frac{(u^A)^2 - (u^\Delta)^2}{u^A - u^\Delta} = \frac{u^A + u^\Delta}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2},$$

οπότε

$$x(t) = \frac{1}{2} t + b.$$

Για $t = 1 : x(1) = \dfrac{1}{2} + b$, αλλά $x(1) = 1$ (αφού διέρχεται από το σημείο θραύσης), και τελικά

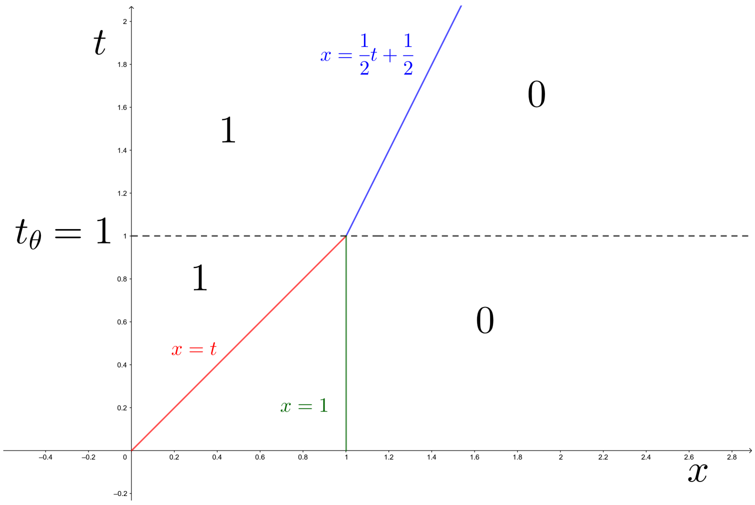
$$x(t) = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2}.$$

Συνεπώς, μια ολική γενικευμένη λύση του ΠΑΤ (βλ. Σχήμα 1) είναι

$$u(x,t) = \begin{cases} u_{\kappa\lambda\alpha\sigma.}, & t < 1, \\ u_{\alpha\sigma\vartheta.}, & t \geq 1, \end{cases}$$

όπου για $t < 1$ η $u_{\kappa\lambda\alpha\sigma.}$ είναι η κλασική λύση που δίνεται από τη σχέση (5) και για $t \geq 1$ η $u_{\alpha\sigma\vartheta.}$ είναι η ασθενής λύση (βλ. Σχήματα 1 και 2)

$$u_{\alpha\sigma\vartheta.}(x,t) = \begin{cases} 1, & x < \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}, \\ \\ 0, & x > \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}, \end{cases}$$



Σχήμα 1: Η ημιευθεία ασυνέχειας και η γενικευμένη λύση του ΠΑΤ. (Δεν ήταν απαραίτητο να σχεδιαστεί.)

(γ′) Για στιγμιότυπα της λύσης για διάφορες χρονικές στιγμές βλ. Σχήμα 2.

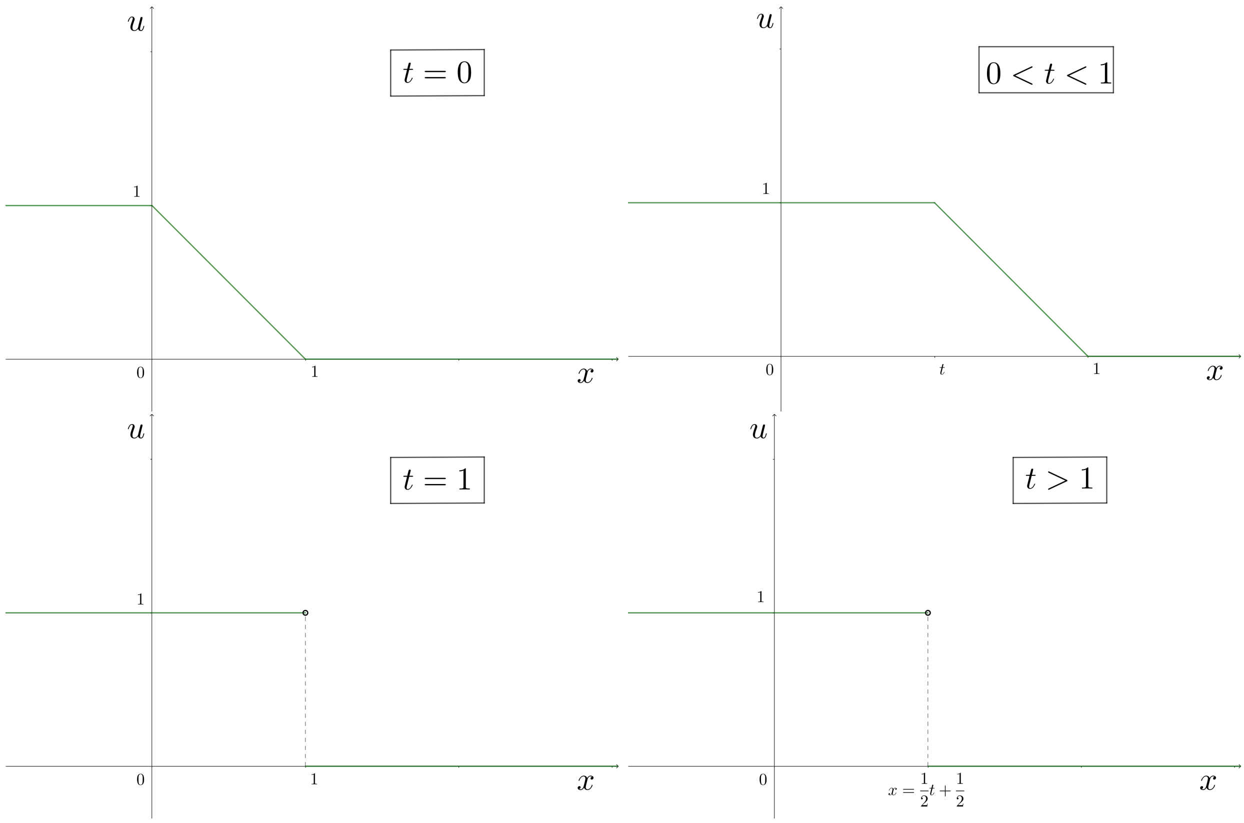
(ii) (Βλ. Παραδείγματα 2.50 και 2.51 των σημειώσεων)
Εδώ έχουμε ένα πρόβλημα Riemann. Η μέθοδος των χαρακτηριστικών μας έδωσε στο προηγούμενο ερώτημα (βλ. (2))

$$x(t;x_0) = \begin{cases} x_0, & x_0 < 0, \\ t + x_0, & x_0 \in (0,1), \\ x_0, & x_0 > 1. \end{cases} \tag{6}$$

Εδώ $F(u) = \frac{u^2}{2}$ <u>κυρτή $(F'' > 0)$</u> και $(F')^{-1}(\xi) = \xi$.

- Ασυνέχεια στο $x = 0$:
  Αφού $t > 0$, τότε στο $[u^A, u^\Delta] = [0,1]$ με $u^A = 0 < 1 = u^\Delta$ έχουμε λύση βεντάλια

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x}{t}, & 0 < x < t, \\ 1, & x \geq t, \end{cases}$$



Σχήμα 2

- Ασυνέχεια στο $x = 1$:
  Όμως οι χαρακτηριστικές $x = 1$ και $x = t + 1$ τέμνονται για πρώτη φορά στο σημείο $(1, 0)$ και έχουμε κρουστικό κύμα Από την συνθήκη Rankine-Hugoniot έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{u^A + u^\Delta}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2},$$

οπότε

$$x(t) = \frac{1}{2}t + b.$$

και αφού διέρχεται από το σημείο $(1, 0)$, έχουμε τελικά

$$x(t) = \frac{1}{2}t + 1, \quad t \in [0, 2).$$

Έτσι έχουμε τη λύση

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x < \frac{1}{2}t + 1, \\ \\ 0, & x > \frac{1}{2}t + 1, \end{cases}$$

Θέμα 2. (Θεμελιώδης λύση της εξίσωσης του Schrödinger)
(Βλ. Παραδείγματα 9.8 και 9.10 των σημειώσεων)
Εδώ έχουμε το ΠΑΤ για την εξίσωση του Schrödinger σε όλη την ευθεία. Υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Fourier της u ως προς x μόνο. Συνεπώς έχουμε

$$\begin{cases} i\hat{u}_t + (i\xi)^2 \hat{u} & \text{για} \quad t > 0, \\ \hat{u} = \hat{g} & \text{για} \quad t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i\hat{u}_t = \xi^2 \hat{u} & \text{για} \quad t > 0, \\ \hat{u} = \hat{g} & \text{για} \quad t = 0 \end{cases}$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-i\xi^2 t}\hat{g}(\xi).$$

Από την ιδιότητα $(u * v)\hat{} = \sqrt{2\pi}\hat{u}\hat{v}$ έχουμε

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-i\xi^2 t}\right)\check{} * g. \tag{7}$$

Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη.

Σημείωση 1. *Χρησιμοποιώντας τη σχέση (απόδειξη με χρήση Μιγαδικής Ανάλυσης)*

$$\left(e^{-ax^2}\right)\hat{} = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \Rightarrow \left(\left(e^{-ax^2}\right)\hat{}\right)\check{} = \left(\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}\right)\check{},$$

με $\alpha = 1/(4it)$ *παίρνουμε*

$$\frac{1}{\sqrt{2it}}e^{\frac{ix^2}{4t}} = \left(e^{-i\xi^2 t}\right)\check{}, \tag{8}$$

το οποίο αντικαθιστώντας το στην (7) μας δίνει τη θεμελιώδη λύση της εξίσωσης του Schrödinger

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi it}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i(x-y)^2}{4t}} g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Θέμα 3. (Βλ. Ενότητα 5.2.3 των σημειώσεων)

(α΄) Από τον 2ο τύπο του Green

$$\iint\limits_U (v\Delta u - u\Delta v)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial U}\left(v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\right)\ \mathrm{d}S.$$

(ή απευθείας από το θεώρημα της απόκλισης) έχουμε για $v = 1$

$$\iint\limits_U \Delta u\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial U}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\ \mathrm{d}S = a\int_0^{2\pi} f(\theta)\ \mathrm{d}\theta,$$

επειδή $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial u}{\partial r}$ και $\mathrm{d}S = a\mathrm{d}\theta$. Αλλά $\Delta_{\text{κυκ}}u = 0$, άρα αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη λύσης είναι

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\ \mathrm{d}\theta = 0. \tag{9}$$

(β΄) Έχουμε το εσωτερικό ΠΣΤ Neumann στον δίσκο:

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 \le r < a, \ \ 0 \le \theta < 2\pi, \\ \dfrac{\partial u(a,\theta)}{\partial r} = f(\theta). \end{cases}$$

Εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση του προβλήματος Dirichlet στον δίσκο (βλ. Ενότητα 5.2.3 των σημειώσεων) βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης Laplace

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{a^n} \left[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \right], \qquad 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi. \tag{10}$$

Παραγωγίζοντας ως προς r και εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη παίρνουμε

$$\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{r^{n-1}}{a^n} \left[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \right], \tag{11}$$

με

$$\frac{\partial u(a,\theta)}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a} \left[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \right] = f(\theta). \tag{12}$$

Παρατηρούμε ότι εδώ $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(s)\ \mathrm{d}s = 0$, λόγω της (9).
Από την (12) βρίσκουμε ότι

$$a_n = \frac{a}{n\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \cos(n\theta)\, \mathrm{d}s, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

$$b_n = \frac{a}{n\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \sin(n\theta)\, \mathrm{d}s, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Θέτοντας τις (13)-(14) στην (10), παίρνουμε

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^n \int_0^{2\pi} f(s) \cos\left[n(\theta - s)\right] \mathrm{d}s \Rightarrow$$

$$u(r,\theta) = \frac{a}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos\left[n(\theta - s)\right] \right\} f(s)\, \mathrm{d}s. \tag{15}$$

(γ΄) Από την (15) και την σχέση $-\frac{1}{2} \ln(1 + y^2 - 2y\cos\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} y^n \cos(n\phi)$ έχουμε

$$u(r,\theta) = -\frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln\left(1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{2r}{a} \cos(\theta - s) \right) f(s)\, \mathrm{d}s.$$

Θέμα 4. (Κυματική εξίσωση με απόσβεση)
(Βλ. Πρόταση 7.5 και Παράδειγμα 7.7 των σημειώσεων)

(i) $f'(t) = e^t g(t) + e^t g'(t)$.

(ii) Θέτουμε $w(x,t) = e^t u(x,t) \Leftrightarrow u(x,t) = e^{-t} w(x,t)$, κι έτσι το ΠΑΤ μας ανάγεται στο ΠΑΤ

$$\begin{cases} w_{tt} = w_{xx}, & \text{στο} \quad \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ w = x, & \text{στο} \quad \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \\ w_t = x + 1, & \text{στο} \quad \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

που είναι ένα ΠΑΤ για την κυματική εξίσωση με $c = 1$. Τότε από τον τύπος του d'Alembert (βλ. Πρόταση 7.5) έχουμε ότι η λύση του τελευταίου προβλήματος είναι

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[(x+t) + (x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} (s+1)\,\mathrm{d}s = x + xt + t.$$

Άρα η λύση του αρχικού ΠΑΤ είναι

$$u(x,t) = e^{-t}(x + xt + t).$$

Θέμα 5. (Βλ. Ενότητα 6.3 και Παράδειγμα 6.11 των σημειώσεων)
Από την αρχή μεγίστου η λύση u του προβλήματος λαμβάνει τη μέγιστη/ελάχιστη τιμή της στο παραβολικό σύνορο. Έστω $f(x) = 6\sin\frac{\pi x}{3} + 2\sin\pi x$. Τότε

$$f'(x) = 2\pi\left(\cos\frac{\pi x}{3} + \cos\pi x\right) = 0,$$

και από τη σχέση $2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} = \cos a + \cos b$ έχουμε ισοδύναμα

$$4\pi\cdot\cos\frac{2\pi x}{3}\cdot\cos\frac{\pi x}{3} = 0,$$

που ισχύει για $x = \frac{3}{4}, \frac{3}{2}$ και $\frac{9}{4}$ (αφού $x \in [0,3]$). Για τις τιμές αυτές έχουμε

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{9}{4}\right) = 4\sqrt{2} \quad \text{και} \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = 4,$$

και αφού $u = 0$ στα $\{x = 0\}\times[0,\infty)$ και $\{x = 3\}\times[0,\infty)$, παίρνουμε

$$0 \le u(x,t) \le 4\sqrt{2}.$$