ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ II - QUIZ 2, 29 Μάη 2019

1. Έστω λ το μέτρο Lebesgue και $f : \mathbb{R} \to [-\infty, 0]$ μία Borel μετρήσιμη συνάρτηση, τότε
   $\surd$ $\int f^+ \, d\lambda = 0$ ◯ $\int f^- \, d\lambda = 0$ ◯ $\int |f| \, d\lambda = \int f \, d\lambda$ $\surd$ $\int f \, d\lambda \le 0$
2. Αν X τ.μ. με πραγματικές τιμές, τότε όταν ορίζονται
   ◯ $E(X) = E(X^+) + E(X^-)$ $\surd$ $E(X) = E(X^+) - E(X^-)$ ◯ $E|X| = E(X^+) - E(X^-)$
   $\surd$ $E|X| = E(X^+) + E(X^-)$
3. Αν $X_n \xrightarrow{L^1} X$ τότε
   ◯ $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ $\surd$ $X_n \xrightarrow{p} X$ ◯ $X_n \xrightarrow{L^2} X$ ◯ $X_n \xrightarrow{c} X$
4. Έστω P ένα μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ με $P(A) = P(-A)$ για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Όταν ορίζονται, τότε
   ◯ $\int 1 \, dP(x) = +\infty$ $\surd$ $\int x \, dP(x) = 0$ $\surd$ $\int x^+ \, dP(x) = \int x^- \, dP(x)$ ◯ $\int |x| \, dP(x) = \int x^+ \, dP(x)$
5. Αν $X_n, \ X \in L^3$ και $E|X_n - X|^3 \to 0$, τότε
   $\surd$ $X_n \xrightarrow{L^1} X$ $\surd$ $X_n \xrightarrow{L^3} X$ ◯ $X_n \xrightarrow{L^5} X$ $\surd$ $X_n \xrightarrow{p} X$
6. Αν $|X| \overset{a.s.}{=} |Y|$, τότε ποιά απο τα ακόλουθα είναι αληθή ;
   ◯ $X \overset{a.s.}{=} Y$ $\surd$ $X^2 \overset{a.s.}{=} Y^2$ $\surd$ $|X| \overset{d}{=} |Y|$ $\surd$ $E|X| = E|Y|$
7. Αν (A_n) ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων, τότε $\sum_n P(A_n) = +\infty \ \Rightarrow$
   ◯ $P(\liminf A_n) = 1$ ◯ $P(\cap A_n) = 1$ $\surd$ $P(\limsup A_n) = 1$ $\surd$ $P(\cup A_n) = 1$
8. Σε μία άπειρη ακολουθία ανεξάρτητων ρίψεων ενός τίμιου ζαριού, ποιά απο τα παρακάτω ενδεχόμενα έχουν πιθανότητα 1;
   $\surd$ **άπειρα 6** ◯ τελικά 1 ◯ τελικά όχι 1 $\surd$ **άπειρα 123456**
9. Ποιά από τα επόμενα ισχύουν όταν $\sum E(|X_n|) < \infty$;
   $\surd$ $P(\sum X_n \in \mathbb{R}) = 1$ $\surd$ $E(\sum X_n) \in \mathbb{R}$ $\surd$ $E(\sum |X_n|) = \sum E|X_n|$ $\surd$ $E(\sum X_n) = \sum E(X_n)$
10. Αν ν είναι το αριθμητικό μέτρο στο $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, τότε $\int 1_{\{1,\ldots,5\}} \, d\nu =$
    ◯ 1 $\surd$ 5 ◯ 15
11. Αν λ είναι το μέτρο Lebesgue στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, και $\mathbb{Q}$ οι ρητοί, τότε $\int 1_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} \, d\lambda =$
    $\surd$ $+\infty$ ◯ δεν ορίζεται ◯ 1 ◯ 0
12. Αν μ, ν είναι δύο μέτρα σε μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$, με $\nu << \mu$, τότε
    ◯ $\nu(X) \le \mu(X)$ ◯ $\nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$ $\surd$ $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$
13. Έστω $f(x) = 0.5 e^{-|x|}, \ x \in \mathbb{R}$ και $\mu(A) = \int_A f d\lambda, \ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Τότε, στον χώρο μέτρου $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$
    $\surd$ $\mu(A) = 0 \ \Rightarrow \lambda(A) = 0$ $\surd$ $\lambda(A) = 0 \ \Rightarrow \ \mu(A) = 0$ $\surd$ $\mu(\mathbb{R}) = 1$ $\surd$ $1_{\mathbb{Q}} \overset{a.s.}{=} 0$
14. Αν $X \in [-\infty, 0]$ είναι αρνητική τ.μ., τότε
    $\surd$ $E(X) = 0 \ \Rightarrow \ X \overset{a.s.}{=} 0$ $\surd$ $-\infty < E(X) \ \Rightarrow \ P(X > -\infty) = 1$ ◯ $E(X) = -\infty \ \Rightarrow \ P(X = -\infty) > 0$
15. Η σ–άλγεβρα γινόμενο 2 μετρήσιμων χώρων παράγεται από τα
    ◯ Borel $\surd$ **μετρήσιμα ορθογώνια** ◯ σύνολα μέτρου 0

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!