411. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι

Λύσεις 1η Εργασίας

1. Να λυθούν με τη μέθοδο αλλαγής συντεταγμένων οι ΜΔΕ:

   (i) $x^2 u_x + y^2 u_y = 2xy$

   (ii) $u_t + t^2 u_x = 4u$

   Λύση:

   (i) Μέσω του μετασχηματισμού:

   $$\xi(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$$
   $$\eta(x,y) = x$$

   παίρνουμε τη λύση

   $$u(x,y) = \frac{2xy}{x-y} \ln\left|\frac{x}{y}\right| + f\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right), \quad (x,y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2.$$

   (ii) Μέσω του μετασχηματισμού:

   $$\xi(x,y) = t^3 - 3x$$
   $$\eta(x,y) = t$$

   παίρνουμε τη λύση

   $$u(x,y) = e^{4t} f\left(t^3 - 3x\right).$$

2. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών (πρόβλημα Cauchy) με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών:

   $$\begin{cases} (x+2)\, u_x + 2y u_y = 2u, & x > -1, y > 0, \\ u(-1,y) = \sqrt{y}. \end{cases}$$

   Λύση: Χαρακτηριστικές:

   $$x(s) = -2 + (x_0 + 2)\, e^s, \tag{1}$$
   $$y(s) = y_0 e^{2s}, \tag{2}$$
   $$z(s) = u(x_0, y_0)\, e^{2s}. \tag{3}$$

   Έστω $x(\bar{s}) = -1,\ y(\bar{s}) = \bar{y}$. Τότε αντικαθιστώντας στις (1)-(2) και εφαρμόζοντας στην (3) αυτά που βρήκαμε παίρνουμε τελικά

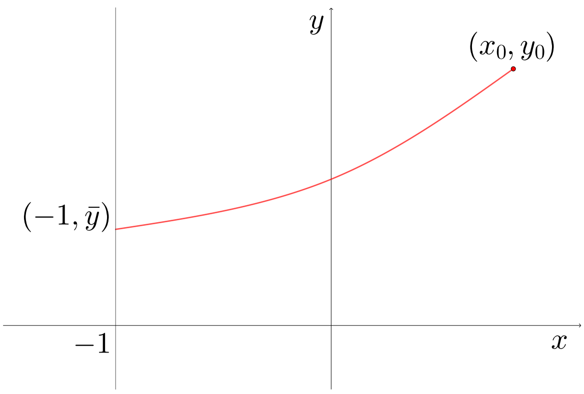
   $$z(\bar{s}) = u(x_0, y_0)\, e^{2\bar{s}} = u(x_0, y_0) \frac{1}{(x_0 + 2)^2}. \tag{4}$$

Επιπλέον, από τη βοηθητική συνθήκη του προβλήματος έχουμε

$$z(\bar{s}) = u(x(\bar{s}), y(\bar{s})) = u(-1, \bar{y}) = \sqrt{\bar{y}} = \frac{\sqrt{y_0}}{x_0 + 2}. \tag{5}$$

Από (4) και (5) προκύπτει η λύση του προβλήματος

$$u(x, y) = \sqrt{y}(x + 2).$$



3. Να εξετάσετε αν η ΜΔΕ

$$uu_x + u_y = 1$$

έχει μοναδική κλασική λύση για τα ακόλουθα αρχικά δεδομένα:

(i) $x = s, y = s, z = \dfrac{s}{2}, \quad s \in [0, 1]$

(ii) $x = \dfrac{s^2}{2}, y = s, z = s, \quad s \in [0, 1]$

(iii) $x = s^2, y = 2s, z = s, \quad s \in [0, 1]$

Λύση: (Μέθοδο των χαρακτηριστικών)
Έχουμε την αρχική συνθήκη

$$u = h, \quad \text{επί της} \quad \Gamma = \{(x, y) \mid x = f(s), y = g(s), s \in (0, 1)\}.$$

Επί της Γ έχουμε

$$a = h(s), \quad b = 1, \quad d = 1.$$

(i) $f(s) = s, \quad g(s) = s, \quad h(s) = s/2$, τότε

$$ag' - bf' = 1 - \frac{s}{2} > 0$$

άρα το πρόβλημα έχει μοναδική λύση.

(ii) $f(s) = \dfrac{s^2}{2}, \quad g(s) = s, \quad h(s) = s$, τότε

$$\frac{f'}{a} = 1, \qquad \frac{g'}{b} = 1, \qquad \frac{h'}{d} = 1,$$

και αφού

$$\frac{f'}{a} = \frac{g'}{b} = \frac{h'}{d},$$

το πρόβλημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

(iii) $f(s) = s^2, \quad g(s) = 2s, \quad h(s) = s$, τότε

$$\frac{f'}{a} = 2, \qquad \frac{g'}{b} = 2, \qquad \frac{h'}{d} = 1,$$

και αφού

$$\frac{f'}{a} = \frac{g'}{b} \neq \frac{h'}{d},$$

το πρόβλημα δεν έχει λύση.

4. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (προβλήματος Cauchy):

$$\begin{cases} u_t + (\cos u)\, u_x = 0, \ \ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} \pi/2, & x > 0 \\ -\pi/2, & x < 0. \end{cases} \end{cases}$$

<u>Λύση:</u>
Εδώ έχουμε ένα πρόβλημα Riemann, δηλαδή μια εξίσωση της μορφής $u_t + (F(u))_x = 0$, με $F(u) = \sin u$, και σταθερά αρχικά δεδομένα που έχουν μία ασυνέχεια. Στο διάστημα $[u^A, u^\Delta] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ η F δεν είναι ούτε κυρτή, ούτε κοίλη. Επομένως, η λύση μπορεί να περιλαμβάνει αρκετά διαφορετικά κύματα (κύματα αραίωσης, κρουστικά κύματα). Με τη θεωρία που έχουμε παραδώσει δεν μπορούμε να την βρούμε (αναφέρουμε απλά ότι μπορεί να υπολογιστεί με χρήση κυρτής θήκης).

5. Να ταξινομηθούν οι ακόλουθες ΜΔΕ, να βρεθούν οι αντίστοιχες χαρακτηριστικές καμπύλες και οι κανονικές μορφές τους:

(i) $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0$

(ii) $x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$

(iii) $u_{xx} - 2x u_{yy} = 0$

<u>Λύση:</u>

(i) $ab - h^2 = -\cos^2 x - \sin^2 x = -1 < 0$, άρα υπερβολική.
Η χαρακτηριστικές καμπύλες είναι: $x - y + \cos x = c_1, \quad x + y - \cos x = c_2$. Θωρούμε τον μετασχηματισμό

$$\begin{cases} \xi = x - y + \cos x \\ \eta = x + y - \cos x \end{cases}$$

κι έτσι η αρχική εξίσωση ανάγεται στην κανονική μορφή

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

(ii) $ab - h^2 = x^2y^2 - (xy)^2 = 0$, άρα παραβολική.

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $\dfrac{y}{x} = c$ (οικογένεια ευθειών).

Θωρούμε τον μετασχηματισμό

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{y}{x} \\ \eta = y \end{cases}$$

κι έτσι η αρχική εξίσωση ανάγεται στην κανονική μορφή

$$y^2 u_{\eta\eta} = 0 \quad \text{ή} \quad u_{\eta\eta} = 0 \quad \text{για} \quad y \neq 0.$$

(iii) $ab - h^2 = -2x$, άρα η εξίσωση είναι:

- υπερβολική στην περιοχή $x > 0$
- παραβολική κατά μήκος της ευθείας (άξονα) $x = 0$
- ελλειπτική στην περιοχή $x < 0$

(α′) $x > 0$:

Οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι: $y - \dfrac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} = c_1, \quad y + \dfrac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} = c_2$

Θωρούμε τον μετασχηματισμό

$$\begin{cases} \xi = y - \dfrac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} \\ \eta = y + \dfrac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}, \end{cases}$$

κι έτσι η αρχική εξίσωση ανάγεται στην κανονική μορφή

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{6(\xi - \eta)}(u_\xi - u_\eta).$$

(β′) $x < 0$:

Οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι: $y - i\dfrac{2\sqrt{2}}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} = c_1, \quad y + i\dfrac{2\sqrt{2}}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} = c_2$

Θωρούμε τον μετασχηματισμό

$$\begin{cases} \xi = y - i\dfrac{2\sqrt{2}}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} \\ \eta = y + i\dfrac{2\sqrt{2}}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}, \end{cases}$$

κι έτσι η αρχική εξίσωση ανάγεται στην κανονική μορφή

$$u_{\sigma\sigma} + u_{\tau\tau} = -\frac{1}{3\tau}u_\tau.$$