Λύσεις

Θέμα 1 :

(α) $X_{2n-1} \sim \text{discr. Unif}(\{1,2,\dots,2n\})$

$X_{2n} \sim \text{discr. Unif}(\{1,2,\dots,2n+1\})$

$$A_n = \{X_{2n-1} > X_{2n}\}$$

Λόγω του ισοπίθανου και της ανεξαρτησίας, έχουμε απ'ευθείας

$$P(A_n) = \frac{\#\{(i,j) : i>j, (i,j) \in \{1,2,\dots 2n\} \times \{1,2,\dots,2n+1\}\}}{2n(2n+1)}$$

$$= \frac{(2n)^2 - 2n}{4n(2n+1)} = \boxed{\frac{2n-1}{4n+2}}, \quad n \geq 1.$$

(β) $A_n \in \sigma(X_{2n-1}, X_{2n}), \ \forall n \geq 1.$

Παρατηρούμε ότι αν $I_n = \{2n-1, 2n\}$, $\forall n \geq 1$, τότε

$I = \{1,2,3,\dots\} = \bigcup_n I_n$, και $I_i I_j = \emptyset$, για $i \neq j$.

Άρα η $(I_n)_{n\geq 1}$ αποτελεί διαμέριση του I και

$A_n \in \sigma(\{X_i : i \in I_n\})$, $\forall n \geq 1$, των ανεξ. τ.μ. $(X_n)_{n\in I}$.

Συμπεραίνουμε (εφ'όσον δεν υπάρχουν επικαλύψεις), ότι τα (A_n) είναι ανεξ. ενδεχ.

(γ) Αν $\omega \notin A_1$, τότε $\omega \notin \bigcap_{n\geq 1} A_n$, και (*)

αν $\omega \in A_1$, τότε $\omega \in \bigcup_{n\geq 1} A_n$. (**)

Άρα η πραγματοποίηση ή μη (στη δεύτερη και πρώτη περίπτωση αντίστοιχα) του πρώτου ενδεχομένου, επηρεάζει την πραγματοποίηση ή μη των ενδεχομένων που θέλουμε να είναι στην τελική σ-άλγεβρα, το οποίο δεν είναι δυνατόν. Άρα $\bigcap_n A_n$ και $\bigcup_n A_n$ δεν είναι στοιχεία της $\mathcal{A}^\infty$.

Εναλλακτικά, θα μπορούσε κάποιος να γράψει ότι

$$\bigcap_{n\geq 1} A_n, \bigcup_{n\geq 1} A_n \notin \sigma(A_2, A_3, \dots) \equiv \mathcal{A}_2^{\infty} \Rightarrow \bigcap_{n\geq 1} A_n, \bigcup_{n\geq 1} A_n \notin \mathcal{A}^{\infty}$$

αφού $\mathcal{A}^{\infty} = \bigcap_{m\geq 1} \mathcal{A}_m^{\infty}$.

Πράγματι η γνώση της πραγματοποίησης ή μη ενός ενδεχομένου στην $\sigma(A_2, A_3, \dots)$ είναι πλήρως καθορισμένη από την πραγματοποίηση ή μη των A_n, για $n\geq 2$. Όμως η επιρροή της $\bigcap_{n\geq 1} A_n$ και $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ στο A_1 είναι εμφανής από την (*) και (**).

→ Για το $\liminf_n A_n$ και $\limsup_n A_n$, όπως στη θεωρία, π.χ.

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) = \bigcap_{n\geq m}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \in \mathcal{A}_m^{\infty}, \quad \forall m\geq 1,$$

αφού η $\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$ είναι φθίνουσα. Τελικά $\boxed{\limsup_n A_n \in \mathcal{A}^{\infty}} = \bigcap_{m\geq 1} \mathcal{A}_m^{\infty}$

Παρόμοια $\boxed{\liminf_n A_n \in \mathcal{A}^{\infty}}$

(δ) Ισχύει ότι

$$P\left(\bigcap_n A_n\right) \leq P\left(\liminf_n A_n\right) \leq P\left(\limsup_n A_n\right) \leq P\left(\bigcup_n A_n\right), \quad (1)$$

αφού $\bigcap_n A_n \subset \liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n \subset \bigcup_n A_n$.

Επίσης από το (α) έχουμε $P(A_n) = \dfrac{2n-1}{4n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{2} > 0$

$$\Rightarrow \sum_n P(A_n) = +\infty \Rightarrow \boxed{P\left(\limsup_n A_n\right) = 1},$$

αφού λόγω της ανεξαρτησίας των $(A_n)_{n\geq 1}$, ισχύει το 2ο Λήμμα Borel–Cantelli

Από την (1), έχουμε $\boxed{P\left(\bigcup_n A_n\right) = 1}$.

Επιπλέον $P\left(\liminf_n A_n\right) \leq \liminf_n P(A_n) = \lim_n P(A_n) = \frac{1}{2} \quad (2)$

Από την ανεξαρτησία των $(A_n)_{n\geq 1}$ και το γεγονός ότι $\liminf_n A_n \in \mathcal{A}^{\infty}$, έχουμε από Νόμο 0-1 του Kolmogorov και τη (2) ότι

$\boxed{P\left(\liminf A_n\right) = 0}$, Άρα από (1) $\boxed{P\left(\bigcap_n A_n\right) = 0}$

Θέμα 2 :

(α) Αν (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος, τότε τα Borel υποσύνολα του X προκύπτουν από τη σχέση

$$\boxed{\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{T}_d)}$$

, δηλ. η σ-άλγεβρα η παραγόμενη από τα ανοικτά υποσύνολα του X ως προς την μετρική d, που συμβολίζουμε με $\mathcal{T}_d$ (η μετρική του τοπολογία).

Στη συνέχεια μπορούμε με διάφορους τρόπους να δείξουμε ότι

$$\mathcal{B}([0,+\infty)) = \sigma(\{[0,x) : x \geq 0\}).$$

Ενδεικτικά:

$$[0,x) = \underbrace{(-\infty, x)}_{\text{ανοικτό στο } (\mathbb{R}, |\cdot|)} \cap [0,+\infty) \Rightarrow [0,x) \text{ ανοικτό στον } ([0,+\infty), d_{|\cdot|}).$$

Άρα $\sigma(\{[0,x) : x \geq 0\}) \subseteq \mathcal{B}([0,+\infty))$ (1)

Θ.δ.ο. $\mathcal{T}_d \subseteq \sigma(\{[0,x) : x \geq 0\})$ $(*)$ $\Rightarrow$

$$\sigma(\mathcal{T}_d) = \mathcal{B}([0,+\infty)) \subseteq \sigma(\{[0,x) : x \geq 0\}) \quad (2).$$

Από (1) + (2) θα έπεται η ισότητα.

Για να δείξουμε την $(*)$, αν $A \in \mathcal{T}_d$, τότε

$$A = A' \cap [0,+\infty), \text{ όπου } A' \text{ ανοικτό στο } \mathbb{R}.$$

Κάθε ανοικτό σο $\mathbb{R}$ γράφεται $A' = \bigcup_n (a_n, b_n)$, με $((a_n, b_n))_{n \geq 1}$ ξένα ανά δύο (ενδεχομένως κενά). Συμπεραίνουμε ότι

$$A = [0, a) \cup \left(\bigcup_n I_n\right), \text{ όπου } (I_n)_{n \geq 1} \text{ ~~είναι~~ ακολουθία}$$

ξένων ανα δύο ανοικτών διαστημάτων, και $a \geq 0$.

Επομένως για να ισχύει η $(*)$ αρκεί $(b, \gamma) \in \sigma(\{[0,x) : x \geq 0\})$, με $b \geq 0$ και $0 < \gamma \leq -\infty$. Όμως

$$(b,\gamma)^c = [0, b] \cup [\gamma, +\infty) = \left(\bigcap_n [0, b + \tfrac{1}{n})\right) \cup [0,\gamma)^c \checkmark$$

οικογένεια που $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C})$, τότε

$$\left(\mathcal{B}(\mathbb{R})\right)_{[0,+\infty)} = \mathcal{B}([0,+\infty)) = \sigma\left(\mathcal{C} \cap [0,+\infty)\right)$$

(σ-άλγεβρα ίχνος) (αυτά βέβαια χρειάζονται αιτιολόγηση)

και εφαρμόζοντας τα παραπάνω για $\mathcal{C} = \{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}$

προκύπτει το ζητούμενο.

β) Θέλουμε ν.δ.ο.

$$\underbrace{\sigma\left(\{A_n : n \geq 1\}\right)}_{\mathcal{A}} = \underbrace{\sigma\left(\{[n] : n \geq 0\}\right)}_{\mathcal{B}} = \underbrace{\left\{\bigcup_{n \in I} [n] : I \subset \mathbb{N}\right\}}_{\mathcal{C}}$$

$A_n = [0, n) = [0] \cup \ldots \cup [n-1] \in \mathcal{B}$, $\forall n \geq 1$

$\xRightarrow{\mathcal{B}\text{-σ-άλγεβρα}} \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ (1)

$[n] = [n, n+1) = [0, n+1) \setminus [0, n) = A_{n+1} \setminus A_n \in \mathcal{A}$, $\forall n \geq 0$

$\Rightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ (2). Απο (1)+(2) $\Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Επίσης η οικογένεια $\{[n] : n \geq 0\}$ αποτελεί διαμέριση του $[0, +\infty)$ $\Rightarrow$

$\mathcal{B} = \mathcal{C}$, απο γνωστή Πρόταση για σ-άλγεβρες που παράγονται

απο αριθμήσιμες διαμερίσεις.

(γ) Απο το (β), έχουμε ότι $P(A_1) = P([0]) = a_1$,

$P(A_{n+1}) - P(A_n) = a_{n+1} - a_n = P([n])$, $\forall n \geq 1$.

Η ακολουθία $(p_n)_{n \geq 0}$: $p_n = P([n]) = a_{n+1} - a_n \geq 0$, $\forall n \geq 0$ $(a_0 = 0)$

και $\sum_{n \geq 0} p_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} p_k = \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = 1 \Rightarrow$ γνωστή Πρόταση

$\exists$ μοναδικό μέτρο πιθαν. στην $\mathcal{A}$: $P([n]) = p_n$, $\forall n \geq 0$

$\Rightarrow P(A_n) = a_n$, $\forall n \geq 1$ ✓

(δ) Αν θέσουμε $P(\{n\}) = p_n = a_{n+1} - a_n$, $\forall n \geq 0$

και $P((n, n+1)) = 0$, $\forall n \geq 0$, τότε

είναι φανερό ότι ικανοποιούνται τα προηγούμενα και

το P είναι διακριτό, αφού είναι συγκεντρωμένο στο $\mathbb{N}$.

Αντίστοιχα, αν θέσουμε $P([n, n+u)) = u \cdot p_n$, $0 < u \leq 1$, $\forall n \geq 0$

τότε το μέτρο είναι συνεχές και ικανοποιεί τις απαιτήσεις του (γ).

Η συνέχεια έπεται απο την παρατήρηση ότι $\forall x \geq 0$, έχουμε

$$F_P(x) = P([0, x]) = \lim_{n\to\infty} P\left(\left[0, x+\frac{1}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{[x]-1} p_k + (x-[x]) \cdot p_{[x]}$$

και άρα η F_P είναι συνεχής

$\boxed{\text{Θέμα } 3}$

(α) Έστω $F_Y(y)$ η σ.κ. της Y.

Αν $\exists\, c \in \mathbb{R} : 0 < F_Y(c) < 1$, τότε

$P(Y \leq c) = F_Y(c) > 0$ και $P(Y \geq c) = 1 - P(Y < c) \geq 1 - F_Y(c) > 0$.

Διαφορετικά $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < c \\ 1, & y \geq c \end{cases}$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$,

και τότε $P(Y \leq c) = F_Y(c) = 1 > 0$ και $P(Y \geq c) = 1 - P(Y < c) = 1 > 0$

(εδώ $Y = c$, με πιθ. 1).

(β) $E|X+Y| < +\infty \overset{c \in \mathbb{R}.}{\Leftrightarrow} E|X+Y-c| < +\infty \Leftrightarrow E|X+Z| < +\infty$.

Όμως $\left.\begin{array}{l} (X+Z)^+ \leq |X+Z| \\ (X+Z)^- \leq |X+Z| \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} E(X+Z)^+ \leq E|X+Z| < +\infty \\ E(X+Z)^- \leq E|X+Z| < +\infty \end{array}$

$$e^{-\lambda}\sum_{y=0}^{+\infty}\frac{(\lambda e^{it})^{y}}{y!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}, \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

(δ) Από το (γ) με $Y_n \sim NegBin(n, p_n)$

$$\phi_{Y_n}(t) = \left(\frac{p_n}{1-(1-p_n)e^{it}}\right)^n = \left(\frac{1-(1-p_n)}{1-(1-p_n)e^{it}}\right)^n$$

$$= \frac{\left(1+\frac{-n(1-p_n)}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{-n(1-p_n)e^{it}}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{n(1-p_n)\to\lambda>0} \frac{e^{-\lambda}}{e^{-\lambda e^{it}}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}, \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

Άρα από το (γ), $\phi_{Y_n}(t)\longrightarrow\phi_Y(t)$, $\forall t\in\mathbb{R}$

και από το Θεώρημα Συνέχειας του Lévy συμπεραίνουμε ότι

$$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} Y\sim Poisson(\lambda), \quad \lambda>0.$$

<u>Θέμα 5</u>

(α) Θέτουμε $X: P(X=x)=\frac{c}{x^2}$, $x=1,2,\dots$, όπου $c=\frac{6}{\pi^2}$.

$$E|X| = E(X) = \sum_{x=1}^{+\infty} x\cdot\frac{c}{x^2} = c\sum_{x=1}^{+\infty}\frac{1}{x} = +\infty \text{ και } P(X\in\{-\infty,+\infty\})=0.$$

(β) Για $X=\{1,2,3,4\}$, η $\mathcal{D}=\{\emptyset,\underbrace{\{1,2\}}_{A},\underbrace{\{2,3\}}_{B},\underbrace{\{3,4\}}_{A^c},\underbrace{\{1,4\}}_{B^c},X\}$ είναι κλάση Dynkin, (ελέγχεται εύκολα) όχι όμως σ-άλγεβρα (π.χ. δεν είναι κλειστή στις πεπερ. τομές)

(γ) Έστω $X_n\sim Be(p_n)$, με $\sum_n p_n=+\infty$, ανεξ. τ.μ. Τότε

$X_n \xrightarrow{L^2} 0$, αφού $EX_n^2 = EX_n = p_n\longrightarrow 0$, καθώς $n\to\infty$, ενώ

$$\sum_n P(X_n=1) = \sum_n p_n = +\infty \xRightarrow[\text{ανεξ.+}]{2^{o}\text{ λήμ. B-C}} P\left(\limsup_n\{X_n=1\}\right)=1 \Rightarrow \limsup_n X_n = 1, \text{ με πιθ. } 1.$$

$$\Rightarrow X_n \not\xrightarrow{a.s} 0.$$