ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ 2

Σάμης Τρέβεζας

ΣΑΜΗΣ ΤΡΕΒΕΖΑΣ
Λέκτορας
Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνων

Πιθανότητες ΙΙ

Σημειώσεις σε εξέλιξη... (02/03)

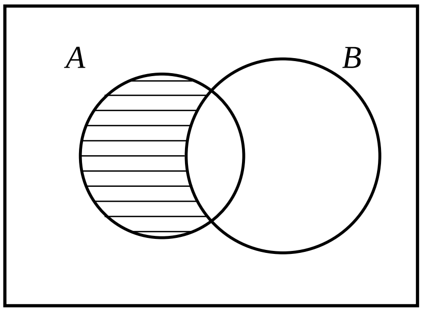
Περιεχόμενα

1

Δομές σε Οικογένειες Υποσυνόλων

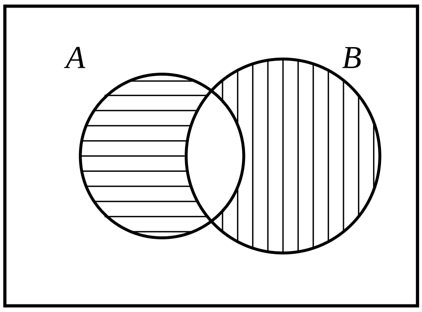
1.1 Σύνολα και Συναρτήσεις

Μία σοβαρή μελέτη της Θεωρίας Πιθανοτήτων προϋποθέτει μία καλή εξοικείωση με βασικά στοιχεία της συνολοθεωρίας και άνετη χρήση των συνόλων, οικογενειών συνόλων και βασικών ιδιοτήτων τους. Ξεκινάμε από στοιχειώδεις έννοιες και στη συνέχεια αναπτύσσουμε κατάλληλες δομές που θα μας φανούνε χρήσιμες όταν θα ορίσουμε αυστηρά την έννοια της πιθανότητας ως συνολοσυνάρτησης. Έστω X ένα οποιοδήποτε σύνολο. Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{P}(X)$ το *δυναμοσύνολο* του X, δηλ. $\mathcal{P}(X) := \{A : A \subset X\}$. Ως συνήθως, συμβολίζουμε με $A \cup B$ την *ένωση* και με $A \cap B$ ή AB την *τομή* των A και B. Αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης ως προς το βασικό σύνολο αναφοράς θα γράφουμε A^{c} για το *συμπλήρωμα* του A, ή $X \setminus A$ όταν θέλουμε να δηλώσουμε ξεκάθαρα το βασικό σύνολο αναφοράς. Υπενθυμίζουμε ότι τα *διαγράμματα του Venn* βοηθούν στην αναπαράσταση άλλων πράξεων μεταξύ συνόλων, όπως της *συνολοθεωρητικής διαφοράς* $A \setminus B$ και της *συμμετρικής διαφοράς* $A \triangle B$.



συνολοθεωρητική διαφορά

$A \setminus B = A \cap B^{\mathsf{c}}$



συμμετρική διαφορά

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus AB$

Η ένωση και η τομή επεκτείνονται για αυθαίρετες οικογένειες υποσυνόλων του X. Αν $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$ είναι μία τέτοια οικογένεια, τότε γράφοντας και $\mathscr{A} = \{A_i\}_{i \in I}$, προκύπτουν διάφορες ισοδύναμες αναπαραστάσεις της ένωσης των συνόλων αυτών:

$$\bigcup \mathscr{A} \ \text{ ή } \ \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \ \text{ ή } \ \bigcup_{i \in I} A_i,$$

ενώ αντίστοιχες είναι και οι εκφράσεις για την τομή τους:

$$\bigcap \mathscr{A} \ \text{ ή } \ \bigcap_{A \in \mathscr{A}} A \ \text{ ή } \ \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Όταν για συντομία δεν γίνεται αναφορά σε δεικτοσύνολο, π.χ., $\cup_i A_i$ ή $\cup_n A_n$ (αντίστοιχα για τομές), τότε ως σύνολο δεικτών υπονοείται το $\mathbb{N}$ και η ένωση (ή η τομή) θα θεωρείται αριθμήσιμη. Ερμηνεύουμε λοιπόν την ένωση μίας οικογένειας συνόλων ως το σύνολο εκείνο που ενώνει (κάτω από την ίδια στέγη) όλα τα μέλη των συνόλων που ανήκουν στη συλλογή (χωρίς να επιτρέπει επαναλήψεις στοιχείων). Αντίστοιχα, ερμηνεύουμε την τομή μίας οικογένειας συνόλων ως το σύνολο εκείνο που απομονώνει τα μέλη εκείνα που συνυπάρχουν σε όλα τα σύνολα τα συλλογής. Προφανώς,

$$\emptyset \subset \cap\mathscr{A} \subset \cup\mathscr{A} \subset X.$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζεται στις δύο οριακές περιπτώσεις, όταν δηλ. $\cap\mathscr{A} = \emptyset$ ή όταν $\cup\mathscr{A} = X$. Στην πρώτη περίπτωση τα σύνολα είναι 'από κοινού ξένα', με την έννοια ότι όλα μαζί έχουν κενή τομή, ενώ στη δεύτερη η συλλογή $\mathscr{A}$ 'καλύπτει' το X. Υπενθυμίζουμε ότι αν για δύο σύνολα A, B ισχύει ότι $AB = \emptyset$, τότε τα A και B λέγονται *ξένα* μεταξύ τους και η αντίστοιχη ένωση $A \cup B$ *ξένη ένωση*. Προκειμένου να μελετήσουμε καλύτερα τις ιδιότητες διάφορων οικογενειών υποσυνόλων που θα μας απασχολήσουν δίνουμε κάποιους περαιτέρω ορισμούς.

Ορισμός 1.1. Μία οικογένεια υποσυνόλων $\mathscr{A}$ του X λέγεται

(i) *κατά ζεύγη ξένη*, αν $AB = \emptyset$ για κάθε $A,\ B \in \mathscr{A}$ με $A \neq B$,

(ii) *από κοινού ξένη*, αν $\cap\mathscr{A} = \emptyset$,

(iii) *κάλυμμα* του X, αν $X \subset \cup\mathscr{A}$,

(iv) *διαμέριση* του X, αν δεν περιέχει το κενό σύνολο και είναι κατά ζεύγη ξένη και κάλυμμα του X.

Παρατήρηση 1.2. (i) Η διαμέριση λέγεται πεπερασμένη ή αριθμήσιμη αν η οικογένεια $\mathscr{A}$ είναι πεπερασμένη ή αριθμήσιμη αντίστοιχα. Ανάλογοι χαρακτηρισμοί ισχύουν και για το κάλυμμα.

(ii) Ο προσδιορισμός $\mathscr{A}$*-κάλυμμα* και $\mathscr{A}$*-διαμέριση* του X αναφέρεται στο σχηματισμό ενός καλύμματος ή μιας διαμέρισης του X αντίστοιχα με επιλογή συνόλων μέσα από μία οικογένεια $\mathscr{A}$.

(iii) Οι έννοιες κάλυμμα, $\mathscr{A}$*-κάλυμμα*, διαμέριση και $\mathscr{A}$*-διαμέριση*, επεκτείνονται φυσιολογικά σε οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο B του X, αντικαθιστώντας στον Ορισμό 1.2-(iii) και 1.2-(iv) το X με το B.

Αναφέρουμε ένα παράδειγμα από το σύνολο των πραγματικών αριθμών κάνοντας χρήση των παραπάνω εννοιών.

Παράδειγμα 1.3. Έστω $X = \mathbb{R}$ και $\mathcal{T}$ η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ως προς τη συνήθη μετρική. Η $\mathcal{T}$ είναι προφανώς κάλυμμα του $\mathbb{R}$ (περιέχει το $\mathbb{R}$). Η συλλογή όμως αυτή είναι αρκετά μεγάλη. Πολλές φορές το ενδιαφέρον εστιάζεται στην εύρεση αρκετά μικρότερων υποσυλλογών με καλύτερες ιδιότητες, π.χ. φραγμένα διαστήματα. Η υποσυλλογή $\mathcal{S}$ των ανοικτών φραγμένων διαστημάτων του $\mathbb{R}$, αν και μικρότερη, παραμένει κάλυμμα του $\mathbb{R}$, προφανώς $\mathcal{T}$-κάλυμμα του $\mathbb{R}$, αφού $\mathbb{R} = \cup_{a<b}(a,b)$ και $(a,b) \in \mathcal{T}$. Η $\mathcal{S}$ είναι υπεραριθμήσιμη, όμως αφού $\mathbb{R} = \cup_{n\geq 1}(-n,n)$, μπορούμε να βρούμε και ένα αριθμήσιμο $\mathcal{S}$-κάλυμμα του $\mathbb{R}$. Από την άλλη μεριά, η $\mathcal{T}$ δεν περιέχει καμία μη τετριμμένη διαμέριση $\mathcal{D}$ του $\mathbb{R}$, δηλ. διαφορετική της $\{\mathbb{R}\}$. Πράγματι, αν υπάρχει υποσυλλογή $\mathcal{D}$ της $\mathcal{T}$ με τουλάχιστον δύο στοιχεία που αποτελεί διαμέριση του $\mathbb{R}$, τότε $\mathbb{R} = A \cup A^c$, όπου $A \in \mathcal{D}$ και A^c είναι η ένωση όλων των υπόλοιπων στοιχείων της $\mathcal{D} \subset \mathcal{T}$. Συμπεραίνουμε ότι τα A και A^c είναι ανοικτά και άρα το $\mathbb{R}$ διαμερίζεται σε δύο ξένα μη κενά ανοικτά σύνολα, το οποίο είναι άτοπο αφού το $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικό σύνολο.

Πολλές φορές το ενδιαφέρον μπορεί να εστιάζεται σε ένα υποσύνολο B του αρχικού χώρου X. Χαρακτηριστική περίπτωση είναι όταν ο X έχει κάποια δομή, π.χ., μετρικού ή τοπολογικού χώρου και μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε δομές περιορισμένες στο B ως υπόχωρο του αρχικού. Φυσιολογικά, λοιπόν καταλήγουμε στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.4. Έστω $\mathscr{A}$ μία οικογένεια υποσυνόλων του X και $B \subset X$. Η οικογένεια

$$\mathscr{A}_B := \{\, A \cap B : A \in \mathscr{A} \} \subset \mathcal{P}(B)$$

λέγεται το *ίχνος* της $\mathscr{A}$ στο B.

Παράδειγμα 1.5. Έστω $\mathcal{T}$ η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Θα υπολογίσουμε το ίχνος της $\mathcal{T}$ πάνω στα σύνολα (i) $(0,1)$, (ii) $[0,1)$ και (iii) $\mathbb{Q}$.

(i) Επειδή το $(0,1)$ είναι ανοικτό στο $\mathbb{R}$, έχουμε ότι κάθε σύνολο της μορφής $A \cap (0,1)$ με A ανοικτό στο $\mathbb{R}$ είναι ένα υποσύνολο του $(0,1)$ που είναι ανοικτό στο $\mathbb{R}$ (ως τομή δύο ανοικτών). Αντίστροφα, κάθε $A \subset (0,1)$ που είναι ανοικτό στο $\mathbb{R}$ ικανοποιεί $A = A \cap (0,1)$. Συμπεραίνουμε ότι το ίχνος της $\mathcal{T}$ στο $(0,1)$ είναι ακριβώς όλα τα ανοικτά του $\mathbb{R}$ που περιέχονται στο $(0,1)$, δηλ.,

$$\mathcal{T}_{(0,1)} = \mathcal{T} \cap \mathcal{P}\big((0,1)\big)$$

(ii) Έστω A ανοικτό στο $\mathbb{R}$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις: (α) $0 \notin A$ και (β) $0 \in A$. Η περίπτωση (α) είναι όπως παραπάνω, άρα στην $\mathcal{T}_{[0,1)}$ περιλαμβάνονται όλα τα σύνολα της $\mathcal{T}_{(0,1)}$. Στην περίπτωση (β), επειδή $0 \in A$ και το A ανοικτό στο $\mathbb{R}$, το A θα περιέχει ένα διάστημα της μορφής $[0,\alpha)$, όπου $\alpha = \min\big\{1, \sup\{x > 0 \ : \ [0,x) \subset A\}\big\}$. Από τον ορισμό του α είναι φανερό ότι $A \cap [0,1) = [0,\alpha) \cup A'$, όπου $A' \subset (\alpha, 1)$ ανοικτό στο $\mathbb{R}$ (ενδεχομένως $\emptyset$). Συνδιάζοντας τα παραπάνω, έχουμε την εξής αναπαράσταση:

$$\mathcal{T}_{[0,1)} = \Big\{ [0,\alpha) \cup A : 0 \le \alpha \le 1 \text{ και } A \in \mathcal{T}_{(0,1)} \Big\}$$

Η αναπαράσταση αυτή μπορεί να γίνει μοναδική επιλέγοντας το α όπως στην περίπτωση (β).

(iii) Είναι γνωστό από την Πραγματική Ανάλυση ότι κάθε ανοικτό σύνολο A του $\mathbb{R}$ έχει μοναδική αναπαράσταση ως αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων (I_n). Συμπεραίνουμε άμεσα ότι

$$\mathcal{T}_{\mathbb{Q}} = \Big\{ \cup_n (I_n \cap \mathbb{Q}) : (I_n) \text{ κατά ζεύγη ξένα ανοικτά διαστήματα του } \mathbb{R} \Big\}$$

□

Η έννοια του ίχνους θα μας απασχολήσει στη συνέχεια όταν θα μελετήσουμε τον περιορισμό ενός μετρήσιμου χώρου, δηλ. ενός χώρου εφοδιασμένου με μία σ-άλγεβρα, σε κατάλληλα υποσύνολά του.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον θα έχει και η μελέτη συναρτήσεων μεταξύ μετρήσιμων χώρων. Υπενθυμίζουμε πρώτα ότι το σύνολο των συναρτήσεων από ένα σύνολο X σε ένα σύνολο Y συμβολίζεται με Y^X, δηλ. $Y^X := \{f \ : \ f$ είναι συνάρτηση από το X στο$Y\}$. Αν $A \subset X$, $B \subset Y$, τότε συμβολίζουμε κατά τα γνωστά με $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ την εικόνα του A μέσω της f και με $f^{-1}(B) := \{x \in X \ : \ f(x) \in B\}$ την αντίστροφη εικόνα του B μέσω της f. Υπενθυμίζουμε επίσης ότι ενώ η εναλλαγή των f και f^{-1} με την ένωση είναι πάντα εφικτή:

$$f\left(\cup_{i\in I} A_i\right) = \cup_{i\in I} f(A_i) \quad \text{και} \quad f^{-1}\left(\cup_{i\in I} B_i\right) = \cup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

για οποιεσδήποτε οικογένειες $(A_i)_{i\in I}$ και $(B_i)_{i\in I}$ στην $\mathcal{P}(X)$ και $\mathcal{P}(Y)$ αντίστοιχα, δε συμβαίνει το ίδιο με την τομή και το συμπλήρωμα. Την ιδιότητα αυτή απολαμβάνει μόνο η f^{-1} και έτσι

$$f^{-1}\left(\cap_{i\in I} B_i\right) = \cap_{i\in I} f^{-1}(B_i) \quad \text{και} \quad f^{-1}(B^{\mathsf{c}}) = (f^{-1}(B))^{\mathsf{c}},$$

ενώ για την f δεν ισχύουν οι αντίστοιχες ιδιότητες, παρά μόνο ότι

$$f\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i) \quad \text{και} \quad f(X)\setminus f(A) \subset f(X\setminus A)$$

Παρ'όλα αυτά στην ειδική περίπτωση που η f είναι '1-1', οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν ως ισότητα και αν υποθέσουμε επιπλέον ότι η f είναι επί, τότε είναι δυνατή η εναλλαγή και με το συμπλήρωμα (Ασκ. 1.1).

Αν $\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(X)$ και $\mathscr{B} \subset \mathcal{P}(Y)$, τότε συμβολίζουμε με

$$f(\mathscr{A}) := \{f(A) \,:\, A \in \mathscr{A}\} \quad \text{και} \quad f^{-1}(\mathscr{B}) := \{f^{-1}(B) \,:\, B \in \mathscr{B}\}.$$

Η χρήση των παραπάνω συμβολισμών θα είναι ιδιαίτερα βολική στη συνέχεια καθώς θα δουλεύουμε με οικογένειες υποσυνόλων. Είναι φανερό ότι $f(\mathscr{A}) \subset \mathcal{P}(Y)$ και $f^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathcal{P}(X)$.

Ιδιαίτερα σημαντικές στη θεωρία μέτρου και στη θεωρία Πιθανοτήτων είναι οι δείκτριες συναρτήσεις. Οι συναρτήσεις αυτές που παίρνουν τιμές μόνο 0 ή 1 και είναι οι απλούστερες των απλών συναρτήσεων όπως θα δούμε αργότερα και αποτελούν τις βασικές δομικές μονάδες με τη βοήθεια των οποίων προσεγγίζουμε κάθε μετρήσιμη συνάρτηση.

Ορισμός 1.6. Αν $A \subset X$, τότε συμβολίζουμε με $\mathbf{1}_A : X \to \{0,1\}$ τη *δείκτρια συνάρτηση* του A, που ορίζεται ως

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in A \\ 0 & \text{αν } x \in A^{\mathrm{c}}. \end{cases}$$

Η συνάρτηση $f : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X \equiv 2^X$, όπου $f(A) = \mathbf{1}_A$ είναι '1-1' και επί, και έτσι μπορούμε να ταυτίσουμε συνολοθεωρητικά κάθε υποσύνολο A με τη δείκτρια συνάρτηση $\mathbf{1}_A$. Η ταύτιση αυτή είναι χρήσιμη για να κατανοήσουμε καλύτερα αρκετές ιδιότητες των συνόλων.

Παρατήρηση 1.7. Έστω $A, B \in \mathcal{P}(X)$, $\{A_i\} \subset \mathcal{P}(X)$ αυθαίρετη οικογένεια και $\{A_n\} \subset \mathcal{P}(X)$ αριθμήσιμη οικογένεια. Δίνουμε εδώ κάποιες στοιχειώδεις ιδιότητες των δεικτριών:

(i) $\mathbf{1}_{A^{\mathrm{c}}} = 1 - \mathbf{1}_A$,

(ii) $\mathbf{1}_{AB} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$,

(iii) $\mathbf{1}_{A\setminus B} = \mathbf{1}_A(1 - \mathbf{1}_B)$,

(iv) $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{AB}$,

(v) $\mathbf{1}_{\cup_{i\in I}A_i} = \max_{i\in I}\{\mathbf{1}_{A_i}\}$,

(vi) $\mathbf{1}_{\cap_{i\in I}A_i} = \min_{i\in I}\{\mathbf{1}_{A_i}\}$,

(vii) $\mathbf{1}_{\cup_n A_n} = \sum_n \mathbf{1}_{A_n}$, αν $A_n A_m = \emptyset$, για $n \neq m$.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η συμπεριφορά ακολουθιών (A_n) υποσυνόλων του X.

Ορισμός 1.8. Έστω (A_n) μία ακολουθία υποσυνόλων του X. Το σύνολο

$$\limsup A_n := \bigcap_n \bigcup_{k\geq n} A_k \quad (\text{ή } \overline{\lim} A_n)$$

λέγεται *ανώτερο όριο* της ακολουθίας (A_n), και το σύνολο

$$\liminf A_n := \bigcup_n \bigcap_{k\geq n} A_k \quad (\text{ή } \underline{\lim} A_n)$$

λέγεται *κατώτερο όριο* της ακολουθίας (A_n). Θα λέμε ότι η ακολουθία (A_n) *συγκλίνει*, αν $\liminf A_n = \limsup A_n$ και η κοινή τιμή θα λέγεται *όριο* της ακολουθίας. Θα γράφουμε $\lim A_n = A$ ή $A_n \to A$ για να δηλώσουμε τη σύγκλιση της (A_n) στο A.

Παρατήρηση 1.9. (i) Το ανώτερο όριο γράφεται αναλυτικά

$$\limsup A_n = \underbrace{(A_1 \cup A_2 \cup \dots)}_{B_1} \cap \underbrace{(A_2 \cup A_3 \cup \dots)}_{B_2} \cap \dots \cap \underbrace{(A_n \cup A_{n+1} \cup \dots)}_{B_n} \cap \dots$$
$$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$$

Από την παραπάνω σχέση είναι φανερό ότι

$$\limsup A_n = \{x \in X : x \in A_n \text{ για άπειρα } n\}, \tag{1.1}$$

και το $\limsup A_n$ προκύπτει ως η τομή της φθίνουσας ακολουθίας (B_n).

(ii) Το κατώτερο όριο γράφεται αναλυτικά

$$\liminf A_n = \underbrace{(A_1 \cap A_2 \cap \dots)}_{C_1} \cup \underbrace{(A_2 \cap A_3 \cap \dots)}_{C_2} \cup \dots \cup \underbrace{(A_n \cap A_{n+1} \cap \dots)}_{C_n} \cup \dots$$
$$C_1 \subset C_2 \subset \cdots \subset C_n \subset \cdots$$

Από την παραπάνω σχέση είναι φανερό ότι

$$\liminf A_n = \{x \in X : x \in A_n \text{ τελικά για κάθε } n\}, \tag{1.2}$$

και το $\liminf A_n$ προκύπτει ως η ένωση της αύξουσας ακολουθίας (C_n).

(iii) Από τους χαρακτηρισμούς (1.1) και (1.2), προκύπτει ότι

$$\emptyset \subset \cap_n A_n \subset \liminf A_n \subset \limsup A_n \subset \cup_n A_n \subset X. \tag{1.3}$$

Για να δείξουμε λοιπόν ότι μία ακολουθία (A_n) συγκλίνει, αρκεί να δείξουμε ότι $\limsup A_n \subset \liminf A_n$ ή ισοδύναμα ότι κάθε στοιχείο του X που ανήκει σε άπειρα A_n ανήκει τελικά στα A_n. Από την άλλη, για να δείξουμε ότι μία ακολουθία (A_n) δε συγκλίνει, αρκεί να βρούμε ένα στοιχείο του X που ανήκει σε άπειρα A_n, αλλά και δεν ανήκει σε άπειρα πάλι από τα A_n.

(iv) Υπενθυμίζουμε ότι για μία ακολουθία πραγματικών αριθμών (α_n)

$$\limsup \alpha_n := \lim_n \sup_{k \geq n} \alpha_k = \inf_n \sup_{k \geq n} \alpha_k \quad \text{και} \quad \liminf \alpha_n := \lim_n \inf_{k \geq n} \alpha_k = \sup_n \inf_{k \geq n} \alpha_k$$

Αν λοιπόν συμβολίσουμε με $\sup A_n = \cup A_n$ και με $\inf A_n = \cap A_n$, τότε είναι φανερή η αναλογία των ορισμών των $\limsup A_n$ και $\liminf A_n$ για ακολουθίες υποσυνόλων (A_n) με τους αντίστοιχους ορισμούς των $\limsup \alpha_n$ και $\liminf \alpha_n$ για τις ακολουθίες (α_n) πραγματικών αριθμών. Η έννοια του $\sup A_n$ και $\inf A_n$ έχει ανάλογη ερμηνεία ως ελάχιστο άνω φράγμα και μέγιστο κάτω φράγμα, εδώ βέβαια για ακολουθία υποσυνόλων αυθαίρετου X, αφού με τη σχέση του περιέχεσθαι $\subset$, η ακολουθία (A_n) είναι άνω και κάτω φραγμένη από την $\cup A_n$ και την $\cap A_n$ αντίστοιχα και είναι μάλιστα τα βέλτιστα (ελάχιστο άνω φράγμα και μέγιστο κάτω φράγμα αντίστοιχα) με αυτήν την ιδιότητα.

Δίνουμε τώρα δύο προτάσεις που αναδεικνύουν τη σύνδεση της σύγκλισης ακολουθιών συνόλων με την κατά σημείο σύγκλιση των αντίστοιχων δεικτριών συναρτήσεων, αλλά και την ύπαρξη ορίου για μονότονες ακολουθίες.

Πρόταση 1.10. *Έστω X σύνολο, $A \subset X$ και (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του X. Τότε*

$$A_n \to A \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \mathbf{1}_{A_n} \xrightarrow{p.w.} \mathbf{1}_A,$$

όπου $\xrightarrow{p.w.}$ συμβολίζει την κατά σημείο σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων.

Πρόταση 1.11. *Κάθε μονότονη ακολουθία (A_n) υποσυνόλων του X συγκλίνει και ισχύει ότι:*

$$\lim A_n = \begin{cases} \cup_n A_n & \text{αν } (A_n) \text{ αύξουσα} \\ \cap_n A_n & \text{αν } (A_n) \text{ φθίνουσα.} \end{cases}$$

Οι αποδείξεις των παραπάνω προτάσεων προτείνονται ως ασκήσεις.

Ασκήσεις

1.1 Έστω $f : X \to Y$ συνάρτηση και $A,\ B,\ A_i \subset X,\ i \in I$.

(i) Αποδείξτε ότι
$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$
Δείξτε ότι γενικά δεν ισχύει η ισότητα.

(ii) Αν η f είναι '1-1', δείξτε ότι η παραπάνω σχέση ισχύει ως ισότητα.

(iii) Αν $A \subset B$, αποδείξτε ότι
$$f(B) \setminus f(A) \subset f(B \setminus A).$$
Δείξτε ότι γενικά δεν ισχύει η ισότητα. Συμπεράνετε ότι
$$f(X) \setminus f(A) \subset f(X \setminus A)$$
και άρα αν η f είναι επί, τότε
$$(f(A))^c \subset f(A^c).$$

(iv) Αν η f είναι επιπλέον '1-1', δείξτε ότι όλες οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν ως ισότητες. Συμπεραίνουμε ότι η εναλλαγή της f με το συμπλήρωμα είναι έγκυρη για f '1-1' και επί.

1.2 Έστω $f : X \to Y$ συνάρτηση και $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ καλύμματα του X και του Y αντίστοιχα.

(i) Αν $\mathscr{A}$ και $\mathscr{B}$ είναι καλύμματα του X και του Y αντίστοιχα, να δείξετε ότι η $f^{-1}(\mathscr{B})$ είναι κάλυμμα του X και η $f(\mathscr{A})$ είναι κάλυμμα του $f(X)$.

(ii) Αν $\mathscr{A}$ και $\mathscr{B}$ είναι διαμερίσεις του X και του Y αντίστοιχα, να εξετάσετε αν τα $f(\mathscr{A})$ και $f^{-1}(\mathscr{B})$ είναι διαμερίσεις του Y και του X αντίστοιχα. Τί αλλάζει αν η f είναι (α) '1-1', (β) επί, (γ) '1-1' και επί ;

1.3 Έστω $\mathcal{T}$ η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Να υπολογιστεί το ίχνος της $\mathcal{T}$ πάνω στο $[0, 1]$.

1.4 Αποδείξτε την Πρόταση 1.10

1.5 Αποδείξτε την Πρόταση 1.11

1.6 Βρείτε ακολουθία (A_n) για την οποία $\liminf A_n = \emptyset$ και $\limsup A_n = X$.

1.7 Βρείτε ακολουθία (A_n) για την οποία όλες οι ανισότητες της σχέσης 1.3 ισχύουν γνήσια.

1.8 Βρείτε τα όρια των ακολουθιών $(A_n),\ (B_n)$, όπου $A_n = (1/n, 2 - 1/n]$ και $B_n = (-1/n, 1 - 1/n]$.

1.9 Έστω ακολουθίες $(A_n),\ (B_n)$ για τις οποίες ισχύει ότι $A_n \to A$ και $B_n \to B$. Να δείξετε ότι $A_n \cap B_n \to A \cap B$ και $A_n \cup B_n \to A \cup B$.

1.2 σ–άλγεβρες

Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με διάφορες οικογένειες υποσυνόλων $\mathscr{A}$ ενός βασικού συνόλου X που ικανοποιούν ενδιαφέρουσες ιδιότητες κλειστότητας ως προς κάποιες βασικές συνολοθεωρητικές πράξεις (ένωση, τομή, ...) και τελεστές (συμπλήρωμα). Οι προκύπτουσες δομές είναι από πολύ χρήσιμες μέχρι απαραίτητες για τη μελέτη της θεωρίας Πιθανοτήτων. Όπως θα δούμε, η απόδοση πιθανότητας δεν είναι πάντα δυνατή σε κάθε υποσύνολο A ενός βασικού συνόλου X και έτσι προκύπτει φυσιολογικά το ερώτημα σε ποιά υποσύνολα μπορούμε να αποδώσουμε πιθανότητα. Αναγνωρίζοντας το χαρακτήρα της πιθανότητας ως μίας συνολοσυνάρτησης που ικανοποιεί συγκεκριμένες ιδιότητες, τότε το παραπάνω ερώτημα ανάγεται στο πρόβλημα εύρεσης της πιο κατάλληλης δομής που πρέπει να έχει η $\mathscr{A}$ ώστε να παίξει το ρόλο του πεδίου ορισμού της πιθανότητας (ως συνολοσυνάρτησης). Ξεκινάμε, υπενθυμίζοντας στοιχειώδεις έννοιες από τη συνολοθεωρία.

Η δομή που έχει το μεγαλύτερο ενδιαφέρον στη θεωρία Πιθανοτήτων είναι αυτή της σ-άλγεβρας.

Ορισμός 1.12. Μία συλλογή (κλάση ή οικογένεια) $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X λέγεται *σ-άλγεβρα* στο X (ή επί του X) αν:

(i) $\mathcal{A} \neq \emptyset$ (ή $\emptyset \in \mathcal{A}$ ή $X \in \mathcal{A}$)

(ii) αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $A^c \in \mathcal{A}$ (κλειστή στα συμπληρώματα)

(iii) αν (A_n) ακολουθία στην $\mathcal{A}$, τότε $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ (κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις)

Το ζεύγος $(X, \mathcal{A})$ λέγεται *μετρήσιμος χώρος* και τα στοιχεία της $\mathcal{A}$ λέγονται $\mathcal{A}$-*μετρήσιμα σύνολα*. Όπως θα δούμε παρακάτω η ονομασία αυτή προέρχεται από το γεγονός ότι στην οικογένεια $\mathcal{A}$ μπορούμε να ορίσουμε ένα μέτρο και ειδικότερα και ένα μέτρο πιθανότητας.

Παρατήρηση 1.13. Αν $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα επί του X, τότε

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$, αφού από τη συνθήκη $\mathcal{A} \neq \emptyset$ υπάρχει κάποιο $A \in \mathcal{A}$ και άρα $X = A \cup A^c \cup A \cup A^c \cup \cdots$ και $\emptyset = X^c$.

(ii) είναι κλειστή και στις πεπερασμένες ενώσεις.
Απόδειξη:
Αρκεί να δείξουμε ότι αν $A, B \in \mathcal{A}$ τότε $A \cup B \in \mathcal{A}$.
$A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots$ είναι αριθμήσιμη ένωση στοιχείων της $\mathcal{A}$ και λόγω της κλειστότητας στις αριθμήσιμες ενώσεις $A \cup B \in \mathcal{A}$.

(iii) είναι κλειστή στις αριθμήσιμες και στις πεπερασμένες τομές.
Απόδειξη:
Πράγματι, αν (A_n) ακολουθία στην $\mathcal{A}$, τότε $\bigcap_n A_n = (\bigcup_n A_n^c)^c \in \mathcal{A}$, από την κλειστότητα στα συμπληρώματα και στις αριθμήσιμες ενώσεις. Παρόμοια $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$.

(iv) είναι κλειστή στις συνολοθεωρητικές διαφορές $[A \setminus B = AB^c \in \mathcal{A}]$

(v) είναι κλειστή στις συμμετρικές διαφορές $[A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{A}]$.

Δίνουμε τώρα κάποια απλά παραδείγματα σ-αλγεβρών.

Παράδειγμα 1.14. Είναι προφανές ότι αν $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα επί του X, τότε

$$\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X). \tag{1.4}$$

- η συλλογή $\{\emptyset, X\}$ είναι σ-άλγεβρα και λέγεται η *τετριμμένη σ-άλγεβρα*
- το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ είναι σ-άλγεβρα και λέγεται η *διακριτή σ-άλγεβρα*

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η κλάση $\mathscr{C}_\sigma(X)$ όλων των σ-αλγεβρών επί του X εφοδιασμένη με τη σχέση μερικής διάταξης του περιέχεσθαι έχει ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο. Η τετριμμένη και η διακριτή σ-άλγεβρα είναι η ελάχιστη και η μέγιστη δυνατή σ-άλγεβρα αντίστοιχα.

Παράδειγμα 1.15. Έστω X σύνολο με $|X| > 1$ και $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$. Τότε η $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ είναι σ-άλγεβρα.
π.χ., αν $X = \{1,2,3,4\}$, τότε $\{\emptyset, \{1\}, \{2,3,4\}, X\}$ ή $\{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}, X\}$ είναι σ-άλγεβρες.

Παράδειγμα 1.16. Έστω X υπεραριθμήσιμο σύνολο (π.χ. $X = \mathbb{R}$). Τότε η οικογένεια
$\mathcal{A} = \{A \subset X : A$ αριθμήσιμο ή A^c αριθμήσιμο$\}$ είναι σ-άλγεβρα.
Απόδειξη:
Ας ελέγξουμε τις ιδιότητες του ορισμού :

(i) Προφανώς $\emptyset \subseteq X$ που είναι αριθμήσιμο, άρα $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(ii) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε A αριθμήσιμο ή A^c αριθμήσιμο και έτσι A^c αριθμήσιμο ή $(A^c)^c$ αριθμήσιμο. Επομένως $A^c \in \mathcal{A}$.

(iii) Έστω $(A_n) \in \mathcal{A}$. Έχουμε ότι $\forall n \geq 1$, A_n αριθμήσιμο ή A_n^c αριθμήσιμο.
Άρα είτε για κάθε $n \geq 1$, A_n αριθμήσιμο και άρα $\bigcup\limits_n A_n \in \mathcal{A}$ ως αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων συνόλων, είτε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $A_{n_0}^c$ αριθμήσιμο. Τότε, $\left(\bigcup\limits_n A_n\right)^c = \bigcap\limits_n A_n^c \subset A_{n_0}^c$ είναι αριθμήσιμο.
Οπότε, $\left(\bigcup\limits_n A_n\right)^c$ είναι αριθμήσιμο. □

Όταν διαθέτουμε μία δεδομένη συλλογή σ-αλγεβρών (επί του ιδίου συνόλου), τότε εύκολα μπορούμε να βρούμε τη μεγαλύτερη δυνατή σ-άλγεβρα που περιέχουν από κοινού. Αυτή προκύπτει άμεσα παίρνοντας την τομή τους, δηλ., απομονώνοντας σε μία καινούρια οικογένεια υποσυνόλων όλα τα σύνολα που εμφανίζονται απο κοινού σε όλες τις σ-άλγεβρες της συλλογής.

Πρόταση 1.17. *(τομή σ-αλγεβρών $\implies$ σ-άλγεβρα)*
Αν $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ είναι μία οικογένεια σ-αλγεβρών, τότε η $\mathcal{A} := \bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i = \{A \subset X : A \in \mathcal{A}_i, \forall i \in I\}$ είναι σ-άλγεβρα.

Απόδειξη:
Ας ελέγξουμε τις ιδιότητες του ορισμού :

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}_i, \forall i \in I$ (διότι τα $\mathcal{A}_i$ είναι σ-άλγεβρες) και τότε $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(ii) Αν $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A \in \mathcal{A}_i, \forall i \in I \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_i, \forall i \in I \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.

(iii) Αν (A_n) στην $\mathcal{A}$, τότε η (A_n) είναι στην $\mathcal{A}_i, \forall i \in I \Rightarrow \bigcup\limits_n A_n \in \mathcal{A}_i, \forall i \in I \Rightarrow \bigcup\limits_n A_n \in \mathcal{A}$.
Από κατασκευής είναι η μέγιστη κοινή σ-άλγεβρα που περιέχουν.

□

Όπως είδαμε παραπάνω, η καινούρια αυτή οικογένεια υποσυνόλων διατηρεί την ιδιότητα της σ-άλγεβρας. Δε συμβαίνει το ίδιο με την ένωση. Αν ξεχωρίσουμε όλα τα σύνολα που εμφανίζονται τουλάχιστον μία φορά σε κάποια από τις σ-άλγεβρες της συλλογής, τότε η προκύπτουσα οικογένεια υποσυνόλων δεν είναι κατ'ανάγκη σ-άλγεβρα.

Παρατήρηση 1.18. (ένωση σ-αλγεβρών $\not\Rightarrow$ σ-άλγεβρα)
Δίνουμε δύο αντιπαραδείγματα σε αυτήν την κατεύθυνση.

Αντιπαράδειγμα 1: Έστω $X = \{1,2,3\}$. Θέτουμε $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, X\}$ και $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{2\}, \{1,3\}, X\}$. Οι $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρες, αφού είναι της μορφής $\{\emptyset, A, A^c, X\}$ (Παράδειγμα 1.15). Όμως, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, X\}$ δεν είναι σ-άλγεβρα, αφού

$$\{2,3\} \cap \{1,3\} = \{3\} \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \quad \text{ή} \quad \{1\} \cup \{2\} = \{1,2\} \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B}.$$

Αντιπαράδειγμα 2: Έστω $X = \mathbb{N}$. Για κάθε $n \geq 0$ ορίζουμε
$\mathcal{A}_n := \{A \subset \mathbb{N} \ : \ A \subset \{0,1,2,\cdots,n\} \quad \text{ή} \quad A^c \subset \{0,1,2,\cdots,n\}\}$ και θέτουμε $\mathscr{A} = \bigcup\limits_n \mathcal{A}_n$.
Τότε, ισχύουν τα εξής:
(i) η $(\mathcal{A}_n)$ είναι αύξουσα ακολουθία σ-αλγεβρών.
(ii) $\mathscr{A} = \left\{A \subseteq \mathbb{N} \ : \ |A| < \infty \quad \text{ή} \quad \left|A^c\right| < \infty\right\}$.
(iii) η $\mathscr{A}$ δεν είναι σ-άλγεβρα στο $\mathbb{N}$.

Απόδειξη:
(i) Έστω $n \geq 0$. Κατ' αρχήν θα δείξουμε ότι η $\mathcal{A}_n$ είναι σ-άλγεβρα.
• $\emptyset \subset \{0,1,\cdots,n\} \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}_n$.
• αν $A \in \mathcal{A}_n$ τότε
$A \subset \{0,1,\cdots,n\} \quad \text{ή} \quad A^c \subset \{0,1,\cdots,n\} \Rightarrow A^c \subset \{0,1,\cdots,n\} \quad \text{ή} \quad (A^c)^c \subset \{0,1,\cdots,n\} \ \Rightarrow \ A^c \in \mathcal{A}_n$.
• αν $(A_i)_{i\geq 1}$ στην $\mathcal{A}_n$ τότε $\forall i \geq 1, A_i \subset \{0,1,\cdots,n\} \quad \text{ή} \quad A_i^c \subset \{0,1,\cdots,n\}$.

1η περίπτωση: $\forall i \geq 1, A_i \subset \{0,1,\cdots,n\} \Rightarrow \bigcup\limits_{i\geq 1} A_i \subset \{0,1,\cdots,n\} \Rightarrow \bigcup\limits_{i\geq 1} A_i \in \mathcal{A}_n$.

2η περίπτωση: $\exists i_0 \geq 1, A_{i_0}^c \subset \{0,1,\cdots,n\} \Rightarrow \left(\bigcup\limits_{i\geq 1} A_i\right)^c = \bigcap\limits_{i\geq 1} A_i^c \subset A_{i_0}^c \subset \{0,1,\cdots,n\} \Rightarrow \bigcup\limits_{i\geq 1} A_i \in \mathcal{A}_n$.

Τώρα θα δείξουμε ότι η $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 1}$ είναι αύξουσα, δηλαδή ότι $\forall n \geq 0, \mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$.
Πράγματι, έστω $A \in \mathcal{A}_n \Rightarrow A \subset \{0,1,\cdots,n\} \subset \{0,1,\cdots,n+1\}$ ή $A^c \subset \{0,1,\cdots,n\} \subset \{0,1,\cdots,n+1\}$.
Έπεται τελικά ότι $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$.
(ii) (άσκηση).
(iii) Έστω $A_n = \{2n\}, \forall n \geq 0$. Τότε $A_n \in \mathcal{A}_{2n} \subset \mathscr{A}, \forall n \geq 0$.
Έχουμε ότι $A = \bigcup\limits_{n\geq 0} A_n = \{0,2,4,\cdots\} \Rightarrow A^c = \{1,3,5,\cdots\}$. Έχουμε λοιπόν ότι ούτε το A ούτε το A^c είναι πεπερασμένα και σύμφωνα με το (ii) $A \notin \mathscr{A}$. Τελικά, η $\mathscr{A} = \bigcup\limits_{n\geq 0} \mathcal{A}_n$ δεν είναι σ-άλγεβρα.

Το παραπάνω αντιπαράδειγμα μας δείχνει ότι δεν υπάρχει καμία εξασφάλιση ότι η ένωση μίας αύξουσας ακολουθίας σ-αλγεβρών είναι σ-άλγεβρα.

Ασκήσεις

1.10 Έστω (A_n) ακολουθία στοιχείων μιας σ–άλγεβρας $\mathcal{A}$ επί ενός συνόλου X. Να δείξετε ότι $\liminf A_n, \limsup A_n \in \mathcal{A}$. Είναι κλειστή η $\mathcal{A}$ στα όρια συγκλινουσών ακολουθιών ;

1.11 Έστω $\mathcal{A}$ σ–άλγεβρα επί ενός συνόλου X και $B \subset X$. Να δείξετε ότι το ίχνος της $\mathcal{A}$ στο B

$$\mathcal{A}_B := \{\, A \cap B : A \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{P}(B)$$

είναι σ–άλγεβρα επί του B. Η $\mathcal{A}_B$ λέγεται *σ–άλγεβρα ίχνος* της $\mathscr{A}$ στο B.

1.12 Έστω $(X_1, \mathcal{A}_1)$ και $(X_2, \mathcal{A}_2)$ δύο μετρήσιμοι χώροι, όπου $X_1, X_2 \subset X'$ με $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Θέτουμε $X = X_1 \cup X_2$ και ορίζουμε $\mathcal{A} := \{A \subset X : A = A_1 \cup A_2, \ A_1 \in \mathcal{A}_1, \ A_2 \in \mathcal{A}_2\}$

(i) Να δείξετε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα επί του X. Τη συμβολίζουμε $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$.

(ii) Να εξεταστεί αν ισχύει το παραπάνω συμπέρασμα όταν $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$.

(iii) Έστω $\mathcal{B}$ σ–άλγεβρα επί του X. Να δείξετε ότι $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_{X_1} \oplus \mathcal{B}_{X_2}$.

(iv) Να δείξετε ότι $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{X_1} \oplus \mathcal{B}_{X_2}$ αν και μόνο αν $X_1, X_2 \in \mathcal{B}$.

(v) Να εξεταστεί αν το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να επεκταθεί για κάθε αριθμήσιμη $\mathcal{B}$–διαμέριση (X_n) του X, έτσι ώστε $\mathcal{B} = \oplus_{n=1}^{+\infty} \mathcal{B}_{X_n}$.

1.13 Έστω $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ μετρήσιμοι χώροι και $f : X \to Y$ συνάρτηση.

(i) Να δείξετε ότι η $f^{-1}(\mathcal{B})$ είναι σ-άλγεβρα επί του X.

(ii) Να βρεθεί η σχέση μεταξύ των $f^{-1}(\mathcal{B})$ και $f^{-1}(\mathcal{B}_{f(X)})$.

(iii) Να δείξετε ότι η $f(\mathcal{A})$ δεν είναι σ-άλγεβρα ούτε επί του U, αλλά και ούτε επί του $f(X)$. Αλλάζουν τα συμπεράσματα αν είναι η f είναι 1-1 ;

1.3 Δακτύλιοι-Άλγεβρες συνόλων

Περιγράφουμε τώρα ένα σύνολο ιδιοτήτων που χαρακτηρίζουν κάποιες αλγεβρικές δομές πάνω σε σύνολα που είναι ασθενέστερες από την έννοια της σ–άλγεβρας.

$$\begin{aligned}
\textbf{(1)} &: \mathscr{A} \neq \emptyset. \\
\textbf{(2)} &: \mathscr{A} \text{ κλειστή στα συμπληρώματα} \\
\textbf{(3)} &: \mathscr{A} \text{ κλειστή στις σ–ενώσεις (αριθμήσιμες)} \\
\textbf{(2)}' &: \mathscr{A} \text{ κλειστή στις διαφορές} \\
\textbf{(3)}' &: \mathscr{A} \text{ κλειστή στις π–ενώσεις (πεπερασμένες)}
\end{aligned}$$

Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} \text{ σ–άλγεβρα} &\iff \textbf{(1)} + \textbf{(2)} + \textbf{(3)} \\
\mathscr{A} \text{ άλγεβρα} &\iff \textbf{(1)} + \textbf{(2)} + \textbf{(3)}' \\
\mathscr{A} \text{ δακτύλιος} &\iff \textbf{(1)} + \textbf{(2)}' + \textbf{(3)}'
\end{aligned}$$

Παραδείγματα:

(i) Έστω $X = \{1, 2, 3\}$. $\mathscr{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, X\} \implies \mathscr{A}$ σ–άλγεβρα $\implies$ άλγεβρα $\implies$ δακτύλιος.

(ii) Έστω $R_1 = \{\emptyset\}$, $R_2 = \{\emptyset, \{1\}\}$, $R_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}\}$, $R_4 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, X\}$. Έχουμε

	R_1	R_2	R_3	R_4
δακτύλιος	✓	✓	×	✓
άλγεβρα	×	×	×	✓

Παρατήρηση 1.19. Εύκολα προκύπτουν οι επόμενες σχέσεις:

(i) σ–άλγεβρα $\implies$ άλγεβρα $\implies$ δακτύλιος
δακτύλιος $\not\Longrightarrow$ άλγεβρα $\not\Longrightarrow$ σ–άλγεβρα

(ii) $\mathscr{A}$ σ–άλγεβρα $\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}$ άλγεβρα, όταν $|\mathscr{A}| < +\infty$

(iii) $\mathscr{A}$ άλγεβρα $\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}$ δακτύλιος + $(X \in \mathscr{A})$

Ασκήσεις

1.14 Έστω X ένα απειροσύνολο. Να δείξετε ότι η οικογένεια $\mathscr{F}$ όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του X είναι δακτύλιος επί του X. Είναι άλγεβρα επί του X ;

1.4 Σύνδεση με αλγεβρικές δομές*

Θα παρουσιάσουμε εδώ τη σύνδεση των παραπάνω αλγεβρικών δομών πάνω σε σύνολα με τις γνωστές από την αφηρημένη άλγεβρα έννοιες του δακτυλίου και της άλγεβρας (επί ενός δακτυλίου). Για το σκοπό αυτό υπενθυμίζουμε τους αντίστοιχους ορισμούς.

Ορισμός 1.20. Μία τριάδα $(R, +, \cdot)$, που αποτελείται από ένα σύνολο R εφοδιασμένο με δύο δυαδικές πράξεις $+, \cdot : R \times R \to R$, λέγεται *δακτύλιος* αν:

(i) το ζεύγος $(R, +)$ είναι αντιμεταθετική (αβελιανή) ομάδα, δηλ., η πράξη της πρόσθεσης ικανοποιεί την προσεταιριστική και την αντιμεταθετική ιδιότητα, την ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου αλλά και την ύπαρξη αντιθέτου για κάθε στοιχείο του R.

(ii) το ζεύγος $(R, \cdot)$ είναι ημιομάδα, δηλ., η πράξη του πολλαπλασιασμού είναι προσεταιριστική.

(iii) ο πολλαπλασιασμός είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση (αριστερά και δεξιά).

Ο δακτύλιος $(R, +, \cdot)$ λέγεται *1–δακτύλιος* ή *δακτύλιος με μονάδα*, αν ο πολλαπλασιασμός έχει ουδέτερο στοιχείο. Στην περίπτωση που ο πολλαπλασιασμός ικανοποιεί την αντιμεταθετική ιδιότητα, τότε ο δακτύλιος $(R, +, \cdot)$ λέγεται *αντιμεταθετικός*. Αν οι δύο παραπάνω ιδιότητες ικανοποιούνται ταυτόχρονα, τότε λέγεται *αντιμεταθετικός 1–δακτύλιος*.

Στον επόμενο ορισμό εξειδικεύουμε μία σημαντική κατηγορία δακτυλίων που έχουν την ιδιότητα κάθε στοιχείο τους να είναι ταυτοδύναμο.

Ορισμός 1.21. Ένας δακτύλιος $(R, +, \cdot)$ λέγεται *δακτύλιος Boole* αν $x^2 = x$ για κάθε $x \in R$. Αν επιπλέον ο δακτύλιος έχει μονάδα, τότε λέγεται *άλγεβρα Boole*.

Στην επόμενη πρόταση δείχνουμε ότι το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ ενός συνόλου X αντιστοιχεί σε μία άλγεβρα Boole με κατάλληλη επιλογή πράξεων.

Πρόταση 1.22. *Έστω X σύνολο και $\mathcal{P}(X)$ το δυναμοσύνολό του. Άν ως πρόσθεση θεωρήσουμε τη συμμετρική διαφορά και πολλαπλασιασμό την τομή δύο συνόλων, τότε η τριάδα $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ είναι άλγεβρα Boole.*

Απόδειξη:
Δείχνουμε πρώτα ότι η τριάδα $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ είναι δακτύλιος με μονάδα. Το ότι η $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ είναι αβελιανή ομάδα προκύπτει από την επαλήθευση των παρακάτω σχέσεων:

$$\begin{aligned}
(A \triangle B) \triangle C &= A \triangle (B \triangle C) && \text{(προσεταιριστικότητα)} \\
A \triangle B &= B \triangle A && \text{(αντιμεταθετικότητα)} \\
A \triangle \emptyset &= A && \text{(ύπαρξη ουδετέρου)} \\
A \triangle A &= \emptyset && \text{(ύπαρξη αντιθέτου)}
\end{aligned}$$

Το ότι η $(\mathcal{P}(X), \cap)$ είναι ημιομάδα με μονάδα (μονοειδές) προκύπτει από την προσεταιριστικότητα της τομής και το γεγονός ότι $A \cap X = A$, για κάθε $A \subset X$, άρα το X είναι η μονάδα του δακτυλίου. Τέλος, η συμπλήρωση των απαιτούμενων ιδιοτήτων του δακτυλίου προκύπτει από την επιμεριστικότητα της τομής ως προς τη συμμετρική διαφορά που εκφράζεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} (A \triangle B) \cap C &= (A \cap C) \triangle (B \cap C) \\ A \cap (B \triangle C) &= (A \cap B) \triangle (A \cap C) \end{aligned}$$

Η ιδιότητα Boole εξασφαλίζεται από την προφανή σχέση $A \cap A = A$ που ικανοποιείται πάντα. $\square$

Είμαστε τώρα σε θέση να αναδιατυπώσουμε τους ορισμούς του δακτυλίου και της άλγεβρας επί ενός συνόλου με μία ξεκάθαρη αντιστοιχία με τις ανάλογες αλγεβρικές δομές.

Πρόταση 1.23. *Έστω X σύνολο και $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ μία οικογένεια υποσυνόλων του X. Τότε,*

(i) *η $\mathscr{A}$ είναι δακτύλιος επί του X, αν και μόνο αν η $\mathscr{A}$ είναι υποδακτύλιος (Boole) της $(\mathscr{P}(X), \triangle, \cap)$,*

(ii) *η $\mathscr{A}$ είναι άλγεβρα επί του X, αν και μόνο αν η $\mathscr{A}$ είναι υποάλγεβρα (Boole) της $(\mathscr{P}(X), \triangle, \cap)$.*

Απόδειξη:
(i) ($\Longrightarrow$) Υπενθυμίζουμε ότι ένα υποσύνολο S ενός δακτυλίου $(R, +, \cdot)$ είναι υποδακτύλιος του R (ως προς τις ίδιες πράξεις), αν και μόνο αν $S \neq \emptyset$, $a - b \in R$ και $ab \in R$ για κάθε $a, b \in R$. Επειδή το αντίθετο κάθε $A \in \mathscr{A}$ (ως προς τη συμμετρική διαφορά) είναι το ίδιο το A, οι παραπάνω ιδιότητες αντιστοιχούν εδώ στο $\mathscr{A} \neq \emptyset$, $A \triangle B \in \mathscr{A}$ και $A \cap B \in \mathscr{A}$. Παρατηρούμε όμως ότι $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathscr{A}$ και $A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \triangle B) \in \mathscr{A}$, διότι η $\mathscr{A}$ ως δακτύλιος επί του X από υπόθεση είναι κλειστή σε πεπερασμένες ενώσεις και διαφορές.
($\Leftarrow$) Προκύπτει πάλι άμεσα από τις σχέσεις $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$ και $A \cup B = A \triangle (B \cap A)$.
(ii) Η απόδειξη είναι όπως παραπάνω με την επιπλέον απαίτηση η μονάδα του δακτυλίου, δηλ., το βασικό σύνολο X να είναι μέλος της $\mathscr{A}$.

Ασκήσεις

1.15 Να δείξετε ότι κάθε δακτύλιος Boole είναι αντιμεταθετικός.

1.16 Να δείξετε ότι κάθε πεπερασμένος δακτύλιος Boole έχει μονάδα. Συμπεράνετε ότι κάθε πεπερασμένος δακτύλιος επί ενός συνόλου X είναι άλγεβρα επί ενός υποσυνόλου Y του X. Ισχύει το συμπέρασμα αυτό και για άπειρους δακτυλίους ;

1.5 Κλάσεις Dynkin

Μία ασθενέστερη δομή από αυτήν της σ–άλγεβρας είναι η κλάση Dynkin.

Ορισμός 1.24. Μία συλλογή $\mathscr{D}$ υποσυνόλων του X λέγεται *κλάση Dynkin* στο X ή *δ–κλάση*, αν:

(i) $X \in \mathscr{D}$

(ii) αν $A, B \in \mathscr{D}$ και $A \subset B$, τότε $B \setminus A \in \mathscr{D}$ (κλειστή στις μονότονες διαφορές)

(iii) αν (A_n) αύξουσα ακολουθία στην $\mathscr{D}$, τότε $\cup_n A_n \in \mathscr{D}$ (κλειστή στις αύξουσες ακολουθίες)

Πρόταση 1.25.

$$\begin{aligned} &\textit{σ–άλγεβρα} \implies \textit{κλάση Dynkin} \\ &\textit{κλάση Dynkin} \;\not\Longrightarrow\; \textit{σ–άλγεβρα} \end{aligned}$$

Απόδειξη:
Όλες οι ιδιότητες μιας κλάσης Dynkin ικανοποιούνται από μία συλλογή υποσυνόλων που είναι σ–άλγεβρα, άρα κάθε σ–άλγεβρα είναι πράγματι κλάση Dynkin. Θα δείξουμε τώρα με αντιπαράδειγμα ότι κάθε κλάση Dynkin δεν είναι απαραίτητα σ–άλγεβρα. Έστω σύνολο X με τουλάχιστον 4 στοιχεία και D, E δύο σύνολα που ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\emptyset \subsetneq DE \subsetneq D, E \subsetneq D \cup E \subsetneq X$$

Τότε η $\mathscr{D} = \{\emptyset, D, E, D^c, E^c, X\}$ είναι κλάση Dynkin, αλλά όχι σ–άλγεβρα, όπως επαληθεύεται ά-μεσα. Ειδική περίπτωση του παραπάνω είναι π.χ. όταν το $X = \{1, 2, 3, 4\}$ και η συλλογή $\mathscr{D} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, X\}$ □

Στην Άσκηση 1.17 δίνεται μία ισοδύναμη αναπαράσταση της κλάσης Dynkin μέσω της έννοιας της λ–κλάσης.

Μία σ–άλγεβρα όπως και πολλές άλλες δομημένες οικογένειες υποσυνόλων έχουν την ιδιότητα να είναι κλειστές σε πεπερασμένες τομές. Σχετικά, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.26. Μία οικογένεια $\mathscr{D}$ υποσυνόλων του X λέγεται *π–σύστημα* (π–system) αν είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, δηλ., αν $A, B \in \mathscr{D}$, τότε $AB \in \mathscr{D}$.

Παρατήρηση 1.27. Η παραπάνω ιδιότητα δεν πρέπει να συγχέεται με την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών που διδάσκεται στην Πραγματική Ανάλυση και την Τοπολογία. Μία οικογένεια $\mathscr{D}$ υποσυνόλων του X λέμε ότι *έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών (Ι.Π.Τ.)* (finite intersection property) αν $\bigcap_{A \in \mathscr{F}} A \neq \emptyset$, για κάθε πεπερασμένη υποσυλλογή $\mathscr{F}$ της $\mathscr{D}$. Είναι φανερό ότι αν μία οικογένεια έχει την Ι.Π.Τ. τότε δεν είναι κατ'ανάγκη π–σύστημα, ενώ ένα π–σύστημα έχει την Ι.Π.Τ. αν και μόνο αν δεν περιέχει το κενό σύνολο.

Στην επόμενη πρόταση αναδεικνύεται η κλειστότητα στις πεπερασμένες τομές ως η ιδιότητα που λείπει από μία κλάση Dynkin για να χαρακτηριστεί ως σ–άλγεβρα.

Πρόταση 1.28. *κλάση Dynkin + π–σύστημα* $\implies$ *σ–άλγεβρα*

Απόδειξη:
Έστω $\mathscr{D}$ κλάση Dynkin και π–σύστημα. Θα δείξουμε τις ιδιότητες που απαιτούνται για να είναι η $\mathscr{D}$ σ–άλγεβρα.

(i) $X \in \mathscr{D}$ (διότι $\mathscr{D}$ κλάση Dynkin), άρα $\mathscr{D} \neq \emptyset$.

(ii) Αν $A \in \mathscr{D}$, τότε $A \subset X$ και $X \in \mathscr{D}$ από την (i). Από τη δεύτερη ιδιότητα μιας κλάσης Dynkin, συμπεραίνουμε ότι $X \setminus A = A^c \in \mathscr{D}$.

(iii) Έστω (A_n) μία ακολουθία στην $\mathscr{A}$. Τότε

$$\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n, \tag{1.5}$$

όπου η (B_n) είναι αύξουσα ακολουθία της μορφής

$$B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k. \tag{1.6}$$

Από τις (1.5) και (1.6) συμπεραίνουμε ότι για να είναι $\bigcup_n A_n \in \mathscr{D}$ αρκεί $B_n \in \mathscr{D}$, αφού τότε θα ικανοποιείται η ιδιότητα (iii) της κλάσης Dynkin. Αρκεί λοιπόν η $\mathscr{D}$ να είναι κλειστή στις πεπερασμένες ενώσεις. Όμως

$$B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k = \left(\bigcap_{k=1}^n A_k^{\mathrm{c}}\right)^{\mathrm{c}} \in \mathscr{D},$$

από την κλειστότητα στα συμπληρώματα και τις πεπερασμένες τομές (από υπόθεση). □

Πρόταση 1.29. *(τομή κλάσεων Dynkin $\implies$ κλάση Dynkin)*
Αν $(\mathscr{D}_i)_{i\in I}$ είναι μία οικογένεια κλάσεων Dynkin, τότε η $\mathscr{D} := \bigcap_{i\in I}\mathscr{D}_i = \{A \subset X : A \in \mathscr{D}_i, \forall i \in I\}$ είναι κλάση Dynkin.

Απόδειξη:
παρόμοια όπως για σ–άλγεβρες (να γίνει για εξάσκηση) □

Παρατήρηση 1.30. Όπως και στην περίπτωση των σ–αλγεβρών, έτσι και για τις κλάσεις Dynkin δεν υπάρχει καμία εξασφάλιση ότι ένωση κλάσεων Dynkin οδηγεί σε κλάση Dynkin. Βρείτε αντιπαραδείγματα.

Ασκήσεις

1.17 Μία οικογένεια $\mathscr{D}$ υποσυνόλων του X λέγεται *λ–κλάση* αν είναι

(i) μη κενή,

(ii) κλειστή στα συμπληρώματα,

(iii) κλειστή στις ξένες αριθμήσιμες ενώσεις.

Να αποδείξετε ότι η

$$\mathscr{D} \text{ είναι λ–κλάση} \iff \mathscr{D} \text{ είναι δ–κλάση.}$$

1.6 Τοπολογίες

Η έννοια της τοπολογίας είναι τόσο σημαντική στην Ανάλυση και στις εφαρμογές της που αποτελεί ένα ξεχωριστό αντικείμενο μελέτης στα Μαθηματικά. Το μόνο που θα κάνουμε είναι να αναφέρουμε σε αυτή τη μικρή παράγραφο κάποιους βασικούς ορισμούς και εντελώς στοιχειώδη αποτελέσματα, τα οποία θα μας χρειαστούν στην πορεία του μαθήματος για μία καλύτερη κατανόηση της σύνδεσης της θεωρίας Πιθανοτήτων με αυτόν τον κλάδο των Μαθηματικών. Όπως θα δούμε, η έννοια της τοπολογίας προσδιορίζει τις έννοιες ανοικτό σύνολο και συνεχής συνάρτηση στο μεγαλύτερο δυνατό βαθμό γενίκευσης αυτών των εννοιών, αφού απομονώνει τις ιδιότητες εκείνες που χαρακτηρίζουν τα ανοικτά σύνολα και τις συνεχείς συναρτήσεις σε μετρικούς χώρους.

Ορισμός 1.31. Μία συλλογή $\mathcal{T}$ υποσυνόλων του X λέγεται *τοπολογία* στο X (ή επί του X) αν:

(i) $\emptyset$, $X \in \mathcal{T}$,

(ii) η $\mathcal{T}$ είναι π–σύστημα (κλειστή στις πεπερασμένες τομές),

(iii) η $\mathcal{T}$ είναι κλειστή στις ενώσεις (οποιουδήποτε πλήθους).

Το ζεύγος $(X, \mathcal{T})$ λέγεται *τοπολογικός χώρος* και τα στοιχεία της $\mathcal{T}$ λέγονται *ανοικτά σύνολα ($\mathcal{T}$-ανοικτά)*. Τα υποσύνολα του X που τα συμπληρώματά τους είναι ανοικτά λέγονται *κλειστά σύνολα ($\mathcal{T}$-κλειστά)*.

Αναφέρουμε παρακάτω μερικά παραδείγματα τοπολογιών. Όπως θα παρατηρήσετε κιόλας από το πρώτο παράδειγμα υπάρχουν ομοιότητες στη δόμηση των τοπολογιών σε σχέση με τη δόμηση των σ-αλγεβρών. Εκτός βέβαια από τέτοιες αντιστοιχίες, οι διαφορές είναι μεγάλες, όπως για παράδειγμα ότι μία σ–άλγεβρα είναι κλειστή στα συμπληρώματα (το οποίο δε συμβαίνει γενικά σε μία τοπολογία) και είναι κλειστή μόνο σε αριθμήσιμες ενώσεις και όχι σε αυθαίρετο πλήθος ενώσεων. Παρόλο που υπάρχουν θεμελιώδεις διαφορές θα κάνουμε αναφορά, όπου χρειαστεί, σε αντιστοιχίες μεταξύ των δύο εννοιών για μία καλύτερη κατανόηση της θεωρίας και των μεταξύ τους συνδέσεων.

Παράδειγμα 1.32. Είναι προφανές ότι αν $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία επί του X, τότε

$$\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X). \tag{1.7}$$

- η συλλογή $\{\emptyset, X\}$ είναι τοπολογία και λέγεται η *τετριμμένη τοπολογία*.
- το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ είναι τοπολογία και λέγεται η *διακριτή τοπολογία*.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η κλάση $\mathscr{C}_T(X)$ όλων των τοπολογιών επί του X εφοδιασμένη με τη σχέση μερικής διάταξης του περιέχεσθαι έχει ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο. Η τετριμμένη και η διακριτή τοπολογία είναι η ελάχιστη και η μέγιστη δυνατή τοπολογία επί του X αντίστοιχα.

Παράδειγμα 1.33. Έστω $X = \{a, b\}$ με $a \neq b$, ένα σύνολο με δύο στοιχεία. Τότε, η οικογένεια $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ είναι τοπολογία επί του X. Ο χώρος αυτός λέγεται *χώρος του Sierpinski*. Είναι ειδική περίπτωση μιας τοπολογίας που είναι ταυτόχρονα τύπου ιδιαίτερου σημείου, αλλά και εξαιρούμενου σημείου (δείτε ασκ. 1.18).

Υπενθυμίζουμε παρακάτω την έννοια του μετρικού χώρου, την οποία και θα χρειαστούμε παρακάτω.

Ορισμός 1.34. Έστω X σύνολο και $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ συνάρτηση. Η d λέγεται *μετρική στο* X και ο (X, d) *μετρικός χώρος*, αν ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες:

(i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$, για κάθε $x, y \in X$ (συμμετρική ιδιότητα),

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, για κάθε $x, y, z \in X$ (τριγωνική ιδιότητα).

Στην περίπτωση που η (i) αντικατασταθεί από την ασθενέστερη συνθήκη

(i') $d(x, x) = 0$, για κάθε $x \in X$,

τότε η d λέγεται *ψευδομετρική στο* X και ο (X, d) *ψευδομετρικός χώρος*. Σε έναν ψευδομετρικό χώρο επιτρέπονται διακεκριμένα σημεία του χώρου να έχουν μηδενική απόσταση, κάτι που είναι αδύνατον σε έναν μετρικό χώρο. Παρ'όλα αυτά μπορούμε από έναν ψευδομετρικό χώρο να πάμε σε έναν μετρικό χώρο ταυτίζοντας τα σημεία που έχουν μηδενική απόσταση. Αυτό είναι εφικτό μέσω της σχέσης ισοδυναμίας $x \sim y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$.

Παράδειγμα 1.35. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε $x \in X$ και $\varepsilon > 0$ το σύνολο $B(x, \varepsilon) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ λέγεται *ανοικτή μπάλα* με κέντρο το x και ακτίνα ε. Ένα σύνολο $A \subset X$ λέγεται ανοικτό (ως προς τη μετρική d), αν για κάθε $x \in A$, υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ τέτοιο ώστε $B(x, \varepsilon) \subset A$. Αν $\mathcal{T}_d = \{A \subset X : A \text{ ανοικτό ως προς τη μετρική } d\}$, τότε είναι εύκολο να δειχθεί ότι η $\mathcal{T}_d$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (i)-(iii) μιας τοπολογίας. Η $\mathcal{T}_d$ λέγεται *η μετρική τοπολογία του* X και τα ανοικτά σύνολα ως προς τη μετρική d είναι ακριβώς τα ανοικτά σύνολα της τοπολογίας $\mathcal{T}_d$. Αντίστροφα, αν $\mathcal{T}$ είναι μία τοπολογία επί του X ιδιαίτερα σημαντικό είναι το ερώτημα κατά πόσον υπάρχει μία μετρική d τέτοια ώστε $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. Αν υπάρχει, τότε η τοπολογία $\mathcal{T}$ λέγεται *μετρικοποιήσιμη*. Για παράδειγμα, η διακριτή τοπολογία $\mathcal{P}(X)$, όπως ορίστηκε παραπάνω, είναι μετρικοποιήσιμη με τη διακριτή μετρική (αυτό αιτιολογεί και το όνομά της), που ορίζεται από τη σχέση $d(x, y) = 1$ για $x \neq y$ και βέβαια $d(x, x) = 0$. Στη διακριτή τοπολογία κάθε σύνολο είναι ανοικτό (και ταυτόχρονα κλειστό). Υπάρχουν βέβαια και πολλά παραδείγματα μη μετρικοποιήσιμων χώρων. Με την απλή παρατήρηση ότι κάθε μονοσύνολο σε ένα μετρικό χώρο είναι κλειστό σύνολο, συμπεραίνουμε ότι κάθε μετρικοποιήσιμη τοπολογία πρέπει να περιέχει όλα τα σύνολα της μορφής $X \setminus \{x\}$, όπου $x \in X$. Είναι φανερό λοιπόν ότι για ένα σύνολο X με τουλάχιστον δύο στοιχεία, ούτε η τετριμμένη τοπολογία, αλλά ούτε και όλες οι τοπολογίες των ιδιαίτερων και των εξαιρούμενων σημείων (ασκ. 1.18) είναι μετρικοποιήσιμες.

Ασκήσεις

1.18 Έστω X σύνολο με τουλάχιστον δύο σημεία και $a, b \in X$ με $a \neq b$. Να δείξετε ότι οι οικογένειες $\mathcal{T}_a = \{A \subset X : a \in X\} \cup \{\emptyset\}$ και $\mathcal{T}_{-b} = \{A \subset X : b \notin X\} \cup \{X\}$ είναι τοπολογίες επί του X. Όταν μία τοπολογία είναι της μορφής $\mathcal{T}_a$ για κάποιο $a \in X$, τότε λέγεται *τοπολογία του ιδιαίτερου σημείου* $a \in X$, ενώ όταν είναι της μορφής $\mathcal{T}_{-b}$ για κάποιο $b \in X$, τότε λέγεται *τοπολογία του εξαιρούμενου σημείου* $b \in X$.

1.19 Έστω (X, d) ένας ψευδομετρικός χώρος. Ορίζουμε μία διμελή σχέση $\sim$, όπου $a \sim b$ αν και μόνο αν $d(x, y) = 0$. Να δείξετε ότι

(i) η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο X.

(ii) αν $X^* = X / \sim$ είναι ο χώρος πηλίκο και $[x] = \{y \in x : y \sim x\}$ είηαι η κλάση ισοδυναμίας του x, τότε η συνάρτηση $d^* : X^* \times X^* \to \mathbb{R}_+$ όπου $d^*([x], [y]) = d(x, y)$ είναι μετρική στο X^* και άρα ο (X^*, d^*) είναι μετρικός χώρος.

1.7 Παραγόμενες δομές

Όταν διαθέτουμε μία οικογένεια C υποσυνόλων του X η οποία δεν διαθέτει κάποια επιθυμητή δομή, τότε είναι φυσιολογικό το ερώτημα της επέκτασής της με καινούρια σύνολα μέχρι να αποκτήσει τις επιθυμητές ιδιότητες. Η συμπλήρωση αυτή δε γίνεται με αυθαίρετο τρόπο, αλλά έτσι ώστε η επεκταμένη οικογένεια να είναι κλειστή ως προς τις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν την εν λόγω δομή και ταυτόχρονα να έχει συμπληρωθεί με τον πιο 'οικονομικό' τρόπο. Θα μπορούσαμε να ξεχωρίσουμε δύο προσεγγίσεις σε αυτό το πρόβλημα, μία εσωτερική και μία εξωτερική.

Στην εσωτερική προσέγγιση συμπληρώνουμε διαδοχικά την αρχική συλλογή με καινούρια σύνολα που προκύπτουν μέσα από την εφαρμογή των ιδιοτήτων που θέλουμε να ικανοποιούνται. Συνεχίζουμε τη διαδικασία αυτή επαγωγικά μέχρι να φτάσουμε κάποια στιγμή σε μία συλλογή που να ικανοποιεί τις ιδιότητες κλειστότητας της δομής που θέλουμε να παράγουμε. Αυτός ο τρόπος έχει το πλεονέκτημα ότι είναι κατασκευαστικός και στο τέλος, σε πολλές περιπτώσεις μας οδηγεί σε μία αναπαράσταση κάθε συνόλου της παραγόμενης δομής με τη βοήθεια πράξεων πάνω σε απλούστερα σύνολα. Δεν θα επεκταθούμε περισσότερο σε αυτό, γιατί με εξαίρεση κάποιων απλούστερων περιπτώσεων, η πλήρης κατανόηση της διαδικασίας προϋποθέτει τη γνώση διατακτικών αριθμών και τη χρήση υπερπεπερασμένης επαγωγής, που είναι μία επέκταση της αρχής της μαθηματικής επαγωγής από το σύνολο των φυσικών αριθμών σε ευρύτερα άπειρα υποσύνολα. Ειδική περίπτωση του παραπάνω είναι είναι η κατασκευή της ιεραρχίας των συνόλων Borel η οποία καλύπτεται κυρίως σε μαθήματα περιγραφικής θεωρίας συνόλων.

Μία λιγότερο φιλόδοξη λύση του παραπάνω προβλήματος συνίσταται σε υπαρξιακές αποδείξεις των παραγόμενων δομών, Αυτό μπορεί να επιτευχθεί άμεσα με μία εξωτερική προσέγγιση, όπως περιγράφουμε παρακάτω σε δύο σημαντικά παραδείγματα τέτοιων δομών.

Ορισμός 1.36. Έστω $\emptyset \neq C \subset \mathcal{P}(X)$ και

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(C) &= \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) : C \subset \mathcal{A} \text{ και } \mathcal{A} \text{ σ–άλγεβρα}\} \\ \mathscr{D}(C) &= \{\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X) : C \subset \mathcal{D} \text{ και } \mathcal{D} \text{ κλάση Dynkin}\}. \end{aligned}$$

Οι συλλογές

$$\begin{aligned}\sigma(C) &:= \bigcap \mathscr{A}(C)\\ \delta(C) &:= \bigcap \mathscr{D}(C)\end{aligned}$$

λέγονται η *παραγόμενη σ–άλγεβρα* και η *παραγόμενη κλάση Dynkin* του C αντίστοιχα.

Παρατήρηση 1.37. (i) Η $\sigma(C)$ και η $\delta(C)$ είναι σ–άλγεβρα και κλάση Dynkin αντίστοιχα από τις Προτάσεις 1.17 και 1.29. Επίσης, προφανώς περιέχουν τη συλλογή C. Απο τον ορισμό τους λοιπόν η $\sigma(C)$ και η $\delta(C)$ είναι η μικρότερη σ–άλγεβρα και η μικρότερη κλάση Dynkin που περιέχουν τη συλλογή C αντίστοιχα.

(ii) Λόγω του ότι κάθε σ–άλγεβρα είναι κλάση Dynkin, ισχύει η σχέση

$$\delta(C) \subset \sigma(C).$$

Παράδειγμα 1.38. Έστω X σύνολο με τουλάχιστον δύο στοιχεία και $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$. Αν $C = \{A\}$, τότε $\sigma(C) = \delta(C) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$.
Απόδειξη:
Θέτουμε $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$. Παρατηρούμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα που περιέχει τη C. Άρα έχουμε $\delta(C) \subset \sigma(C) \subset \mathcal{A}$. Αρκεί λοιπόν να ισχύει ότι $\mathcal{A} \subset \delta(C)$. Αυτό είναι προφανές αφού κάθε κλάση Dynkin που έχει μέλος το A, μαζί με το $\emptyset, X$ (που πάντα περιλαμβάνονται), θα έχει και το A^c (ως κλειστή στα συμπληρώματα). □

Παράδειγμα 1.39. Έστω $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{B} = \{\{1\}\}$ και $C = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$. Να βρεθούν οι παραγόμενες σ–άλγεβρες και κλάσεις Dynkin των $\mathcal{B}$ και C.
Απόδειξη:
Από το Παράδειγμα 1.38 είναι φανερό ότι

$$\delta(\mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{B}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4\}, X\}. \tag{1.8}$$

Όπως όμως θα δούμε, για τη συλλογή C οι δύο παραγόμενες κλάσεις διαφέρουν μεταξύ τους. Παρατηρούμε ότι $\{2\} = \{1, 2\} \cap \{2, 3\}$, και άρα $\{2\} \in \sigma(C)$. Επίσης $\{1\} = \{1, 2\} \setminus \{2\} \in \sigma(C)$ και $\{3\} = \{2, 3\} \setminus \{2\} \in \sigma(C)$. Τέλος $\{4\} = X \setminus (\{1, 2\} \cup \{2, 3\}) \in \sigma(C)$. Αφού λοιπόν η $\sigma(C)$ περιέχει όλα τα μονοσύνολα, συμπεραίνουμε ότι $\sigma(C) = \mathcal{P}(X)$. Είναι απλό τώρα να επαληθευτεί ότι η

$$\delta(C) = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, X\}. \tag{1.9}$$

Πράγματι, κάθε κλάση Dynkin που περιέχει τη C, μαζί με τα $\emptyset$ και X, ως κλειστή στα συμπληρώματα πρέπει να περιέχει τα δισύνολα $\{3, 4\}$ και $\{1, 4\}$, άρα και όλη τη συλλογή που αντιστοιχεί στο δεξί μέλος της ισότητας 1.9. Η συλλογή αυτή είναι κλειστή στις μονότονες διαφορές και στις μονότονες ακολουθίες και έτσι καταλήγουμε στο ότι είναι κλάση Dynkin και άρα είναι πράγματι η $\delta(C)$. □

Στο παραπάνω παράδειγμα αναφέρθηκαν περιπτώσεις στις οποίες οι παραγόμενες σ–άλγεβρες και κλάσεις Dynkin διαφέρουν ή συμπίπτουν. Πολλές φορές, αν η C είναι κατάλληλα δομημένη μπορούμε να προβλέψουμε τις περιπτώσεις που αυτές συμπίπτουν. Το επόμενο θεώρημα, γνωστό με το όνομα π–λ, κινείται προς αυτήν την κατεύθυνση. Η απόδειξη του θεωρήματος θα σκιαγραφηθεί και προτείνουμε να συμπληρωθούν οι λεπτομέρειες της απόδειξης.

Θεώρημα 1.40 (π–λ Θεώρημα)**.** *Έστω $\emptyset \neq C \subset \mathcal{P}(X)$. Αν η C είναι π–σύστημα, τότε $\delta(C) = \sigma(C)$.*

Απόδειξη:
Ισχύει πάντα ότι $\delta(C) \subset \sigma(C)$. Πρέπει λοιπόν να δείξουμε ότι $\sigma(C) \subset \delta(C)$. Αυτό θα είναι αληθές αν $\delta(C)$ είναι σ–άλγεβρα, αφού τότε θα ανήκει στη συλλογή των σ–αλγεβρών που περιέχουν τη συλλογή C και άρα θα περιέχει τη μικρότερη δυνατή με αυτήν την ιδιότητα που είναι η $\sigma(C)$. Από την Πρόταση 1.28 αρκεί να δείξουμε ότι η κλάση Dynkin $\delta(C)$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές. Είναι φανερό λοιπόν ότι χρειαζόμαστε μία επέκταση της ιδιότητας αυτής από τη συλλογή C σε ολόκληρη την κλάση Dynkin $\delta(C)$. Αυτό θα γίνει σταδιακά σε δύο βήματα. Πρώτα δείχνουμε ότι η συλλογή

$$\mathcal{F} = \{A \in \delta(C) : AB \in \delta(C), \text{ για κάθε } B \in C\}$$

είναι κλάση Dynkin που περιέχει τη C (να γίνει). Από αυτό συμπεραίνουμε ότι η $\delta(C) \subset \mathcal{F}$. Όμως η $\mathcal{F} \subset \delta(C)$ από κατασκευής. Άρα $\mathcal{F} = \delta(C)$. Η ισότητα αυτή μας δείχνει ότι $AB \in \delta(C)$ όταν ένα από τα δύο σύνολα είναι στη C και το άλλο στη $\delta(C)$. Για να επιτύχουμε τελικά τη ζητούμενη επέκταση, όταν και τα δύο σύνολα κινούνται στη $\delta(C)$, αρκεί πλέον να δείξουμε ότι η συλλογή

$$\mathcal{G} = \{A \in \delta(C) : AB \in \delta(C), \text{ για κάθε } B \in \delta(C)\}$$

είναι κλάση Dynkin που περιέχει τη C (να γίνει). Από αυτό συμπεραίνουμε ότι η $\delta(C) \subset \mathcal{G}$. Όμως η $\mathcal{G} \subset \delta(C)$ από κατασκευής. Άρα $\mathcal{G} = \delta(C)$. Η ισότητα αυτή μας δείχνει ότι $AB \in \delta(C)$ όταν και τα δύο σύνολα είναι στη $\delta(C)$. Διαπιστώνουμε λοιπόν τελικά ότι η $\delta(C)$ είναι π–σύστημα και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Παρατήρηση 1.41. Είναι λίγο ευκολότερο να δειχθεί ότι οι $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ είναι κλάσεις Dynkin μέσα από τον ισοδύναμο χαρακτηρισμό τους ως λ–κλάσεις (Άσκηση 1.17). Αυτό δικαιολογεί το όνομα του παραπάνω θεωρήματος.

Παρατηρούμε επίσης ότι στα παραπάνω παραδείγματα οι παραγόμενες σ–άλγεβρες μπορούν να γραφτούν στη μορφή $\sigma(\mathcal{P})$, όπου $\mathcal{P}$ είναι μία διαμέριση του X. Έτσι στο Παράδειγμα 1.38 η $\sigma(C) = \sigma(\mathcal{P})$, όπου $\mathcal{P} = \{A, A^c\}$ και στο Παράδειγμα 1.39 $\sigma(C) = \sigma(\mathcal{P})$, όπου $\mathcal{P} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$. Αυτές οι σ–άλγεβρες είναι ειδικές περιπτώσεις σ–αλγεβρών που παράγονται από διαμερίσεις. Είναι φανερό ότι διαφορετικές οικογένειες υποσυνόλων μπορούν να παράγουν τις ίδιες σ–άλγεβρες, αλλά μπορούμε να βρούμε κοινά γνωρίσματα στη δομή σ–άλγεβρων ανάλογα με το είδος των οικογενειών που τις παράγουν και την πληθικότητά τους. Σχετικά δίνουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.42. Έστω $\mathcal{A}$ σ–άλγεβρα επί του X. Μία οικογένεια υποσυνόλων $C \subset \mathcal{P}(X)$ λέγεται *ένας γεννήτορας* της $\mathcal{A}$ αν $\mathcal{A} = \sigma(C)$ και τότε λέμε ότι η $\mathcal{A}$ *παράγεται* από τη C. Αν ο γεννήτορας συνιστά διαμέριση του X, τότε λέμε ότι η A *παράγεται από διαμέριση*. Ένας γεννήτορας λέγεται *αριθμήσιμος γεννήτορας* αν έχει το πολύ αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων. Η σ–άλγεβρα $\mathcal{A}$ λέγεται *αριθμήσιμα παραγόμενη* αν έχει αριθμήσιμο γεννήτορα. Αν επιπλέον ο γεννήτορας συνιστά διαμέριση του X, τότε λέμε ότι η A *παράγεται από αριθμήσιμη διαμέριση*.

Όπως θα δούμε αμέσως τώρα οι σ–άλγεβρες που παράγονται από διαμερίσεις περιγράφονται πλήρως από τα στοιχεία της διαμέρισης.

Πρόταση 1.43. *Έστω $\mathcal{A}$ σ–άλγεβρα επί του X παραγόμενη από τη διαμέριση $\mathcal{P} = \{A_i : i \in I\}$. Αν θέσουμε $\mathcal{J} := \{J \subset I : J \text{ αριθμήσιμο}\}$,*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{J}} := \left\{A \in \mathcal{A} : A = \cup_{i \in J} A_i, \text{ όπου } J \in \mathcal{J}\right\}$$

και

$$\mathcal{A}^c_{\mathcal{J}} := \left\{A \in \mathcal{A} : A^c \in \mathcal{A}_{\mathcal{J}}\right\},$$

τότε

(i) *$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathcal{J}} \cup \mathcal{A}^c_{\mathcal{J}}$, δηλ. η $\mathcal{A}$ αποτελείται ακριβώς από τα σύνολα εκείνα που είτε τα ίδια, είτε τα συμπληρώματά τους είναι αριθμήσιμες ενώσεις στοιχείων της $\mathcal{P}$,*

(ii) *αν η διαμέριση είναι υπεραριθμήσιμη έχουμε $\mathcal{A}_{\mathcal{J}} \cap \mathcal{A}^c_{\mathcal{J}} = \emptyset$, διαφορετικά, αν η διαμέριση είναι αριθμήσιμη έχουμε $\mathcal{A}_{\mathcal{J}} = \mathcal{A}^c_{\mathcal{J}}$ και άρα $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathcal{J}}$ δηλ. η $\mathcal{A}$ αποτελείται ακριβώς από τα σύνολα εκείνα που είναι αριθμήσιμες ενώσεις στοιχείων της $\mathcal{P}$.*

Απόδειξη:

(i) Θέτουμε $\mathcal{B} = \mathcal{A}_{\mathcal{J}} \cup \mathcal{A}^c_{\mathcal{J}}$. Είναι φανερό ότι η $\mathcal{B}$ είναι μη κενή και κλειστή στα συμπληρώματα. Θα δείξουμε ότι είναι κλειστή και στις αριθμήσιμες ενώσεις. Έστω (B_n) ακολουθία στη $\mathcal{B}$ και $N = \{n \in \mathbb{N} : B_n \in \mathcal{A}_{\mathcal{J}}\}$. Τότε

$$\begin{aligned} \cup_n B_n &= \Big(\cup_{n\in N} B_n\Big) \cup \Big(\cup_{n\in N^c} B_n\Big) = \Big(\cup_{n\in N} \cup_{i\in J_n} A_i\Big) \cup \Big(\cup_{n\in N^c} (\cup_{i\in J_n} A_i)^c\Big) \\ &= \Big(\cup_{i\in \cup_{n\in N} J_n} A_i\Big) \cup \Big(\cap_{n\in N^c} (\cup_{i\in J_n} A_i)\Big)^c \\ &= \Big(\cup_{i\in \cup_{n\in N} J_n} A_i\Big) \cup \Big(\cup_{i\in \cap_{n\in N^c} J_n} A_i\Big)^c. \end{aligned}$$

Επειδή τα σύνολα $J_A = \cup_{n\in N} J_n$ και $J_B = \cap_{n\in N^c} J_n$ είναι αριθμήσιμα, συμπεραίνουμε ότι $\cup_n B_n = A \cup B$, όπου $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{J}}$ και $B \in \mathcal{A}^c_{\mathcal{J}}$. Μένει λοιπόν να δειχθεί ότι μη τετριμμένες ενώσεις τέτοιας μορφής οδηγούν αποκλειστικά σε ένα από τα δύο σύνολα $\mathcal{A}_{\mathcal{J}}$ ή $\mathcal{A}^c_{\mathcal{J}}$. Πράγματι,

$$A \cup B = (\cup_{i\in J_A} A_i) \cup (\cup_{i\in J_B} A_i)^c = (\cup_{i\in J_A \cap J_B} A_i)^c \in \mathcal{A}^c_{\mathcal{J}},$$

όπου η τελευταία ισότητα επαληθεύεται εύκολα με συνολοθεωρητικές πράξεις.

(ii) Ας υποθέσουμε πρώτα ότι το I είναι υπεραριθμήσιμο και ότι $\mathcal{A}_{\mathcal{J}} \cap \mathcal{A}^c_{\mathcal{J}} \neq \emptyset$. Τότε υπάρχει $A = \cup_{i\in J} A_i = (\cup_{i\in K} A_i)^c$, όπου $J, K \in \mathcal{J}$. Επειδή τα $(A_i)_{i\in I}$ αποτελούν διαμέριση το δεξί μέλος της τελευταίας ισότητας γράφεται $\cup_{i\in K^c} A_i$. Συμπεραίνουμε ότι $J = K^c$, το οποίο είναι άτοπο αφού το K^c είναι υπεραριθμήσιμο. Αν τώρα το I είναι αριθμήσιμο, τότε έχουμε $(\cup_{i\in J} A_i)^c = \cup_{i\in J^c} A_i \in \mathcal{A}_{\mathcal{J}}$, αφού το $J^c = I \setminus J$ είναι και αυτό αριθμήσιμο. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\mathcal{A}_{\mathcal{J}} = \mathcal{A}^c_{\mathcal{J}} = \mathcal{A}^c_{\mathcal{J}}$.

□

Παράδειγμα 1.44. Έστω $X = \mathbb{N}$, και $\mathcal{A} = \sigma\Big(\big\{\{n\} : n \in \mathbb{N}\big\}\Big)$ η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα μονοσύνολα του $\mathbb{N}$. Τότε επειδή οι φυσικοί αριθμοί είναι αριθμήσιμο σύνολο συμπεραίνουμε από την παραπάνω πρόταση ότι $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ και άρα το $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ παράγεται από διαμέριση. Είναι προφανώς αριθμήσιμα παραγόμενη σ–άλγεβρα.

Παράδειγμα 1.45. Έστω $X = \mathbb{R}$, και $\mathcal{A} = \sigma\Big(\big\{\{x\} : x \in \mathbb{R}\big\}\Big)$ η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα μονοσύνολα του $\mathbb{R}$. Τότε επειδή οι πραγματικοί αριθμοί είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο συμπεραίνουμε από την παραπάνω πρόταση ότι $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} : A$ αριθμήσιμο ή A^c αριθμήσιμο$\}$. Παρατηρούμε ότι η $\mathcal{A}$ δεν είναι αριθμήσιμα παραγόμενη σ–άλγεβρα.

Ορισμός 1.46. Αν $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα επί του X, τότε θέτουμε $\mathcal{A}_x := \{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$ και $A(x) := \cap \mathcal{A}_x$. Το σύνολο $A(x)$ λέγεται *$\mathcal{A}$–άτομο* και αναπαριστά τα στοιχεία που ανήκουν ακριβώς στα ίδια σύνολα της $\mathcal{A}$ με το x. Αν $(A_i)_{i\in I}$ είναι τα διακεκριμένα $\mathcal{A}$–άτομα, τότε συνιστούν διαμέριση του X και η παραγόμενη σ–άλγεβρα όλων των $\mathcal{A}$–ατόμων θα συμβολίζεται με $\widetilde{\mathcal{A}}$. Είναι εύκολα επαληθεύσιμο ότι τα $\mathcal{A}$–άτομα είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης ισοδυναμίας $x \sim y$ αν και μόνο αν $\mathcal{A}_x = \mathcal{A}_y$.

Πρόταση 1.47. *Μία σ–άλγεβρα $\mathcal{A}$ παράγεται από διαμέριση αν και μόνο αν $\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{A}}$, δηλ. αν και μόνο αν η $\mathcal{A}$ συμπίπτει με την παραγόμενη σ–άλγεβρα των ατόμων της.*

Απόδειξη:
Αν η $\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{A}}$, τότε προφανώς παράγεται από τη διαμέριση που προκύπτει από τα $\mathcal{A}$–άτομα. Αποδεικνύουμε τώρα το ευθύ. Αν η $\mathcal{A}$ παράγεται από διαμέριση, τότε υπάρχει διαμέριση $\mathcal{P} = \{A_i : i \in I\}$ τέτοια ώστε $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{P})$. Από την Πρόταση 1.43 είναι φανερό ότι για κάθε $x \in A_i$ έχουμε $\mathcal{A}(x) = \bigcap \mathcal{A}_x = A_i$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα άτομα της $\mathcal{A}$ συμπίπτουν με τα σύνολα της διαμέρισης και άρα $\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{A}}$. □

Ασκήσεις

1.20 Να δείξετε ότι κάθε πεπερασμένη σ–άλγεβρα έχει πληθάριθμο δύναμη του 2.

1.21 Να δείξετε ότι κάθε αριθμήσιμη σ–άλγεβρα είναι υποχρεωτικά πεπερασμένη.

1.22 Έστω X αριθμήσιμο σύνολο. Να αποδείξετε ότι κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ επί του X παράγεται από διαμέριση. Ισχύει το ίδιο αν το X είναι υπεραριθμήσιμο ;

1.23 Έστω $\mathcal{A}$ σ–άλγεβρα επί ενός συνόλου X. Αν το X είναι αριθμήσιμο να δείξετε ότι τα $\mathcal{A}$–άτομα είναι πάντα $\mathcal{A}$–μετρήσιμα σύνολα. Ισχύει το ίδιο και για X υπεραριθμήσιμο ;

1.8 Τα σύνολα Borel

Κεντρικό ρόλο στη θεωρία Πιθανοτήτων παίζουν οι σ–άλγεβρες που παράγονται από τοπολογίες, γνωστές με το όνομα Borel, προς τιμήν του Γάλλου Μαθηματικού Émile Borel (1871-1956), ενός από τους θεμελιωτές της θεωρίας μέτρου. Οι οικογένειες των υποσυνόλων που παράγονται με αυτόν τον τρόπο είναι αρκετά πλούσιες για να περιέχουν τα περισσότερα από τα σύνολα που εμφανίζονται σε εφαρμογές των Πιθανοτήτων.

Ορισμός 1.48. Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{T})$. Τα στοιχεία της οικογένειας $\mathcal{B}(X)$ λέγονται *σύνολα Borel* στο X και η $\mathcal{B}(X)$ λέγεται η *Borel σ–άλγεβρα* του X. Αντιπροσωπεύει την ελάχιστη σ–άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά σύνολα του X. Στην ειδική περίπτωση που ο X είναι μετρικός χώρος με μετρική τη d, τότε ως σύνολα Borel του X θα εννοούνται αυτά που παράγονται από τα ανοικτά σύνολα ως προς τη μετρική d.

Από τον παραπάνω ορισμό είναι φανερό ότι τα σύνολα Borel καθορίζονται πλήρως από την τοπολογία του X και άρα η ιδιότητα Borel είναι τοπολογική. Έτσι για παράδειγμα ισοδύναμες μετρικές έχουν τα ίδια ανοικτά, άρα και τα ίδια σύνολα Borel.

Τα σύνολα Borel του $\mathbb{R}$ περιλαμβάνουν σχεδόν όλα τα σύνολα που εμφανίζονται στην πράξη, όπως τα ανοικτά, τα κλειστά, τα διαστήματα (φραγμένα ή μη), αριθμήσιμες ενώσεις διαστημάτων, τα F_σ και G_δ σύνολα και πολλά άλλα. Παρόλο που περιέχει τα πιο χρήσιμα σύνολα, είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι μπορεί να αποδειχθεί ότι η πληθικότητα αυτής της σ–άλγεβρας είναι $c = |\mathbb{R}|$, Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι σχεδόν κάθε σύνολο του $\mathbb{R}$ δεν είναι Borel, αφού $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^c > c$. Η παραπάνω διαπίστωση θα πρέπει βέβαια να παραλληλιστεί με άλλες φαινομενικά παράδοξες διαπιστώσεις, όπως ότι σχεδόν κάθε πραγματικός είναι άρρητος, σχεδόν κάθε συνεχής συνάρτηση δεν παραγωγίζεται σε κανένα σημείο, κ.τ.λ.. Στην πραγματικότητα, τα σύνολα Borel του $\mathbb{R}$ μας αρκούν για να ορίσουμε όλα τα μέτρα πιθανότητας πάνω σε αυτούς τους μετρήσιμους χώρους και για να δώσουμε απαντήσεις στα ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια.

Όπως θα δούμε τώρα, τα σύνολα Borel του $\mathbb{R}$ μπορούν εναλλακτικά να παραχθούν από μία μεγάλη γκάμα οικογενειών υποσυνόλων, στοιχείο το οποίο θα μας φανεί χρήσιμο αργότερα.

Πρόταση 1.49. *Τα σύνολα Borel του $\mathbb{R}$ παράγονται από τις παρακάτω οικογένειες υποσυνόλων:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &= \Big\{K \subset \mathbb{R} : K \text{ κλειστό στο } \mathbb{R}\Big\}\\
\mathcal{C}_2 &= \Big\{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\Big\}\\
\mathcal{C}_3 &= \Big\{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\Big\}\\
\mathcal{C}_4 &= \Big\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\Big\}\\
\mathcal{C}_5 &= \Big\{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\Big\}.
\end{aligned}$$

Απόδειξη:
Αν $\mathcal{T}$ είναι τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, θα δείξουμε ότι

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{T}) \overset{(1)}{\supset} \sigma(\mathcal{C}_1) \overset{(2)}{\supset} \sigma(\mathcal{C}_2) \overset{(3)}{\supset} \sigma(\mathcal{C}_3) \overset{(4)}{\supset} \sigma(\mathcal{C}_4) \overset{(5)}{\supset} \sigma(\mathcal{C}_5) \overset{(6)}{\supset} \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

και έτσι η απόδειξη θα είναι πλήρης. Παρατηρούμε ότι $K = (K^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$, όπου $K^{\mathrm{c}} \in \mathcal{T}$ και άρα ισχύει η (1). Η (2) είναι προφανής αφού το διάστημα $(-\infty, b]$ είναι κλειστό. Η (3) προκύπτει από την παρατήρηση ότι $(a, b] = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a]$ και η (4) από το ότι $(a, b) = \cup_n (a, b - 1/n]$. Η (5) είναι προφανής και η (6) προκύπτει από το γεγονός ότι κάθε ανοικτό σύνολο στο $\mathbb{R}$ γράφεται ως αρίθμηση ένωση ανοικτών διαστημάτων και άρα από την πυκνότητα των ρητών και με ρητά άκρα. □

2

Μέτρα

2.1 Μέτρα και Μέτρα Πιθανότητας

Έχοντας εισάγει την έννοια του μετρήσιμου χώρου είμαστε τώρα σε θέση να ορίσουμε την έννοια του μέτρου και να εξετάσουμε τις βασικές του ιδιότητες. Το μέτρο πιθανότητας εισάγεται ως ειδική περίπτωση πεπερασμένων μέτρων και φυσικά έχει ξεχωριστό ενδιαφέρον λόγω των σημαντικών εφαρμογών του.

Ορισμός 2.1. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος. Μία συνολοσύνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ λέγεται *μέτρο* στον $(X, \mathcal{A})$ αν

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$, για κάθε κατά ζεύγη ξένη ακολουθία (A_n) στην $\mathcal{A}$ (αριθμήσιμη ή σ–προσθετικότητα).

Η τριάδα $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται *χώρος μέτρου*. Αν επιπλέον,

- $\mu(X) < +\infty$, τότε το μ λέγεται *πεπερασμένο μέτρο*,
- $\mu(X) = 1$, τότε το μ λέγεται *μέτρο πιθανότητας*,
- υπάρχει μία ακολουθία (A_n) στην $\mathcal{A}$ τέτοια ώστε $X = \cup_n A_n$ με $\mu(A_n) < +\infty$ για κάθε n, τότε το μ λέγεται *σ–πεπερασμένο μέτρο*.

Ο χώρος $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται αντίστοιχα *χώρος πεπερασμένου μέτρου, πιθανότητας ή σ–πεπερασμένου μέτρου*.

Παρατήρηση 2.2. Για να είναι μία συνολοσυνάρτηση μ μέτρο, εκτός από τις δύο ιδιότητες που αναφέρονται στον ορισμό, πρέπει $\mu(A) \geq 0$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ (ενδεχομένως $+\infty$). Η θετικότητα του μέτρου δεν έπεται από τις ιδιότητες (i) και (ii), άρα πρέπει να επαληθεύεται. Μάλιστα, υπάρχουν συνολοσυναρτήσεις που ικανοποιούν μόνο τις (i) και (ii) με τιμές στο $\mathbb{R}$ οι οποίες αναφέρονται ως *προσημασμένα μέτρα*. Σε αυτό το πρώτο εισαγωγικό μάθημα της θεωρίας Πιθανοτήτων θα επικεντρωθούμε μόνο στα θετικά μέτρα.

Δίνουμε τώρα κάποια απλά, αλλά σημαντικά παραδείγματα μέτρων.

Παράδειγμα 2.3. (μέτρο Dirac σε σημείο)
Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος. Η συνολοσυνάρτηση $\delta_x : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ με

$$\delta_x(A) = \mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in A \\ 0 & \text{αν } x \in A^c. \end{cases}$$

λέγεται *μέτρο Dirac στο $x \in X$*. Το μέτρο αυτό μας υποδεικνύει πολύ απλά ποιά σύνολα της $\mathcal{A}$ περιέχουν το x και ποιά όχι. Η διαφορά της με μία δείκτρια συνάρτηση (που δεν είναι βέβαια μέτρο) είναι ότι η τελευταία έχει σταθερό το σύνολο A και μας υποδεικνύει ποιά σημεία είναι στο A και ποιά όχι (αλλαγή οπτικής γωνίας). Αποδεικνύουμε τώρα ότι είναι πράγματι μέτρο.

- Κατ'αρχήν $\delta_x(A) \geq 0$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Έπειτα,

(i) $\delta_x(\emptyset) = 0$, αφού $x \in \emptyset^c = X$.

(ii) Έστω (A_n) κατά ζεύγη ξένη ακολουθία στην $\mathcal{A}$ (για συντομία $(A_n)+$). Έχουμε

$$\delta_x(\cup_n A_n) = \mathbf{1}_{\cup_n A_n}(x) \overset{(A_n)+}{=} \sum_n \mathbf{1}_{A_n}(x) = \sum_n \delta_x(A_n).$$

Παρατηρούμε επίσης βέβαια ότι $\delta_x(X) = 1$ και άρα κάθε μέτρο Dirac (για κάθε $x \in X$) είναι μέτρο πιθανότητας.

Παράδειγμα 2.4. (αριθμητικό μέτρο)
Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος. Η συνολοσυνάρτηση $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ με

$$\nu(A) = |A| = \begin{cases} 0 & \text{αν } A = \emptyset, \\ n & \text{αν } A = \{x_1, \ldots, x_n\}, \\ +\infty & \text{αν } A \text{ απειροσύνολο,} \end{cases}$$

λέγεται *αριθμητικό μέτρο στο X* . Το μέτρο αυτό καταγράφει το πλήθος των στοιχείων (τον πληθάριθμο) κάθε μέλους της $\mathcal{A}$, όταν αυτό είναι πεπερασμένο. Σε κάθε απειροσύνολο αποδίδει την τιμή $+\infty$, χωρίς να ξεχωρίζει διαφορετικές τάξεις απείρου. Αποδεικνύουμε τώρα ότι είναι πράγματι μέτρο.

- Κατ'αρχήν $\nu(A) \geq 0$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Έπειτα,

(i) $\nu(\emptyset) = 0$, αφού $|\emptyset| = 0$.

(ii) Έστω (A_n) κατά ζεύγη ξένη ακολουθία στην $\mathcal{A}$. Μπορούμε να διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

$$(A_n) \to \begin{cases} (1) & A_n \text{ απειροσύνολο για τουλάχιστον ένα } n, \\ (2) & A_n \text{ όλα πεπερασμένα, αλλά μη κενά για άπειρα } n, \\ (3) & A_n \text{ όλα πεπερασμένα, αλλά κενά τελικά για κάθε } n. \end{cases}$$

Στις περιπτώσεις (1) και (2), η $\cup_n A_n$ είναι απειροσύνολο και η ιδιότητα (ii) ενός μέτρου ικανοποιείται. Για την περίπτωση (3), αν $I = \{n \in \mathbb{N} : A_n \neq \emptyset\}$, τότε το I είναι πεπερασμένο και άρα

$$\nu(\cup_n A_n) = \nu(\cup_{n \in I} A_n) = |\cup_{n \in I} A_n| \overset{(A_n)+}{=} \sum_{n \in I} |A_n| = \sum_{n \in I} \nu(A_n) \overset{\nu(\emptyset)=0}{=} \sum_n \nu(A_n).$$

Το αριθμητικό μέτρο μπορεί να είναι είτε πεπερασμένο, είτε σ–πεπερασμένο, είτε να μην είναι τίποτα από τα δύο. Παίρνουμε για ευκολία την περίπτωση που $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Αν το X είναι πεπερασμένο, τότε $\nu(X) < \infty$ και άρα το ν είναι πεπερασμένο μέτρο. Αν το X είναι αριθμησίμως άπειρο, τότε $X = \cup_n\{x_n\}$ και $\nu(\{x_n\}) = 1 < +\infty$ για κάθε n. Συμπεραίνουμε ότι το ν σε αυτήν την περίπτωση είναι σ–πεπερασμένο. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το X είναι υπεραριθμήσιμο και το ν είναι σ–πεπερασμένο. Τότε, υπάρχει μία ακολουθία (A_n) υποσυνόλων του X με $\nu(A_n) < +\infty$ για κάθε n και $X = \cup_n A_n$. Συμπεραίνουμε ότι το X είναι αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων και άρα αριθμήσιμο σύνολο, το οποίο είναι άτοπο. Τελικά το ν δεν είναι σ–πεπερασμένο μέτρο.

Παράδειγμα 2.5. (μέτρο Lebesgue)
Στο μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ μπορεί να κατασκευαστεί ένα μέτρο που επεκτείνει την έννοια του μήκους από τα διαστήματα σε όλα τα σύνολα Borel. Μία τέτοια επέκταση θα πρέπει να διατηρεί τα βασικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά της έννοιας του μήκους. Το μήκος ενός συνόλου δεν θα πρέπει να μεταβάλλεται όταν μεταθέσουμε τα σημεία του κατά μία σταθερά ή όταν του εφαρμόσουμε μία ανάκλαση (σε μεγαλύτερες διαστάσεις εμπλέκονται και οι περιστροφές). Το αναλλοίωτο του μήκους ως προς αυτές τις ισομετρίες είναι ακριβώς οι ιδιότητες εκείνες που θα πρέπει να χαρακτηρίζουν

οποιαδήποτε επέκταση της έννοιας του μήκους από διαστήματα σε πιο πολύπλοκα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών. Οι σκέψεις αυτές οδήγησαν στην κατασκευή του μέτρου Lebesgue λ, το οποίο περιορισμένο στα διαστήματα του $\mathbb{R}$ αποδίδει ως τιμή το σύνηθες μήκος τους και ως χαρακτηριστική ιδιότητα είναι το αναλλοίωτο στις ισομετρίες του $\mathbb{R}$, δηλαδή στους μετασχηματισμούς που διατηρούν τις αποστάσεις. Το πεδίο ορισμού του μέτρου Lebesgue μπορεί να είναι τα σύνολα Borel του $\mathbb{R}$, αλλά μπορεί να επεκταθεί μέχρι και τα λεγόμενα Lebesgue-μετρήσιμα υποσύνολα $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ του $\mathbb{R}$. Η ύπαρξη μη Lebesgue-μετρησίμων συνόλων που γίνεται σε μαθήματα θεωρίας μέτρου οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το μέτρο Lebesgue δεν μπορεί να επεκταθεί σε όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Στην ουσία βέβαια, η μη επεκτασιμότητά του είναι αποτέλεσμα της αδυναμίας που υπάρχει να διατηρηθεί η σ–προσθετικότητα του μέτρου Lebesgue σε όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Όπως συνήθως συμβαίνει σε τέτοιες περιπτώσεις, αυτό οδήγησε τους μαθηματικούς σε πολύ ενδιαφέρουσες εναλλακτικές προσεγγίσεις. Σε μία από αυτές ο Robert M. Solovay κατασκεύασε ένα μοντέλο, γνωστό πλέον με το όνομα μοντέλο του Solovay (1970), στο οποίο χωρίς το αξίωμα της επιλογής, αλλά με την ισχύ όλων των άλλων αξιωμάτων της συνολοθεωρίας ZF (Zermelo-Fraenkel) και μία ασθενέστερη έκδοση του αξιώματος της επιλογής έδειξε ότι όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ μπορούν να θεωρηθούν Lebesgue-μετρήσιμα. Για μία σύντομη ιστορική αναδρομή και ισοδύναμες μορφές του αξιώματος επιλογής, δείτε <https://plato.stanford.edu/entries/axiom-choice/>.

Θα μπορούσε βέβαια κάποιος να αναρωτηθεί κατά πόσον θα μας αρκούσε η πεπερασμένη προσθετικότητα του μέτρου Lebesgue. Είναι δηλαδή δυνατόν να κατασκευαστεί ένα πεπερασμένα προσθετικό μέτρο Lebesgue ορισμένο σε όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$; Σε αυτήν την περίπτωση βέβαια θα πρέπει να εγκαταλείψουμε την απαίτηση να είναι σ–προσθετικό όπως αναφέρθηκε παραπάνω. Η απάντηση είναι καταφατική για το $\mathbb{R}$ και το $\mathbb{R}^2$, αλλά όχι γενικότερα για τον $\mathbb{R}^n$, για $n \geq 3$. Είναι διάσημο το παράδοξο των Banach-Tarski που έδειξαν ότι στον $\mathbb{R}^3$ μία σφαίρα μπορεί να αποδομηθεί σε ένα πεπερασμένο πλήθος κομματιών (τουλάχιστον 5 χρειάζονται για την κατασκευή) και στη συνέχεια με μεταθέσεις και περιστροφές να κατασκευαστούν 2 ακριβή αντίγραφα της αρχικής σφαίρας! Εφόσον οι μετασχηματισμοί που χρησιμοποιούνται είναι ισομετρίες, είναι βέβαια φανερό ότι το παράδοξο είναι συνέπεια του γεγονότος ότι σε κάποια από αυτά τα κομμάτια δεν μπορεί να αποδωθεί η έννοια του όγκου, και έτσι στον $\mathbb{R}^3$ δεν μπορεί να υπάρξει ούτε ένα πεπερασμένα προσθετικό μέτρο Lebesgue.

Μία πολύ δημοφιλής μέθοδος κατασκευής του μέτρου Lebesgue είναι μέσω της έννοιας του εξωτερικού μέτρου και η γενικότερη μέθοδος κατασκευής μέτρων με τη βοήθεια εξωτερικών μέτρων οφείλεται στον Καραθεοδωρή. Η ιδέα κατασκευής στηρίζεται σε θετικές συνολοσυναρτήσεις με πεδίο ορισμού όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που απαιτούν μόνο μονοτονία και σ–υποπροσθετικότητα (αντί της σ–προσθετικότητας). Αφού οριστούν κατάλληλα κατά περίπτωση, στη συνέχεια η συνολοσυνάρτηση περιορίζεται κατάλληλα σε μία σ–άλγεβρα με τρόπο ώστε εκεί να ικανοποιούνται οι ιδιότητες του μέτρου. Με τον τρόπο αυτό, από ένα εξωτερικό μέτρο μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μέτρο στην ευρύτερη δυνατή οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ (όπως βέβαια και σε άλλα αυθαίρετα σύνολα) όπου η ιδιότητα της σ–προσθετικότητας ικανοποιείται.

Στην παρακάτω Πρόταση δίνουμε κάποιες βασικές ιδιότητες του μέτρου.

Πρόταση 2.6. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Τότε*

(i) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, *για κάθε* $A, B \in \mathcal{A}$ *με* $AB = \emptyset$ *(πεπερασμένη προσθετικότητα).*

(ii) $\mu(A) \leq \mu(B)$, *για κάθε* $A, B \in \mathcal{A}$ *με* $A \subset B$ *(μονοτονία).*

(iii) $\mu(\cup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$, *για κάθε ακολουθία* (A_n) *στην* $\mathcal{A}$ *(σ–υποπροσθετικότητα).*

(iv) $\mu(\cup_n A_n) = \lim_n \mu(A_n)$, *για κάθε αύξουσα ακολουθία* (A_n) *στην* $\mathcal{A}$.

(v) $\mu(\cap_n A_n) = \lim_n \mu(A_n)$, *για κάθε φθίνουσα ακολουθία* (A_n) *στην* $\mathcal{A}$ *με* $\mu(A_n) < \infty$ *τελικά για κάθε* n.

Απόδειξη:
(i)

$$\mu(A\cup B)=\mu(A\cup B\cup\emptyset\cup\emptyset\ldots)=\mu(A)+\mu(B)+\mu(\emptyset)+\mu(\emptyset)+\ldots=\mu(A)+\mu(B).$$

(ii)

$$\mu(B)=\mu\Big(A\cup(B\setminus A)\Big)\overset{\text{ξένα}}{=}\mu(A)+\mu(B\setminus A)\geq\mu(A).$$

(iii) Έστω (A_n) τυχούσα ακολουθία στην $\mathcal{A}$. Μπορούμε να την αντικαταστήσουμε με μία κατά ζεύγη ξένη ακολουθία στην $\mathcal{A}$. Θέτουμε $B_1=A_1$ και για κάθε $n\geq 2$

$$B_n:=A_n\setminus(\cup_{k=1}^{n-1}A_k) \tag{2.1}$$

Κάθε σύνολο B_n συμπεριλαμβάνει τα στοιχεία του A_n που δεν συμπεριλαμβάνονται στην ένωση των προηγούμενων όρων A_k για $1\leq k\leq n-1$. Άμεσα προκύπτουν οι εξής ιδιότητες για την καινούρια ακολουθία (B_n):

(1) Η (B_n) είναι κατά ζεύγη ξένη ακολουθία στην $\mathcal{A}$.

(2) $\cup_{k=1}^{n}B_k=\cup_{k=1}^{n}A_k$, για κάθε $n\geq 1$.

(3) $\cup_{n=1}^{\infty}B_n=\cup_{n=1}^{\infty}A_n$.

Από τις παραπάνω ιδιότητες έχουμε

$$\mu(\cup_nA_n)\overset{(3)}{=}\mu(\cup_{n=1}^{\infty}B_n)\overset{(1)}{=}\sum_n\mu(B_n)\overset{B_n\subset A_n}{\leq}\sum_n\mu(A_n),$$

και έτσι καταλήγουμε στην σ–υποπροσθετικότητα.

(iv) Έστω (A_n) αύξουσα ακολουθία στην $\mathcal{A}$. Για (B_n) όπως ορίστηκε στην (2.1) έχουμε

$$\begin{aligned}\mu(\cup_nA_n)&\overset{(3)}{=}\mu(\cup_nB_n)\overset{(1)}{=}\sum_n\mu(B_n)=\lim_n\sum_{k=1}^{n}\mu(B_k)\\&\overset{(1)}{=}\lim_n\mu(\cup_{k=1}^{n}B_k)\overset{(2)}{=}\lim_n\mu(\cup_{k=1}^{n}A_k)=\lim_n\mu(A_n),\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την υπόθεση ότι η (A_n) είναι αύξουσα και άρα $\cup_{k=1}^{n}A_k=A_n$.

(v) Έστω (A_n) φθίνουσα ακολουθία στην $\mathcal{A}$. Από υπόθεση υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\mu(A_{n_0})<\infty$. Η ακολουθία $(A_{n_0}\setminus A_n)$ είναι αύξουσα ακολουθία στην $\mathcal{A}$. Από το (iv) έχουμε ότι

$$\mu\Big(A_{n_0}\setminus(\cap_nA_n)\Big)=\mu\Big(\cup_n(A_{n_0}\setminus A_n)\Big)=\lim_n\mu(A_{n_0}\setminus A_n)=\mu(A_{n_0})-\lim_n\mu(A_n),$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $A_n\subset A_{n_0}$ για κάθε $n\geq n_0$, καθώς η (A_n) έχει υποτεθεί φθίνουσα και $\mu(A_{n_0})<\infty$. Για τον ίδιο λόγο έχουμε ότι το αριστερό μέλος της πρώτης ισότητας γράφεται $\mu(A_{n_0})-\mu(\cap_nA_n)$ και έτσι καταλήγουμε στη ζητούμενη σχέση. □

Παρατήρηση 2.7. (i) Σε κάθε πεπερασμένο μέτρο, άρα και για μέτρα πιθανότητας, ισχύει πάντα

$$\mu(\cap A_n)=\mu(\lim_n A_n)=\lim_n\mu(A_n),$$

για φθίνουσες ακολουθίες (A_n) στην $\mathcal{A}$.

(ii) Η απαίτηση $\mu(A_n) < +\infty$ τελικά για κάθε n για φθίνουσες ακολουθίες (A_n) στην $\mathcal{A}$ δεν μπορεί να παραληφθεί για μη πεπερασμένα μέτρα, όπως μπορούμε να δούμε εύκολα από το ακόλουθο αντιπαράδειγμα. Αν λ είναι το μέτρο Lebesgue στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ και $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ είναι μία φθίνουσα ακολουθία διαστημάτων της μορφής $\Delta_n = (n, +\infty)$, τότε $\cap\Delta_n = \emptyset$ και άρα

$$0 = \lambda(\cap\Delta_n) < \lim_n \lambda(\Delta_n) = +\infty.$$

Πρόταση 2.8. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και (A_n) μία ακολουθία στην $\mathcal{A}$. Τότε*

(i)

$$\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n) \leq \limsup \mu(A_n) \overset{(*)}{\leq} \mu(\limsup A_n), \tag{2.2}$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει υπό τη συνθήκη ότι υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ για το οποίο $\mu(\cup_{k\geq n_0} A_k) < +\infty$.

(ii) αν το μέτρο μ είναι πεπερασμένο

$$A_n \to A \implies \mu(A_n) \to \mu(A). \tag{2.3}$$

Απόδειξη:
(i) Θέτουμε $B_n = \cap_{k\geq n} A_k$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε η (B_n) είναι αύξουσα $\mathcal{A}$–μετρήσιμη ακολουθία και

$$\mu(\liminf A_n) = \mu(\cup_n B_n) = \lim_n \mu(B_n) = \liminf \mu(B_n) \leq \liminf \mu(A_n),$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει από το ότι $B_n \subset A_n$ και τη μονοτονία των μέτρων. Θέτουμε επίσης $C_n = \cup_{k\geq n} A_k$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε η (C_n) είναι φθίνουσα $\mathcal{A}$–μετρήσιμη ακολουθία για την οποία $\mu(C_n) < +\infty$ τελικά για κάθε n από υπόθεση. Άρα

$$\mu(\limsup A_n) = \mu(\cap_n C_n) = \lim_n \mu(C_n) = \limsup \mu(C_n) \geq \limsup \mu(A_n),$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει από το ότι $C_n \supset A_n$ και τη μονοτονία των μέτρων.

(ii) Επειδή το μέτρο μ είναι πεπερασμένο, οι ανισότητες (2.2) ισχύουν όλες. Από υπόθεση υπάρχει το όριο της (A_n) και συμπίπτει με το A. Συμπεραίνουμε ότι $\liminf A_n = \limsup A_n = A$ και άρα οι ανισότητες (2.2) ισχύουν ως ισότητες. Τελικά $\liminf \mu(A_n) = \limsup \mu(A_n) = \mu(A)$ και άρα υπάρχει το $\lim \mu(A_n) = \mu(A)$. □

Παρατήρηση 2.9. Η ιδιότητα (2.3) αναφέρεται ως ιδιότητα συνέχειας ενός πεπερασμένου μέρου. Αυστηρότερα βέβαια θα λέγαμε ότι είναι ιδιότητα ακολουθιακής συνέχειας, καθώς η σύγκλιση ακολουθιών υποσυνόλων δεν είναι κατ'ανάγκη μετρικοποιήσιμη και άρα η συνέχεια μίας συνολοσυνάρτησης δεν μπορεί να περιγραφεί πλήρως από συγκλίσεις ακολουθιών. Η ισχύς της (2.3) θα πρέπει να αναφέρεται ως ακολουθιακή συνέχεια.