411. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι

Εργασία 2η

1. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (προβλήματος Cauchy):

$$\begin{cases} u_t + (\cos u)\, u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} -\pi/2, & x > 0 \\ -\pi/4, & x < 0. \end{cases} \end{cases}$$

   Τι είδους πρόβλημα είναι το παραπάνω και ποιες συνθήκες εξετάζουμε;

2. Να βρεθεί ο χρόνος θραύσης του προβλήματος αρχικών τιμών (προβλήματος Cauchy)

$$\begin{cases} u_t + \left(\dfrac{u^3}{3}\right)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} -k\left(1 - e^{x}\right), & x \le 0 \\ -k\left(1 - e^{-x}\right), & x > 0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

3. Δίνεται το ΠΣΤ:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y) \in (0,1) \times (0,1), \\ u(x,0) = x(x-1), & x \in [0,1], \\ u(x,1) = 0, & x \in [0,1], \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, & y \in [0,1]. \end{cases} \tag{1}$$

   (i) Τι είδους ΜΔΕ είναι η παραπάνω;
   (ii) Χωρίς να λύσετε, να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή της λύσης του ΠΣΤ (1).
   (iii) Στη συνέχεια, να λύσετε το ΠΣΤ (1).

4. Να βρεθεί η λύση $u(x,t)$ του προβλήματος αρχικών-συνοριακών συνθηκών:

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx}, & (x,t) \in (0,3) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \sin\dfrac{\pi x}{6} + 4\sin\dfrac{5\pi x}{6}, & x \in [0,3], \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(3,t) = 0, & t \ge 0. \end{cases} \tag{2}$$

   Τι είδους ΜΔΕ είναι η παραπάνω;

5. Δίνεται το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών συνθηκών:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \sin x + \theta + \dfrac{\phi - \theta}{\pi} x, & x \in [0,\pi], \\ u(0,t) = \theta, \quad u(\pi,t) = \phi, & t \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$

(i) Να βρεθεί η λύση $u(x,t)$ του προβλήματος αρχικών-συνοριακών συνθηκών (3) με αλλαγή μεταβλητής.

(ii) Αν αντί των παραπάνω συνοριακών συνθηκών, ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0,$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που περιγράφει την ολική ενέργεια στο διάστημα την χρονική στιγμή t

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\pi [u(x,t)]^2 \, \mathrm{d}x$$

είναι φθίνουσα. Είναι η συνάρτηση E γνησίως φθίνουσα;