ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ, τελική εξέταση Ιουνίου 2019

Θέμα 1:[5pt.] Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ μία ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με X_n να ακολουθεί τη διακριτή ομοιόμορφη στο $\{1, 2, \dots, n+1\}$. Αν $(A_n)_{n\geq 1}$ είναι η ακολουθία των ενδεχομένων που προκύπτει με $A_n = \{X_{2n-1} > X_{2n}\}$, τότε

α): να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(A_n)$,

β): να εξεταστεί αν τα ενδεχόμενα A_n είναι ανεξάρτητα,

γ): αν $\mathcal{C} := \{\cap_n A_n, \liminf_n A_n, \limsup_n A_n, \cup_n A_n\}$, να εξεταστεί ποιά στοιχεία της $\mathcal{C}$ ανήκουν στην τελική σ–άλγεβρα $\mathcal{A}^\infty$ της ακολουθίας $(A_n)_{n\geq 1}$,

δ): να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(A)$, για κάθε $A \in \mathcal{C}$.

Θέμα 2:[5pt.] Έστω $\big([0, +\infty), d_{|\cdot|}\big)$ ο μετρικός χώρος που προκύπτει περιορίζοντας τη συνήθη μετρική του $\mathbb{R}$ στο $[0, +\infty)$ (σχετική μετρική). Στα ερωτήματα που ακολουθούν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε χωρίς απόδειξη γνωστά αποτελέσματα από την Πραγματική Ανάλυση, αλλά και αποτελέσματα που έχουν δειχθεί στη θεωρία.

α): Δώστε τον ορισμό των Borel υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου και αποδείξτε ότι

$$\mathcal{B}\big([0, +\infty)\big) = \sigma\left(\big\{[0, x) : x \geq 0\big\}\right).$$

β): Θεωρούμε την ακολουθία $(A_n)_{n\geq 1}$, όπου $A_n = [0, n)$ και θέτουμε $[n] := [n, n+1)$ για κάθε $n \geq 0$. Να αποδειχθεί ότι

$$\sigma\left(\big\{A_n : n \geq 1\big\}\right) = \sigma\left(\big\{[n] : n \geq 0\big\}\right) = \left\{\bigcup_{n\in I}[n] : I \subset \mathbb{N}\right\}.$$

γ): Έστω $(a_n)_{n\geq 1}$ μία αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών για την οποία ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ και θέτουμε $\mathcal{A} := \sigma\left(\big\{A_n : n \geq 1\big\}\right)$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας στον μετρήσιμο χώρο $([0, +\infty), \mathcal{A})$ τέτοιο ώστε $P(A_n) = a_n$ για κάθε $n \geq 1$.

δ): Να επεκταθεί το παραπάνω μέτρο σε ένα διακριτό και σε ένα συνεχές μέτρο πιθανότητας στον μετρήσιμο χώρο $\big([0, +\infty), \mathcal{B}\big([0, +\infty)\big)\big)$.

Θέμα 3:[4pt.] Έστω X, Y δύο ανεξάρτητες πραγματικές τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες ισχύει ότι $\mathbb{E}|X + Y| < +\infty$.

α): Να δειχθεί ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $\mathbb{P}(Y \leq c) > 0$ και $\mathbb{P}(Y \geq c) > 0$.

β): Αν $Z = Y - c$, και το c όπως παραπάνω, να δειχθεί ότι $\mathbb{E}(X + Z)^+ < +\infty$ και $\mathbb{E}(X + Z)^- < +\infty$.

γ): Να αποδειχθεί ότι

$$\mathbb{E}X^+ \leq \frac{1}{\mathbb{P}(Z \geq 0)}\,\mathbb{E}(X + Z)^+$$

και ότι

$$\mathbb{E}X^- \leq \frac{1}{\mathbb{P}(Z \leq 0)}\,\mathbb{E}(X + Z)^-$$

δ): Συμπεράνετε ότι $\mathbb{E}|X|, \mathbb{E}|Y| < +\infty$. Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει εναλλακτικά με χρήση του Θεωρήματος Tonelli, όπως είδαμε στο μάθημα.

Θέμα 4:[4pt.] Σε ότι ακολουθεί, αν Z είναι τυχούσα πραγματική τυχαία μεταβλητή, συμβολίζουμε με ϕ_Z την χαρακτηριστική της συνάρτηση.

- **α):** Να υπολογιστεί η ϕ_X, όταν $X \sim Geo(p)$, $0 < p < 1$, και η X εκφράζει το πλήθος των αποτυχιών μέχρι την πρώτη επιτυχία σε μία ανεξάρτητη ακολουθία δοκιμών Bernoulli με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας p.
- **β):** Έστω Y_n η τυχαία μεταβλητή που εφράζει το πλήθος των αποτυχιών μέχρι τη n-οστή επιτυχία στο παραπάνω πείραμα τύχης. Τότε η Y_n ακολουθεί αρνητική Διωνυμική κατανομή και γράφουμε $Y_n \sim NegBin(n, p)$. Να βρεθεί η ϕ_{Y_n} με τη βοήθεια του ερωτήματος (α).
- **γ):** Να υπολογιστεί επίσης η ϕ_Y, όταν $Y \sim Poisson(\lambda)$, $\lambda > 0$. Δίνεται η συνάρτηση πιθανότητας της Y, με $\mathbb{P}(Y = y) = e^{-\lambda}\lambda^y/y!,\ y = 0, 1, \ldots$.
- **δ):** Έστω $(Y_n)_{n\geq 1}$ μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με $Y_n \sim NegBin(n, p_n)$ και υποθέτουμε ότι $n(1 - p_n) \to \lambda$, καθώς $n \to \infty$, για κάποιο $\lambda > 0$. Να εξεταστεί αν η $(Y_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει κατά κατανομή.

Θέμα 5:[2pt.] Να δωθούν αντιπαραδείγματα (με αιτιολόγηση) στους παρακάτω ισχυρισμούς:

- **α):** Αν $E|X| = +\infty$, τότε $P\big(X \in \{-\infty, +\infty\}\big) > 0$.
- **β):** Κάθε κλάση Dynkin είναι και σ-άλγεβρα.
- **γ):** Μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών (τ.μ.) (X_n) που συγκλίνει στον L^2 σε κάποια τ.μ. X, συγκλίνει και με πιθανότητα 1.

<u>Επιλέξτε 1 θέμα από τα 1–2, 1 από τα 3–4 και υποχρεωτικά το θέμα 5</u>

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ΩΡΕΣ