ΕΝΑ ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΑΘΗΜΑ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Δημήτρης Χελιώτης

Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

HEALLINK
Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΕΛΙΩΤΗΣ
Αναπληρωτής καθηγητής
Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνων

Ένα δεύτερο μάθημα στις πιθανότητες

Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά
Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

Ένα δεύτερο μάθημα στις πιθανότητες

Συγγραφή

Δημήτρης Χελιώτης

Κριτικός αναγνώστης

Μιχάλης Λουλάκης

Συντελεστές έκδοσης

Γλωσσική Επιμέλεια: Θεόφιλος Τραμπούλης

Εξώφυλλο: Χαρίδημος Μπιτσακάκης

ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου

www.kallipos.gr

ISBN:978-960-603-296-7

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές απευθύνονται σε προπτυχιακούς φοιτητές που έχουν ασχοληθεί με τις στοιχειώδεις πιθανότητες, έχουν καλή γνώση του απειροστικού λογισμού, και κάποια τριβή με την πραγματική ανάλυση (μετρικοί χώροι και συνεχείς συναρτήσεις σε μετρικούς χώρους).

Δύο είναι οι στόχοι των σημειώσεων. Πρώτα να δούμε την ορολογία της μετροθεωρητικής θεωρίας πιθανοτήτων (Κεφάλαια 1-10, 13, 14) και έπειτα να μελετήσουμε την οριακή συμπεριφορά ακολουθιών τυχαίων μεταβλητών. Ασχολούμαστε με τα δύο σημαντικότερα είδη σύγκλισης της θεωρίας πιθανοτήτων, τη σχεδόν βέβαιη και την κατά κατανομή. Έτσι, καλύπτουμε τη βασική τεχνική για την απόδειξη αποτελεσμάτων για καθεμία από αυτές (Κεφάλαιο 11 για την πρώτη, Κεφάλαιο 15 για τη δεύτερη) και τέλος βλέπουμε τα δύο πιο αντιπροσωπευτικά θεωρήματα που αυτές εμφανίζονται: τον Ισχυρό Νόμο των Μεγάλων Αριθμών και το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

Αυτή η δουλειά βάζει σε αυστηρό πλαίσιο την ύλη που καλύπτεται σε μαθήματα στοιχειωδών πιθανοτήτων. Πολλά αποτελέσματα τα οποία είχαμε μάθει να χρησιμοποιούμε σε εκείνα τα μαθήματα χωρίς όμως αποδείξεις, εδώ τα αποδεικνύουμε.

Στο κομμάτι των σημειώσεων που αφορούν τη θεωρία μέτρου (ιδιαίτερα στα Κεφάλαια 5 και 6) δεν δίνουμε αποδείξεις για όλα τα αποτελέσματα που διατυπώνουμε γιατί είναι πέρα από τους στόχους μας. Από τα μετέπειτα κεφάλαια, δεν δίνουμε απόδειξη για το θεώρημα μοναδικότητας που αφορά τον μετασχηματισμό Fourier μέτρων και για το θεώρημα Prokhorov (Θεώρημα 14.20). Για κάποια άλλα αποτελέσματα, η απόδειξη παρατίθεται στο Παράρτημα B′ γιατί, μολονότι δεν είναι τόσο σημαντική για την κατανόηση της θεωρίας, είναι, σε δεύτερη ανάγνωση, προσιτή και ωφέλιμη.

Σε ένα εξάμηνο είναι δυνατόν να καλυφθούν όλες οι σημειώσεις εκτός από τις παραγράφους που σημειώνονται με αστερίσκο. Τα Κεφάλαια 1-6, 8, 9 συνήθως διδάσκονται σε μαθήματα θεωρίας μέτρου, και με μεγαλύτερη λεπτομέρεια. Οι αναγνώστες που έχουν ήδη πάρει ανάλογο μάθημα μπορούν απλώς να ρίξουν μια γρήγορη ματιά σε αυτά τα κεφάλαια για να δουν την ορολογία και τον συμβολισμό που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια. Ωστόσο, συνιστάται θερμά η επίλυση ασκήσεων από τα κεφάλαια αυτά. Για τη μείωση του χρόνου που αφιερώνεται στη θεωρία μέτρου συνιστάται η παράλειψη του Κεφαλαίου 3. Το θεώρημα π-λ, που παρουσιάζεται εκεί, χρησιμοποιείται μόνο στις αποδείξεις των Θεωρημάτων 4.10, 10.6, 10.10, 11.10.

Η πλειονότητα των ασκήσεων είναι ασκήσεις τριβής και εξοικείωσης με τις έννοιες. Κάποιες είναι προεκτάσεις της θεωρίας. Όσες έχουν αστερίσκο είναι λίγο δυσκολότερες.

Βάση για αυτές τις σημειώσεις υπήρξαν οι σημειώσεις παραδόσεων του μαθήματος Πιθανότητες ΙΙ όπως διδάχθηκε το εαρινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2012-2013. Ακολουθήσαμε τότε κυρίως το βιβλίο Probability Essentials των Jacod-Protter. Τα υπόλοιπα βιβλία που τις επηρέασαν αναγράφονται στη βιβλιογραφία. Ευχαριστώ τον Παύλο Τσατσούλη, ο οποίος έγραψε το πρώτο προσχέδιο των σημειώσεων σε Latex.

Επίσης ευχαριστώ: Τον συνάδελφο Αντώνη Τσολομύτη για τη βοήθεια σε θέματα Latex και τη διαμόρφωση της εμφάνισης του κειμένου. Δύο ανώνυμους αξιολογητές που στο πλαίσιο του προγράμματος «Κάλλιπος» έκαναν χρήσιμες παρατηρήσεις σε προηγούμενη έκδοση των σημειώσεων. Τον συνάδελφο Μιχάλη Λουλάκη που μελέτησε προσεκτικά τις σημειώσεις και έκανε πολλές διορθώσεις και προτάσεις για προσθήκες/αλλαγές και ασκήσεις που συνέβαλαν στη σημαντική βελτίωση των σημειώσεων.

Τα θεμελιώδη θεωρήματα

Το πρώτο μισό του 20ου αιώνα, το βασικότερο αντικείμενο μελέτης της θεωρίας πιθανοτήτων ήταν το άθροισμα $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών και το ενδιαφέρον επικεντρώθηκε στη συμπεριφορά του S_n για μεγάλα n για τις διάφορες επιλογές που έχει η κοινή κατανομή των X_i. Ας έχουμε για τα επόμενα στο μυαλό μας την ειδική περίπτωση που αυτή η κατανομή είναι η ομοιόμορφη στο δισύνολο $\{-1, 1\}$. Τότε το S_n είναι το συνολικό κέρδος μας μετά από n ανεξάρτητα παιχνίδια σε καθένα από τα οποία κερδίζουμε 1 με πιθανότητα 1/2 και χάνουμε 1 πάλι με πιθανότητα 1/2. Τι μπορούμε να πούμε για αυτό το κέρδος;

Τα θεμελιώδη θεωρήματα που αποδείχθηκαν για το S_n είναι τα εξής.

(α) Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών (Borel, 1909· Kolmogorov, 1933). Υποθέτουμε ότι $\mathbf{E}(X_1) = 0$. Με πιθανότητα 1,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0.$$

(β) Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Lindeberg, Lévy 1922). Υποθέτουμε ότι $\mathbf{E}(X_1) = 0, \mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Για $n \to \infty$,

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow Y \sim N(0, \sigma^2),$$

όπου $\Rightarrow$ δηλώνει τη σύγκλιση κατά κατανομή και $Y \sim N(0, \sigma^2)$ σημαίνει ότι η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την κατανομή $N(0, \sigma^2)$.

(γ) Νόμος Επαναλαμβανόμενου Λογαρίθμου (Khintchine, 1923· Kolmogorov, 1929· Hartman-Wintner, 1941). Υποθέτουμε ότι $\mathbf{E}(X_1) = 0$ και $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Με πιθανότητα 1,

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sigma\sqrt{2n \log\log n}} = -1, \tag{1}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sigma\sqrt{2n \log\log n}} = 1. \tag{2}$$

(δ) Μεγάλες αποκλίσεις. Θεώρημα Cramer (1938). Υποθέτουμε ότι $\mathbf{E}(X_1) = 0$. Υπάρχει συνάρτηση $I : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ ώστε, για κάθε $A \subset \mathbb{R}$ σύνολο Borel (που επιπλέον ικανοποιεί μια τεχνική συνθήκη), να ισχύει

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in A\right) \approx e^{-nI(A)}.$$

Εδώ, $a_n \approx b_n$ σημαίνει ότι οι a_n, b_n είναι ισοδύναμες σε λογαριθμική κλίμακα, δηλαδή $\log a_n / \log b_n \to 1$. Μάλιστα, αν υποθέσουμε ότι η ροπογεννήτρια της X_1 είναι πεπερασμένη σε περιοχή του 0, τότε η συνάρτηση I είναι τέτοια ώστε $I(A) > 0$ όταν $0 \notin \bar{A}$.

Αν αντί της υπόθεσης $\mathbf{E}(X_1) = 0$ πιο πάνω έχουμε απλώς ότι η μέση τιμή $\mu := \mathbf{E}(X_1)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμος, τότε τα θεωρήματα ισχύουν πάλι αρκεί να αντικαταστήσουμε την S_n με την $S_n - \mu n$.

Τώρα κάποια σχόλια στα πιο πάνω θεωρήματα.

Ένα γεγονός για το S_n το λέμε τυπικό αν, καθώς το n τείνει στο άπειρο, το γεγονός έχει πιθανότητα φραγμένη μακριά από το 0 (π.χ. είναι μεγαλύτερη του 10^{-6} για όλα τα n), αλλιώς το λέμε μη τυπικό.

Τα θεωρήματα (α), (β) αφορούν τυπικά γεγονότα για το S_n (τυπική συμπεριφορά της $(S_n)_{n\ge1}$). Το (α) αναφέρεται στο γεγονός $|S_n/n| < \varepsilon$ (για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$) και συνεπάγεται ότι η πιθανότητά του τείνει στο 1. Το (β) λέει ότι το S_n είναι τυπικά της τάξης $\sqrt{n}$. Μάλιστα, για $a < b$, το γεγονός $a\sigma < S_n/\sqrt{n} < b\sigma$ έχει πιθανότητα που συγκλίνει στον θετικό αριθμό $\Phi(b) - \Phi(a)$, άρα είναι τυπικό.

Τα (γ), (δ) αφορούν μη τυπική συμπεριφορά του S_n.

Σχετικά με το (γ). Ξέρουμε ήδη από το (β) ότι το S_n είναι τυπικά της τάξης του $\sqrt{n}$, και ένα γεγονός της μορφής

$$A_n := \left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \in ((1-\varepsilon)a_n, (1+\varepsilon)a_n)\right\}$$

με $a_n \to \infty$ έχει πιθανότητα που τείνει στο 0. Ειδικά για την επιλογή $a_n := \sigma\sqrt{2\log\log n}$ έχουμε ότι για οποιοδήποτε δεδομένο n η πιθανότητα του A_n είναι πολύ μικρή (και γίνεται αμελητέα για μεγάλο n), όμως σύμφωνα με το (γ), αν παρατηρήσουμε ολόκληρη την τροχιά της $(S_n)_{n\geq 1}$, θα διαπιστώσουμε ότι το S_n κατορθώνει άπειρες φορές να πραγματοποιήσει το A_n, δηλαδή να γίνει της τάξης $\sqrt{n}a_n$ (όπως και της τάξης $-\sqrt{n}a_n$). Η $(a_n)_{n\geq 1}$ δίνει πόσο μεγάλο μπορεί να γίνει το S_n άπειρες φορές. Έτσι, για παράδειγμα, στην περίπτωση που η X_1 είναι ομοιόμορφη στο $\{-1, 1\}$, αν και το γεγονός $S_n = n/2$ είναι εφικτό (έχει θετική πιθανότητα), με πιθανότητα 1 δεν μπορεί να γίνει άπειρες φορές.

Σχετικά με το (δ). Το (α) συνεπάγεται ότι για οποιοδήποτε σύνολο A με $0 \notin \bar{A}$ η πιθανότητα του γεγονότος $S_n/n \in A$ τείνει στο 0. Άρα μιλάμε για ένα μη τυπικό γεγονός. Το Θεώρημα Cramer προσδιορίζει το ρυθμό μείωσης της πιθανότητάς του.

Σε αυτές τις σημειώσεις θα δούμε τις αποδείξεις των (α), (β), (δ).

Τα θεωρήματα (α), (β), (γ), (δ) και οι τεχνικές απόδειξής τους λειτουργούν ως υπόδειγμα για την ασυμπτωτική μελέτη ακολουθιών τυχαίων μεταβλητών που ενδεχομένως είναι πιο σύνθετες από την S_n.

Δημήτρης Χελιώτης
9 Φεβρουαρίου 2017

Σύμβολα

$\mathbb{N}$ το σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων $\{0, 1, 2, \ldots\}$.
$\mathbb{N}^+$ το σύνολο των θετικών ακεραίων $\{1, 2, \ldots\}$.

Για $n \in \mathbb{N}^+$,

$$[n] := \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Για ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n\geq 1}$,

$$\liminf_n A_n := \cup_{n=1}^\infty \cap_{k=n}^\infty A_k,$$
$$\limsup_n A_n := \cap_{n=1}^\infty \cup_{k=n}^\infty A_k.$$

Για ακολουθία πραγματικών αριθμών $(x_n)_{n\geq 1}$,

$$\underline{\lim}_n x_n := \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} x_k,$$
$$\overline{\lim}_n x_n := \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} x_k.$$

Για A, B σύνολα, $A \subset B$: το A είναι υποσύνολο του B (όχι απαραίτητα γνήσιο).

Για A, B σύνολα, $A \backslash B := \{x \in A : x \notin B\}$.

Για X σύνολο,

$$\mathscr{P}(X) := \{A : A \subset X\},$$

το δυναμοσύνολο του X.

Για X μετρικό χώρο,

$$\mathscr{B}(X): \text{ η σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του } X.$$

Για A υποσύνολο τοπολογικού χώρου (π.χ., μετρικού χώρου),

$$A^\circ: \text{ το εσωτερικό του } A,$$
$$\bar{A}: \text{ η κλειστότητα του } A,$$
$$\partial A := \bar{A} \backslash A^\circ: \text{ το σύνορο του } A.$$

Για $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x \wedge y := \min\{x, y\},$$
$$x \vee y := \max\{x, y\}.$$

Για $x \in \mathbb{R}$,

$$x^+ = x \vee 0 = \begin{cases} x & \text{αν } x > 0, \\ 0 & \text{αν } x \leq 0, \end{cases} \qquad x^- = (-x) \vee 0 = \begin{cases} -x & \text{αν } x < 0, \\ 0 & \text{αν } x \geq 0. \end{cases}$$

1

σ-άλγεβρες

1.1 σ-άλγεβρες

Έστω X σύνολο. Συμβολίζουμε με $\mathscr{P}(X)$ το δυναμοσύνολο του X, δηλαδή $\mathscr{P}(X) = \{A : A \subset X\}$.

Ορισμός 1.1. Μια οικογένεια $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ λέγεται **σ-άλγεβρα** στο X αν έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(ii) Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $X \backslash A \in \mathcal{A}$.

(iii) Η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις άπειρες αριθμήσιμες ενώσεις, δηλαδή αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$, τότε $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Παρατήρηση 1.2. Για κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ ισχύει επίσης ότι

- $X \in \mathcal{A}$ λόγω των (i) και (ii) εφόσον το X είναι το συμπλήρωμα του $\emptyset$.
- Η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες ενώσεις γιατί αν $A_1, A_2, \ldots, A_k$ είναι στοιχεία της τότε ορίζοντας $A_j := \emptyset$ για κάθε $j \geq k + 1$ έχουμε ότι $\cup_{j=1}^{k} A_j = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ και η τελευταία ένωση είναι στοιχείο της $\mathcal{A}$ λόγω του (iii) του ορισμού.
- Η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες τομές γιατί για J αριθμήσιμο σύνολο και $(A_i)_{i\in J}$ στοιχεία της $\mathcal{A}$ έχουμε $\cap_{n\in J} A_n = X \backslash \{\cup_{n\in J}(X \backslash A_n)\}$ και λόγω της προηγούμενης παρατήρησης και των (ii), (iii) του ορισμού έπεται το συμπέρασμα.
- Αν $A, B \in \mathcal{A}$, τότε $A \backslash B \in \mathcal{A}$ γιατί $A \backslash B = A \cap (X \backslash B)$.

Παράδειγμα 1.3. Αν X σύνολο, τότε οι οικογένειες

$$\mathcal{A}_1 := \{\emptyset, X\},$$
$$\mathcal{A}_2 := \mathscr{P}(X),$$

είναι σ-άλγεβρες στο X. Η πρώτη είναι η ελάχιστη δυνατή και η δεύτερη η μέγιστη δυνατή σ-άλγεβρα στο X. Δηλαδή, για οποιαδήποτε σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο X ισχύει $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{A}_2$. Η $\mathcal{A}_1$ ονομάζεται η τετριμμένη σ-άλγεβρα στο X.

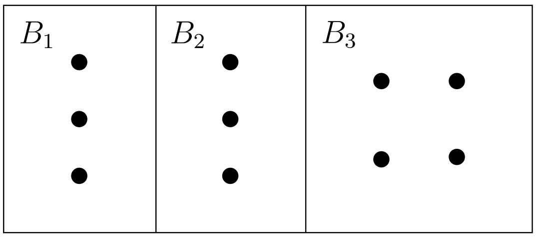
Παράδειγμα 1.4. Έστω $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Θέτουμε $B_1 := \{1, 2, 3\}, B_2 := \{4, 5, 6\}, B_3 := \{7, 8, 9, 10\}$ (Δες Σχήμα 1.1). Η οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, X, B_1, B_2, B_3, B_1 \cup B_2, B_1 \cup B_3, B_2 \cup B_3\}$$

είναι σ-άλγεβρα στο X. Για παράδειγμα, το συμπλήρωμα του B_2 είναι το $B_1 \cup B_3$ το οποίο βρίσκεται και αυτό στην $\mathcal{A}$.
Αντίθετα, η

$$\mathcal{B} = \{\emptyset, X, B_1, B_2, B_1 \cup B_2\}$$

δεν είναι σ-άλγεβρα γιατί, ενώ είναι κλειστή στις ενώσεις, δεν είναι κλειστή στα συμπληρώματα. Τα συμπληρώματα των $B_1, B_2, B_1 \cup B_2$ δεν περιέχονται στη $\mathcal{B}$.



Σχήμα 1.1: Μία διαμέριση του $\{1, 2, \ldots, 10\}$.

Παράδειγμα 1.5. Έστω $X = \mathbb{R}$. Η οικογένεια

$$\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ αριθμήσιμο ή } \mathbb{R} \setminus A \text{ αριθμήσιμο}\}$$

είναι σ-άλγεβρα (εύκολη άσκηση).

Πρόταση 1.6. *Έστω X σύνολο και $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ οικογένεια σ-αλγεβρών στο X. Τότε, η*

$$\mathcal{H} = \cap_{i \in I} \mathcal{A}_i := \{A \subset X : A \in \mathcal{A}_i \quad \forall i \in I\}$$

είναι σ-άλγεβρα στο X.

Απόδειξη. Προφανώς το $\emptyset$ ανήκει στην $\mathcal{H}$ γιατί είναι στοιχείο κάθε σ-άλγεβρας $\mathcal{A}_i$ στο X. Αν $A \in \mathcal{A}_i$ για κάθε $i \in I$, τότε, επειδή κάθε $\mathcal{A}_i$ είναι σ-άλγεβρα, έπεται ότι

$$X \setminus A \in \mathcal{A}_i \quad \forall i \in I,$$

δηλαδή $X \setminus A \in \cap_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Όμοια αποδεικνύουμε ότι η $\cap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις. Έπεται λοιπόν ότι η $\mathcal{H}$ είναι σ-άλγεβρα. ■

1.2 Παραγόμενη σ-άλγεβρα

Ορισμός 1.7. Έστω X σύνολο και $C \subset \mathscr{P}(X)$. Το C δεν είναι απαραίτητα σ-άλγεβρα. Ορίζουμε

$$\mathcal{J}(C) := \{\mathcal{A} \subset \mathscr{P}(X) : \mathcal{A} \supset C \text{ και η } \mathcal{A} \text{ είναι σ-άλγεβρα}\},$$

δηλαδή το σύνολο των σ-αλγεβρών στο X που καθεμία τους περιέχει την οικογένεια C. Η σ-άλγεβρα που παράγεται από την C ορίζεται ως η τομή όλων των σ-άλγεβρων που περιέχουν την C και συμβολίζεται με $\sigma(C)$, δηλαδή

$$\sigma(C) = \cap_{\mathcal{A} \in \mathcal{J}(C)} \mathcal{A}.$$

Η $\sigma(C)$ περιέχει ακριβώς όλα τα $B \subset X$ με την ιδιότητα $B \in \mathcal{A}$ για κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο X με $\mathcal{A} \supset C$.

Από την Πρόταση 1.6, έπεται ότι η $\sigma(C)$ είναι πράγματι σ-άλγεβρα που περιέχει την οικογένεια C και από την κατασκευή της είναι η μικρότερη με την ιδιότητα αυτή. Δηλαδή περιέχεται σε οποιανδήποτε σ-άλγεβρα περιέχει την C. Προφανώς, αν η C είναι σ-άλγεβρα, τότε $\sigma(C) = C$.

Μπορούμε να έχουμε στο μυαλό μας ότι η $\sigma(C)$ προκύπτει με την εξής αναδρομική διαδικασία. Ξεκινάμε με την C και, αν αυτή δεν είναι σ-άλγεβρα, π.χ., γιατί το συμπλήρωμα ενός στοιχείου της ή κάποια αριθμήσιμη ένωση στοιχείων της δεν είναι στοιχείο της, προσθέτουμε σε αυτή το σύνολο που ανακαλύψαμε ότι της λείπει. Αυτό πρέπει να το κάνουμε πολλές φορές με τη νέα οικογένεια που προκύπτει μετά την προσθήκη κάθε συνόλου. Κάποια στιγμή φτάνουμε σε μια οικογένεια που είναι σ-άλγεβρα και τότε σταματάμε, βρήκαμε τη $\sigma(C)$.

Στα πιο κάτω παραδείγματα, αυτό είναι το σκεπτικό που μας οδηγεί. Βέβαια για την απόδειξη ακολουθούμε τον τυπικό ορισμό της $\sigma(C)$.

Παράδειγμα 1.8. Έστω X μη κενό σύνολο με τουλάχιστον δύο στοιχεία και $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$. Η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια $C := \{A\}$ είναι η $\mathcal{B} := \{\emptyset, X, A, A^c\}$. Πράγματι, η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα, και οποιαδήποτε σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ περιέχει το A θα πρέπει να περιέχει και το A^c (και τα $\emptyset, X$ βέβαια), άρα $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$.

Παράδειγμα 1.9. Επιστρέφουμε στο Παράδειγμα 1.4. Η οικογένεια $\mathcal{B}$ δεν είναι σ-άλγεβρα, και με σκεπτικό όπως στο προηγούμενο παράδειγμα διαπιστώνουμε ότι $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$.

Παράδειγμα 1.10 (Σ-άλγεβρα παραγόμενη από αριθμήσιμη διαμέριση)**.** Έστω X σύνολο και $C := \{A_i : i \in I\}$ διαμέριση του X (δηλαδή τα A_i είναι μη κενά σύνολα, ξένα ανά δύο, με ένωση το X), με I αριθμήσιμο (πεπερασμένο ή άπειρο). Για τη σ-άλγεβρα που παράγει η C έχουμε την εξής απλή περιγραφή:

$$\sigma(C) = \{\cup_{i \in J} A_i : J \subset I\}. \tag{1.1}$$

Δηλαδή ένα σύνολο της $\sigma(C)$ είναι ένωση κάποιων στοιχείων της διαμέρισης C.
Ας ονομάσουμε $\mathcal{A}$ το σύνολο στο δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης. Τότε έχουμε τα εξής:

- Η οικογένεια $\mathcal{A}$ περιέχει τη C. Πράγματι, οποιοδήποτε σύνολο της C είναι της μορφής A_{i_0} για κάποιο $i_0 \in I$. Η επιλογή $J = \{i_0\} \subset I$ στην περιγραφή στοιχείων της $\mathcal{A}$ δίνει $\cup_{i \in J} A_i = A_{i_0} \in \mathcal{A}$.

- Οποιαδήποτε σ-άλγεβρα $\mathcal{A}_1$ περιέχει την C πρέπει να περιέχει την $\mathcal{A}$. Γιατί οποιαδήποτε ένωση $\cup_{i \in J} A_i$ είναι αριθμήσιμη αφού το I είναι αριθμήσιμο. Και εφόσον η $\mathcal{A}_1$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει τα A_i με $i \in J$, θα περιέχει και την ένωσή τους.

- Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα. Πράγματι, η επιλογή $J = \emptyset$ δίνει $\cup_{i \in J} A_i = \emptyset$. Επίσης, αν πάρουμε A της μορφής $A = \cup_{i \in J} A_i$ για κάποιο $J \subset I$, τότε $X \backslash A = \cup_{i \in I \backslash J} A_i$ που είναι στοιχείο της $\mathcal{A}$. Τέλος, αν έχουμε ακολουθία $(B_n)_{n \geq 1}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$ με $B_n = \cup_{i \in J_n} A_i$ όπου $J_n \subset I$ για κάθε $n \geq 1$, τότε για $J := \cup_{n=1}^{\infty} J_n$ έχουμε $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{i \in J} A_i$ που πάλι είναι στοιχείο της $\mathcal{A}$.

Συνδυάζοντας αυτές τις τρεις παρατηρήσεις παίρνουμε την (1.1).

1.3 Τα σύνολα Borel

Αν (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος, τότε ένα $A \subset X$ το λέμε ανοιχτό σύνολο αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x, \delta) := \{y \in X : d(y, x) < \delta\} \subset A$, δηλαδή η σφαίρα ακτίνας δ γύρω από το x είναι υποσύνολο του A. Γενικά, το δ εξαρτάται από το x.

Τα σύνολα $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ θα τα θεωρούμε μετρικούς χώρους με μετρική την Ευκλείδεια. Δηλαδή

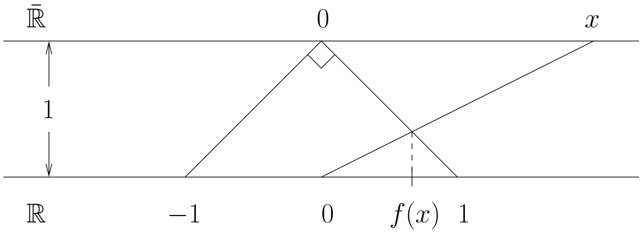
$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}$$

για $x, y \in \mathbb{R}^n$ (ή $x, y \in \mathbb{C}^n$) με $|\cdot|$ να συμβολίζει την απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού (το μέτρο μιγαδικού, αντίστοιχα).

Θα χρειαστεί πιο κάτω να δουλέψουμε και με το σύνολο $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Αυτό θα το θεωρούμε μετρικό χώρο με μετρική την

$$d(x, y) = |f(x) - f(y)|$$

όπου $f(x) = x/(1 + |x|)$ για $x \in \mathbb{R}$ και $f(-\infty) = -1, f(\infty) = 1$. Απεικονίζουμε τον $\bar{\mathbb{R}}$ στο τμήμα $[-1, 1]$ μέσω της f και μετά ορίζουμε την απόσταση δύο σημείων του ως τη συνηθισμένη απόσταση των εικόνων τους στο $[-1, 1]$. Δες Σχήμα 1.2. Ο περιορισμός της μετρικής αυτής στο $\mathbb{R}$ είναι μια μετρική ισοδύναμη με τη συνηθισμένη μετρική του $\mathbb{R}$. Σχετικά με το ∞, εύκολα βλέπει κανείς ότι για $0 < \varepsilon < 1$ η σφαίρα ακτίνας ε γύρω από το ∞ είναι η ημιευθεία $(1 - \varepsilon^{-1}, \infty]$ (αντίστοιχη παρατήρηση ισχύει και για το $-\infty$).



Σχήμα 1.2: Γεωμετρική ερμηνεία της απεικόνισης $f(x) = x/(1+|x|)$. Το $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ απεικονίζεται στο $[-1, 1]$.

Γενικά, η οικογένεια $\mathcal{T}$ των ανοικτών συνόλων σε ένα μετρικό χώρο δεν είναι σ-άλγεβρα. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}$ το $A = (0, 1)$ είναι ανοιχτό, ενώ το συμπλήρωμά του δεν είναι. Θα μας φανεί χρήσιμο όμως να θεωρήσουμε τη σ-άλγεβρα που παράγουν τα ανοιχτά σύνολα.

Ορισμός 1.11. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Η σ-άλγεβρα $\sigma(\mathcal{T})$ που παράγεται από την οικογένεια $\mathcal{T}$ των ανοιχτών συνόλων του X ονομάζεται **σ-άλγεβρα Borel** και τα στοιχεία της **σύνολα Borel**. Συνήθως συμβολίζουμε τη $\sigma(\mathcal{T})$ με $\mathscr{B}(X)$.

Η $\mathscr{B}(X)$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοιχτά σύνολα.

Πρόταση 1.12. *Κάθε ανοικτό ή κλειστό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου $(X, \mathcal{T})$ είναι σύνολο Borel.*

Απόδειξη. Απο τον ορισμό των συνόλων Borel έχουμε $\mathcal{T} \subset \sigma(\mathcal{T}) =: \mathscr{B}(X)$. Αν F είναι κλειστό, τότε $X \backslash F \in \mathscr{B}(X)$ ως ανοικτό. Αλλά η $\mathscr{B}(X)$ είναι σ-άλγεβρα, οπότε πρέπει και το συμπλήρωμα του $X \backslash F$ να περιέχεται στην $\mathscr{B}(X)$. Άρα $F \in \mathscr{B}(X)$. ∎

Πρόταση 1.13. *Κάθε υποδιάστημα του $\mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel.*

Απόδειξη. Τα διάφορα σενάρια για ένα υποδιάστημα είναι

$$(-\infty, a], [a, \infty), (-\infty, a), (a, \infty), (a, b), [a, b], (a, b], [a, b).$$

Τα πρώτα δύο είναι κλειστά σύνολα, τα επόμενα τρία είναι ανοιχτά και το $[a, b]$ είναι κλειστό. Για το $(a, b]$ γράφουμε

$$(a, b] = \mathbb{R} \backslash ((-\infty, a] \cup (b, \infty)).$$

Επειδή η $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ είναι σ-άλγεβρα και $(-\infty, a], (b, \infty) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, έπεται ότι $(-\infty, a] \cup (b, \infty) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ και $\mathbb{R} \backslash ((-\infty, a] \cup (b, \infty)) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Όμοια δείχνουμε ότι $[a, b) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. ∎

Επειδή η $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει όλα τα διαστήματα, έπεται ότι όλα τα σύνολα που φτιάχνουμε ξεκινώντας από διαστήματα και εφαρμόζοντας αριθμήσιμο πλήθος επαναλήψεων τις πράξεις της ένωσης, της τομής, και του συμπληρώματος θα είναι επίσης στοιχεία της $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Θεώρημα 1.14. *Έστω $\mathcal{F}$ η οικογένεια των κλειστών συνόλων του $\mathbb{R}$ και*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{A}_2 &= \{(a, b] : a < b, \quad a, b \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{A}_3 &= \{(a, b) : a < b, \quad a, b \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Τότε $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2) = \sigma(\mathcal{A}_3)$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) \supset \sigma(\mathcal{F}) \supset \sigma(\mathcal{A}_1) \supset \sigma(\mathcal{A}_2) \supset \sigma(\mathcal{A}_3) \supset \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

Η $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ περιέχει τα ανοικτά σύνολα άρα και τα συμπληρώματά τους, δηλαδή τα κλειστά σύνολα, συνεπώς και τη $\sigma(\mathcal{F})$. Τα διαστήματα της $\mathcal{A}_1$ είναι κλειστά, άρα $\sigma(\mathcal{F}) \supset \sigma(\mathcal{A}_1)$. Για τη $\sigma(\mathcal{A}_1) \supset \sigma(\mathcal{A}_2)$

παρατηρούμε ότι $(a,b] = (-\infty,b]\setminus(-\infty,a]$ και για τη $\sigma(\mathcal{A}_2) \supset \sigma(\mathcal{A}_3)$ ότι $(a,b) = \cup_{n=1}^{\infty}(a,b-\frac{1}{n}]$. Τέλος, για τη $\sigma(\mathcal{A}_3) \supset \mathscr{B}(\mathbb{R})$ γνωρίζουμε ότι κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο στο $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ανοικτών φραγμένων διαστημάτων, άρα $\mathcal{T} \subset \sigma(\mathcal{A}_3)$, που δίνει το συμπέρασμα. ∎

Με παρόμοια επιχειρήματα μπορεί να δείξει κανείς ότι η $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ παράγεται από την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{(-\infty,q) : q \in \mathbb{Q}\},$$

η οποία είναι αριθμήσιμη.

1.4 Liminf και limsup ακολουθίας συνόλων

Έστω X σύνολο και $(A_n)_{n\geq1}$ ακολουθία υποσυνόλων του. Ορίζουμε τα σύνολα

$$\liminf_{n\geq1} A_n := \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k, \tag{1.2}$$

$$\limsup_{n\geq1} A_n := \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k, \tag{1.3}$$

τα οποία λέμε liminf και limsup αντίστοιχα της ακολουθίας $(A_n)_{n\geq1}$. Είναι και τα δύο υποσύνολα της ένωσης $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Με λόγια, ένα $x \in X$ ανήκει στο $\liminf_{n\geq1} A_n$ αν από ένα δείκτη και μετά ανήκει *σε όλα* τα στοιχεία της ακολουθίας $(A_n)_{n\geq1}$, ενώ ανήκει στο $\limsup_{n\geq1} A_n$ αν ανήκει σε *άπειρα* από τα $(A_n)_{n\geq1}$. Από τον τυπικό ορισμό ή από αυτή την περιγραφή είναι σαφές ότι $\liminf_{n\geq1} A_n \subset \limsup_{n\geq1} A_n$. Το να είναι ένα x μέλος του $\liminf_{n\geq1} A_n$ είναι ισχυρότερη απαίτηση και έτσι λιγότερα x την ικανοποιούν.

Παράδειγμα 1.15. Αν $X = \mathbb{R}$ και $A_n = [-n,n]$ για κάθε $n \geq 1$, τότε $\liminf_{n\geq1} A_n := \mathbb{R}$. Για κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει φυσικός $n(x)$ ώστε ο x να ανήκει σε όλα τα A_n με $n \geq n(x)$ (άρα αυτά τα οποία εξαιρούνται έχουν πεπερασμένο πλήθος). Κάθε x έχει το δικό του $n(x)$. Μάλιστα, μπορούμε να πάρουμε $n(x) := [|x|] + 1$.

Παράδειγμα 1.16. Αν $X = \mathbb{R}$ και $A_n = \{x : nx \text{ είναι ακέραιος}\} = \mathbb{Z}/n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, τότε

$$\liminf_{n\geq1} A_n := \mathbb{Z},$$
$$\limsup_{n\geq1} A_n := \mathbb{Q}.$$

Σχετικά με τον δεύτερο ισχυρισμό, για κάθε ρητό $x = p/q$ με q θετικό ακέραιο έχουμε ότι $x \in A_n$ για κάθε n που είναι πολλαπλάσιο του q. Άρα έχουμε την $\supset$. Και επειδή όλα τα A_n είναι υποσύνολα του $\mathbb{Q}$, έχουμε ότι και $\limsup_{n\geq1} A_n \subset \mathbb{Q}$. Η απόδειξη του πρώτου ισχυρισμού αφήνεται στον αναγνώστη.

Αν οι όροι της ακολουθίας $(A_n)_{n\geq1}$ είναι στοιχεία μιας σ-άλγεβρας $\mathcal{A}$, τότε και τα $\liminf_{n\geq1} A_n$, $\limsup_{n\geq1} A_n$ είναι επίσης στοιχεία της $\mathcal{A}$. Ας το δούμε για το lim sup. Επειδή η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις, για κάθε $n \geq 1$ έχουμε $B_n := \cup_{k=n} A_k \in C$, και επειδή είναι κλειστή στις αριθμήσιμες τομές έχουμε $\limsup_{n\geq1} A_n = \cap_{n\geq1} B_n \in C$.

Ασκήσεις

1.1 Έστω $X := \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ και

$$\mathcal{A}_1 := \{\emptyset, X, \{\beta,\gamma\}\},$$
$$\mathcal{A}_2 := \{\emptyset, X, \{\beta,\gamma\}, \{\alpha,\delta\}\}.$$

(α) Είναι οι $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ σ-άλγεβρες;

(β) Να δείξετε ότι $\sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{A}_2$.

1.2 Σε αυτή την άσκηση παίρνουμε $X := \mathbb{R}$.
(α) Να δείξετε ότι η $\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R} : A$ αριθμήσιμο ή $\mathbb{R}\setminus A$ αριθμήσιμο$\}$ είναι σ-άλγεβρα και $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
(β) Για την οικογένεια $\mathcal{A}_0 := \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$ να δείξετε ότι $\sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}$.
(γ) Να δείξετε ότι η οικογένεια $\mathcal{A}_1 := \{A \subset \mathbb{R} : A$ πεπερασμένο ή $\mathbb{R}\setminus A$ πεπερασμένο$\}$ *δεν* είναι σ-άλγεβρα.

1.3 Αν στο Παράδειγμα 1.10 η διαμέριση C του X έχει υπεραριθμήσιμο πλήθος στοιχείων (δηλαδή το I είναι υπεραριθμήσιμο, άρα και το X υπεραριθμήσιμο), να δοθεί περιγραφή της παραγόμενης σ-άλγεβρας $\sigma(C)$.

1.4 Για την οικογένεια $C := \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{Q}\}$ να δείξετε ότι $\sigma(C) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

1.5 Να δείξετε ότι η $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ δεν παράγεται από διαμέριση.

1.6 Έστω $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στοιχείων μιας σ-άλγεβρας $\mathcal{A}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ακολουθία $(B_n)_{n\geq 1}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$ τα οποία είναι ξένα ανά δύο ώστε $B_n \subset A_n$ για κάθε $n \geq 1$ και $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$.

1.7 Έστω $f : X \to Y$ συνάρτηση.
(α) Αν $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο X, θέτουμε

$$\mathcal{B} := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$

Να δείξετε ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα στο Y.
(β) Αν $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα στο Y, θέτουμε

$$\mathcal{A} := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}.$$

Να δείξετε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο X.

Υπενθυμίζουμε ότι για $B \subset Y$, συμβολίζουμε με $f^{-1}(B)$ το σύνολο $\{x \in X : f(x) \in B\}$. Το f^{-1} εδώ δεν σημαίνει «αντίστροφη της f». Δεν είναι απαραίτητο να είναι αντιστρέψιμη η f.

1.8 Έστω X σύνολο και $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία με στοιχεία υποσύνολα του X. Να δειχθεί ότι

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{1}_{A_n} &= \mathbf{1}_{\limsup_{n\geq 1} A_n}, \\ \underline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{1}_{A_n} &= \mathbf{1}_{\liminf_{n\geq 1} A_n}. \end{aligned}$$

Για $A \subset X$, $\mathbf{1}_A : X \to \{0, 1\}$ δηλώνει τη δείκτρια συνάρτηση του συνόλου A.

1.9 Έστω X σύνολο, $(f_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία συναρτήσεων με $f_n : X \to \mathbb{R}$ για κάθε $n \geq 1$, και $c \in \mathbb{R}$ δεδομένο. Για καθένα από τα ακόλουθα ζεύγη συνόλων να εξεταστεί αν μεταξύ τους ισχύει κάποια από τις σχέσεις $\subset, =, \supset$.
(α) $\{x \in X : \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) < c\}, \liminf_{n\geq 1}\{x \in X : f_n(x) < c\}$.
(β) $\{x \in X : \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) \leq c\}, \liminf_{n\geq 1}\{x \in X : f_n(x) \leq c\}$.
(γ) $\{x \in X : \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) \leq c\}, \limsup_{n\geq 1}\{x \in X : f_n(x) \leq c\}$.
(δ) $\{x \in X : \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) \geq c\}, \limsup_{n\geq 1}\{x \in X : f_n(x) \geq c\}$.
(ε) $\{x \in X : \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) > c\}, \limsup_{n\geq 1}\{x \in X : f_n(x) > c\}$.

2

Μέτρα

2.1 Μέτρα σε μετρήσιμο χώρο

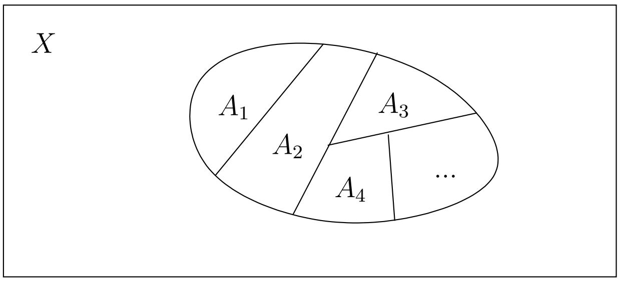
Έστω X σύνολο και $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στο X. Ονομάζουμε το ζεύγος $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμο χώρο.

Ορισμός 2.1. **Μέτρο** στον $(X, \mathcal{A})$ λέμε κάθε συνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n\geq 1}$ ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$.

Η τριάδα $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται **χώρος μέτρου** και τα στοιχεία της $\mathcal{A}$ **μετρήσιμα σύνολα**. Η ιδιότητα (ii) του ορισμού λέγεται αριθμήσιμη προσθετικότητα.



Σχήμα 2.1: Για την ιδιοτητα (ii) του ορισμού του μέτρου.

Παράδειγμα 2.2. (Αριθμητικό μέτρο) Έστω X ένα σύνολο, $\mathcal{A} = \mathscr{P}(X)$, και

$$\mu(A) := \begin{cases} n & \text{αν το } A \text{ είναι πεπερασμένο και έχει ακριβώς } n \text{ στοιχεία,} \\ \infty & \text{αν το } A \text{ είναι άπειροσύνολο} \end{cases}$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Το μ είναι το αριθμητικό μέτρο στο X.

Παράδειγμα 2.3. (Μέτρο Dirac) Έστω X ένα σύνολο, $\mathcal{A} = \mathscr{P}(X)$, και $x_0 \in X$ ένα δεδομένο σημείο του X. Ορίζουμε

$$\delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 1 & \text{αν } x_0 \in A, \\ 0 & \text{αν } x_0 \in X \backslash A \end{cases}$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Η συνάρτηση δ_{x_0} είναι μέτρο και ονομάζεται μέτρο Dirac στο x_0.

Παράδειγμα 2.4. (Μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$) Παίρνουμε $X = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Είναι δυνατόν να οριστεί ένα μέτρο λ στον χώρο $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ ώστε

$$\lambda(I) = \text{μήκος}(I), \tag{$*$}$$

για κάθε διάστημα $I \subset \mathbb{R}$. Για παράδειγμα, για $a < b$ πραγματικούς, έχουμε $\lambda((a,b)) = \lambda([a,b]) = b-a$, $\lambda((a,\infty)) = \infty$ και $\lambda([0.1,2) \cup (3,4) \cup (5,5.3)) = 1.9 + 1 + 0.3 = 3.2$.

Πώς μπορούμε να ορίσουμε μια τέτοια συνάρτηση; Ξέρουμε τις τιμές της στα διαστήματα, τα οποία είναι στοιχεία του $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, και οι ιδιότητες του μέτρου καθορίζουν μοναδικά τις τιμές της σε ενώσεις διαστημάτων. Αυτό όμως δεν αρκεί. Χρειάζεται να την επεκτείνουμε σε όλο το $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Αποδεικνύεται ότι μια τέτοια επέκταση είναι δυνατή και γίνεται μοναδικά. Δηλαδή υπάρχει μοναδικό μέτρο στο $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ που ικανοποιεί την $(*)$. Την κατασκευή αυτού του μέτρου μπορεί να βρει ο αναγνώστης σε βιβλία θεωρίας μέτρου [για παράδειγμα, Κεφάλαιο 3 του Κουμουλλής Γ. και Νεγρεπόντης Σ (1991)].

Μπορεί άραγε το λ να επεκταθεί σε όλο το $\mathscr{P}(\mathbb{R})$; Δηλαδή να αποδώσουμε σε κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έναν αριθμό που θα είναι το «μήκος» του. Αποδεικνύεται ότι το λ μπορεί να επεκταθεί μέχρι ένα σύνολο $\mathcal{M}_\lambda$, που είναι μάλιστα σ-άλγεβρα, με $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{M}_\lambda \subsetneq \mathscr{P}(\mathbb{R})$, αλλά όχι παραπάνω. Γιατί όχι παραπάνω; Είναι τόσο δύσκολο να επεκτείνουμε μια συνάρτηση; Το δύσκολο δεν είναι να την επεκτείνουμε, αλλά να την επεκτείνουμε με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιεί την (ii) του Ορισμού 2.1. Αυτή η συνθήκη βάζει τόσες πολλές απαιτήσεις στη λ ώστε να μην υπάρχει καμία $\lambda : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ που να μπορεί να τις ικανοποιήσει όλες.

Παρατήρηση 2.5. (Σύνολα με μέτρο Lebesgue 0) Κάθε μονοσύνολο $\{x\} \subset \mathbb{R}$ έχει μέτρο Lebesgue 0 αφού $\{x\} = [x,x]$ είναι ένα διάστημα με μήκος 0. Έπεται από την (ii) του Ορισμού 2.1 του μέτρου ότι κάθε αριθμήσιμο σύνολο έχει επίσης μέτρο Lebesgue 0. Έτσι, το $\mathbb{Q}$, ενώ είναι ένα πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και κατά μια έννοια «μεγάλο» σύνολο, έχει μέτρο 0. Υπάρχουν όμως και υπεραριθμήσιμα σύνολα με μέτρο 0, με πιο γνωστό παράδειγμα το σύνολο C του Cantor. Αυτό γράφεται ως $C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n$ όπου το C_n είναι ένωση 2^n ξένων διαστημάτων, το καθένα με μήκος 3^{-n} (από τη συνήθη κατασκευή του C). Άρα $\lambda(C) \le \lambda(C_n) = 2^n 3^{-n} \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Την ανισότητα $\lambda(C) \le \lambda(C_n)$ θα τη δικαιολογήσουμε παρακάτω [Πρόταση 2.12 (*ii*)].

Ορισμός 2.6. Ένα μέτρο μ σε έναν μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ λέγεται πεπερασμένο αν $\mu(X) < \infty$, και μέτρο πιθανότητας αν $\mu(X) = 1$.

Αντίστοιχα, ο χώρος μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται χώρος πεπερασμένου μέτρου ή χώρος πιθανότητας. Για έναν χώρο πιθανότητας συνήθως χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Παράδειγμα 2.7. (Διακριτό μέτρο πιθανότητας) Έστω Ω αριθμήσιμο σύνολο και $\mathcal{F} := \mathscr{P}(\Omega)$. Έστω και $f : \Omega \to [0,\infty)$ με $\sum_{x\in\Omega} f(x) = 1$. Για $A \in \mathcal{F}$, ορίζουμε

$$\mathbf{P}(A) := \sum_{x\in A} f(x).$$

Η συνάρτηση $\mathbf{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας στο Ω. Σε κάθε σημείο $x \in \Omega$ δίνει μάζα $f(x)$. Το διακριτό μέτρο πιθανότητας είναι γενίκευση του μέτρου Dirac. Περισσότερα από ένα σημεία παίρνουν ένα τμήμα της συνολικής μάζας 1.

Παράδειγμα 2.8. (Ρίψη νομίσματος) Για το πείραμα ρίψης ενός νομίσματος που έχει πιθανότητα $p \in [0,1]$ να φέρει κορώνα και $1-p$ να φέρει γράμματα, ένας φυσιολογικός χώρος πιθανότητας προκύπτει ως ειδική περίπτωση του προηγούμενου παραδείγματος. Παίρνουμε $\Omega := \{K, \Gamma\}$, $f(K) = p$, $f(\Gamma) = 1-p$. Προκύπτει έτσι ένα μέτρο πιθανότητας, έστω $\mathbf{P}^{(p)}$, και τελικά ο χώρος πιθανότητας είναι ο $(\{K,\Gamma\}, \mathscr{P}(\{K,\Gamma\}), \mathbf{P}^{(p)})$.

Παράδειγμα 2.9. (Το μοντέλο Ising) Έστω $N \ge 1$ φυσικός, $V := [-N,N]^2 \cap \mathbb{Z}^2$,

$$\Omega := \{-1,1\}^V = \{s \,|\, s : V \to \{-1,1\} \text{ συνάρτηση }\},$$

και $\mathcal{F} := \mathscr{P}(\Omega)$. Το V είναι ένα πεπερασμένο πλέγμα μέσα στο $\mathbb{Z}^2$ σε σχήμα τετραγώνου. Η εικόνα που έχουμε στο μυαλό μας είναι ότι σε κάθε σημείο του V υπάρχει ένα ηλεκτρόνιο του οποίου η μαγνητική ροπή παίρνει μόνο μία από τις τιμές $-1, 1$. Τα σημεία του Ω τα λέμε σχηματισμούς και κάθε σχηματισμός αναθέτει σε κάθε σημείο του πλέγματος V, δηλαδή σε κάθε ηλεκτρόνιο, μια από τις τιμές $-1, 1$. Γειτονικά σημεία ενός σημείου $x := (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ λέμε τα $(x_1 - 1, x_2), (x_1 + 1, x_2), (x_1, x_2 - 1), (x_1, x_2 + 1)$. Αν το y είναι γειτονικό του x, τότε και το x είναι γειτονικό του y, και γράφουμε $< x, y >$.

Έστω $J, h \in \mathbb{R}$ σταθερές. Για κάθε σχηματισμό $s \in \Omega$, ορίζουμε $A(s) := J \sum_{x,y \in V : <x,y>} s(x)s(y) + h \sum_{x \in V} s(x)$ και

$$f(s) = \frac{1}{Z} e^{A(s)},$$

όπου $Z := \sum_{r \in \Omega} e^{A(r)}$ είναι ο κατάλληλος αριθμός ώστε αθροίζοντας την f πάνω σε όλα τα $s \in \Omega$ να παίρνουμε 1. Η συνάρτηση f ορίζει, με τη διαδικασία του Παραδείγματος 2.7, ένα μέτρο πιθανότητας στον Ω. Ας υποθέσουμε ότι $J > 0$ και $h = 0$. Τότε μεγαλύτερη πιθανότητα έχουν σχηματισμοί που δίνουν το ίδιο πρόσημο σε πολλά γειτονικά σημεία.

Αυτό το μέτρο πιθανότητας καθώς και γενικεύσεις του έχουν χρησιμοποιηθεί για την κατανόηση των μαγνητικών ιδιοτήτων της ύλης.

Παράδειγμα 2.10. (Μέτρο περιορισμός) Αν μ είναι ένα μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$ και $A_0 \in \mathcal{A}$, τότε η συνάρτηση $\mu_{A_0} : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ που ορίζεται ως $\mu_{A_0}(A) = \mu(A \cap A_0)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ είναι μέτρο (Άσκηση). Το μ_{A_0} έχει συγκεντρωμένη όλη του τη μάζα στο A_0 αφού $\mu_{A_0}(X \backslash A_0) = \mu((X \backslash A_0) \cap A_0) = \mu(\emptyset) = 0$.

Παράδειγμα 2.11. (Κανονικοποιημένο μέτρο περιορισμός) Σε συνέχεια του προηγούμενου παραδείγματος. Ας υποθέσουμε ότι το μ είναι ένα μέτρο πιθανότητας και ότι $0 < \mu(A_0) < 1$, τότε το μ_{A_0} έχει συνολική μάζα $\mu_{A_0}(\Omega) = \mu(A_0) < 1$, δηλαδή δεν είναι μέτρο πιθανότητας. Το κανονικοποιούμε ορίζοντας ένα νέο μέτρο, το $\mathbf{P}_{A_0} : \mathcal{A} \to [0, 1]$, ως εξής

$$\mathbf{P}_{A_0}(A) = \frac{\mu_{A_0}(A)}{\mu_{A_0}(\Omega)} = \frac{\mu(A \cap A_0)}{\mu(A_0)}$$

για κάθε $A \in \mathcal{F}$. Το $\mathbf{P}_{A_0}$ είναι μέτρο πιθανότητας και δίνει όλη του την μάζα στο σύνολο A_0.

Τα αξιώματα στον ορισμό του μέτρου συνεπάγονται αρκετές ιδιότητες για μια τέτοια συνάρτηση. Καταγράφουμε στην παρακάτω πρόταση κάποιες που στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε επανηλειμμένα.

Πρόταση 2.12. *Έστω μ ένα μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$. Τότε,*

(i) $\mu(\cup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$ *για κάθε* $n \geq 1$ *και* $\{A_n : 1 \leq k \leq n\}$ *ξένα ανά δύο στοιχεία της* $\mathcal{A}$.

(ii) Αν $A, B \in \mathcal{A}$, *με* $A \subset B$, *τότε* $\mu(A) \leq \mu(B)$ *και αν* $\mu(A) < \infty$, *τότε* $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(iii) $\mu(\cup_{n=1}^\infty A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ *για κάθε ακολουθία* $(A_n)_{n \geq 1}$ *στοιχείων της* $\mathcal{A}$.

(iv) Αν $(A_n)_{n \geq 1}$ *είναι αύξουσα ακολουθία στοιχείων της* $\mathcal{A}$, *τότε* $\mu(\cup_{n=1}^\infty A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$.

(v) Αν $(A_n)_{n \geq 1}$ *είναι φθίνουσα ακολουθία στοιχείων της* $\mathcal{A}$ *με* $\mu(A_1) < \infty$, *τότε* $\mu(\cap_{n=1}^\infty A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$.

Απόδειξη. (i) Τα σύνολα της ακολουθίας $(B_k)_{k \geq 1}$ με

$$B_k := \begin{cases} A_k & \text{αν } k \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ \emptyset & \text{αν } k \in \mathbb{N}, k \geq n + 1. \end{cases}$$

είναι στοιχεία της $\mathcal{A}$ ξένα ανά δύο. Οπότε η ιδιότητα (ii) του ορισμού του μέτρου δίνει

$$\mu(\cup_{k=1}^n A_k) = \mu(\cup_{k=1}^\infty B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

αφού $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) Το B είναι η ένωση των ξένων συνόλων A, $B\backslash A$, οπότε με βάση το (i) της πρότασης,

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B\backslash A)) = \mu(A) + \mu(B\backslash A).$$

Επειδή $\mu(B\backslash A) \geq 0$, έπεται ότι $\mu(B) \geq \mu(A)$. Τώρα, όταν $\mu(A) < \infty$, το αφαιρούμε από την πιο πάνω ισότητα, και παίρνουμε ότι $\mu(B\backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(iii) Έστω $B_1 := A_1$ και $B_n := A_n\backslash(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1})$ για κάθε $n \geq 2$. Τα $\{B_n : n \geq 1\}$ είναι ξένα ανά δύο στοιχεία της $\mathcal{A}$, $B_n \subset A_n$ για κάθε $n \geq 1$, και $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Άρα

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει γιατί τα $(B_n)_{n\geq 1}$ είναι ξένα ανά δύο, και η ανισότητα λόγω της $B_n \subset A_n$ και του μέρους (ii) της πρότασης.

(iv) Έστω $B_1 := A_1$ και $B_n := A_n\backslash A_{n-1}$ για κάθε $n \geq 2$. Τα $\{B_n : n \geq 1\}$ είναι ξένα ανά δύο στοιχεία της $\mathcal{A}$, $\cup_{k=1}^{n} B_k = A_n$, και $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Έτσι,

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{k=1}^{n} B_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(v) Θέτουμε $B_n = A_1\backslash A_n$ για κάθε $n \geq 1$. Για την ακολουθία $(B_n)_{n\geq 1}$ εφαρμόζεται το προηγούμενο μέρος της πρότασης και δίνει $\lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \backslash \cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1\backslash A_n)$. Έπειτα, το ότι $\mu(A_1) < \infty$ δίνει $\mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$ και $\mu(A_n) < \infty$ για κάθε $n \geq 1$, οπότε χρησιμοποιώντας και το μέρος (ii) της πρότασης παίρνουμε το ζητούμενο. ■

Ορολογία: Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος ώστε ο X να είναι μετρικός χώρος και η σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ να περιέχει τα σύνολα Borel του X, δηλαδή $\mathscr{B}(X) \subset \mathcal{A}$. Αν μ είναι ένα μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$, **στήριγμα** (ή και **φορέα**) του μ λέμε το σύνολο

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}(\mu) : &= \{x \in X : \mu(U) > 0 \text{ για κάθε ανοιχτό υποσύνολο του } X \text{ με } x \in U\} && (2.1) \\ &= X\backslash \cup \{V : V \text{ ανοιχτό με } \mu(V) = 0\} && (2.2) \end{aligned}$$

Το ότι ισχύει η δεύτερη ισότητα αφήνεται ως άσκηση. Από αυτήν γίνεται σαφές ότι το στήριγμα είναι κλειστό σύνολο. Αν ο X είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, τότε η ένωση των ανοιχτών συνόλων στη δεύτερη γραμμή έχει μέτρο 0 και το στήριγμα είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο του X στο οποίο το μ συγκεντρώνει τη μάζα του (δηλαδή δίνει μέτρο 0 στο συμπλήρωμά αυτού του συνόλου).

Παράδειγμα 2.13. (i) Έστω $\lambda > 0$ και μ_1 το διακριτό μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ που δίνει σε κάθε $k \in \mathbf{N}$ μάζα $e^{-\lambda}\lambda^k/k!$. Το στήριγμά του είναι το $\mathbb{N}$.

(ii) Έστω μ_2 το μέτρο στο $\mathbb{R}$ με $\mu_2(A) = |A \cap \mathbb{Q}|$ για κάθε $A \subset \mathbb{R}$. Αυτό είναι ένα διακριτό μέτρο (δίνει μάζα 1 σε κάθε ρητό). Παρόλο που $\mu_2(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = 0$ (δηλαδή η μάζα του μ_2 είναι συγκεντρωμένη στο $\mathbb{Q}$), το στήριγμα του μ_2 είναι το $\mathbb{R}$ γιατί οποιοδήποτε ανοιχτό σύνολο γύρω από οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό έχει θετικό μέτρο αφού περιέχει κάποιον ρητό.

Ασκήσεις

2.1 Έστω $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$, $n \in \mathbb{N}^+$, μέτρα πιθανότητας στον $(\Omega, \mathcal{F})$ και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ με $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Να δειχθεί ότι ο κυρτός συνδυασμός

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{P}_i$$

των μέτρων $\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, είναι μέτρο στον $(\Omega, \mathcal{F})$.

2.2 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας και $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{F}$. Να δείξετε ότι $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = 0$.

2.3 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{F}$.

(α) Αν $\mathbf{P}(A_n) = 0$ για κάθε $n \geq 1$, τότε $\mathbf{P}\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$.

(β) Αν $\mathbf{P}(A_n) = 1$ για κάθε $n \geq 1$, τότε $\mathbf{P}\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$.

2.4 Να βρεθεί χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και $(A_i)_{i\in I}, (B_i)_{i\in I'}$ οικογένειες στοιχείων της $\mathcal{F}$ ώστε

(α) $\mathbf{P}(A_i) = 0$ για κάθε $i \in I$, $\cup_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}$, αλλά $\mathbf{P}\left(\cup_{i\in I} A_i\right) \neq 0$.

(β) $\mathbf{P}(B_i) = 1$ για κάθε $i \in I'$, αλλά $\cap_{i\in I'} B_i = \emptyset$.

2.5 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(A_\beta)_{\beta\in B}$ οικογένεια ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{F}$. Αν $\mathbf{P}(A_\beta) > 0$ για κάθε $\beta \in B$, να δείξετε ότι το B είναι αριθμήσιμο.

2.6 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{F}$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}(\liminf_{n\geq 1} A_n) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) \leq \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) \leq \mathbf{P}(\limsup_{n\geq 1} A_n). \tag{2.3}$$

2.7 Έστω μ_1 το μέτρο στο Παράδειγμα 2.13(i), λ το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$, και ν ο περιορισμός του στο $[2, 5]$ (Δες Παράδειγμα 2.10). Θέτουμε $\mu = \mu_1 + \nu$. Ποιο είναι το $\mathrm{supp}(\mu)$;

2.8 Έστω $F \subset \mathbb{R}$ κλειστό. Να δειχθεί ότι υπάρχει μέτρο στο $\mathbb{R}$ με στήριγμα το F.

3

Ισότητα πεπερασμένων μέτρων

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε ένα τεχνικό αποτέλεσμα, το λεγόμενο Θεώρημα π-λ, που στόχο έχει να διευκολύνει την απόδειξη ιδιοτήτων για τα στοιχεία μιας σ-άλγεβρας.

3.1 Κλάσεις Dynkin

Ορισμός 3.1. Έστω X σύνολο. Μια οικογένεια $\mathcal{D} \subset \mathscr{P}(X)$ λέγεται κλάση **Dynkin** στο X αν έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $X \in \mathcal{D}$.

(ii) Αν $A, B \in \mathcal{D}$ και $A \subset B$, τότε $B \setminus A \in \mathcal{D}$.

(iii) Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία στην $\mathcal{D}$, τότε $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

Παρατήρηση 3.2. Κάθε σ-άλγεβρα είναι κλάση Dynkin. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει (Άσκηση 3.2). Δηλαδή είναι ευκολότερο ένα σύνολο να είναι κλάση Dynkin.

Όπως και στην περίπτωση των σ-αλγεβρών, για κάθε οικογένεια $C \subset \mathscr{P}(X)$ ενός συνόλου X, υπάρχει η ελάχιστη κλάση Dynkin που την περιέχει. Αυτή περιγράφεται ως η τομή όλων των κλάσεων Dynkin που περιέχουν τη C. Συνήθως τη συμβολίζουμε με $\delta(C)$. Συνοψίζοντας παίρνουμε την ακόλουθη πρόταση η απόδειξη της οποίας είναι παρόμοια με αυτή στην περίπτωση των σ-αλγεβρών.

Πρόταση 3.3. *Έστω X σύνολο και $C \subset \mathscr{P}(X)$. Θέτουμε $\mathcal{J} := \{\mathcal{D} \subset \mathscr{P}(X) : \mathcal{D}$ είναι κλάση Dynkin και $C \subset \mathcal{D}\}$. Τότε η οικογένεια*

$$\delta(C) := \cap_{\mathcal{D}\in\mathcal{J}} \mathcal{D}$$

- *είναι κλάση Dynkin στο X και*
- *είναι η μικρότερη κλάση Dynkin που περιέχει τη C. Δηλαδή περιέχεται σε κάθε κλάση Dynkin που περιέχει τη C.*

Ονομάζουμε τη $\delta(C)$ κλάση Dynkin που παράγεται από την C.

Παρατήρηση 3.4. Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι $\delta(C) \subset \sigma(C)$ εφόσον η $\sigma(C)$ είναι κλάση Dynkin και περιέχει τη C.

Λέμε ότι μια οικογένεια C συνόλων είναι *κλειστή στις πεπερασμένες τομές* αν για κάθε $n \geq 1$ και $A_1, A_2, \ldots, A_n \in C$ ισχύει ότι $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in C$. Προφανώς αρκεί να ισχύει η συνθήκη αυτή για $n = 2$ και έπειτα οι υπόλοιπες περιπτώσεις αποδεικνύονται επαγωγικά.

Η επόμενη πρόταση δίνει μια απλή συνθήκη ώστε μια κλάση Dynkin να είναι σ-άλγεβρα.

Πρόταση 3.5. *Έστω X σύνολο και $\mathcal{D}$ κλάση Dynkin στο X. Αν η $\mathcal{D}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, τότε η $\mathcal{D}$ είναι σ-άλγεβρα στο X.*

Απόδειξη. Από τον Ορισμό 3.1 της κλάσης Dynkin έχουμε ότι $X \in \mathcal{D}$ λόγω του (i) και, αν $A \in \mathcal{D}$, τότε $X \setminus A \in \mathcal{D}$ λόγω των (i) και (ii). Επίσης, η $\mathcal{D}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες ενώσεις εφόσον είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές και στα συμπληρώματα. Μένει να δείξουμε ότι είναι κλειστή τις αριθμήσιμες ενώσεις. Αν $(A_n)_{n\geq1}$ είναι στοιχεία της $\mathcal{D}$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ το $B_n := \cup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{D}$ και η $(B_n)_{n\geq1}$ είναι αύξουσα ακολουθία στην $\mathcal{D}$. Άρα $\cup_{n=1}^\infty B_n \in \mathcal{D}$. Όμως $\cup_{n=1}^\infty B_n = \cup_{n=1}^\infty A_n$. ∎

3.2 Το Θεώρημα π-λ

Θεώρημα 3.6 (Θεώρημα π-λ)**.** *Έστω X σύνολο και $\mathcal{C} \subset \mathscr{P}(X)$ οικογένεια κλειστή στις πεπερασμένες τομές. Τότε $\delta(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.*

Απόδειξη. Ισχύει ότι $\delta(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C})$. Άρα, αν δείξουμε ότι η $\delta(\mathcal{C})$ είναι σ-άλγεβρα, τότε $\sigma(\mathcal{C}) \subset \delta(\mathcal{C})$, εφόσον η $\sigma(\mathcal{C})$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει τη $\mathcal{C}$. Με βάση την Πρόταση 3.5, αρκεί να δείξουμε ότι η $\delta(\mathcal{C})$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, δηλαδή

$$A, B \in \delta(\mathcal{C}) \Rightarrow A \cap B \in \delta(\mathcal{C}). \tag{3.1}$$

Γνωρίζουμε το συμπέρασμα της συνεπαγωγής για $A, B \in \mathcal{C}$, οπότε το σχέδιο είναι να την ενισχύσουμε σε δύο βήματα. Δηλαδή να δείξουμε ότι ισχύει πρώτα για $A \in \mathcal{C}, B \in \delta(\mathcal{C})$ και έπειτα για $A \in \delta(\mathcal{C}), B \in \delta(\mathcal{C})$.

Για κάθε $A \subset X$ θέτουμε

$$\mathcal{D}(A) = \{U \in \delta(\mathcal{C}) : A \cap U \in \delta(\mathcal{C})\}.$$

Αυτό το σύνολο περιέχει τα σύνολα που «τέμνονται ωραία» με το A.

Βήμα 1. Για $A \in \mathcal{C}$, έχουμε:

- $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}(A)$ εφόσον η $\mathcal{C}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές.
- Η $\mathcal{D}(A)$ είναι κλάση Dynkin (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση).

Άρα $\mathcal{D}(A) \supset \delta(\mathcal{C})$, εφόσον η $\delta(\mathcal{C})$ είναι η ελάχιστη κλάση Dynkin που περιέχει τη $\mathcal{C}$. Όμως $\mathcal{D}(A) \subset \delta(\mathcal{C})$ από τον ορισμό της $\mathcal{D}(A)$. Τελικά $\mathcal{D}(A) = \delta(\mathcal{C})$, που σημαίνει ότι

$$A \in \mathcal{C}, B \in \delta(\mathcal{C}) \Rightarrow A \cap B \in \delta(\mathcal{C}). \tag{3.2}$$

Βήμα 2. Για $B \in \delta(\mathcal{C})$, έχουμε:

- $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}(B)$ από την (3.2).
- Η $\mathcal{D}(B)$ είναι κλάση Dynkin (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση).

Άρα, όπως στο Βήμα 1, έχουμε ότι $\mathcal{D}(B) = \delta(\mathcal{C})$, δηλαδή ισχύει η (3.1), και το θεώρημα αποδείχθηκε. ∎

Μια οικογένεια $\mathcal{C} \subset \mathscr{P}(X)$ λέγεται π-σύστημα αν είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, ενώ λέγεται λ-σύστημα αν είναι κλάση Dynkin. Σε αυτή την ορολογία οφείλεται το όνομα του προηγούμενου θεωρήματος. Μια ισοδύναμη διατύπωσή του δίνεται στην Άσκηση 3.3.

Χαρακτηριστική εφαρμογή του θεωρήματος είναι η εξής: Για $X = \mathbb{R}$, η οικογένεια $\mathcal{C} = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές και άρα $\delta(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$. Ξέρουμε όμως ότι $\sigma(\mathcal{C}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Άρα παίρνουμε ακόμα μία περιγραφή των συνόλων Borel ως $\delta(\mathcal{C})$.

Μια σημαντική συνέπεια του θεωρήματος π-λ είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 3.7. *Έστω X σύνολο, $\mathcal{A} \subset \mathscr{P}(X)$ σ-άλγεβρα, και μ, ν πεπερασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$ με $\mu(X) = \nu(X)$, τα οποία συμφωνούν σε μια οικογένεια $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ κλειστή στις πεπερασμένες τομές. Αν $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$, τότε $\mu = \nu$ στην $\mathcal{A}$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \nu(A)\}$. Τότε,

- $\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{C})$.
- Η $\mathcal{B}$ είναι κλάση Dynkin.

Πράγματι, ο πρώτος ισχυρισμός είναι προφανής και για τον δεύτερο έχουμε,

(i) $X \in \mathcal{B}$ από υπόθεση.

(ii) Αν $A, B \in \mathcal{B}$, $A \subset B$, τότε $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) = \nu(B) - \nu(A) = \nu(B \setminus A)$.

(iii) Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία στη $\mathcal{B}$, τότε

$$\mu\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \nu\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

Άρα $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$.

Εφόσον η $\mathcal{B}$ είναι κλάση Dynkin, έχουμε ότι $\delta(C) \subset \mathcal{B}$. Όμως, από το θεώρημα μονότονης κλάσης, $\delta(C) = \sigma(C)$, και τελικά $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$, από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο. ■

Το προηγούμενο πόρισμα δίνει ότι αν έχουμε δύο μέτρα πιθανότητας μ, ν στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ για τα οποία ισχύει $\mu((-\infty, x]) = \nu((-\infty, x])$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $\mu = \nu$.

Ασκήσεις

3.1 Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $U \in \mathcal{A}$ δεδομένο. Θέτουμε

$$C := \{A \in \mathcal{A} : \mathbf{P}(A \cap U) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(U)\}.$$

Να δειχθεί ότι η C είναι κλάση Dynkin.

3.2 Έστω $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$ και

$$\mathcal{A} := \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \emptyset\}.$$

Να δειχθεί ότι η $\mathcal{A}$ είναι κλάση Dynkin αλλά δεν είναι σ-άλγεβρα στο Ω.

3.3 Έστω X σύνολο, $C_1 \subset C_2 \subset \mathscr{P}(X)$ ώστε η C_1 να είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές και η C_2 να είναι κλάση Dynkin. Να δειχθεί ότι $\sigma(C_1) \subset C_2$.

4

Περιγραφή μέτρων πιθανότητας

4.1 Μέτρα πιθανότητας σε αριθμήσιμο δειγματικό χώρο

Στην παράγραφο αυτή θα μιλήσουμε για μέτρα πιθανότητας σε αριθμήσιμο δειγματικό χώρο, που αποτελούν την απλούστερη μορφή μέτρων πιθανότητας και δεν απαιτούν χρήση εξειδικευμένων εργαλείων.

Αν το Ω είναι αριθμήσιμο σύνολο, στο Παράδειγμα 2.7 είδαμε πώς μπορούμε να ορίσουμε ένα τέτοιο μέτρο με τη χρήση μιας κατάλληλης συνάρτησης $f : \Omega \to [0, \infty)$. Η σ-άλγεβρα που επιλέξαμε ήταν η $\mathcal{F} = \mathscr{P}(\Omega)$. Αυτό προκύπτει φυσιολογικά δεδομένου ότι ζητάμε $\{\omega\} \in \mathcal{A}$ για κάθε $\omega \in \Omega$, συνεπώς αναγκαστικά $\mathcal{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ εφόσον κάθε $A \subset \Omega$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση στοιχείων της $\mathcal{F}$, δηλαδή $A = \cup_{\omega\in A}\{\omega\}$.

Θεώρημα 4.1. *Έστω Ω αριθμήσιμο σύνολο και $\mathcal{F} = \mathscr{P}(\Omega)$. Τότε:*

(i) Ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον $(\Omega, \mathcal{F})$ καθορίζεται πλήρως από τις τιμές $p_\omega = \mathbf{P}(\{\omega\})$, $\omega \in \Omega$.

(ii) Έστω $(q_\omega)_{\omega\in\Omega}$ ακολουθία αριθμών στο $\mathbb{R}$.
Υπάρχει μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον $(\Omega, \mathcal{F})$ με $\mathbf{P}(\{\omega\}) = q_\omega$, για κάθε $\omega \in \Omega$ αν και μόνο αν $q_\omega \geq 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και $\sum_{\omega\in\Omega} q_\omega = 1$.

Απόδειξη. (i) Έστω $A \subset \Omega$. Τότε $A = \cup_{\omega\in A}\{\omega\}$, και εφόσον το Ω είναι αριθμήσιμο,

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbf{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} p_\omega.$$

(ii) $\Rightarrow$ Ισχύει ότι $q_\omega = \mathbf{P}(\{\omega\})$, άρα $q_\omega \geq 0$ εφόσον $\mathbf{P}$ μέτρο στο Ω. Επίσης,

$$\sum_{\omega\in\Omega} q_\omega = \sum_{\omega\in\omega} \mathbf{P}(\{\omega\}) = \mathbf{P}(\cup_{\omega\in\Omega}\{\omega\}) = \mathbf{P}(\Omega) = 1,$$

εφόσον $\mathbf{P}$ μέτρο πιθανότητας στο Ω.
$\Leftarrow$ Αφήνεται ως άσκηση.

$\blacksquare$

Παράδειγμα 4.2. (Κατανομή Poisson) Έστω $\Omega = \mathbb{N}$ και $\lambda > 0$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έστω $p_k = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. Η $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ικανοποιεί της απαιτήσεις του Θεωρήματος 4.1. Πράγματι, $p_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = 1$. Συνεπώς ορίζεται μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ έτσι ώστε $\mathbf{P}(\{k\}) = p_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Το μέτρο αυτό λέγεται κατανομή **Poisson** με παράμετρο λ.

Ορισμός 4.3. Έστω Ω πεπερασμένο σύνολο. Ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ λέγεται ομοιόμορφο αν υπάρχει $c > 0$ έτσι ώστε $\mathbf{P}(\{\omega\}) = c$ για κάθε $\omega \in \Omega$, δηλαδή το $\mathbf{P}$ δίνει την ίδια μάζα σε κάθε $\omega \in \Omega$.

Από τον Ορισμό 4.3 συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \text{για κάθε } A \subset \Omega.$$

Πράγματι, εφόσον το $\mathbf{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας,

$$1 = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} c = c|\Omega|.$$

Άρα $c = 1/|\Omega|$. Όμως $\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} c = c|A|$, από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

Τα ομοιόμορφα μέτρα μοντελοποιούν πειράματα που έχουν «ισοπίθανα» αποτελέσματα.

Παράδειγμα 4.4. Θεωρούμε το πείραμα ρίψης ενός αμερόληπτου ζαριού. Τότε $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $\mathcal{A} = \mathscr{P}(\Omega)$. Το κατάλληλο μέτρο που μοντελοποιεί το πείραμα είναι το $\mathbf{P}$ με $\mathbf{P}(\{\omega\}) = 1/6$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Δηλαδή το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στον $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

Παράδειγμα 4.5. (Υπεργεωμετρική κατανομή) Μια κάλπη περιέχει N άσπρα και M μαύρα αριθμημένα σφαιρίδια, $(1, 2, \ldots, N)$ και $(N + 1, N + 2, \ldots, N + M)$ αντίστοιχα. Επιλέγουμε n από αυτά χωρίς επανάθεση, όπου $1 \leq n \leq N + M$. Τότε ο δειγματικός μας χώρος είναι

$$\Omega = \{A \subset \{1, 2, \ldots, N + M\} : |A| = n\},$$

και κάθε στοιχείο του Ω είναι μια δυνατή εξαγωγή. Για τον πληθάριθμο του Ω έχουμε

$$|\Omega| = \binom{N + M}{n}.$$

Για λόγους συμμετρίας, όλα τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.

Το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ που ορίζεται στον $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ έχει $\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{\binom{N+M}{n}}$ για κάθε $A \subset \Omega$. Για παράδειγμα, αν $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ και $D = \{A \subset \Omega : A \text{ έχει } k \text{ άσπρα σφαιρίδια}\}$, τότε

$$\mathbf{P}(D) = \frac{|D|}{\binom{N+M}{n}} = \frac{\binom{N}{k}\binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}.$$

4.2 Περιγραφή μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$

Στην παράγραφο αυτή θα μιλήσουμε για μέτρα πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Αυτά τα μέτρα τα λέμε και *κατανομές* στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός 4.6. Έστω $\mathbf{P}$ μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. **Συνάρτηση κατανομής** του $\mathbf{P}$ λέγεται η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ με

$$F(x) = \mathbf{P}\left((-\infty, x]\right) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή, η $F(x)$ μετράει τη μάζα που δίνει το μέτρο $\mathbf{P}$ στην ημιευθεία $(-\infty, x]$.

Παράδειγμα 4.7. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και δ_{x_0} το μέτρο Dirac στην $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ στο x_0. Η συνάρτηση κατανομής του δ_{x_0} είναι η

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < x_0, \\ 1 & \text{αν } x \geq x_0. \end{cases}$$

Παρακάτω, χρησιμοποιούνται οι εξής συμβολισμοί: Για $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$F(x_0-) = \lim_{x \to x_0^-} F(x), \;\; F(x_0+) = \lim_{x \to x_0^+} F(x),$$
$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x), \;\; F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x).$$

Πρόταση 4.8. *Έστω $\mathbf{P}$ μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ και F η συνάρτηση κατανομής του $\mathbf{P}$. Τότε:*

(i) Η F είναι αύξουσα συνάρτηση.

(ii) Η F είναι δεξιά συνεχής.

(iii) $F(-\infty) = 0$ και $F(\infty) = 1$.

Απόδειξη. (*i*) Έστω $x \leq y$. Τότε επειδή $(-\infty, x] \subset (-\infty, y]$ το (ii) της Πρότασης 2.12 δίνει ότι

$$F(x) = \mathbf{P}((-\infty, x]) \leq \mathbf{P}((-\infty, y]) = F(y).$$

(*ii*) Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Επειδή η F είναι αύξουσα, το $F(x_0+)$ υπάρχει, και έχουμε

$$\begin{aligned} F(x_0+) &= \lim_{n \to \infty} F\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left(\left(-\infty, x_0 + \frac{1}{n}\right]\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} \left(-\infty, x_0 + \frac{1}{n}\right]\right) \\ &= \mathbf{P}\left((-\infty, x_0]\right) = F(x_0). \end{aligned}$$

(*iii*) Επειδή η F είναι αύξουσα, τα όρια υπάρχουν και

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{n \to \infty} F(-n) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left((-\infty, -n]\right) = \mathbf{P}\left(\cap_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, -n]\right) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0,$$

ενώ

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{n \to \infty} F(n) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}((-\infty, n]) = \mathbf{P}\left(\cup_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, n]\right) = \mathbf{P}(\mathbb{R}) = 1.$$

∎

Σημειώνουμε ότι η F ικανοποιεί τη σχέση

$$\mathbf{P}((x, y]) = F(y) - F(x) \tag{4.1}$$

για κάθε x, y πραγματικούς αριθμούς με $x \leq y$ γιατί

$$\mathbf{P}\left((x, y]\right) = \mathbf{P}\left((-\infty, y] \setminus (-\infty, x]\right) = \mathbf{P}\left((-\infty, y]\right) - \mathbf{P}\left((-\infty, x]\right) = F(y) - F(x).$$

Το ίδιο ισχύει για κάθε $-\infty \leq x \leq y \leq \infty$ με τις συμβάσεις $(x, \infty] = (x, \infty)$ και $(x, x] = \emptyset$. Χρήσιμη επίσης είναι η σχέση (Άσκηση 4.3)

$$\mathbf{P}(\{x\}) = F(x) - F(x-) \tag{4.2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 4.9 (Διακριτό μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$)**.** Έστω $S \subset \mathbb{R}$ αριθμήσιμο και $(a_t)_{t \in S}$ θετικοί αριθμοί έτσι ώστε $\sum_{t \in S} a_t = 1$ (για παράδειγμα, $S = \mathbb{N}, a_k = 1/2^{k+1}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$). Ορίζουμε

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{t \in A} a_t.$$

Το $\mathbf{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας στην $\mathscr{P}(\mathbb{R})$. Για τη συνάρτηση κατανομής, F, του $\mathbf{P}$ έχουμε

$$F(x) = \sum_{t \leq x} a_t$$

και από την Άσκηση 4.3(α),

$$F(x) - F(x-) = \mathbf{P}(\{x\}) = \begin{cases} a_x & \text{αν } x \in S, \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus S. \end{cases}$$

Δηλαδή, η F είναι ασυνεχής ακριβώς στα σημεία του S.

Η σημαντικότητα της συνάρτησης κατανομής πηγάζει από το επόμενο θεώρημα, το οποίο λέει ότι η F κωδικοποιεί πλήρως ένα μέτρο. Κρατώντας την F αντί του $\mathbf{P}$, καμία πληροφορία δεν έχει χαθεί.

Θεώρημα 4.10. *Έστω* $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ *μέτρα πιθανότητας στον* $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ *με την ίδια συνάρτηση κατανομής. Τότε* $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$.

Η απόδειξη του δόθηκε αμέσως μετά το Πόρισμα 3.7.

Παρατήρηση 4.11. Αν ξέρουμε τη συνάρτηση κατανομής F ενός μέτρου πιθανότητας $\mathbf{P}$, τότε γνωρίζουμε τις τιμές του σε σύνολα που προκύπτουν από διαστήματα της μορφής $(x, y]$ με συνήθεις συνολοθεωρητικές πράξεις χρησιμοποιώντας την (4.1) και τις σχέσεις της Άσκησης 4.3.

Ποιες συναρτήσεις $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ προκύπτουν ως συναρτήσεις κατανομής μέτρων πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$; Η απάντηση δίνεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4.12. *Μια συνάρτηση* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *είναι συνάρτηση κατανομής ενός μέτρου πιθανότητας* $\mathbf{P}$ *στον* $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ *αν και μόνο αν ισχύουν τα (i)-(iii) της Πρότασης 4.8.*

Απόδειξη. Τη συνεπαγωγή $\Rightarrow$ την είδαμε στην Πρόταση 4.8. Τη συνεπαγωγή $\Leftarrow$ θα την αποδείξουμε στην Παράγραφο 7.5. ∎

Το θεώρημα αυτό μας επιτρέπει να δείξουμε την ύπαρξη μέτρων ορίζοντας μόνο τη συνάρτηση κατανομής τους. Δεν είναι απαραίτητο να ορίσουμε την τιμή τους σε κάθε υποσύνολο Borel του $\mathbb{R}$. Ένα τέτοιο παράδειγμα θα δούμε αμέσως τώρα και ένα ακόμα στην Άσκηση 7.9.

Παράδειγμα 4.13 (Μέτρο πιθανότητας από πυκνότητα)**.** Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ώστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ να ορίζεται και να ισούται με 1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ με

$$F(x) := \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για την F εφαρμόζεται το Θεώρημα 4.12 (μάλιστα, η F είναι συνεχής), άρα υπάρχει μέτρο πιθανότητας που έχει συνάρτηση κατανομής την F. Για $A \subset \mathbb{R}$ που είναι αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο διαστημάτων μπορούμε να δούμε ότι ισχύει

$$\mathbf{P}(A) = \int_A f(x)\, dx.$$

Η f λέγεται *πυκνότητα* του $\mathbf{P}$. Για συγκεκριμένες επιλογές της συνάρτησης f παίρνουμε γνωστές κατανομές. Π.χ., για $f(x) := e^{-x}\mathbf{1}_{x>0}$, παίρνουμε την εκθετική κατανομή με παράμετρο 1.

Παρατήρηση 4.14. Δεν προκύπτουν όλα τα μέτρα πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ από πυκνότητες. Στα Παραδείγματα 4.7 και 4.9 οι συναρτήσεις κατανομής των δύο μέτρων έχουν σημεία ασυνέχειας. Δες την Παράγραφο 7.4 για περισσότερα.

Ασκήσεις

4.1 Έστω $\mathbf{P}$ μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και F η συνάρτηση κατανομής του $\mathbf{P}$. Να δείξετε ότι η F μπορεί να έχει το πολύ αριθμήσιμο πλήθος αλμάτων.

4.2 Έστω $\mathbf{P}_1$ κατανομή στο $\mathbb{R}$, με πυκνότητα $f(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{x>0}$, και $\mathbf{P}_2$ κατανομή στο $\mathbb{R}$ που δίνει μάζα $\frac{1}{2}$ στα $-2, 3$. Για $\lambda \in (0, 1)$ και, θεωρώντας τον κυρτό συνδυασμό $\mathbf{P} = \lambda \mathbf{P}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{P}_2$ των $\mathbf{P}_1$ και $\mathbf{P}_2$, να υπολογιστούν (α) η $\mathbf{P}\left((0,4)\right)$,

(β) η συνάρτηση κατανομής του $\mathbf{P}$.

4.3 Έστω F συνάρτηση κατανομής ενός μέτρου $\mathbf{P}$ στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Για $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$ να δειχθεί ότι

(α) $\mathbf{P}\left(\{x\}\right) = F(x) - F(x-)$.

(β) $\mathbf{P}\left([x,y]\right) = F(y) - F(x-)$.

(γ) $\mathbf{P}\left([x,y)\right) = F(y-) - F(x-)$.

(δ) $\mathbf{P}\left((x,y)\right) = F(y-) - F(x)$.

5

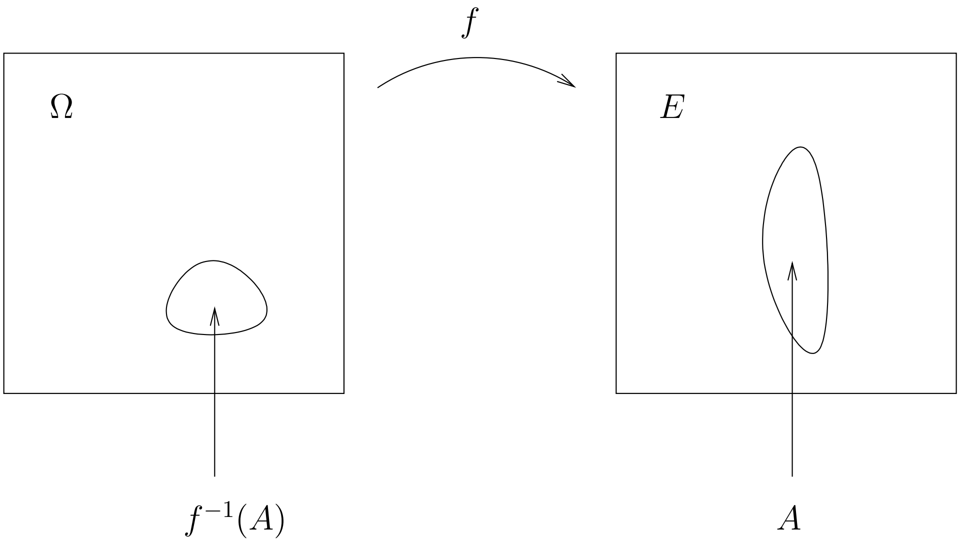
Μετρήσιμες συναρτήσεις

5.1 Μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός 5.1. Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$, $(E, \mathcal{E})$ μετρήσιμοι χώροι. Μια συνάρτηση $f : \Omega \to E$ λέγεται $\mathcal{F}/\mathcal{E}$-**μετρήσιμη** αν

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{F} \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{E}. \tag{5.1}$$

Συμβολίζουμε το σύνολο $\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{E}\}$ με $f^{-1}(\mathcal{E})$. Οπότε η απαίτηση του ορισμού της μετρησιμότητας γράφεται $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$.



Σχήμα 5.1: Μια f όπως στον Ορισμό 5.1

Ορολογία: 1. Μια $\mathcal{F}/\mathcal{E}$-μετρήσιμη συνάρτηση τη λέμε $\mathcal{F}$-μετρήσιμη ή $\mathcal{E}$-μετρήσιμη ή απλώς μετρήσιμη αν είναι σαφές ποια είναι η σ-άλγεβρα που δεν αναφέρουμε.

2. Όταν ο χώρος Ω ή/και ο E είναι μετρικός χώρος (π.χ. υποσύνολο ενός από τους χώρους $\mathbb{R}^d$, $[-\infty, \infty]$, $[0, \infty]$, $\mathbb{C}$), εκτός αν αναφέρεται κάτι διαφορετικό, θα θεωρείται ότι η σ-άλγεβρα στον Ω και στον E είναι η σ-άλγεβρα των υποσυνόλων Borel του Ω και του E. Και τότε, π.χ., $\mathcal{F}$-μετρήσιμη σημαίνει $\mathcal{F}/\mathscr{B}(E)$ μετρήσιμη. Στην περίπτωση που ο Ω (αντίστοιχα, ο E) είναι μετρικός χώρος και η $\mathcal{E}$ (αντίστοιχα, η $\mathcal{F}$) εννοείται, ονομάζουμε Borel-μετρήσιμη κάθε f η οποία είναι $\mathscr{B}(\Omega)/\mathcal{E}$-μετρήσιμη (αντίστοιχα $\mathcal{F}/\mathscr{B}(E)$-μετρήσιμη).

3. Σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, μια μετρήσιμη συνάρτηση λέγεται **τυχαία μεταβλητή**. Συμβολίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές με κεφαλαία γράμματα $X, Y, ...$, σε αντίθεση με τη σύμβαση που υιοθετούμε στον απειροστικό λογισμό και την πραγματική ανάλυση.

Για το σύνολο $f^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A\}$ συνήθως χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\{f \in A\}$. Όμοια, αν $E = \mathbb{R}$, το $\{f < a\}$ συμβολίζει το σύνολο $\{\omega \in \Omega : f(\omega) < a\}$ και $\{f^2 < f + 1\}$ το $\{\omega \in \Omega : f^2(\omega) < f(\omega) + 1\}$.

Παρατήρηση 5.2. Γιατί απαιτούμε από μια συνάρτηση $X : \Omega \to E$ να έχει την ιδιότητα (5.1); Γιατί, όταν ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στην $\mathcal{F}$, θέλουμε να μπορούμε να εξετάζουμε πιθανότητες της μορφής $\mathbf{P}(X \in A)$, όπου $A \in \mathcal{E}$, δηλαδή $\mathbf{P}\left(X^{-1}(A)\right)$. Πρέπει επομένως το $X^{-1}(A)$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της $\mathbf{P}$, το οποίο είναι η $\mathcal{F}$.

Πρόταση 5.3. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}), (E, \mathcal{E})$ μετρήσιμοι χώροι, $f : \Omega \to E$ συνάρτηση, και $C \subset \mathcal{E}$ οικογένεια ώστε $\sigma(C) = \mathcal{E}$. Τότε $f^{-1}(C) \subset \mathcal{F}$ αν και μόνο αν $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$.*

Βέβαια ο έλεγχος $f^{-1}(C) \subset \mathcal{F}$ είναι ευκολότερος από τον $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$. Έτσι η πρόταση κάνει ευκολότερο τον έλεγχο της μετρησιμότητας μιας συνάρτησης.

Απόδειξη. $\Rightarrow$ Έστω $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{E} : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$. Τότε η $C \subset \mathcal{B}$ και εύκολα βλέπουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα (Άσκηση 1.7). Συνεπώς, $\sigma(C) \subset \mathcal{B}$. Όμως $\sigma(C) = \mathcal{E}$ και $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$. Άρα $\mathcal{B} = \mathcal{E}$.

$\Leftarrow$ Προφανές αφού $C \subset \mathcal{E}$. ∎

Ακολουθούν δύο συνέπειες της πρότασης.

Πόρισμα 5.4. *Έστω $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ συνάρτηση. Τότε η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν $f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F}$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Αν $C = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$, γνωρίζουμε ότι $\sigma(C) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Άρα, από την Πρόταση 5.3 προκύπτει το ζητούμενο. ∎

Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει αν αντικαταστήσουμε τα διαστήματα $(-\infty, a]$ με $(-\infty, a)$ ή γενικά με οποιαδήποτε οικογένεια διαστημάτων που παράγουν την $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Επίσης, αντίστοιχο συμπέρασμα προκύπτει αν έχουμε μετρήσιμη συνάρτηση με τιμές στο $[-\infty, \infty]$.

Υπάρχουν μετρήσιμες συναρτήσεις; Είναι πολλές; Καταρχάς, θα δούμε αμέσως ότι όλες οι συνεχείς συναρτήσεις είναι μετρήσιμες. Υπενθυμίζουμε ότι, αν (Ω, d_1), (E, d_2) μετρικοί χώροι, μια συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι συνεχής αν για κάθε $V \subset E$ ανοιχτό έχουμε ότι $f^{-1}(V)$ είναι ανοιχτό. Δηλαδή αν η αντίστροφη εικόνα κάθε ανοιχτού συνόλου είναι ανοιχτό σύνολο.

Πόρισμα 5.5. *Έστω (Ω, d_1), (E, d_2) μετρικοί χώροι και $f : \Omega \to E$ συνεχής συνάρτηση. Αν $\mathcal{F} = \mathscr{B}(\Omega)$ και $\mathcal{E} = \mathscr{B}(E)$, τότε η f είναι $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Για την οικογένεια $\mathcal{S}$ των ανοιχτών συνόλων του E έχουμε ότι $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{E}$ και όλα τα στοιχεία του $f^{-1}(\mathcal{S})$ είναι ανοιχτά σύνολα (αφού η f είναι συνεχής) και άρα $f^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{F}$. Το συμπέρασμα έπεται από την Πρόταση 5.3. ∎

Παραθέτουμε χωρίς απόδειξη τις βασικές ιδιότητες κλειστότητας του συνόλου των μετρησίμων συναρτήσεων. Εν ολίγοις, αν ξεκινήσει κανείς με μετρήσιμες συναρτήσεις και τις συνδυάσει με κάποιον «φυσιολογικό» τρόπο, προκύπτουν πάλι μετρήσιμες συναρτήσεις.

Πρόταση 5.6. *Έστω $f, g : \Omega \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις στον μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$ και $a \in \mathbb{R}$. Τότε μετρήσιμες είναι επίσης οι συναρτήσεις*

$$af, |f|, f+g, fg, f/g, \min\{f, g\}, \max\{f, g\}, f^+, f^-,$$

όπου καθεμία ορίζεται έτσι ώστε να είναι σταθερή και ίση με μία αυθαίρετη πεπερασμένη σταθερά στο σύνολο των σημείων απροσδιοριστίας $(\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0/0)$.

Πρόταση 5.7. *Έστω $(f_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στον μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$ και με τιμές στο $[-\infty, \infty]$. Τότε:*

(i) Οι συναρτήσεις

$$\inf_{n \geq 1} f_n, \sup_{n \geq 1} f_n, \varliminf_{n \to \infty} f_n, \varlimsup_{n \to \infty} f_n,$$

είναι επίσης μετρήσιμες.

(ii) Αν η $(f_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει σημειακά σε μια συνάρτηση f, τότε η $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

Αντιπαραβάλετε την προηγούμενη πρόταση με το γεγονός ότι γενικά το σημειακό όριο συνεχών συναρτήσεων δεν είναι συνεχής συνάρτηση. Η μετρησιμότητα είναι πιο ανθεκτική σε μετασχηματισμούς.

Πρόταση 5.8. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$, $(E, \mathcal{E})$, $(G, \mathcal{G})$ μετρήσιμοι χώροι και $f : \Omega \to E$, $g : E \to G$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε η $g \circ f : \Omega \to G$ είναι $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{G}$. Τότε, $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$. Όμως $g^{-1}(A) \in \mathcal{E}$, άρα $f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{F}$, από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο. ■

Πρόταση 5.9. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος. Τότε:*

(i) Για $A \subset \Omega$, η $\mathbf{1}_A$ είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν $A \in \mathcal{F}$.

(ii) Αν $f_1, f_2, \ldots, f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ είναι $\mathcal{F}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$ μετρήσιμες συναρτήσεις και $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{B}(\mathbb{R})$ μετρήσιμη, τότε η $g(f_1, f_2, \ldots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο το (i). Αν $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, έχουμε

$$(\mathbf{1}_A)^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & \text{αν} \quad 0, 1 \notin B, \\ \Omega \setminus A & \text{αν} \quad 0 \in B, 1 \notin B, \\ A & \text{αν} \quad 0 \notin B, 1 \in B, \\ \Omega & \text{αν} \quad 0, 1 \in B. \end{cases} \tag{5.2}$$

Αν η $\mathbf{1}_A$ είναι μετρήσιμη, τότε για $B = \{1\}$, έχουμε $(\mathbf{1}_A)^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, δηλαδή $A \in \mathcal{F}$. Αντίστροφα, αν $A \in \mathcal{F}$, τότε από την (5.2) έχουμε $(\mathbf{1}_A)^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ για κάθε $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. ■

Παράδειγμα 5.10. Έστω $(f_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων σε μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$ με τιμές στο $\mathbb{R}$. Θέτουμε $T := \min\{k \in \mathbb{N}^+ : f_k > 0\}$ με τη σύμβαση $\min \emptyset = \infty$. Τότε η T είναι μετρήσιμη γιατί για $k \in \mathbb{N}^+$ ισχύει

$$\{T \leq k\} = \{f_1 > 0\} \cup \{f_2 > 0\} \cup \cdots \cup \{f_k > 0\} \in \mathcal{F}.$$

Για k μη θετικό ακέραιο έχουμε $\{T \leq k\} = \emptyset$, ενώ για κάθε πραγματικό x έχουμε $\{T \leq x\} = \{T \leq [x]\}$.

Επίσης, για οποιοδήποτε $n \geq 1$, η $\cos(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)$ είναι μετρήσιμη λόγω του (ii) της προηγούμενης πρότασης και του ότι η $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \cos(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ είναι συνεχής.

Ορισμός 5.11. Μια συνάρτηση $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ λέγεται **απλή** αν η εικόνα της είναι πεπερασμένο σύνολο.

Αν οι διαφορετικές τιμές που παίρνει μια απλή συνάρτηση f είναι $a_1, a_2, \ldots, a_n$ και θέσουμε $A_i := f^{-1}(\{a_i\})$, τότε η $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ είναι διαμέριση του Ω, και η f γράφεται

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}. \tag{5.3}$$

Προφανώς μια απλή f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν τα σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι μετρήσιμα.

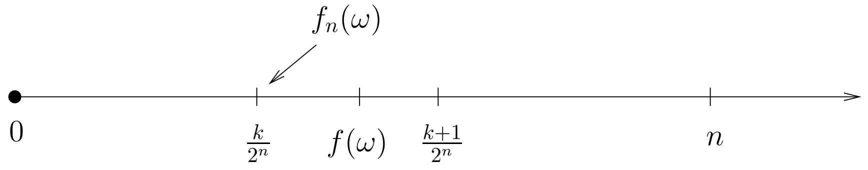
Μια απλή συνάρτηση δεν γράφεται μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός από δείκτριες συναρτήσεις. Αν τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ δεν είναι απαραίτητα ξένα, τότε η σχέση (5.3) ορίζει πάλι μια απλή συνάρτηση. Αν όμως ζητήσουμε τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ να είναι διαμέριση του Ω (δηλαδή μη κενά, ξένα ανά δύο, με ένωση το Ω) και οι αριθμοί $a_1, \ldots, a_n$ διαφορετικοί μεταξύ τους, τότε η γραφή (5.3) είναι μοναδική (με μόνη ελευθερία στη σειρά με την οποία αριθμούμε τα σύνολα και τους αριθμούς) και ονομάζεται *κανονική μορφή* της f.

Πρόταση 5.12. *Έστω $f : \Omega \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $(f_n)_{n\geq 1}$ μη αρνητικών, απλών, μετρησίμων συναρτήσεων με πεπερασμένες τιμές ώστε $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ κατά σημείο.*

Το ότι η ακολουθία $(f_n)_{n\geq 1}$ είναι αύξουσα σημαίνει ότι $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και $n \geq 1$.

Απόδειξη. Για $n \geq 1$, θέτουμε

$$f_n(\omega) := \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{αν } f(\omega) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \text{ με } k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq n2^n - 1, \\ n & \text{αν } f(\omega) \geq n. \end{cases}$$



Σχήμα 5.2: Ο ορισμός της προσέγγισης f_n. Όλες οι τιμές πάνω από n απεικονίζονται στο n. Στο διάστημα $[0, n]$ η προσέγγιση γίνεται με λάθος το πολύ $1/2^n$.

Κάθε f_n είναι μη αρνητική, μετρήσιμη, και απλή αφού το σύνολο τιμών της είναι πεπερασμένο, και παίρνει την τιμή $k/2^n$, όπου $0 \leq k \leq n2^n - 1$, στο μετρήσιμο σύνολο $f^{-1}([k2^{-n}, (k+1)2^{-n}))$ και την τιμή n στο $f^{-1}([n, \infty])$.
Για το $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Αν $f(\omega) < \infty$, παίρνουμε φυσικό $n_0 > f(\omega)$. Για $n \geq n_0$ έχουμε $f_n(\omega) \leq f(\omega) \leq f_n(\omega) + 2^{-n}$, άρα $|f_n(\omega) - f(\omega)| < 2^{-n}$ και $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$. Αν $f(\omega) = \infty$, τότε $f_n(\omega) = n \to \infty$ για $n \to \infty$.

Για το ότι η ακολουθία είναι αύξουσα, παρατηρούμε τα εξής:

• Αν $f(\omega) = \infty$, τότε $f_n(\omega) = n$, που είναι αύξουσα ακολουθία.

• Αν $f(\omega) < \infty$, έστω $n \geq 1$, θα δείξουμε ότι $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$. Έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

(α) $f(\omega) < n$.

(β) $f(\omega) \in [n, n+1)$.

(γ) $f(\omega) \geq n + 1$.

Για το (α) παρατηρούμε ότι το $f_n(\omega)$ θα ισούται με το αριστερό άκρο του διαστήματος $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ στο οποίο ανήκει το $f(\omega)$. Για τον καθορισμό του $f_{n+1}(\omega)$, χωρίζουμε το $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ σε δύο μισά, τα

$$\left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right), \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right)$$

και το $f_{n+1}(\omega)$ ισούται με το αριστερό άκρο του μισού στο οποίο ανήκει το $f(\omega)$. Άρα είναι τουλάχιστον $k2^{-n} = f_n(\omega)$. Οι περιπτώσεις (β) και (γ) αφήνονται ως άσκηση. ■

5.2 Σ-άλγεβρα παραγόμενη από συναρτήσεις

Ορισμός 5.13. Έστω Ω σύνολο. Για μια συνάρτηση $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$, σ-άλγεβρα παραγόμενη από την f ονομάζουμε το σύνολο

$$\sigma(f) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathscr{B}([-\infty, \infty])\} = f^{-1}(\mathscr{B}([-\infty, \infty]))$$

Το ότι αυτό το σύνολο είναι σ-άλγεβρα το έχουμε δει στην Άσκηση 1.7 (β). Αυτή είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο Ω η οποία κάνει την f μετρήσιμη στον $(\Omega, \mathcal{A})$. Βέβαια, αν η f είναι μετρήσιμη στον $(\Omega, \mathcal{F})$, τότε θα έχουμε $\sigma(f) \subset \mathcal{F}$.

Παράδειγμα 5.14. Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = -\mathbf{1}_{x<0} + \mathbf{1}_{x\geq 0}$ παράγει τη σ-άλγεβρα

$$\{\mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, \infty), \emptyset\}$$

αφού παίρνει μόνο τις τιμές $-1, 1$ και οι αντίστροφες εικόνες αυτών των τιμών είναι τα διαστήματα $(-\infty, 0), [0, \infty)$ αντίστοιχα. Οι λεπτομέρειες της απόδειξης αφήνονται ως άσκηση.

Παράδειγμα 5.15. Η συνάρτηση ακέραιο μέρος $f(x) = [x]$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ παράγει τη σ-άλγεβρα $\sigma(f) = \sigma(C)$ όπου $C := \{[k, k + 1) : k \in \mathbb{Z}\}$ [Ο ισχυρισμός αυτός αφήνεται ως άσκηση. Παρατηρούμε ότι η f παίρνει τιμές στο $\mathbb{Z}$ και $f^{-1}(\{k\}) = [k, k + 1)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$]. Η C είναι μια διαμέριση του $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5.16. Παίρνουμε $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^+}$. Μπορούμε να δούμε αυτό το σύνολο ως τον δειγματικό χώρο για μια ακολουθία ρίψεων ενός νομίσματος. Το -1 παριστά το αποτέλεσμα «Κορώνα» και το 1 το αποτέλεσμα «Γράμματα». Για $n \in \mathbb{N}^+$, ορίζουμε τη συνάρτηση $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ με $X_n(\omega) = \omega_n$, όπου $\omega = (\omega_n)_{n\geq 1} \in \Omega$. Δηλαδή η X_n είναι η προβολή στη n-οστή συντεταγμένη. Η X_n παίρνει μόνο δύο τιμές. Οπότε η $\sigma(X_n)$ είναι ακριβώς το σύνολο $\{\emptyset, \Omega, A_{n,-1}, A_{n,1}\}$, με

$$\begin{aligned} A_{n,-1} &:= X_n^{-1}(\{-1\}) = \{\omega \in \Omega : \omega_n = -1\} = \{-1, 1\}^{n-1} \times \{-1\} \times \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^+ \setminus [n]}, \\ A_{n,1} &:= X_n^{-1}(\{1\}) = \{\omega \in \Omega : \omega_n = 1\} = \{-1, 1\}^{n-1} \times \{1\} \times \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^+ \setminus [n]}, \end{aligned}$$

όπου $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$.

Ορισμός 5.17. Έστω Ω σύνολο. Αν $\{f_i : i \in I\}$ είναι οικογένεια συναρτήσεων στο Ω με τιμές στο $[-\infty, \infty]$, σ-άλγεβρα παραγόμενη από τις συναρτήσεις $\{f_i : i \in I\}$ ονομάζουμε το σύνολο

$$\sigma(\{f_i : i \in I\}) := \sigma\Big(\cup_{i\in I} \sigma(f_i)\Big). \tag{5.4}$$

Το σύνολο στο δεξί μέλος έχει οριστεί στην Παράγραφο 1.2. Αυτή είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που κάνει όλες τις $\{f_i : i \in I\}$ μετρήσιμες. Αν $I = \{1, 2, \dots, n\}$, τη συμβολίζουμε με $\sigma(f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Παράδειγμα 5.18. Έστω Ω σύνολο, $n \geq 2$, και $f_1, f_2, \dots, f_n : \Omega \to \mathbb{R}$. Τότε

$$\sigma(f_1 + f_2 + \cdots + f_n) \subset \sigma(f_1, f_2, \dots, f_n).$$

Πράγματι, οι συναρτήσεις $f_1, f_2, \dots, f_n$ είναι $\sigma(f_1, f_2, \dots, f_n)$-μετρήσιμες και από την Πρόταση 5.6, είναι $\sigma(f_1, f_2, \dots, f_n)$-μετρήσιμη και η συνάρτηση $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$. Όμως η $\sigma(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που κάνει την $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ μετρήσιμη. Ο ισχυρισμός έπεται.

Παράδειγμα 5.19. Συνεχίζουμε από το Παράδειγμα 5.16. Θα περιγράψουμε τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_n := \sigma(\{X_1, X_2, \dots, X_n\})$. Για δεδομένη ακολουθία $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \{-1, 1\}^n$ θεωρούμε το σύνολο

$$\begin{aligned} A_s : &= \{(s_1, s_2, \dots, s_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots) : x_i \in \{-1, 1\} \text{ για κάθε } i \geq n + 1\} \\ &= X_1^{-1}(\{s_1\}) \cap X_2^{-1}(\{s_2\}) \cap \cdots \cap X_n^{-1}(\{s_n\}). \end{aligned}$$

Δηλαδη το A_s περιέχει όλες τις άπειρες ακολουθίες από -1 και 1 που το αρχικό τους τμήμα είναι το s και μετά είναι ελεύθερες να έχουν ότι θέλουν. Για μια ακολουθία που ανήκει στο A_s, η συμπεριφορά της ως τον χρόνο n είναι γνωστή.

Ισχυρισμος: Η $\mathcal{F}_n$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από τη διαμέριση $C := \{A_s : s \in \{-1, 1\}^n\}$ του Ω.

Από τον ορισμό της, η $\mathcal{F}_n$ πρέπει να περιέχει τα $X_i^{-1}(\{s_i\})$ για $i = 1, 2, \dots, n$. Άρα, ως σ-άλγεβρα, περιέχει και το A_s, που είναι πεπερασμένη τομή των $X_i^{-1}(\{s_i\})$. Επομένως, $\sigma(C) \subset \mathcal{F}_n$. Από την άλλη, κάθε X_i με $1 \leq i \leq n$ είναι μετρήσιμη ως προς τη $\sigma(C)$. Για παράδειγμα,

$$X_i^{-1}(\{1\}) = \cup_{s\in\{-1,1\}^n : s_i = 1} A_s$$

είναι πεπερασμένη ένωση στοιχείων της $\sigma(C)$, άρα στοιχείο της. Από την ελαχιστότητα της $\mathcal{F}_n$, έπεται ότι $\mathcal{F}_n \subset \sigma(C)$ και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Ασκήσεις

5.1 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας. Να δείξετε ότι για μια $X : \Omega \to \mathbb{R}$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(α) $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ για κάθε $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.
(β) $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ για κάθε $A \subset \mathbb{R}$ ανοιχτό σύνολο.
(γ) $X^{-1}([a, b]) \in \mathcal{F}$ για κάθε $a < b$ πραγματικούς αριθμούς.

5.2 Έστω $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ τυχαία μεταβλητή. Να δείξετε ότι $\{X = -\infty\}, \{X = \infty\} \in \mathcal{F}$.

5.3 (Μετρήσιμες συναρτήσεις σε σ-άλγεβρα παραγόμενη από αριθμήσιμη διαμέριση) Έστω $C := \{A_i : i \in I\}$ μια αριθμήσιμη διαμέριση ενός συνόλου Ω, και $\mathcal{F} := \sigma(C)$ (Παράδειγμα 1.1). Να δειχθεί ότι μια συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{F}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$ μετρήσιμη αν και μόνο αν είναι σταθερή σε κάθε σύνολο της διαμέρισης.

5.4 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι τα παρακάτω σύνολα είναι στοιχεία της $\mathcal{F}$.
(α) $\{\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty\}, \{\lim_{n\to\infty} X_n = \infty\}$.
(β) $\{\lim_{n\to\infty} X_n$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός$\}$.

5.5 Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μονότονη συνάρτηση. Να δειχθεί ότι είναι μετρήσιμη.

5.6 Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος. Αν $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες, να δείξετε ότι το $\{f = g\}$ είναι μετρήσιμο.

5.7 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στο $\mathbb{R}$. Θέτουμε $T := \min\{n \geq 1 : X_n > 2\}$ με τη σύμβαση $\min \emptyset = \infty$.
(α) Να δειχθεί ότι $\{T = \infty\} \in \mathcal{F}$.
(β) Να δειχθεί ότι η T είναι τυχαία μεταβλητή.

5.8 Έστω $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε δείκτες $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ όπου $1 \leq k < n$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $Y := (X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k})$ είναι τυχαία μεταβλητή.
[Υπόδειξη: Ισχύει $Y = p(X)$, όπου p η προβολή $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ που απεικονίζει το $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ στο $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})$.]

5.9 Να δειχθεί ότι πράγματι το δεξί μέλος της (5.4) είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ που κάνει όλες τις $\{f_i : i \in I\}$ $\mathcal{A}$-μετρήσιμες.

5.10 Σε αυτή την άσκηση θεωρούμε το πεδίο τιμών της $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δηλαδή το $\mathbb{R}$, εφοδιασμένο με τη σ-αλγεβρα των συνόλων Borel. Περιγράψτε τη $\sigma(f)$ στην περίπτωση που
(α) $f(x) = x^3$,
(β) $f(x) = x^2$.

5.11 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$. Αν $\mathbf{P}(X > 1) > 0$, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\mathbf{P}(X > 1 + \varepsilon) > 0$.

6

Ολοκλήρωση

6.1 Ολοκλήρωμα Lebesgue. Ορισμός

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα οποιασδήποτε $\mathcal{A}/\mathcal{B}([-\infty, \infty])$ μετρήσιμης συνάρτησης $f : X \to [-\infty, \infty]$. Αυτό θα το κάνουμε σε τρία βήματα. Πρώτα για $f \geq 0$ απλή μετρήσιμη, έπειτα για $f \geq 0$ μετρήσιμη, και τέλος για f μετρήσιμη με τιμές στο $[-\infty, \infty]$.

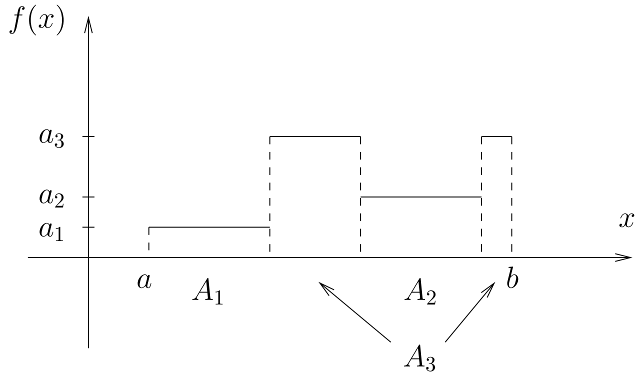
Βήμα 1: $f \geq 0$ απλή μετρήσιμη.

Ορισμός 6.1. Έστω $f : X \to [0, \infty]$ απλή μετρήσιμη συνάρτηση με κανονική μορφή $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}$. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesque της f ως προς το μέτρο μ ως εξής:

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i), \tag{6.1}$$

με τη σύμβαση $0 \cdot \infty = 0$.
Το ολοκλήρωμα είναι στοιχείο του $[0, \infty]$.

Είναι φυσιολογικός αυτός ο ορισμός; Ας τον ελέγξουμε στην περίπτωση που το X είναι ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$ του $\mathbb{R}$ και μ είναι το μέτρο Lebesgue λ στο $[a, b]$.



Σχήμα 6.1: Ολοκλήρωμα απλής συνάρτησης.

Η συνάρτηση f στο Σχήμα 6.1 είναι απλή και μάλιστα τα σύνολα στα οποία παίρνει διαφορετικές τιμές είναι το καθένα διάστημα ή ένωση διαστημάτων. Με βάση τον προηγούμενο ορισμό, το ολοκλήρωμα της είναι

$$a_1 \lambda(A_1) + a_2 \lambda(A_2) + a_3 \lambda(A_3).$$

Αυτό είναι το εμβαδόν κάτω από το γράφημα της f. Όπως στο ολοκλήρωμα Riemann, έτσι και εδώ, τα γινόμενα $a_i \lambda(A_i)$ δίνουν εμβαδόν ορθογωνίου: ύψος επί βάση. Μόνο που εδώ η βάση ενδέχεται να μην είναι διάστημα. Σε κάθε περίπτωση όμως, το μήκος της βάσης μετριέται σωστά από το μέτρο Lebesgue.

Βήμα 2: $f \geq 0$ μετρήσιμη.

Ορισμός 6.2. Έστω $f : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Το ολοκλήρωμα Lebesgue της f ως προς το μέτρο μ ορίζεται ως εξής:

$$\int f \mathrm{d}\mu := \sup\Big\{ \int s \,\mathrm{d}\mu : s \text{ απλή, μετρήσιμη με } 0 \leq s \leq f \Big\}.$$

Παρατήρηση 6.3. Ο Ορισμός 6.2, στην περίπτωση που η f είναι απλή, συμφωνεί με τον Ορισμό 6.1.

Βήμα 3: $f : X \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη.

Ορισμός 6.4. Έστω $f : X \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Το ολοκλήρωμα Lebesgue της f ως προς το μέτρο μ ορίζεται ως εξής:

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu$$

εφόσον στο δεξί μέλος της ισότητας δεν εμφανίζεται απροσδιοριστία της μορφής $\infty - \infty$. Στην περίπτωση που το ολοκλήρωμα είναι πραγματικός αριθμός, λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **(Lebesgue) ολοκληρώσιμη**.

Για το $\int f \, d\mu$ χρησιμοποιούμε επίσης τον συμβολισμό $\int f(x) \, d\mu(x)$.

Παρατήρηση 6.5. (i) Τα $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu$ και $\int f^- \,\mathrm{d}\mu$ που εμφανίζονται στον Ορισμό 6.4 ορίζονται από τον Ορισμό 6.2.

(ii) Το ολοκλήρωμα μιας μετρήσιμης συνάρτησης, όταν αυτό ορίζεται, είναι στοιχείο του $[-\infty, \infty]$.

(iii) Μια μετρήσιμη συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν και τα δύο ολοκληρώματα $\int f^- \,\mathrm{d}\mu$, $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu$ είναι πεπερασμένα.

(iv) Για μια $f \geq 0$ μετρήσιμη συνάρτηση, θεωρούμε την ακολουθία $(f_n)_{n \geq 1}$ των απλών συναρτήσεων που ορίστηκαν στην Πρόταση 5.12. Αποδεικνύεται ότι

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Δηλαδή το ολοκλήρωμα είναι το όριο των ολοκληρωμάτων αυτών των απλών συναρτήσεων. Αυτό είναι αντίστοιχο της προσέγγισης του ολοκληρώματος Riemann μιας Riemann-ολοκληρώσιμης συνάρτησης από τα ολοκληρώματα κλιμακωτών συναρτήσεων.

Παρατήρηση 6.6. Όποτε μια f γράφεται ως $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$ με τα A_i μετρήσιμα και τα $a_i \geq 0$, τότε πάλι ισχύει ο τύπος (6.1). Δηλαδή δεν είναι απαραίτητο η γραφή $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$ να αντιστοιχεί στην κανονική μορφή της f. Ενδεχομένως κάποια από τα $\{A_i : 1 \leq i \leq n\}$ να τέμνονται και κάποια από τα $\{a_i : 1 \leq i \leq n\}$ να είναι ίσα. Το ίδιο ισχύει και όταν $n = \infty$, δηλαδή $f = \sum_{i=1}^\infty a_i \mathbf{1}_{A_i}$ με τα a_i, A_i όπως πριν. Και οι δύο ισχυρισμοί έπονται από το Πόρισμα 6.30(i) πιο κάτω.

6.2 Ειδικές περιπτώσεις

Θα δούμε εδώ τις περιπτώσεις που το μέτρο μ της προηγούμενης παραγράφου είναι το αριθμητικό μέτρο στο $\mathbb{N}$ ή το μέτρο Lebesgue σε ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$.

Αριθμητικο μετρο: Αν πάρουμε μ το αριθμητικό μέτρο στον $X = \mathbb{N}$ (Παράδειγμα 2.2) και $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$ συνάρτηση, τότε

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n). \tag{6.2}$$

Αυτό ισχύει λόγω της Παρατήρησης 6.6 αφού η f γράφεται ως $f = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\mathbf{1}_{\{n\}}$ και κάθε μονοσύνολο $\{n\}$ έχει αριθμητικό μέτρο 1.

Έπειτα είναι απλό να δούμε ότι η (6.2) ισχύει για κάθε $f : \mathbb{N} \to [-\infty, \infty]$ με $\sum_{n=0}^{\infty} |f(n)| < \infty$. Άρα το άθροισμα θετικής ή απολύτως συγκλίνουσας σειράς είναι ειδική περίπτωση του ολοκληρώματος Lebesgue. Όμως αθροίσματα σειρών που συγκλίνουν υπό συνθήκη, όπως η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, δεν καλύπτονται (το ολοκλήρωμα Lebesgue της $f(n) := (-1)^n/n$ ως προς το αριθμητικό μέτρο δεν ορίζεται αφού $\int f^- \, d\mu = \int f^+ \, d\mu = \infty$). Το ολοκλήρωμα Lebesgue δεν προσθέτει ποσότητες με κάποια «σειρά» αλλά μαζικά.

Μετρο Lebesgue σε φραγμενο διαστημα Έστω $a < b$ πραγματικοί αριθμοί. Το ολοκλήρωμα Lebesgue στον χώρο μέτρου $(\mathbb{R}, \mathscr{B}([a, b]), \lambda)$ μιας Borel-μετρήσιμης συνάρτησης $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ το συμβολίζουμε συνήθως με $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ και στην περίπτωση που η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη ταυτίζεται με το ολοκλήρωμα Riemann [δες Stein and Shakarchi (2005), Κεφάλαιο 2, Θεώρημα 1.5].

Μετρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$: Το ολοκλήρωμα Lebesgue στον χώρο μέτρου $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ μιας Borel-μετρήσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ το συμβολίζουμε συνήθως με $\int_{\mathbb{R}} f(x) \, \mathrm{d}x$. Συμπίπτει με το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$ αν η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $\mathbb{R}$ και είναι θετική ή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx$ είναι πεπερασμένο.

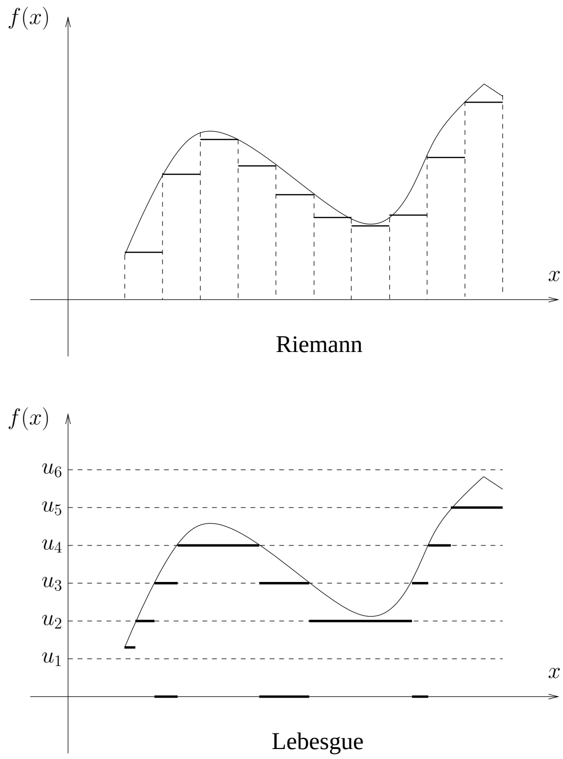
6.3 Η οπτική του ολοκληρώματος Lebesgue

Είναι ενδιαφέρον να συγκρίνουμε τις οριακές διαδικασίες που δίνουν τα ολοκληρώματα Riemann και Lebesgue σε μια περίπτωση συνάρτησης/χώρου που και τα δύο ολοκληρώματα έχουν νόημα [Ως οριακή διαδικασία για το Lebesgue παίρνουμε αυτήν που περιγράφεται στην Παρατήρηση 6.5 (iv)]. Πιο συγκεκριμένα, παίρνουμε $a < b$ πραγματικούς αριθμούς και μια $f : [a, b] \to [0, \infty)$ φραγμένη, Riemann-ολοκληρώσιμη, και μετρήσιμη. Το φραγμένη είναι προαπαιτούμενο για το ολοκλήρωμα Riemann, το μετρήσιμη για το Lebesgue. Και επειδή είναι μη αρνητική, το ολοκλήρωμα Lebesgue ορίζεται επίσης.

Για το Riemann, διαμερίζουμε το *πεδίο ορισμού* της f σε τμήματα ίσου μήκους (Δες σχήμα 6.2). Σε καθένα από αυτά, η f έχει μια δεδομένη ελάχιστη τιμή. Πολλαπλασιάζουμε αυτή την ελάχιστη τιμή με το μήκος του τμήματος για να βρούμε τη συνεισφορά του τμήματος στην προσέγγιση του ολοκληρώματος. Έπειτα προσθέτουμε τις συνεισφορές όλων των τμημάτων. Καθώς το μήκος των τμημάτων τείνει στο μηδέν, παίρνουμε την τιμή του ολοκληρώματος Riemann της f.

Για το Lebesgue, διαμερίζουμε το *σύνολο τιμών* της f σε τμήματα ίσου μήκους. Αυτή η διαμέριση δίνει μια απλή συνάρτηση (το γράφημά της είναι τα χοντρά ευθύγραμμα τμήματα στην κάτω γραφική παράσταση στο Σχήμα 6.2 εκτός από εκείνα που είναι στον άξονα), που είναι μία από τις f_n της Πρότασης 5.12. Ας πάρουμε ένα τμήμα, π.χ. το $[u_3, u_4)$. Η συνεισφορά του στην προσέγγιση $\int f_n d\lambda$ του ολοκληρώματος είναι το εμβαδόν $u_3 \lambda\left(f^{-1}([u_3, u_4))\right)$ του «παραλληλογράμμου» με ύψος u_3 και βάση $f^{-1}([u_3, u_4))$ [σχέση (6.1)]. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το $f^{-1}([u_3, u_4))$ είναι ένωση τριών διαστημάτων, σημειωμένων με χοντρή γραμμή στον x-άξονα. Το μήκος αυτής της βάσης είναι το μέτρο Lebesgue του συνόλου $f^{-1}([u_3, u_4))$. Πάλι προσθέτουμε τις συνεισφορές όλων των τμημάτων και, καθώς το μήκος τους τείνει στο μηδέν ($n \to \infty$), παίρνουμε την τιμή του ολοκληρώματος Lebesgue της f.

Το μη τετριμμένο της διαδικασίας για το ολοκλήρωμα Lebesgue είναι ότι πρέπει να είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το μήκος του συνόλου $f^{-1}([u_{k-1}, u_k))$. Στο πιο πάνω παράδειγμα, έτυχε αυτό να είναι ένωση τριών διαστημάτων και είναι προφανές ποιο πρέπει να ονομάσουμε μήκος του. Θα μπορούσε όμως να είναι ένα πολύ περίεργο σύνολο, ειδικά όταν η f δεν είναι συνεχής. Η έννοια μήκους για σύνολα Borel δίνεται ακριβώς από το μέτρο Lebesgue τους, του οποίου η κατασκευή δεν είναι απλή και γι' αυτό ακριβώς την παραλείψαμε σε αυτές τις σημειώσεις.



Σχήμα 6.2: Η διαφορά οπτικής των ολοκληρωμάτων Riemann και Lebesgue.

Κλείνοντας αυτή τη σύγκριση, να παρατηρήσουμε το εξής πολύ σημαντικό. Για τον ορισμό του ολοκληρώματος Lebesgue, το πεδίο ορισμού, X, της συνάρτησης $f : X \to \mathbb{R}$ που θέλουμε να ολοκληρώσουμε αρκεί να είναι εφοδιασμένο με μία σ-άλγεβρα και ένα μέτρο. Δεν είναι αναγκαίο να έχει κάποια άλλη δομή (μετρικού ή διανυσματικού χώρου) όπως είναι οι $\mathbb{R}^d$ στους οποίους έχουμε ορίσει το ολοκλήρωμα Riemann. Για το ολοκλήρωμα Riemann χρησιμοποιούμε την επιπλέον δομή με κρίσιμο τρόπο.

6.4 Ιδιότητες του ολοκληρώματος

Πρόταση 6.7. *Έστω $f, g : X \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις των οποίων το ολοκλήρωμα ορίζεται. Τότε:*

(i) $\displaystyle\int af \,\mathrm{d}\mu = a \int f \,\mathrm{d}\mu$, *για* $a \in \mathbb{R}$.

(ii) $\displaystyle\int (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu + \int g\,\mathrm{d}\mu$.

(iii) Αν $f \le g$, *τότε* $\displaystyle\int f\,\mathrm{d}\mu \le \int g\,\mathrm{d}\mu$.

(iv) $\displaystyle\left|\int f\,\mathrm{d}\mu\right| \le \int |f|\,\mathrm{d}\mu$.

Η (ii) ισχύει με την προϋπόθεση ότι $\mu(\{f = -g = \infty\} \cup \{f = -g = -\infty\}) = 0$ *και στο δεξί της μέλος δεν εμφανίζεται η μορφή* $\infty - \infty$.

Παρατήρηση 6.8. Για f όπως στην προηγούμενη πρόταση, η σχέση $|f| = f^- + f^+$ και η ιδιότητα (ii) δίνουν ότι

$$\int |f|\,\mathrm{d}\mu = \int f^-\,\mathrm{d}\mu + \int f^+\,\mathrm{d}\mu. \tag{6.3}$$

Επομένως, η f είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή έχει ολοκλήρωμα πραγματικό αριθμό, αν και μόνο αν $\int |f|\,\mathrm{d}\mu < \infty$.

Αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου, $f : X \to [-\infty, \infty]$ είναι μετρήσιμη, και $A \in \mathcal{A}$, ορίζουμε το ολοκλήρωμα της f ως προς το μέτρο μ στο A ως

$$\int_A f\,\mathrm{d}\mu := \int f\mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\mu$$

εφόσον ορίζεται το δεξί μέλος της ισότητας. Όταν $A = X$, το $\int_X f\,\mathrm{d}\mu$ είναι απλώς το $\int f\,d\mu$. Επίσης, εύκολα βλέπουμε ότι αν $f \geq 0$ και $A \subset B$ στοιχεία της $\mathcal{A}$, ισχύει ότι $\int_A f\,\mathrm{d}\mu \leq \int_B f\,\mathrm{d}\mu$.

Στην περίπτωση ενός χώρου πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, το ολοκλήρωμα μιας τυχαίας μεταβλητής $X : \Omega \to \mathbb{R}$ λέγεται μέση τιμή της X και, αντί του $\int X\,\mathrm{d}\mathbf{P}$, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathbf{E}(X)$. Συνοψίζουμε στον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 6.9. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ τυχαία μεταβλητή. Η **μέση τιμή** της X ορίζεται ως

$$\mathbf{E}(X) := \int X\,\mathrm{d}\mathbf{P}$$

εφόσον το δεξί μέλος της ισότητας ορίζεται. Πολλές φορές γράφουμε την $\mathbf{E}(X)$ και ως $\mathbf{E}X$. Επίσης γράφουμε $\mathbf{E}_\mathbf{P}$ αντί του $\mathbf{E}$ αν θέλουμε να κάνουμε ξεκάθαρο ότι η ολοκλήρωση γίνεται ως προς το μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε τη σχέση αυτού του ορισμού με τον ορισμό της μέσης τιμής που δίνεται στις στοιχειώδεις πιθανότητες (σχέσεις (7.5), (7.9)).

Παρατήρηση 6.10. Αντίστοιχα, αν $A \in \mathcal{F}$, ορίζουμε τη μέση τιμή της X πάνω στο A ως $\mathbf{E}(X\mathbf{1}_A)$ και τη συμβολίζουμε με $\mathbf{E}(X; A)$ εφόσον η $\mathbf{E}(X\mathbf{1}_A)$ μπορεί να οριστεί.

Δύο ειδικές περιπτώσεις μέσης τιμής είναι οι εξής:

(i) Αν η X ισούται με μια σταθερά $c \in \mathbb{R}$, τότε $\mathbf{E}(X) = c$ γιατί η X είναι απλή.

(ii) Αν $X = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{F}$, τότε $\mathbf{E}(X) = \mathbf{P}(A)$.

Το (ii) σε συνδυασμό με τις ιδιότητες της μέσης τιμής (Προτάσεις 6.7, 6.14) είναι πολύ χρήσιμο (Ασκήσεις 6.1, 6.2, 6.18).

Παρατήρηση 6.11. Σε έναν χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$, λέμε ότι μια ιδιότητα $\Psi(x)$ που αφορά σημεία x του X (παράδειγμα τέτοιας $\Psi(x)$ είναι η «το όριο $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ υπάρχει», όπου $(f_n)_{n\geq 1}$ είναι ακολουθία συναρτήσεων με $f_n : X \to \mathbb{R}$ για κάθε n) ισχύει μ-**σχεδόν παντού**, ή μ-**σχεδόν για κάθε** $x \in X$, αν υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $A \supset \{x \in X : \text{η } \Psi(x) \text{ δεν ισχύει}\}$ και $\mu(A) = 0$. Θα θέλαμε να δώσουμε ως ορισμό το ότι το σύνολο στο οποίο η ιδιότητα δεν ισχύει, δηλαδή το $\{x \in X : \text{η } \Psi(x) \text{ δεν ισχύει}\}$, έχει μέτρο 0. Όμως επειδή αυτό το σύνολο δεν είναι απαραίτητα μετρήσιμο, δίνουμε τον πιο πάνω ορισμό. Αν το μ είναι μέτρο πιθανότητας, λέμε ότι η $\Psi(x)$ ισχύει **με** μ**- πιθανότητα 1**, ή μ-**σχεδόν βέβαια**. Αν είναι σαφές ποιο είναι το μέτρο μ, το παραλείπουμε στις παραπάνω εκφράσεις.

Πρόταση 6.12. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f, g : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε:*

(i) $\int f \, d\mu = 0$ *αν και μόνο αν* $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$.

(ii) Αν $\mu(\{f \neq g\}) = 0$, *τότε* $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.

(iii) Αν $\int f \, d\mu < \infty$, *τότε* $\mu(f = \infty) = 0$.

Απόδειξη. (*i*) «⇒» Έστω ότι $\int f \, d\mu = 0$. Θέτουμε $A_n := \left\{ f \geq \frac{1}{n} \right\}$, $n \in \mathbb{N}^+$. Τότε,

$$0 = \int f \, d\mu \geq \int_{A_n} f \, d\mu = \int f \mathbf{1}_{A_n} \, d\mu \geq \int \frac{1}{n} \mathbf{1}_{A_n} \, d\mu = \frac{1}{n} \mu(A_n) \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^+.$$

Άρα $\mu(A_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Όμως, $\{f > 0\} = \cup_{n \geq 1} A_n$ και $\mu(\{f > 0\}) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) = 0$. Συνεπώς, $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$.

«⇐» Αν η f είναι απλή όπως στον Ορισμό 6.1, τότε από την υπόθεση πρέπει $\mu(A_i) = 0$ για κάθε i με $a_i > 0$, και άρα $\int f \, d\mu = 0$. Στη γενική περίπτωση, αν πάρουμε απλή, μετρήσιμη s με $0 \leq s \leq f$, τότε $\mu(\{s \neq 0\}) \leq \mu(\{f \neq 0\}) = 0$, και όπως δείξαμε πριν, πρέπει να ισχύει $\int s \, d\mu = 0$. Το συμπέρασμα έπεται.

(*ii*) $f \leq g + (f - g)\mathbf{1}_{f > g}$. Άρα

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu + \int (f - g)\mathbf{1}_{f > g} \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

Η ισότητα έπεται από το μέρος (*i*) της πρότασης γιατί η $(f - g)\mathbf{1}_{f > g}$ είναι μη αρνητική και $\mu(\{(f - g)\mathbf{1}_{f > g} \neq 0\}) = 0$. Αλλάζοντας τους ρόλους των f, g, παίρνουμε την αντίστροφη ανισότητα και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

(*iii*) Η συνάρτηση $s := \infty \mathbf{1}_{f = \infty}$ είναι απλή, μετρήσιμη και $0 \leq s \leq f$. Άρα

$$\int f \, d\mu \geq \int s \, d\mu = \infty \times \mu(f = \infty).$$

Αν $\mu(f = \infty) > 0$, τότε θα πρεπε $\int f \, d\mu = \infty$. Άτοπο. ∎

Παρατήρηση 6.13. Εύκολα βλέπουμε ότι η ιδιότητα (*ii*) της Πρότασης 6.12 ισχύει και για μετρήσιμες συναρτήσεις με τιμές στο $[-\infty, \infty]$ των οποίων το ολοκλήρωμα ορίζεται.

Στην περίπτωση ενός χώρου πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, η Πρόταση 6.12 παίρνει την εξής μορφή.

Πρόταση 6.14. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $X, Y : \Omega \to [0, \infty]$ τυχαίες μεταβλητές. Τότε:*

(i) $\mathbf{E}(X) = 0$ *αν και μόνο αν* $\mathbf{P}(X = 0) = 1$.

(ii) Αν $\mathbf{P}(X = Y) = 1$, *τότε* $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$.

(iii) Αν $\mathbf{E}(X) < \infty$, *τότε* $\mathbf{P}(X = \infty) = 0$.

Ορισμός 6.15. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}|X| < \infty$. Ορίζουμε τη διασπορά $\mathrm{Var}(X)$ της X ως εξής:

$$\mathrm{Var}(X) := \mathbf{E}(\{X - \mathbf{E}(X)\}^2).$$

Η μέση τιμή $\mathbf{E}(X)$, όπως έχουμε ήδη σημειώσει (Παρατήρηση 6.8), είναι πραγματικός αριθμός λόγω της $\mathbf{E}|X| < \infty$. Η διασπορά, όμως, ενδέχεται να παίρνει την τιμή ∞. Ένας χρήσιμος τύπος για τη διασπορά, που προκύπτει εύκολα από τον ορισμό της, είναι ο $\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$. Έτσι βλέπουμε ότι αν $\mathbf{E}(X^2) < \infty$, τότε $\mathrm{Var}(X) < \infty$.

Η διασπορά είναι ένα μέτρο της μεταβλητότητας της τυχαίας μεταβλητής γύρω από τη μέση της τιμή. Έτσι, όταν $\mathrm{Var}(X) = 0$, αναμένουμε η X να είναι συγκεντρωμένη στη μέση τιμή. Ισχύει το εξής

$$\mathrm{Var}(X) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P}(X = c) = 1 \tag{6.4}$$

με $c = \mathbf{E}(X)$. Απόδειξη χρειάζεται μόνο η κατεύθυνση $\Rightarrow$. Η $\mathrm{Var}(X) = 0$ σημαίνει ότι η μη αρνητική τυχαία μεταβλητή $\{X - \mathbf{E}(X)\}^2$ έχει μέση τιμή μηδέν. Με βάση την Πρόταση 6.14(i), η $X - \mathbf{E}(X) = 0$ με πιθανότητα 1, που είναι το ζητούμενο.

Δίνουμε τώρα δύο σημαντικές ανισότητες διατυπωμένες στη γλώσσα των πιθανοτήτων. Αντίστοιχες ισχύουν και στην περίπτωση μετρήσιμων συναρτήσεων σε τυχόντα χώρο μέτρου. Εκφράζουν το γεγονός ότι η πιθανότητα μια τυχαία μεταβλητή να βρεθεί μακριά από τη μέση της τιμή είναι μικρή.

Πρόταση 6.16. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) (Ανισότητα Markov) Αν $X : \Omega \to [0, \infty]$ τυχαία μεταβλητή και $a > 0$, τότε

$$\mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{a}.$$

(ii) (Ανισότητα Chebyshev) Αν $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}|X| < \infty$ και $a > 0$, τότε

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}.$$

Απόδειξη. (i) Χρησιμοποιούμε τη μονοτονία της μέσης τιμής. Έχουμε $X \geq a\mathbf{1}_{X \geq a}$. Άρα

$$\mathbf{E}(X) \geq \mathbf{E}(a\mathbf{1}_{X \geq a}) = a\,\mathbf{P}(X \geq a).$$

(ii) Εφαρμόζουμε το (i) στην τυχαία μεταβλητή $|X - \mathbf{E}(X)|^2$. Δηλαδή

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq a) = \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)|^2 \geq a^2) \leq \frac{\mathbf{E}\{|X - \mathbf{E}(X)|^2\}}{a^2} = \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}.$$

∎

Τέλος, καταγράφουμε χωρίς απόδειξη μια χρήσιμη ιδιότητα της μέσης τιμής (Δες Άσκηση 6.3).

Πρόταση 6.17 (Ανισότητα Jensen)**.** *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}|X| < \infty$, και $\Phi : I \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση σε ένα διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ με $\mathbf{P}(\{X \in I\}) = 1$ και $\mathbf{E}|\Phi(X)| < \infty$. Τότε*

$$\Phi(\mathbf{E}\{X\}) \leq \mathbf{E}\{\Phi(X)\}. \tag{6.5}$$

Αν η $\Phi : I \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση με το $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα η οποία ικανοποιεί την (6.5) για όλες τις επιλογές χώρων πιθανότητας και τυχαίων μεταβλητών X, τότε η Φ πρέπει να είναι κυρτή. Πράγματι, αν $x, y \in I$ και $\lambda \in (0, 1)$, θεωρούμε τον χώρο πιθανότητας με $\Omega = \{x, y\}, \mathcal{F} = \mathscr{P}(\Omega), \mathbf{P}(\{x\}) = \lambda, \mathbf{P}(\{y\}) = 1 - \lambda$ και την τυχαία μεταβλητή $X(\omega) = \omega$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Τότε η (6.5) γράφεται

$$\Phi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\Phi(x) + (1 - \lambda)\Phi(y),$$

που είναι ο ορισμός της κυρτότητας.

6.5 Οι χώροι $\mathcal{L}^p$ με $p \in [1,\infty)$

Ορισμός 6.18. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ τυχαία μεταβλητή και $p \in [1,\infty)$. Ορίζουμε

$$\|X\|_p := \{\,\mathbf{E}(|X|^p)\}^{1/p}$$

και

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) := \{X \,|\, X : \Omega \to [-\infty, \infty] \text{ τυχαία μεταβλητή και } \|X\|_p < \infty\}.$$

Όταν είναι σαφές ποιος είναι ο χώρος Ω και ποια η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$, θα γράφουμε $\mathcal{L}^p(\mathbf{P})$ αντί $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, ενώ όταν είναι σαφές και ποιο είναι το μέτρο $\mathbf{P}$, τότε γράφουμε απλώς $\mathcal{L}^p$.

Παρατήρηση 6.19. Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p \to [0,\infty)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες:

(i) $\|\lambda X\|_p = |\lambda| \|X\|_p$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) $\|X + Y\|_p \le \|X\|_p + \|Y\|_p$.

Έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{L}^p(\mathbf{P})$ είναι διανυσματικός χώρος.

Πρόταση 6.20. *(Ανισότητα Cauchy-Schwarz) Έστω $X, Y : \Omega \to [-\infty, \infty]$ τυχαίες μεταβλητές στοιχεία του $\mathcal{L}^2$. Τότε $XY \in \mathcal{L}^1$ και*

$$|\,\mathbf{E}(XY)| \le \|X\|_2 \|Y\|_2.$$

Απόδειξη. Επειδή $2|XY| \le X^2 + Y^2$, έπεται ότι $XY \in \mathcal{L}^1$. Έπειτα, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$0 \le \mathbf{E}\left((\lambda X + Y)^2\right) = \lambda^2\,\mathbf{E}(X^2) + 2\lambda\,\mathbf{E}(XY) + \mathbf{E}(Y^2). \tag{6.6}$$

Η διακρίνουσα της τετραγωνικής μορφής ως προς λ στην (6.6) είναι

$$4\,\mathbf{E}(XY)^2 - 4\,\mathbf{E}(X^2)\,\mathbf{E}(Y^2),$$

και πρέπει να είναι ≤ 0 γιατί η μορφή είναι μη αρνητική για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Άρα

$$|\,\mathbf{E}(XY)| \le \mathbf{E}(X^2)^{1/2}\,\mathbf{E}(Y^2)^{1/2},$$

το οποίο είναι το ζητούμενο. ∎

Γενικότερη της ανισότητας Cauchy-Schwarz είναι η ανισότητα Hölder. Τη διατυπώνουμε χωρίς απόδειξη στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 6.21. *(Ανισότητα Hölder) Έστω $p, q \in (1,\infty)$ με $p^{-1} + q^{-1} = 1$ και $X, Y : \Omega \to [-\infty, \infty]$ τυχαίες μεταβλητές με $\|X\|_p < \infty, \|Y\|_q < \infty$. Τότε $XY \in \mathcal{L}^1$ και*

$$|\,\mathbf{E}(XY)| \le \|X\|_p \|Y\|_q.$$

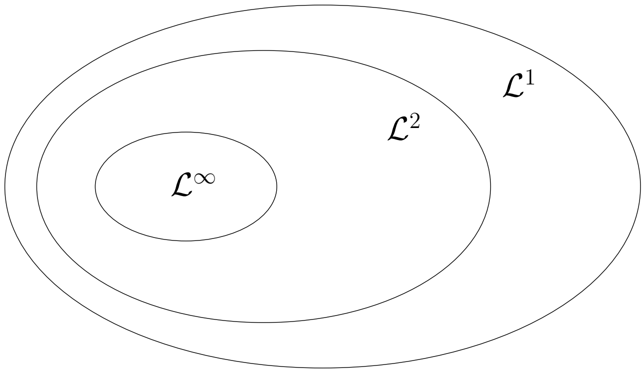
Πρόταση 6.22. *Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[-\infty, \infty]$. Τότε, για $1 \le r < s$, ισχύει ότι*

$$\|X\|_r \le \|X\|_s.$$

Απόδειξη. Είναι συνέπεια της ανισότητας Hölder όπου τη θέση της X έχει η $|X|^r$, την θέση της Y έχει η σταθερή συνάρτηση 1 και $p = s/r$, $q = s/(s-r)$. Τότε,

$$\mathbf{E}\,|X|^r = \mathbf{E}(|X|^r 1) \le \mathbf{E}(|X|^s)^{r/s} (\mathbf{E}(1^q))^{1/q} = \mathbf{E}(|X|^s)^{r/s},$$

και έτσι προκύπτει το ζητούμενο. ∎



Σχήμα 6.3: $\mathcal{L}^s \subset \mathcal{L}^r$ για $1 \le r < s$.

Η Πρόταση 6.22 μας λέει ότι αν $1 \le r < s$, τότε $\mathcal{L}^s(\mathbf{P}) \subset \mathcal{L}^r(\mathbf{P})$ (Σχήμα 6.3). Ο εγκλεισμός αυτός όμως έπεται και πιο εύκολα αν παρατηρήσουμε ότι $|X|^r \le |X|^s + 1$ (το 1 καλύπτει την περίπτωση που $|X(\omega)| < 1$).

Ορισμός 6.23. Έστω $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές ώστε $\mathbf{E}\,|X|, \mathbf{E}\,|Y| < \infty$ και η $\mathbf{E}(XY)$ ορίζεται (στο $[-\infty, \infty]$). **Συνδιακύμανση** των X, Y ονομάζουμε την ποσότητα

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}\{(X - \mathbf{E}\,X)(Y - \mathbf{E}\,Y)\},$$

η οποία είναι στοιχείο του $[-\infty, \infty]$.

Πρόταση 6.24. *Έστω $X, Y \in \mathcal{L}^2$. Τότε*

$$|\,\mathrm{Cov}(X, Y)| \le \sqrt{\mathrm{Var}(X)}\,\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}.$$

Απόδειξη. Η ανισότητα Caychy-Schwarz δίνει

$$|\,\mathrm{Cov}(X, Y)| = |\,\mathbf{E}\{(X - \mathbf{E}\,X)(Y - \mathbf{E}\,Y)\}| \le \sqrt{\mathbf{E}\{(X - \mathbf{E}\,X)^2\}}\,\sqrt{\mathbf{E}\{(Y - \mathbf{E}\,Y)^2\}} = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}\,\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}.$$

■

6.6 Οι χώροι $\mathcal{L}^0, \mathcal{L}^\infty$

Θέτουμε

$$\mathcal{L}^0 := \{X\,|\,X : \Omega \to [-\infty, \infty] \text{ είναι τυχαία μεταβλητή}\}.$$

Αυτός ο ορισμός είναι στο πνεύμα του 6.18 αφού η συνθήκη $\mathbf{E}(|X|^0) = 1 < \infty$ ισχύει για όλες τις τυχαίες μεταβλητές.

Μια $X \in \mathcal{L}^0$ λέμε ότι είναι φραγμένη με πιθανότητα 1 αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{P}(|X| \le M) = 1$. Έπειτα, για κάθε $X \in \mathcal{L}^0$ θέτουμε

$$\begin{aligned} \operatorname{essinf} X &:= \sup\{M \in \mathbb{R} : \mathbf{P}(X \ge M) = 1\} \\ \operatorname{esssup} X &:= \inf\{M \in \mathbb{R} : \mathbf{P}(X \le M) = 1\} \\ \|X\|_\infty &:= \inf\{M > 0 : \mathbf{P}(|X| \le M) = 1\} \end{aligned}$$

Οι ποσότητες αυτές ονομάζονται ουσιώδες infimum, ουσιώδες supremum, και άπειρο νόρμα της X αντίστοιχα. Υπενθυμίζουμε ότι $\inf \emptyset = \infty$ και $\sup \emptyset = -\infty$. Τέλος, θέτουμε

$$\mathcal{L}^\infty := \{X\,|\,X : \Omega \to [-\infty, \infty] \text{ είναι τυχαία μεταβλητή και } \|X\|_\infty < \infty\}.$$

Επειδή μια σταθερή συνάρτηση έχει πεπερασμένη μέση τιμή (το **P** είναι πεπερασμένο μέτρο), έχουμε ότι

$$\mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^p$$

για κάθε $1 \leq p < \infty$. Και βέβαια, για τα ίδια p, έχουμε $\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^0$.

6.7 Τα βασικά οριακά θεωρήματα

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μετρήσιμων συναρτήσεων με τιμές στο $[-\infty, \infty]$ που συγκλίνουν σημειακά σε μια συνάρτηση f. Πολλές φορές μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός του ορίου $\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu$, και μπαίνουμε στον πειρασμό να μαντέψουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu, \tag{6.7}$$

δηλαδή το όριο μπαίνει μέσα στο ολοκλήρωμα. Αυτό όμως δεν γίνεται πάντοτε. Το πρόβλημα αυτό είναι το αντικείμενο των βασικών θεωρημάτων σύγκλισης για το ολοκλήρωμα Lebesque. Τα διατυπώνουμε αλλά παραλείπουμε τις αποδείξεις τους.

Θεώρημα 6.25 (Θεώρημα μονότονης σύγκλισης)**.** *Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, με $f_n : X \to [0, +\infty]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Θέτουμε $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Το όριο $\lim_{n\to\infty} f_n$ υπάρχει γιατί η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα. Και όμοια, το όριο στο αριστερό μέλος της τελευταίας ισότητας υπάρχει γιατί η ακολουθία των ολοκληρωμάτων είναι αύξουσα.

Θεώρημα 6.26 (Λήμμα Fatou)**.** *Έστω $(f_n)_{n\geq 1}$, με $f_n : X \to [0, \infty]$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε*

$$\int \varliminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Θεώρημα 6.27 (Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης)**.** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ και $|f_n(x)| \leq g(x)$ σχεδόν παντού, όπου $g : X \to [0, \infty]$ είναι μετρήσιμη με $\int g \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Τότε $\int |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$ και*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu. \tag{6.8}$$

Όταν $|f_n| \leq g$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, λέμε ότι η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κυριαρχείται από τη συνάρτηση g. Η κρίσιμη συνθήκη του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης είναι ότι η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κυριαρχείται από ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Σε έναν χώρο *πεπερασμένου* μέτρου, οι σταθερές συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες. Γιατί μια $g = M$ (όπου $M \in \mathbb{R}$ σταθερά) έχει ολοκλήρωμα $M\mu(X)$, το οποίο είναι πραγματικός αριθμός. Έτσι το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχει την εξής χρήσιμη συνέπεια.

Θεώρημα 6.28 (Θεώρημα φραγμένης σύγκλισης)**.** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $f_n : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ και $|f_n(x)| \leq M$ σχεδόν παντού, όπου $M < \infty$ σταθερά. Τότε $\int |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$ και*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Με άμεση εφαρμογή του θεωρήματος φραγμένης σύγκλισης βλέπουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^A |\sin x|^n \, dx = 0$$

για κάθε $A > 0$. Αυτό γιατί το μέτρο Lebesgue στο $[0, A]$ είναι πεπερασμένο μέτρο, η ακολουθία $|\sin x|^n$ είναι φραγμένη από το 1, και $\lim_{n\to\infty} |\sin x|^n = 0$ για όλα τα $x \in [0, A]$ εκτός από ένα πεπερασμένο σύνολο (οι αριθμοί του $[0, A]$ που είναι της μορφής $(2k + 1)\pi/2$ με $k \in \mathbb{Z}$) το οποίο όμως έχει μέτρο Lebesgue 0.

Αντιπαράδειγμα [Αποτυχία ισχύος της (6.7)]: Θεωρούμε τον χώρο πιθανότητας $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathbf{P})$, όπου $\mathbf{P}$ είναι το μέτρο Lebesgue περιορισμένο στο $[0, 1]$ (Παράδειγμα 2.10). Θέτουμε

$$X_n(x) = n\mathbf{1}_{(0,1/n]}(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Η X_n είναι απλή τυχαία μεταβλητή, και $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$. Έχουμε ότι

$$\mathbf{E}(\lim_{n\to\infty} X_n) = \mathbf{E}(0) = 0$$

και

$$\mathbf{E}(X_n) = n\,\mathbf{P}\left((0, 1/n]\right) = n\frac{1}{n} = 1.$$

Άρα $\mathbf{E}(\lim_{n\to\infty} X_n) < \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n)$. Δηλαδή έχουμε γνήσια ανισότητα στο λήμμα Fatou, και το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης δεν εφαρμόζεται. Αυτό δεν μας κάνει εντύπωση γιατί η ακολουθία X_n δεν κυριαρχείται από κάποια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Πράγματι, η μικρότερη g που ικανοποιεί τη $|X_n(x)| \le g(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και $n \ge 1$ είναι η $\sup_{n\ge1} X_n(x) = [1/x]\mathbf{1}_{x\in(0,1]}$ (Άσκηση), της οποίας το ολοκλήρωμα ως προς το μέτρο $\mathbf{P}$ είναι ∞.

Παράδειγμα 6.29 (Το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και ένα ερώτημα απειροστικού λογισμού)**.** Θα υπολογίσουμε το όριο $\lim_{n\to\infty} I_n$ όπου

$$I_n := n^{k+1} \int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n x^k \, dx$$

με $k \in (-1, \infty)$. Η αντικατάσταση $y = nx$ δίνει

$$I_n = \int_0^n \left(\frac{n-y}{n+y}\right)^n y^k \, dy = \int_0^\infty \left(\frac{n-y}{n+y}\right)^n y^k \mathbf{1}_{y\in[0,n]} \, dy.$$

Για σταθερό $y > 0$, ο ολοκληρωτέος συγκλίνει στο $e^{-2y}y^k$ αφού

$$\left(\frac{n-y}{n+y}\right)^n \mathbf{1}_{y\in[0,n]} = \left(1 - \frac{2y}{n+y}\right)^n \mathbf{1}_{y\in[0,n]} \to e^{-2y}$$

Επίσης, φράσσουμε τον ολοκληρωτέο ως εξής

$$0 \le \left(\frac{n-y}{n+y}\right)^n y^k \mathbf{1}_{y\in[0,n]} \le e^{-\frac{2yn}{n+y}} y^k \mathbf{1}_{y\in[0,n]} \le e^{-2y} y^k =: g(y).$$

Στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την $1 + x \le e^x$, ενώ στη δεύτερη το ότι $y \in [0, n]$ για τα y που το αριστερό μέλος είναι θετικό. Η g έχει $\int_0^\infty g(x)\,dx < \infty$, οπότε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης εφαρμόζεται και δίνει ότι

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^\infty y^k e^{-2y} \, dy = 2^{-k-1}\Gamma(k + 1).$$

Δεδομένου ότι μια σειρά είναι το όριο των μερικών αθροισμάτων της και ότι το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό, τα παραπάνω θεωρήματα δίνουν το εξής πόρισμα.

Πόρισμα 6.30. *Έστω $(f_n)_{n\geq 1}$, με $f_n : X \to [-\infty, \infty]$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων.*

(i) (Θεώρημα Beppo-Levi) Αν f_n μη αρνητική για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\int \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Big) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu. \tag{6.9}$$

(ii) Αν οι f_n παίρνουν τιμές στο $[-\infty, \infty]$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \, \mathrm{d}\mu < \infty$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει σχεδόν παντού σε μια μετρήσιμη συνάρτηση με τιμές στο $\mathbb{R}$, ισχύει η (6.9), και τα δύο μέλη της είναι πραγματικοί αριθμοί.

Απόδειξη. (i) Θέτουμε $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε η $(g_n)_{n\geq 1}$ είναι αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων και αν $g = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} g_n = g$. Επίσης, $\int g_n \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} \int f_k \, \mathrm{d}\mu$ λόγω γραμμικότητας. Το ζητούμενο προκύπτει από το θεώρημα μοτότονης σύγκλισης (Θεώρημα 6.25).

(ii) Εφαρμόζουμε το (i) για την ακολουθία $(|f_n|)_{n\geq 1}$. Τότε

$$\int \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \Big) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \, \mathrm{d}\mu. \tag{6.10}$$

Όμως

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} f_k \Big| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$$

για κάθε $n \geq 1$ και, από υπόθεση, η $g = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ έχει πεπερασμένο ολοκλήρωμα. Συνεπώς, εφαρμόζοντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης (Θεώρημα 6.27), έχουμε ότι

$$\int \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Big) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu,$$

και από την (6.10) και την Πρόταση 6.12(iii), ισχύει ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ παίρνει πραγματικές τιμές σχεδόν παντού. ∎

Παρατήρηση 6.31. Οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} f_n, \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu$ στο (i) και η $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ στο (ii) συγκλίνουν, με ενδεχόμενη τιμή το ∞, γιατί είναι σειρές μη αρνητικών όρων.

Παράδειγμα 6.32. (Ορισμός μέτρου μέσω πυκνότητας) Έστω $f : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση σε έναν χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Τότε η συνάρτηση $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με

$$\nu(A) := \int_A f \, d\mu = \int_A f \mathbf{1}_A \, d\mu$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$ είναι μέτρο. Επιπλέον, για $A \in \mathcal{A}$, ισχύει ότι αν $\mu(A) = 0$, τότε $\nu(A) = 0$.

Πράγματι, η ν είναι μη αρνητική και $\nu(\emptyset) = \int f \mathbf{1}_{\emptyset} \, d\mu = 0$. Έπειτα, για $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ξένων ανα δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$, έχουμε $\mathbf{1}_{\cup_{n=1}^{\infty} A_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}$. Συνεπώς

$$\nu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \int \Big(f \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n} \Big) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f \mathbf{1}_{A_n} \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιούμε το θεώρημα Beppo-Levi (Πόρισμα 6.30 (i)). Τέλος, αν $\mu(A) = 0$, τότε $\mu(f \mathbf{1}_A = 0) = 1$, και από την Πρόταση 6.14 (i) έχουμε ότι $\nu(A) = \int f \mathbf{1}_A \, d\mu = \int 0 \, d\mu = 0$.

Παρατήρηση 6.33. Η συνάρτηση f στο Παράδειγμα 6.32 λέγεται **πυκνότητα** του ν ως προς το μέτρο μ καθώς και **παράγωγος Radon-Nikodym** του ν ως προς μ. Γράφουμε

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}. \tag{6.11}$$

Αν επιπλέον $\int f\, d\mu = 1$, τότε το ν είναι μέτρο πιθανότητας στον $(X, \mathcal{A})$.

Ασκήσεις

6.1 (Η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού για πιθανότητες) Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$. Τότε,

$$\mathbf{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

6.2* Αν $n \ge 1$ και τα $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ ικανοποιούν $\mathbf{P}(A_1) + \cdots + \mathbf{P}(A_n) > k - 1$ για κάποιον θετικό ακέραιο k, τότε υπάρχουν $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$ με $\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) > 0$.

6.3 (Η ανισότητα Jensen) Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές σε ένα διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ και $\phi : I \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν οι $\mathbf{E}\,X, \mathbf{E}\{\phi(X)\}$ ορίζονται και είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\phi(\mathbf{E}\,X) \le \mathbf{E}\{\phi(X)\}.$$

[Υπόδειξη: Έστω $a := \mathbf{E}\,X$. Υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\phi(x) \ge \phi(a) + \lambda(x - a)$ για κάθε $x \in I$ (απειροστικός λογισμός). Θέτουμε όπου x την τυχαία μεταβλητή X.]

6.4 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0, \infty)$. Τότε

$$(\mathbf{E}\,X)^p \begin{cases} \le \mathbf{E}(X^p) & \text{αν } p \ge 1, \\ \ge \mathbf{E}(X^p) & \text{αν } 0 \le p < 1. \end{cases}$$

Αν οι $\mathbf{E}\,X, \mathbf{E}(\log X)$ ορίζονται και είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\log \mathbf{E}\,X \ge \mathbf{E}(\log X).$$

6.5 Έστω X τυχαία μεταβλητή και έστω ότι για κάποιο $a > 0$ ισχύει $\mathbf{E}(e^{aX}) < \infty$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $C > 0$ σταθερά ώστε για κάθε $t \in \mathbb{R}$ να ισχύει $\mathbf{P}(X > t) \le Ce^{-at}$. Δηλαδή η «ουρά» της X προς τα δεξιά φθίνει γρήγορα, τουλάχιστον με ταχύτητα e^{-at}.

6.6 Έστω X μη αρνητική τυχαία μεταβλητή με $0 < \mathbf{E}\,X < \infty$ και $a \in (0, 1)$. Τότε

(α)

$$\mathbf{P}(X \le a\ \mathbf{E}\,X) \le \frac{\mathrm{Var}(X)}{(1-a)^2(\mathbf{E}\,X)^2}.$$

(β)* (Ανισότητα Paley-Zygmund)

$$\mathbf{P}(X > a\ \mathbf{E}\,X) \ge (1-a)^2 \frac{(\mathbf{E}\,X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}.$$

6.7 Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $(0, \infty)$ ώστε $XY \ge 1$ παντού. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y) \ge 1.$$

Ειδικότερα

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{X}\right) \ge \frac{1}{\mathbf{E}(X)}.$$

6.8 Θεωρούμε στον $\Omega = [2, 3]$ το μέτρο Lebesgue λ, που είναι μέτρο πιθανότητας. Θέτουμε

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \in [2,3] \setminus \{2 + n^{-1} : n \in \mathbb{N}^+\}, \\ (-1)^n n & \text{αν } x = 2 + n^{-1} \text{ με } n \in \mathbb{N}^+. \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι $\inf f = -\infty, \sup f = \infty, \operatorname{essinf} f = 4, \operatorname{esssup} f = 9$.

6.9 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \{\mathbf{E}(e^{nX})\}^{1/n} = e^{\operatorname{esssup} X}.$$

6.10 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|X| > n) = 0$.

6.11 Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty f_n(x)\,dx$ στην περίπτωση που

(α) $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+nx^3}$.
(β) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \mathbf{1}_{[1,e^n]}(x)$.

6.12 Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x^n f(x)\,dx = f(1).$$

6.13 (Κυριαρχημένη σύγκλιση με υπεραριθμήσιμο σύνολο δεικτών) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και για κάθε $t > 0$ μετρήσιμη συνάρτηση $f_t : X \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το όριο $\lim_{t\to\infty} f_t(x) =: f(x)$ για κάθε $x \in X$ και υπάρχει $g : X \to [0,\infty]$ μετρήσιμη με $\int g(x)\,d\mu(x) < \infty$ και $|f_t(x)| \le g(x)$ για κάθε $x \in X$ και $t > 0$. Να δειχθεί ότι η f είναι μετρήσιμη και

$$\lim_{t\to\infty} \int f_t(x)\,d\mu(x) = \int f(x)\,d\mu(x).$$

6.14 Έστω $X \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$ και $E_n := \{|X| \ge n\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι $n\,\mathbf{P}(E_n) \to 0$ για $n \to \infty$.

6.15 Έστω $1 \le r < s$ και $X \in \mathcal{L}^r$. Θέτουμε $X_n := X\mathbf{1}_{|X|\le n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Να δειχθεί ότι $X_n \in \mathcal{L}^s$ και $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(|X_n - X|^r) = 0$.

6.16 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0,\infty]$. Να δείξετε ότι
(α)

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{E}(X; X < \varepsilon) = 0,$$

(β)

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \mathbf{E}(X; X < M) = 0.$$

6.17* Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{E}(X^2) = \infty$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{M\to\infty} \frac{\{\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{|X|\le M})\}^2}{\mathbf{E}(X^2\mathbf{1}_{|X|\le M})} = 0.$$

6.18 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Να δείξετε ότι

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k\ge 1} \mathbf{P}(X \ge k).$$

6.19 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0,\infty]$. Να δείξετε ότι

$$\sum_{k=1}^\infty \mathbf{P}(X \ge k) \le \mathbf{E}\,X \le 1 + \sum_{k=1}^\infty \mathbf{P}(X \ge k).$$

6.20* Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0,\infty)$ και $\mathbf{E}(X) < \infty$. Έστω και $c > 1$. Να δείξετε ότι

$$\sum_{k=1}^\infty c^k\,\mathbf{P}(X \ge c^k) < \infty.$$

7

Κατανομή τυχαίας μεταβλητής και ολοκλήρωση

Με όσα έχουμε δει ως τώρα, η μέση τιμή προσδιορίζεται μόνο μέσω της διαδικασίας της Παραγράφου 6.1, η οποία δεν είναι εύχρηστη γενικά. Από την άλλη, στις στοιχειώδεις πιθανότητες η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής με τιμές στο $\mathbb{R}$, ανάλογα με το είδος της (διακριτή/συνεχής), ορίζεται μέσω ενός αθροίσματος ή ολοκληρώματος. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα ανακτήσουμε, ως θεωρήματα, αυτές τις εκφράσεις για τη μέση τιμή.

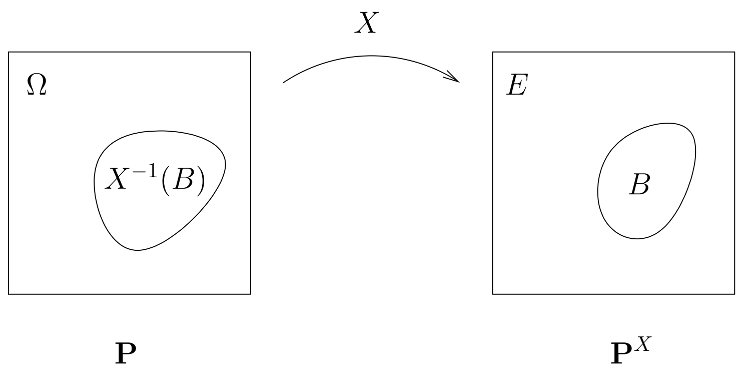
Κεντρική έννοια σε αυτή τη διαδικασία είναι η κατανομή τυχαίας μεταβλητής.

7.1 Ο τύπος αλλαγής μεταβλητής

Ορισμός 7.1. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $(E, \mathcal{E})$ μετρήσιμος χώρος, και $X : \Omega \to E$ τυχαία μεταβλητή. Το μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}^X : \mathcal{E} \to [0, 1]$ στον E με

$$\mathbf{P}^X(B) := \mathbf{P}\left(X^{-1}(B)\right) = \mathbf{P}(X \in B)$$

για κάθε $B \in \mathcal{E}$ λέγεται κατανομή της X.



Σχήμα 7.1: Η τυχαία μεταβλητή X «μεταφέρει» το μέτρο $\mathbf{P}$ στον χώρο E δίνοντας το μέτρο $\mathbf{P}^X$.

Εύκολα ελέγχει κανείς ότι το $\mathbf{P}^X$ είναι μέτρο πιθανότητας στον $(E, \mathcal{E})$. Το $\mathbf{P}^X$ λέγεται και εικόνα του $\mathbf{P}$ μέσω της X.

Η επόμενη πρόταση μεταφέρει τον υπολογισμό μιας μέσης τιμής από τον Ω στον E.

Πρόταση 7.2. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $(E, \mathcal{E})$ μετρήσιμος χώρος, και $X : \Omega \to E$ τυχαία μεταβλητή με κατανομή $\mathbf{P}^X$. Για κάθε $h : E \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση ισχύει*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\{h(X)\} = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h). \tag{7.1}$$

Επίσης, αν η $h : E \to [-\infty, \infty]$ είναι μετρήσιμη, τότε ή και τα δύο μέλη της (7.1) *ορίζονται και είναι ίσα ή και τα δύο δεν ορίζονται.*

Το αριστερό μέλος της (7.1) είναι η μέση τιμή της $h \circ X$ στο Ω ως προς το μέτρο $\mathbf{P}$ και το δεξί μέλος της (7.1) είναι η μέση τιμή της h στο E ως προς το μέτρο $\mathbf{P}^X$. Αυτό γίνεται ακόμη πιο καθαρό αν τη γράψουμε ως

$$\int h(X(\omega))\, d\,\mathbf{P}(\omega) = \int h(x)\, d\,\mathbf{P}^X(x).$$

Απόδειξη. **Βήμα 1.** Αν $h = \mathbf{1}_A$ με $A \in \mathcal{E}$, τότε $h(X(\omega)) = \mathbf{1}_{\{\omega: X(\omega)\in A\}}$. Δηλαδή, $h(X) = \mathbf{1}_{X^{-1}(A)}$ με $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. Έχουμε λοιπόν

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\mathbf{1}_A(X)) = \mathbf{P}(X^{-1}(A)) = \mathbf{P}^X(A) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(\mathbf{1}_A),$$

άρα η (7.1) ισχύει.

Βήμα 2. Αν η h είναι μη αρνητική απλή, τότε $h = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$, με $a_i \in [0, \infty]$ και $A_i \in \mathcal{E}$ για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Τότε

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h(X)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\Big(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}(X)\Big) = \sum_{i=1}^n a_i\, \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\mathbf{1}_{A_i}(X)) = \sum_{i=1}^n a_i\, \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(\mathbf{1}_{A_i}) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}\Big(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}\Big) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h).$$

Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το προηγούμενο βήμα.

Βήμα 3. Αν $h \geq 0$ μετρήσιμη, τότε από την Πρόταση 5.12 υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ απλών συναρτήσεων με $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{E}$. Τότε $\lim_{n\to\infty} h_n(X(\omega)) = h(X(\omega))$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και από το προηγούμενο βήμα

$$\mathbf{E}(h_n(X)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h_n) \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Για $n \to \infty$, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης (Θεώρημα 6.25) έχουμε

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h(X)) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h_n(X)) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h_n) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h).$$

Βήμα 4. Αν h μετρήσιμη συνάρτηση με τιμές στο $[-\infty, \infty]$, τότε τη γράφουμε ως $h = h^+ - h^-$. Από το προηγούμενο βήμα,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h^+(X)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h^+), \tag{7.2}$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h^-(X)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h^-). \tag{7.3}$$

Το αριστερό μέλος της (7.1) δεν ορίζεται αν και μόνο αν το αριστερό μέλος των (7.2), (7.3) ισούται με ∞, ενώ το δεξί μέλος της (7.1) δεν ορίζεται αν και μόνο αν το δεξί μέλος των (7.2), (7.3) ισούται με ∞. Άρα ή και τα δύο μέλη της (7.1) ορίζονται ή και τα δύο δεν ορίζονται.

Τώρα, στην περίπτωση που και τα δύο μέλη της (7.1) ορίζονται, οι (7.2), (7.3) δίνουν

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h(X)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h^+(X)) - \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h^-(X)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h^+) - \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h^-) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h).$$

■

Η τεχνική απόδειξης της προηγούμενης πρότασης είναι πολύ συνηθισμένη στη Θεωρία Μέτρου. Θα την ονομάζουμε στο εξής Τυπική Μηχανή.

Παρατήρηση 7.3. Η τυπική μηχανή. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και ότι θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια πρόταση $Q(f)$ ισχύει για όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \to [-\infty, \infty]$ ώστε το $\int f\, d\mu$ να ορίζεται. Ακολουθούμε τα εξής βήματα.

(i) Δείχνουμε την Q για κάθε $f = \mathbf{1}_A$ όπου $A \in \mathcal{A}$.

(ii) Δείχνουμε την Q για κάθε $f \geq 0$ μετρήσιμη, απλή.

(iii) Δείχνουμε την Q για κάθε $f \geq 0$ μετρήσιμη.

(iv) Δείχνουμε την Q για κάθε f μετρήσιμη με $\int |f|\, d\mu < \infty$.

Συνήθως συμβαίνει το εξής: Το (i) είναι συνέπεια ορισμού. Το (ii) έπεται από το (i) και τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος. Το (iii) έπεται από το (ii) και το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, εφόσον γράψουμε $f = \lim s_n$ για κατάλληλη αύξουσα ακολουθία απλών μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Το (iv) έπεται από το (iii) και τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος εφόσον γράψουμε $f = f^+ - f^-$.

Ακόμη τρεις εφαρμογές της Τυπικής Μηχανής θα δούμε στις αποδείξεις της Πρότασης 7.8 και του Θεωρήματος 10.8 καθώς και στην Άσκηση 7.4.

Παρατήρηση 7.4. Ισοκατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές. Αν $X : \Omega_1 \to \mathbb{R}, Y : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ είναι δύο τυχαίες μεταβλητές με την ίδια κατανομή (τα πεδία ορισμού τους, Ω_1, Ω_2, ενδέχεται να είναι διαφορετικά), τότε για οποιοδήποτε σύνολο Borel A έχουμε $\mathbf{P}(X \in A) = \mathbf{P}(Y \in A)$. Αυτό γιατί η πρώτη πιθανότητα ισούται με $\mathbf{P}^X(A)$, ενώ η δεύτερη με $\mathbf{P}^Y(A)$ και $\mathbf{P}^X = \mathbf{P}^Y$. Και όμοια, για οποιαδήποτε μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $\mathbf{E}(h(X))$ να ορίζεται, ισχύει $\mathbf{E}(h(X)) = \mathbf{E}(h(Y))$. Γιατί και οι δύο μέσες τιμές μπορούν να εκφραστούν (λόγω της παραπάνω πρότασης) μέσω των κατανομών $\mathbf{P}^X, \mathbf{P}^Y$ οι οποίες ταυτίζονται. Για παράδειγμα, θα ισχύει $\mathbf{E}\, X^k = \mathbf{E}\, Y^k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ εφόσον οι ποσότητες αυτές ορίζονται.

Χοντρικά, σε οποιονδήποτε υπολογισμό εμπλέκεται η X μπορούμε να την αντικαταστήσουμε με την Y. Η δικαιολόγηση γίνεται με χρήση της πιο πάνω πρότασης.

Έτσι, σχεδόν για όλα τα προβλήματα πιθανοτήτων, αυτό που μας ενδιαφέρει σε μια τυχαία μεταβλητή είναι μόνο η κατανομή της ενώ ο χώρος πιθανότητας στον οποίο ορίζεται είναι εντελώς αδιάφορος.

Στην ειδική περίπτωση δύο τυχαίων μεταβλητών $X, Y : \Omega \to E$ (δηλαδή ορισμένων στον ίδιο χώρο πιθανότητας) με $\mathbf{P}(X = Y) = 1$, οι X, Y είναι ισοκατανεμημένες γιατί, για οποιοδήποτε μετρησιμο υποσύνολο A του E, οι τυχαίες μεταβλητές $\mathbf{1}_A(X), \mathbf{1}_A(Y)$ είναι ίσες με πιθανότητα 1. Άρα με βάση την Πρόταση 6.14(*ii*),

$$\mathbf{P}(X \in A) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_A(X)) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_A(Y)) = \mathbf{P}(Y \in A).$$

Ορολογία: Δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y που παίρνουν τιμές σε κοινό μετρήσιμο χώρο $(E, \mathcal{E})$ λέγονται **ισόνομες**, ή και **ισοκατανεμημένες**, αν έχουν την ίδια κατανομή. Δηλαδή τα μέτρα $\mathbf{P}^X, \mathbf{P}^Y$ στον $(E, \mathcal{E})$ ταυτίζονται. Γράφουμε $X \overset{d}{=} Y$ [το d από το distribution (κατανομή)].

7.2 Κατανομές στο $\mathbb{R}$ με πυκνότητα

Η Πρόταση 7.2 μας ενδιαφέρει κυρίως στην περίπτωση όπου $E = \mathbb{R}$ και η κατανομή της X προκύπτει από πυκνότητα. Ο επόμενος ορισμός γενικεύει την έννοια της πυκνότητας, όπως αυτή δόθηκε στο Παράδειγμα 4.13. Πλέον η πυκνότητα δεν είναι απαραίτητο να είναι Riemann-ολοκληρώσιμη.

Ορισμός 7.5. Έστω $\mathbf{P}$ μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, λ το μέτρο Lebesgue (Παράδειγμα 2.4), και $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ Borel- μετρήσιμη συνάρτηση. Η f λέγεται **πυκνότητα** του $\mathbf{P}$ αν

$$\mathbf{P}(A) = \int_A f(x)\, \mathrm{d}\lambda(x) \quad \text{για κάθε } A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}). \tag{7.4}$$

Βέβαια $\lambda(f = \infty) = 0$ λόγω της Πρότασης 6.12(*iii*) αφού $\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = 1 < \infty$.

Η πυκνότητα ενός μέτρου (αν αυτό έχει) δεν είναι μοναδική. Γιατί αν ένα μέτρο $\mathbf{P}$ έχει πυκνότητα f, τότε αλλάζοντας την f σε ένα σύνολο Borel που έχει μέτρο Lebesgue μηδέν, παίρνουμε μια νέα συνάρτηση $\tilde{f}$, η οποία είναι και αυτή πυκνότητα του $\mathbf{P}$. Αυτό έπεται από τον ορισμό της πυκνότητας και την Πρόταση 6.12(ii). Όμως ισχύει το εξής.

Πρόταση 7.6. *Αν δύο Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις f_1, f_2 είναι πυκνότητες για το ίδιο μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στο $\mathbb{R}$, τότε $\lambda(\{f_1 \neq f_2\}) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω το σύνολο Borel $A := \{f_1 > f_2\}$. Η $\mathbf{P}(A) = \int_A f_1 d\lambda = \int_A f_2 d\lambda$ δίνει

$$0 = \int_A (f_1 - f_2)\, d\lambda = \int (f_1 - f_2)\mathbf{1}_A\, d\lambda.$$

Ισχύει $(f_1 - f_2)\mathbf{1}_A \geq 0$ και έτσι η Πρόταση 6.12(i) δίνει ότι $\lambda((f_1 - f_2)\mathbf{1}_A \neq 0) = 0$. Όμως $\{(f_1 - f_2)\mathbf{1}_A \neq 0\} = A$. Επομένως $\lambda(\{f_1 > f_2\}) = 0$. Αντιστρέφοντας τους ρόλους των f_1, f_2, παίρνουμε $\lambda(\{f_1 < f_2\}) = 0$ και έτσι το ζητούμενο. ∎

Συνδυάζοντας αυτή την πρόταση με την Πρόταση 6.12(ii), συμπεραίνουμε ότι για υπολογισμούς ολοκληρωμάτων ως προς το μέτρο λ που εμπλέκουν μια πυκνότητα του $\mathbf{P}$, οποιαδήποτε άλλη πυκνότητα του $\mathbf{P}$ δίνει το ίδιο αποτέλεσμα και επομένως θεωρούμε την πυκνότητα ουσιαστικά μοναδική.

Όπως παρατηρήσαμε πιο πάνω, η σχέση (7.4) για $A = \mathbb{R}$ δίνει ότι $\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = 1$. Τώρα, αν έχουμε μια $f : [0, 1] \to [0, \infty]$ που είναι Borel-μετρήσιμη με $\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = 1$, τότε είναι ευκολο να δούμε ότι η (7.4) ορίζει ένα μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Άρα πυκνότητες κατανομών στο $\mathbb{R}$ είναι ακριβώς οι μη αρνητικές Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ με ολοκλήρωμα 1 ως προς το μέτρο Lebesgue.

Ορισμός 7.7. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή, και $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ Borel-μετρήσιμη συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι μια **πυκνότητα** της τυχαίας μεταβλητής X αν είναι πυκνότητα της κατανομής $\mathbf{P}^X$ της X.

Επιστρέφουμε στην ειδική περίπτωση της Πρότασης 7.2 όπου $E = \mathbb{R}$ και η X έχει πυκνότητα.

Πρόταση 7.8. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$. Αν η $h : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ είναι μετρήσιμη, τότε*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\{h(X)\} = \int h(x) f(x)\, \mathrm{d}x \tag{7.5}$$

όποτε κάποια από τις δύο ποσότητες ορίζεται (Δηλαδή τότε ορίζεται και η άλλη και είναι ίσες).

Το αριστερό μέλος της (7.5), από την Πρόταση 7.2, ισούται με $\mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h)$ και αυτό θα δείξουμε στην απόδειξη ότι ισούται με το δεξί μέλος. Έτσι ο υπολογισμός της μέσης τιμής $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\{h(X)\}$ στο χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ανάγεται αρχικά σε υπολογισμό στο χώρο $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathbf{P}^X)$ και τελικά σε ένα συνηθισμένο ολοκλήρωμα μιας μεταβλητής. Το δεξί μέλος της (7.5) είναι ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζαμε τη μέση τιμή $\mathbf{E}\{h(X)\}$ για τυχαίες μεταβλητές X με πυκνότητα στις στοιχειώδεις πιθανότητες.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το δεξί μέλος της (7.5) ισούται επίσης με $\mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h)$. Χρησιμοποιούμε την τυπική μηχανή (Παρατήρηση 7.3).

Αν $h = \mathbf{1}_A$ με $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, τότε

$$\int h\, \mathrm{d}\mathbf{P}^X = \int \mathbf{1}_A\, \mathrm{d}\mathbf{P}^X = \mathbf{P}^X(A) = \mathbf{P}(X \in A) = \int_A f(x)\, \mathrm{d}x = \int \mathbf{1}_A(x) f(x)\, \mathrm{d}x = \int h(x) f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Η τρίτη ισότητα είναι ο ορισμός της κατανομής $\mathbf{P}^X$. Η τέταρτη είναι ο ορισμός της πυκνότητας.

Αν $h \geq 0$ απλή μετρήσιμη, τότε λόγω γραμμικότητας, από τα προηγούμενα προκύπτει το ζητούμενο.

Αν $h \geq 0$ μετρήσιμη, τότε από την Πρόταση 5.12 υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μη αρνητικών, απλών, μετρήσιμων συναρτήσεων με $\lim_{n\to\infty} h_n = h$. Άρα, σε συνδυασμό με το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, έχουμε

$$\int h\, \mathrm{d}\mathbf{P}^X = \lim_{n\to\infty} \int h_n\, \mathrm{d}\mathbf{P}^X = \lim_{n\to\infty} \int h_n(x) f(x)\, \mathrm{d}x = \int h(x) f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Τέλος, αν η h είναι μετρήσιμη ώστε ένα από τα δύο μέλη της (7.5) να ορίζεται, από τα προηγούμενα έχουμε

$$\int h^+ \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^X = \int h^+(x)f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int h^- \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^X = \int h^-(x)f(x)\,\mathrm{d}x,$$

και επομένως, αφού $h = h^+ - h^-$, έχουμε

$$\int h\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^X = \int h^+ \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^X - \int h^- \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^X = \int h^+(x)f(x)\,\mathrm{d}x - \int h^-(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \int h(x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Από την υπόθεση, δεν υπάρχει κάποιο από τα μέλη των ισοτήτων στην τελευταία γραμμή που να δίνει τη μορφή $\infty - \infty$. ■

Παράδειγμα 7.9. Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η $\mathbf{E}(X)$ δεν ορίζεται. Πράγματι, από την Πρόταση 7.8, για τη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $h(a) = a^+$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X^+) = \mathbf{E}(h(X)) &= \int h(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \int x^+ f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty x\frac{1}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&\geq \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_1^\infty \frac{1}{x} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Όμοια, $\mathbf{E}(X^-) = \infty$.

7.3 Διακριτές κατανομές

Διακριτή κατανομή σε ένα σύνολο E λέμε ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον μετρήσιμο χώρο $(E, \mathscr{P}(E))$ για το οποίο υπάρχει ένα αριθμήσιμο σύνολο $S \subset E$ ώστε $\mathbf{P}(S) = 1$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathbf{P}(\{x\}) > 0$ για κάθε $x \in S$, αλλιώς αντικαθιστούμε το S με το $\hat{S} = \{x \in S : \mathbf{P}(\{x\}) > 0\}$. Για $A \subset S$, γράφουμε $A = \cup_{x\in A}\{x\}$, και επειδή το A είναι αριθμήσιμο, ισχύει

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{x\in A} \mathbf{P}(\{x\}). \tag{7.6}$$

Το $\mathbf{P}$ δίνει μάζα $\mathbf{P}(\{x\})$ σε κάθε σημείο $x \in S$ και μάζα μηδέν στο $E\backslash S$. Έτσι, για κάθε $A \subset E$ έχουμε $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap S)$ και

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{x\in A} \mathbf{P}(\{x\}). \tag{7.7}$$

Το άθροισμα στο δεξί μέλος έχει αριθμήσιμο πλήθος μη μηδενικών όρων. Αντιστοιχούν στα σημεία του $A \cap S$.

Η ολοκλήρωση ως προς το $\mathbf{P}$ είναι απλή υπόθεση. Έχουμε το εξής.

Πρόταση 7.10. *Έστω* $\mathbf{P}$ *διακριτό μέτρο πιθανότητας στο* E*. Τότε*

$$\int h(x)\,d\,\mathbf{P}(x) = \sum_{x\in E} h(x)\,\mathbf{P}(\{x\}) \tag{7.8}$$

για κάθε $h : E \to [-\infty, \infty]$*. Δηλαδή για κάθε τέτοια* h *ή και τα δύο μέλη ορίζονται και ισούνται ή και τα δύο δεν ορίζονται.*

Δεν έχουμε κάποια απαίτηση μετρησιμότητας από την h αφού η σ-άλγεβρα στο πεδίο ορισμού της h είναι η $\mathscr{P}(E)$.

Απόδειξη. Αν $h = \mathbf{1}_A$ με $A \subset E$, τότε η (7.8) είναι η (7.7). Αν $h \geq 0$ απλή, όπως στο δεξί μέλος της (5.3), τότε

$$\begin{aligned}\int h(x)\, d\,\mathbf{P}(x) &= \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mathbf{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{x\in A_i} \mathbf{P}(\{x\}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x\in A_i} h(x)\, \mathbf{P}(\{x\}) \\ &= \sum_{x\in E} h(x)\, \mathbf{P}(\{x\}).\end{aligned}$$

Έστω τώρα $h \geq 0$ μετρήσιμη. Αν το S είναι πεπερασμένο, η απόδειξη τελείωσε γιατί η h είναι απλή και αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση. Αν το S είναι άπειρο αριθμήσιμο, θεωρούμε $(s_n)_{n\geq 1}$ μια αρίθμηση του. Για $h : E \to [0, \infty]$ και κάθε $n \geq 1$ θέτουμε $h_n = \sum_{k=1}^{n} h(s_k)\mathbf{1}_{\{s_k\}}$. Η h_n είναι απλή με $0 \leq h_n \leq h$ και η ακολουθία $(h_n)_{n\geq 1}$ είναι αύξουσα και συγκλίνει στην h. Άρα, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int h(x)\, d\,\mathbf{P}(x) = \lim_{n\to\infty} \int h_n(x)\, d\,\mathbf{P}(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} h(s_k)\, \mathbf{P}(\{s_k\}) = \sum_{x\in S} h(x)\, \mathbf{P}(\{x\}) = \sum_{x\in E} h(x)\, \mathbf{P}(\{x\}).$$

Η περίπτωση που η h παίρνει τιμές στο $[-\infty, \infty]$ αντιμετωπίζεται όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 7.8. ∎

Διακριτή τυχαία μεταβλητή στο E λέμε μια τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to E$ της οποίας η εικόνα, $S := X(\Omega)$, είναι αριθμήσιμο σύνολο. Η κατανομή της, $\mathbf{P}^X$, είναι μια διακριτή κατανομή αφού $\mathbf{P}^X(S) = 1$. Ισχύει

$$\mathbf{E}\{h(X)\} = \sum_{x\in E} h(x)\, \mathbf{P}(X = x) \tag{7.9}$$

για όλες τις $h : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ για τις οποίες κάποιο από τα δύο μέλη της ισότητας έχει νόημα. Αυτό προκύπτει από την (7.1) και την (7.8) εφαρμοσμένη στο μέτρο $\mathbf{P}^X$ το οποίο έχει $\mathbf{P}^X(\{x\}) = \mathbf{P}(X = x)$ για κάθε $x \in E$. Ονομάζουμε τη συνάρτηση $f : E \to [0, 1]$ με $f(x) := \mathbf{P}(X = x)$ *συνάρτηση πιθανότητας* της X.

Ο τύπος (7.9) είναι γνωστός από τις στοιχειωδεις πιθανότητες.

7.4 Είδη κατανομών στο $\mathbb{R}$

Ανάμεσα σε όλες τις κατανομές (δηλαδή μέτρα πιθανότητας) στο $\mathbb{R}$ ξεχωρίζουμε τα εξής δύο είδη:

(i) Διακριτές.

(ii) Συνεχείς.

Ορίσαμε τις διακριτές σε γενικότερο πλαίσιο στην προηγούμενη παράγραφο. Έπειτα, λέμε μια κατανομή ν **συνεχή** αν η συνάρτηση κατανομής της, $F(x) := \nu((-\infty, x])$, είναι συνεχής συνάρτηση. Αυτό ισοδυναμεί με $\nu(\{x\}) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ [Άσκηση 4.3(α)], δηλαδή η κατανομή ν δεν έχει άτομα.

Ανάμεσα στις συνεχείς κατανομές ξεχωρίζουμε τα εξής δύο είδη:

(i) Απολύτως συνεχείς.

(ii) Ιδιάζουσες.

Αυτός ο διαχωρισμός προκύπτει από τη σχέση που έχει μια κατανομή με το μέτρο Lebesgue λ του $\mathbb{R}$. Έτσι, μια κατανομή ν στο $\mathbb{R}$ λέγεται **απολύτως συνεχής** αν έχει πυκνότητα, ενώ λέγεται **ιδιάζουσα** αν υπάρχει $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ με $\lambda(A) = 0$ και $\nu(A^c) = 0$. Δηλαδή το ν κατανέμει όλη του την μάζα σε ένα σύνολο (το A) που έχει μέτρο Lebesgue μηδέν. Επειδή το ν είναι μέτρο πιθανότητας μπορούμε να γράψουμε ισοδύναμα ότι $\lambda(A) = 0$ και $\nu(A) = 1$

Μια ισοδύναμη περιγραφή για τις ιδιάζουσες είναι αυτές των οποίων η συνάρτηση κατανομής, F, είναι συνεχής με παράγωγο $F'(x) = 0$, λ-σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$. Κατασκευή τέτοιας κατανομής γίνεται στην Άσκηση 7.9.

Αν ν_1, ν_2 είναι κατανομές που η πρώτη είναι διακριτή και η δεύτερη συνεχής, τότε η $(\nu_1 + \nu_2)/2$ είναι κατανομή που δεν είναι ούτε διακριτή ούτε συνεχής. Κάθε κατανομή έχει μια τέτοια ανάλυση σε κυρτό συνδυασμό κατανομών από τα «καθαρά» είδη.

Θεώρημα 7.11. *Αν μ είναι κατανομή στο $\mathbb{R}$, τότε γράφεται ως κυρτός συνδυασμός τριών κατανομών μ_d, μ_{ac}, μ_s με τη μ_d διακριτή, τη μ_{ac} απολύτως συνεχή, και τη μ_s ιδιάζουσα.*

Δηλαδή υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0, 1]$ με $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ και $\mu_d, \mu_{\text{ac}}, \mu_s$ όπως στην εκφώνηση ώστε

$$\mu = \lambda_1 \mu_d + \lambda_2 \mu_{ac} + \lambda_3 \mu_s.$$

Τα $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ καθορίζονται μοναδικά και κάθε κατανομή στο δεξί μέλος με μη μηδενικό συντελεστή καθορίζεται μοναδικά. Για την απόδειξη του θεωρήματος απαιτούνται προχωρημένες γνώσεις της θεωρίας παραγώγισης συναρτήσεων. Μπορεί να τη δει κανείς, για παράδειγμα, στο Παπαδάτος Ν. (2006), Παράγραφος 4.3.
Κατανομές που στην ανάλυσή τους έχουν τουλάχιστον δύο από τα $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ διαφορετικά από το 0 τις λέμε **μεικτές**.

Αντίστοιχα, σε μια τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to \mathbb{R}$ αποδίδουμε τον χαρακτηρισμό διακριτή, συνεχής, απολύτως συνεχής, ιδιάζουσα, ή μεικτή, ανάλογα με το τι είναι η κατανομή της. Ωστόσο, εδώ η χρήση του όρου «συνεχής» είναι καταχρηστική γιατί αποκαλώντας τη X συνεχή (ως τ.μ.) δεν σημαίνει ότι είναι συνεχής συνάρτηση. Μάλιστα ενδέχεται να μην έχει νόημα να εξετάσουμε αν η X είναι συνεχής ως συνάρτηση γιατί ο Ω δεν έχει απαραίτητα δομή μετρικού χώρου.

7.5 Ο μετασχηματισμός ποσοστημορίων*

Έστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις (i)-(iii) της Πρότασης 4.8. Ορίζουμε τη συνάρτηση $G : (0, 1) \to \mathbb{R}$ με

$$G(u) := \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < u\}. \tag{7.10}$$

Η G λέγεται **μετασχηματισμός ποσοστημορίων** της F. Όταν η F είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, τότε η G είναι η αντίστροφη, F^{-1}, της F. Η G είναι αύξουσα, και για $u \in (0, 1), z \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$G(u) \le z \Leftrightarrow u \le F(z) \tag{7.11}$$

Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση. Και για τις δύο κατευθύνσεις χρησιμοποιούμε το ότι η F είναι αύξουσα, ενώ για την κατεύθυνση $\Rightarrow$ χρησιμοποιούμε επιπλέον το ότι η F είναι δεξιά συνεχής.
Η G ως αύξουσα είναι μετρήσιμη (Άσκηση 5.5). Χρησιμοποιώντας την θα δείξουμε το δύσκολο κομμάτι του Θεωρήματος 4.12.

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.12: Έστω F που ικανοποιεί τα (i), (ii) και (iii) της Πρότασης 4.8. Θέτουμε $\mathbf{P} : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ με

$$\mathbf{P}(A) := \lambda(G^{-1}(A))$$

όπου λ είναι το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$. Ο ορισμός είναι καλός γιατί η G είναι μετρήσιμη.

Ισχυρισμος 1: Το $\mathbf{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας.
Το ότι είναι μέτρο είναι απλό. Για το ότι είναι μέτρο πιθανότητας, υπολογίζουμε

$$\mathbf{P}(\mathbb{R}) = \lambda(G^{-1}(\mathbb{R})) = \lambda((0,1)) = 1.$$

Ισχυρισμος 2: Το $\mathbf{P}$ έχει συνάρτηση κατανομής F.
Πράγματι. Γιατί για $x \in \mathbb{R}$, χρησιμοποιώντας την (7.11), έχουμε

$$G^{-1}((-\infty, x]) = \{u \in (0,1) : G(u) \le x\} = \{u \in (0,1) : u \le F(x)\} = (0, F(x)],$$

οπότε $\mathbf{P}((-\infty, x]) = \lambda((0, F(x)]) = F(x)$. ■

Παράφραση της ιδέας της προηγούμενης απόδειξης, με όρους τυχαίων μεταβλητών, είναι η εξής πρόταση.

Πρόταση 7.12. *Έστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις (i)-(iii) της Πρότασης 4.8, G όπως στην* (7.10), *και U τυχαία μεταβλητή με κατανομή την ομοιόμορφη στο* $(0,1)$. *Τότε η $X := G(U)$ έχει συνάρτηση κατανομής F.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$\mathbf{P}(G(U) \le x) = \mathbf{P}(U \le F(x)) = F(x).$$

Στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την (7.11). Στη δεύτερη ότι $F(x) \in [0,1]$ και ότι η U ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$. ■

Η πρόταση δίνει μια μέθοδο προσομοίωσης τυχαίων μεταβλητών. Αν έχουμε έναν μηχανισμό που παράγει ομοιόμορφες τυχαίες μεταβλητές, τότε μπορούμε να παραγάγουμε και οποιαδήποτε άλλη τυχαία μεταβλητή για την οποία είναι εύκολο να υπολογίσουμε τη συνάρτηση G που αντιστοιχεί στη συνάρτηση κατανομής της.

Παράδειγμα 7.13. Η συνάρτηση κατανομής της κατανομής $\exp(2)$ είναι $F(x) = (1 - e^{-2x})\mathbf{1}_{x \ge 0}$.

$$G(y) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\log(1-y) & \text{αν } y \in (0,1], \\ -\infty & \text{αν } y = 0. \end{cases}$$

Άρα με βάση την προηγούμενη πρόταση, έχουμε ότι, αν η U έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$, τότε η $-(1/2)\log(1-U)$ ακολουθεί την $\exp(2)$.

Ασκήσεις

7.1 Έστω $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbf{P}_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbf{P}_2)$ χώροι πιθανότητας, $(E, \mathcal{E}), (G, \mathcal{G})$ μετρήσιμοι χώροι, $X : \Omega_1 \to E, Y : \Omega_2 \to E$ τυχαίες μεταβλητές, και $f : E \to G$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $X \stackrel{d}{=} Y$, να δειχθεί ότι $f(X) \stackrel{d}{=} f(Y)$.

7.2 (Τυχαία μεταβλητή με δεδομένη κατανομή) Έστω $(E, \mathcal{E})$ μετρήσιμος χώρος και ν μέτρο πιθανότητας σε αυτόν. Να κατασκευαστεί χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to E$ έτσι ώστε η κατανομή της X να είναι ν.
[Υπόδειξη: Παίρνουμε $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = (E, \mathcal{E}, \nu)$.]

7.3 Να δειχθεί ότι οι μέσες τιμές στην ισότητα (7.1) ισούνται επίσης με

$$\int_{\bar{\mathbb{R}}} t \, d\,\mathbf{P}^{h(X)}(t).$$

7.4 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και X, $\mathbf{Q}$ όπως στο Παράδειγμα 6.32. Αν $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή, να δείξετε ότι

$$\int Y \, d\mathbf{Q} = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(YX)$$

για $Y \geq 0$ και για Y με $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(|Y|X) < \infty$.

7.5 Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή την κανονική $N(0,1)$. Για κάθε $x > 0$ να δειχθεί ότι

$$\frac{x}{x^2+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \leq \mathbf{P}(X > x) \leq \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}. \tag{7.12}$$

Δηλαδή, για μεγάλο x, έχουμε $\mathbf{P}(X > x) \sim cx^{-1}e^{-x^2/2}$ με $c = 1/\sqrt{2\pi}$.

7.6 Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$ και πυκνότητα άρτια συνάρτηση. Να δειχθεί ότι
(α) $\mathbf{E}\{h(X)\} = 2\,\mathbf{E}\{h(X)\mathbf{1}_{X>0}\}$ για κάθε $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη άρτια συνάρτηση με $\mathbf{E}\,|h(X)| < \infty$.
(β) $\mathbf{E}\{h(X)\} = 0$ για κάθε $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη περιττή συνάρτηση με $\mathbf{E}\,|h(X)| < \infty$.

7.7 Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$ και πυκνότητα f. Να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(f(X) = 0) = 0$.

7.8 Έστω X τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}(X^2) < \infty$. Να δειχθεί ότι η μέση τιμή $\mathbf{E}\,X$ είναι το μοναδικό σημείο που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $g(a) = \mathbf{E}\{(X-a)^2\}$.

7.9 (Η κατανομή Cantor) Η συνάρτηση Cantor $\phi : [0,1] \to [0,1]$ ορίζεται ως εξής. Αν έχουν οριστεί οι τιμές της ϕ στα άκρα ενός διαστήματος $I = [a,b] \subset [0,1]$, τότε το να εφαρμόσουμε τη διαδικασία T στη ϕ στο I σημαίνει να χωρίσουμε το I σε τρία διαδοχικά διαστήματα μήκους $|I|/3$ το καθένα και στην κλειστότητα του μεσαίου διαστήματος να ορίσουμε τη ϕ να παίρνει την τιμή $(\phi(a)+\phi(b))/2$. Ορίζουμε λοιπόν $\phi(0) = 0, \phi(1) = 1$ και εφαρμόζουμε στη ϕ τη διαδικασία T στο $[0,1]$. Έτσι, οι τιμές της ϕ έχουν οριστεί στο $[1/3, 2/3]$. Έπειτα εφαρμόζουμε τη διαδικασία T στα διαστήματα $[0,1/3], [2/3,1]$. Στα άκρα τους οι τιμές της ϕ είναι καθορισμένες από τα προηγούμενα βήματα. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο επ' άπειρον. Με αυτό τον τρόπο καθορίζονται οι τιμές της ϕ στο συμπλήρωμα του συνόλου Cantor C (και σε ένα αριθμήσιμο πλήθος σημείων ακόμα). Για τα υπόλοιπα σημεία του $[0,1]$ ορίζουμε $\phi(x) := \sup\{\phi(t) : t < x, t \in [0,1]\setminus C\}$.
(α) Να δειχθεί ότι η ϕ είναι αύξουσα και το σύνολο τιμών της είναι πυκνό στο $[0,1]$.
(β) Να δειχθεί ότι η ϕ είναι συνεχής και $\phi'(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]\setminus C$.
[Υπόδειξη: Η συνέχεια έπεται από το (α).]
(γ) Ορίζουμε $F(x) = \phi(x)$ για $x \in [0,1]$, $F(x) = 0$ για $x < 0$, και $F(x) = 1$ για $x > 1$. Η F έχει τις ιδιότητες συνάρτησης κατανομής, οπότε υπάρχει μέτρο πιθανότητας μ στο $\mathbb{R}$ που την έχει ως συνάρτηση κατανομής. Να δειχθεί ότι $\mu([0,1]\setminus C) = 0$.
(δ) Να δειχθεί ότι το μ δεν έχει άτομα (άρα είναι συνεχής κατανομή) αλλά δεν προκύπτει από πυκνότητα.

8

Τρόποι σύγκλισης τυχαίων μεταβλητών

Για μια ακολουθία $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τυχαίων μεταβλητών σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και με τιμές στο $[-\infty, \infty]$ γνωρίζουμε από τον απειροστικό λογισμό δύο βασικούς τρόπους σύγκλισης, την κατά σημείο και την ομοιόμορφη. Σε αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε κάποιες νέες, φυσιολογικές έννοιες σύγκλισης ως προς τις οποίες μια ακολουθία είναι ευκολότερο να συγκλίνει και επιπλέον είναι χρήσιμες στις εφαρμογές των πιθανοτήτων στη Στατιστική και αλλού.

Ορισμός 8.1. Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών όπως πιο πάνω.

(i) Λέμε ότι η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε μια τυχαία μεταβλητή X **με πιθανότητα 1** ή **σχεδόν βέβαια**, και γράφουμε $X_n \overset{\sigma.\beta.}{\to} X$, αν

$$\mathbf{P}\Big(\lim_{n\to\infty} X_n = X\Big) = 1,$$

δηλαδή

$$\mathbf{P}\Big(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\Big) = 1.$$

(ii) Για $p \geq 1$ και $X_n, X \in \mathcal{L}^p$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, λέμε ότι η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στη X **στον** $\mathcal{L}^p$, και γράφουμε $X_n \overset{\mathcal{L}^p}{\to} X$, αν

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(|X_n - X|^p) = 0.$$

(iii) Λέμε ότι η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στη X **κατά πιθανότητα**, και γράφουμε $X_n \overset{\mathbf{P}}{\to} X$, αν

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0$$

για κάθε $\epsilon > 0$.

Και για τα τρία είδη σύγκλισης του προηγούμενου ορισμού είναι απαραίτητο οι τυχαίες μεταβητές της ακολουθίας $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και η οριακή τυχαία μεταβλητή X να ορίζονται στον ίδιο χώρο πιθανότητας και να παίρνουν τιμές στο $[-\infty, \infty]$. Παντού σε αυτό το κεφάλαιο κάνουμε αυτή την υπόθεση χωρίς να το αναφέρουμε.

Αν $X_n \to X$ κατά σημείο, τότε βέβαια $X_n \overset{\sigma.\beta.}{\to} X$ αφού $\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\} = \Omega$. Στο επόμενο θεώρημα, βλέπουμε επίσης ότι η σχεδόν βέβαιη σύγκλιση και η σύγκλιση στον $\mathcal{L}^p$ είναι ισχυρότερες από τη σύγκλιση κατά πιθανότητα.

Θεώρημα 8.2. *Έστω X, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τυχαίες μεταβλητές και $p \geq 1$.*

(i) Αν $X_n \overset{\mathcal{L}^p}{\to} X$, τότε $X_n \overset{\mathbf{P}}{\to} X$.

(ii) Αν $X_n \overset{\sigma.\beta.}{\to} X$, τότε $X_n \overset{\mathbf{P}}{\to} X$.

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$.
(i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Markov, έχουμε

$$\mathbf{P}(|X_n - X| > \epsilon) = \mathbf{P}(|X_n - X|^p > \epsilon^p)|) \leq \frac{1}{\epsilon^p}\mathbf{E}(|X_n - X|^p).$$

Για $n \to \infty$ προκύπτει το ζητούμενο.
(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(|X_n - X| > \epsilon) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{|X_n - X| > \epsilon}) = \mathbf{E}(g_n),$$

όπου $g_n = \mathbf{1}_{|X_n - X| > \epsilon}$. Η $X_n \stackrel{\sigma.\beta.}{\to} X$ δίνει $g_n \stackrel{\sigma.\beta}{\to} 0$. Επίσης $|g_n| \le 1$, άρα από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(g_n) = \mathbf{E}(\lim_{n\to\infty} g_n) = 0.$$

■

Παράδειγμα 8.3. (i) Έστω $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathscr{B}([0,1])$ και $\mathbf{P}$ το μέτρο Lebesgue στο $[0,1]$. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $X = 0$ και για $n \in \mathbb{N}^+$ την τυχαία μεταβλητή

$$X_n(\omega) = \begin{cases} n & \text{αν } \omega \in (0, \frac{1}{n}), \\ 0 & \text{αν } \omega \in [0,1] \setminus (0, \frac{1}{n}). \end{cases}$$

Τότε $X_n(\omega) \to X(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$, άρα $X_n \stackrel{\sigma.\beta}{\to} X$. Επιπλέον, $X_n \stackrel{\mathbf{P}}{\to} X$. Όμως $X_n \stackrel{\mathcal{L}^p}{\nrightarrow} X$ για $p \ge 1$. Πράγματι,

$$\mathbf{E}(|X_n - X|^p) = \mathbf{E}(|X_n|^p) = n^p\,\mathbf{P}(X_n = n) + 0^p\,\mathbf{P}(X_n = 0) = n^p \frac{1}{n} = n^{p-1} \nrightarrow 0.$$

καθώς $n \to \infty$ γιατί $p \ge 1$.

(ii) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ όπως στο (i). Για κάθε $k \in \mathbb{N}^+$ χωρίζουμε το $[0,1]$ σε 2^k διαδοχικά κλειστά διαστήματα ίδιου μήκους, $J_1^k, J_1^k, \ldots, J_{2^k}^k$. Αριθμούμε τα $\{J_r^k : k \ge 1, 1 \le r \le 2^k\}$ σε μια ακολουθία $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε το $J_{r_1}^{\mu}$ εμφανίζεται νωρίτερα από το $J_{r_2}^{\nu}$ αν $\mu < \nu$ ή αν $\mu = \nu$ και $r_1 < r_2$. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $X_n = \mathbf{1}_{I_n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, για $p \ge 1$,

$$\mathbf{E}(|X_n - 0|^p) = \mathbf{E}(|X_n|^p) = \mathbf{P}(I_n) \to 0 \text{ για } n \to \infty.$$

[Μάλιστα η τελευταία πιθανότητα ανήκει στο διάστημα $[1/(n+2), 2/(n+2))$]. Άρα $X_n \stackrel{\mathcal{L}^p}{\to} 0$. Συνεπώς, $X_n \stackrel{\mathbf{P}}{\to} 0$. Όμως η X_n δεν συγκλίνει σε κάποια τυχαία μεταβλητή σχεδόν βέβαια. Πράγματι,

$$\varliminf_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0 < 1 = \varlimsup_{n\to\infty} X_n(\omega)$$

για κάθε $\omega \in \Omega$ αφού κάθε $\omega \in \Omega$ ανήκει σε άπειρα από τα I_n αλλά και δεν ανήκει σε άπειρα από αυτά. Άρα $\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} X_n \text{ υπάρχει}) = 0$.

Θεώρημα 8.4. *Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και X τυχαία μεταβλητή έτσι ώστε $X_n \stackrel{\mathbf{P}}{\to} X$. Τότε υπάρχει υπακολουθία $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^+}$ έτσι ώστε $X_{n_k} \stackrel{\sigma.\beta.}{\to} X$.*

Προσοχή. Η υπακολουθία δεν εξαρτάται από το $\omega \in \Omega$. Δηλαδή υπάρχει μία $(n_k)_{k\ge1}$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών (π.χ. η $n_k = k!$) ώστε σχεδόν για όλα τα $\omega \in \Omega$ να ισχύει $X_{n_k}(\omega) \to X(\omega)$.

Απόδειξη. Επιλέγουμε αναδρομικά μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών, $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, έτσι ώστε

$$\mathbf{P}\left(|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{2^k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}^+$. Αυτό είναι δυνατόν γιατί $X_n \stackrel{\mathbf{P}}{\to} X$. Έπειτα θεωρούμε τα σύνολα $A_k = \{|X_{n_k} - X| > 1/k\}$, $k \in \mathbb{N}^+$, τα οποία ικανοποιούν την

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι $\mathbf{P}(\limsup_{k\geq 1} A_k) = 0$ γιατί

$$\mathbf{P}(\limsup_{k\geq 1} A_k) = \mathbf{P}(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\cup_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) = 0.$$

Τότε το σύνολο $\Omega\setminus \limsup_{k\geq 1} A_k$ έχει πιθανότητα 1 και για κάθε $\omega \in \Omega\setminus \limsup_{k\geq 1} A_k$ υπάρχει $k(\omega) \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $k \geq k(\omega)$ να ισχύει $\omega \notin A_k$, δηλαδή $|X_{n_k}(\omega) - X(\omega)| \leq 1/k$, συνεπώς $X_{n_k}(\omega) \to X(\omega)$. Άρα $X_{n_k} \stackrel{\sigma.\beta.}{\to} X$. ∎

Θεώρημα 8.5. *Έστω $p \geq 1$ και $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X όπως στο Θεώρημα 8.4 με την επιπλέον υπόθεση ότι υπάρχει $Y \in \mathcal{L}^p$ ώστε $|X_n| \leq Y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $X \in \mathcal{L}^p$ και $X_n \stackrel{\mathcal{L}^p}{\to} X$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 8.4 υπάρχει υπακολουθία $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $X_{n_k} \stackrel{\sigma.\beta.}{\to} X$. Συνεπώς,

$$\mathbf{E}(|X|^p) = \mathbf{E}(\lim_{k\to\infty} |X_{n_k}|^p) \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \mathbf{E}(|X_{n_k}|^p) \leq \mathbf{E}(|Y|^p),$$

σύμφωνα με το λήμμα Fatou. Άρα $X \in \mathcal{L}^p$.

Έστω ότι $X_n \stackrel{\mathcal{L}^p}{\nrightarrow} X$. Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ και υπακολουθία $(X_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε

$$\mathbf{E}(|X_{\lambda_n} - X|^p) \geq \epsilon \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}. \tag{8.1}$$

Εφόσον $X_{\lambda_n} \stackrel{\mathbf{P}}{\to} X$, από το Θεώρημα 8.4, υπάρχει υπακολουθία $(X_{\lambda_{n_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ της $(X_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε $X_{\lambda_{n_k}} \stackrel{\sigma.\beta.}{\to} X$. Βεβαίως $|X| \leq Y$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, έστω $Z_k = |X_{\lambda_{n_k}} - X|^p$. Η ακολουθία $(Z_k)_{k\geq 1}$ συγκλίνει στο 0 σχεδόν βεβαίως και επειδή [1]

$$|Z_k| \leq 2^p(|X_{\lambda_{n_k}}|^p + |X|^p) \leq 2^p \cdot 2 \cdot Y^p,$$

κυριαρχείται από την $2^{p+1}Y^p$, που έχει πεπερασμένη μέση τιμή αφού $Y \in \mathcal{L}^p$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(Z_n) = \mathbf{E}(\lim_{n\to\infty} Z_n) = 0,$$

το οποίο συγκρούεται με την (8.1). Συνεπώς, $X_n \stackrel{\mathcal{L}^p}{\to} X$. ∎

Παρατηρήστε ότι λόγω του Παραδείγματος 8.3(i) η σχεδόν βέβαιη σύγκλιση δεν συνεπάγεται σύγκλιση στον $\mathcal{L}^p$ (για $p \geq 1$). Χρειάζεται να υποθέσουμε κάτι επιπλέον για να πάρουμε αυτή τη σύγκλιση. Επειδή η σχεδόν βέβαιη σύγκλιση συνεπάγεται την κατά πιθανότητα, το προηγούμενο θεώρημα δίνει ότι, όταν $X_n \to X$ σχεδόν βέβαια και υπάρχει $Y \in \mathcal{L}^p$ με $|X_n| \leq Y$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, τότε $X \in \mathcal{L}^p$ και $X_n \stackrel{\mathcal{L}^p}{\to} X$.

Οι συνεχείς συναρτήσεις διατηρούν τη σχεδόν βέβαιη σύγκλιση και τη σύγκλιση κατά πιθανότητα. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 8.6. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, X τυχαίες μεταβλητές.*

(i) Αν $X_n \stackrel{\sigma.\beta.}{\to} X$, τότε $f(X_n) \stackrel{\sigma.\beta}{\to} f(X)$.

(ii) Αν $X_n \stackrel{\mathbf{P}}{\to} X$, τότε $f(X_n) \stackrel{\mathbf{P}}{\to} f(X)$.

Απόδειξη. *(i)* Έστω $A = \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\}$. Τότε $\mathbf{P}(A) = 1$ και για $\omega \in A$ ισχύει ότι $f(X_n(\omega)) \to f(X(\omega))$ εφόσον η f είναι συνεχής. Άρα, αν $B = \{\omega \in \Omega : f(X_n(\omega)) \to f(X(\omega))\}$, έχουμε ότι $A \subset B$, συνεπώς $\mathbf{P}(B) = 1$, από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο. Σαφώς $A, B \in \mathcal{F}$ (Άσκηση 5.4).

(ii) Έστω ότι $f(X_n) \stackrel{\mathbf{P}}{\nrightarrow} f(X)$. Τότε υπάρχουν $\epsilon > 0, \delta > 0$, και γνήσια αύξουσα ακολουθία $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε $\mathbf{P}(|f(X_{n_k}) - f(X)| > \epsilon) \geq \delta$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathbf{P}(|f(X_n) - f(X)| > \epsilon) \geq \delta$

[1] Χρησιμοποιούμε το ότι $|a + b|^p \leq \{2\max(|a|, |b|)\}^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p)$.

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, διαφορετικά δουλεύουμε όμοια με την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, όπου $Y_k = X_{n_k}$.

Εφόσον $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$, από το Θεώρημα 8.4 υπάρχει υπακολουθία $(X_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε $X_{\lambda_n} \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$. Από το (i), $f(X_{\lambda_n}) \xrightarrow{\sigma.\beta.} f(X)$, άρα $f(X_{\lambda_n}) \xrightarrow{\mathbf{P}} f(X)$ το οποίο είναι άτοπο εφόσον $\mathbf{P}(|f(X_{\lambda_n}) - f(X)| > \epsilon) \geq \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, $f(X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} f(X)$. ∎

Ασκήσεις

Στις ασκήσεις αυτού του κεφαλαίου, όπου εμφανίζεται ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, θεωρούμε ότι όλες τους ορίζονται στον ίδιο χώρο πιθανότητας.

8.1 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$. Για $\varepsilon > 0$ και $n \geq 1$ θέτουμε $A_n^\varepsilon := \{|X_n| \geq \varepsilon\}$. Να δείξετε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $\mathbf{P}(\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0) = 1$.

(β) $\mathbf{P}(\limsup_{n\geq 1} A_n^\varepsilon) = 0$ για κάθε $\varepsilon > 0$.

8.2 Για $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές ορίζουμε

$$d(X,Y) := \mathbf{E}\left\{\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right\} \in [0,1].$$

(α) Για $X, Y, Z : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές να δειχθεί ότι:

(i) $d(X,Y) = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{P}(X = Y) = 1$.

(ii) $d(X,Y) = d(Y,X)$.

(iii) $d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$.

(β) Έστω $X, (X_n)_{n\geq 1}$ τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι $X_n \to X$ κατά πιθανότητα αν και μόνο αν $d(X_n, X) \to 0$.

8.3 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι $X_n \to 0$ κατά πιθανότητα αν και μόνο αν $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(|X_n| \wedge 1) = 0$.

8.4 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0$$

κατά πιθανότητα.

8.5 (Μοναδικότητα του ορίου) Αν μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει κατά πιθανότητα στην τυχαία μεταβλητή X αλλά και στην τυχαία μεταβλητή Y, τότε $X = Y$ με πιθανότητα 1.

8.6 Έστω $X, (X_n)_{n\geq 1}$ τυχαίες μεταβητές και $s \geq 1$. Αν $X_n \to X$ στον $\mathcal{L}^s$, να δειχθεί ότι:

(α) $\mathbf{E}(|X_n|^s) \to \mathbf{E}(|X|^s)$ για $n \to \infty$.

(β) $X_n \to X$ στον $\mathcal{L}^r$ για κάθε $r \in [1, s]$.

9

Μέτρα γινόμενο

9.1 Γινόμενο χώρων μέτρου. Πεπερασμένο πλήθος

Ένα μέτρο μ σε έναν μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ λέγεται **σ-πεπερασμένο** αν υπάρχει ακολουθία $(C_n)_{n\geq 1}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$ ώστε $\cup_{n=1}^{\infty} C_n = X$ και $\mu(C_n) < \infty$ για κάθε $n \geq 1$. Και τότε ο χώρος $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου.

Το μέτρο Lebesgue στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ όπως και το αριθμητικό μέτρο στον $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ είναι σ-πεπερασμένα, ενώ το αριθμητικό μέτρο στον $(\mathbb{R}, \mathscr{P}(\mathbb{R}))$ δεν είναι.

Έστω τώρα $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ δύο χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Θα ορίσουμε έναν νέο χώρο μέτρου τον οποίο θα ονομάσουμε το γινόμενό τους.

Μετρήσιμο ορθογώνιο στον $X \times Y$ λέμε κάθε σύνολο της μορφής $A \times B$ με $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$. Σ-άλγεβρα γινόμενο των $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ονομάζουμε τη σ-άλγεβρα που παράγεται από τα μετρήσιμα ορθογώνια, δηλαδή

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}).$$

Αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδικό μέτρο m στον μετρήσιμο χώρο $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ ώστε

$$m(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$. Το m ονομάζεται **μέτρο γινόμενο** των μ, ν και θα το συμβολίζουμε με $\mu \otimes \nu$. Ο χώρος $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ ονομάζεται **χώρος γινόμενο** των $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$.

Παράδειγμα 9.1. (i) Έστω μ_1 το αριθμητικό μέτρο στον $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$. Ο χώρος γινόμενο των $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu_1), (\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu_1)$, δηλαδή ο $(\mathbb{N}^2, \mathscr{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu_1 \otimes \mu_1)$, είναι κάτι απλό. Πρώτα $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{N}) = \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$ αφού η σ-άλγεβρα γινόμενο περιέχει τα μονοσύνολα $\{(m, n)\} = \{m\} \times \{n\}$ και έπειτα $\mu_1 \otimes \mu_1$ είναι το αριθμητικό μέτρο στον $\mathbb{N}^2$ αφού κάθε μονοσύνολο $\{(m, n)\}$, ως μετρήσιμο ορθογώνιο, έχει μέτρο

$$(\mu_1 \otimes \mu_1)(\{m\} \times \{n\}) = \mu_1(\{m\})\mu_1(\{n\}) = 1.$$

(ii) Έστω λ_1 το μέτρο Lebesgue στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Για τον χώρο γινόμενο των $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda_1), (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$ ισχύει ότι $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$, ενώ το μέτρο γινόμενο $\lambda_2 := \lambda_1 \otimes \lambda_1$ είναι το μέτρο που σε κάθε Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ δίνει το *εμβαδόν* του. Ονομάζεται μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^2$.

Ανάλογα ορίζεται ο χώρος γινόμενο για πεπερασμένο πλήθος σ-πεπερασμένων χώρων μέτρου $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i), i = 1, 2, \ldots, n$. Το μέτρο γινόμενο $m := \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ είναι το μοναδικό μέτρο στη σ-άλγεβρα γινόμενο με την ιδιότητα

$$m(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \cdots \mu_n(A_n)$$

για κάθε $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_n$.

Το γινομενο του $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$ n φορές με τον εαυτό του δίνει τον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$. Το μέτρο $\lambda_n := \lambda_1 \otimes \lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_1$ ονομάζεται μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$. Εκτός από τα λ_1, λ_2, γνώριμο είναι και το λ_3, το οποίο δίνει τον όγκο κάθε Borel υποσυνόλου του $\mathbb{R}^3$.

9.2 Ολοκλήρωση σε χώρο γινόμενο

Ένα ολοκλήρωμα ως προς το μέτρο γινόμενο σε έναν χώρο γινόμενο ανάγεται στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων στους χώρους που είναι παράγοντες του γινομένου. Όπως ακριβώς στον απειροστικό λογισμό, όπου υπολογίζουμε ένα διπλό ολοκλήρωμα (στον $\mathbb{R}^2$) με δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις στον $\mathbb{R}$.

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε το ανάλογο αποτέλεσμα στην περίπτωση του γινομένου δύο χώρων σ-πεπερασμένου μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$. Δεν θα δώσουμε όμως τις αποδείξεις για τα θεωρήματα που θα διατυπώσουμε. Οι αποδείξεις ακολουθούν την διαδικασία της τυπικής μηχανής (Παρατήρηση 7.3).

Το επόμενο αποτέλεσμα αφορά τη σ-άλγεβρα γινόμενο. Λέει ότι αν σε μια μετρήσιμη συνάρτηση δύο μεταβλητών σταθεροποιήσουμε τη μία, παίρνουμε μια συνάρτηση μιάς μεταβλητής η οποία είναι πάλι μετρήσιμη.

Θεώρημα 9.2. *Έστω $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ μετρήσιμοι χώροι και $f : X \times Y \to [-\infty, \infty]$, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}/\mathscr{B}([-\infty, \infty])$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε:*

(i) Για κάθε $x \in X$, η συνάρτηση $y \mapsto f(x, y)$ είναι $\mathcal{B}/\mathscr{B}([-\infty, \infty])$ μετρήσιμη.

(ii) Για κάθε $y \in Y$, η συνάρτηση $x \mapsto f(x, y)$ είναι $\mathcal{A}/\mathscr{B}([-\infty, \infty])$ μετρήσιμη.

Το πρώτο αποτέλεσμα για το ολοκλήρωμα ως προς το μέτρο γινόμενο αφορά μη αρνητικές συναρτήσεις.

Θεώρημα 9.3 (Tonelli)**.** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου, $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ ο χώρος γινόμενο και $f : X \times Y \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε οι συναρτήσεις*

$$x \mapsto \int f(x, y)\, \mathrm{d}\nu(y), \qquad y \mapsto \int f(x, y)\, \mathrm{d}\mu(x) \tag{9.1}$$

είναι $\mathcal{A}/\mathscr{B}([-\infty, \infty])$, $\mathcal{B}/\mathscr{B}([-\infty, \infty])$ μετρήσιμες, αντίστοιχα, και

$$\int f(x, y)\, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int \Big(\int f(x, y)\, \mathrm{d}\nu(y) \Big) \mathrm{d}\mu(x) = \int \Big(\int f(x, y)\, \mathrm{d}\mu(x) \Big) \mathrm{d}\nu(y). \tag{9.2}$$

Τα ολοκληρώματα στην (9.1) ορίζονται γιατί από το Θεώρημα 9.2 οι συναρτήσεις τις οποίες ολοκληρώνουμε είναι μετρήσιμες και επιπλέον είναι μη αρνητικές.

Όταν η συνάρτηση την οποία ολοκληρώνουμε δεν διατηρεί απαραίτητα πρόσημο, έχουμε το εξής αποτέλεσμα.

Θεώρημα 9.4 (Fubini)**.** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου, $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ ο χώρος γινόμενο και $f : X \times Y \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $\int |f(x, y)|\, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x, y) < \infty$, τότε ισχύουν οι ισχυρισμοί του Θεωρήματος 9.3.*

Από το Θεώρημα Tonelli,

$$\int |f(x, y)|\, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int \int |f(x, y)|\, \mathrm{d}\nu(y)\, \mathrm{d}\mu(x) = \int \int |f(x, y)|\, \mathrm{d}\mu(x)\, \mathrm{d}\nu(y). \tag{9.3}$$

Έτσι, όταν εφαρμόζουμε το Θεώρημα Fubini και θέλουμε να ελεγξουμε αν το ολοκλήρωμα $\int |f(x, y)|\, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x, y)$ είναι πεπερασμένο, ελέγχουμε αν είναι πεπερασμένο κάποιο από τα δύο διαδοχικά ολοκληρώματα στην (9.3).

Παρατήρηση 9.5. Συνήθως από το Θεώρημα Fubini χρησιμοποιούμε τη δεύτερη ισότητα στην (9.2), δηλαδή την ισότητα των διαδοχικών ολοκληρωμάτων, για να αλλάξουμε σειρά ολοκλήρωσης. Θα γράψουμε τώρα αυτή την ισότητα όταν τα δύο μέτρα είναι κάποια από τα εξής τρία: το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$, το αριθμητικό μέτρο στο $\mathbb{N}$ ή ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$. Υπό τις προϋποθέσεις του θεωρήματος κάθε φορά, έχουμε τις εξής ισότητες:

(i) Με $a_{n,k} = f(n,k)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k}.$$

(ii) Με $g_n(x) = f(n,x)$,

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dx.$$

(iii) Με $X_n(\omega) = f(n,\omega)$,

$$\mathbf{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{E}(X_n).$$

(iv)

$$\mathbf{E}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,\omega)\,dx\right) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{E}(f(x,\omega))\,dx.$$

Εφαρμογές αυτών των ισοτήτων θα δούμε στο υπόλοιπο αυτών των σημειώσεων, στη θεωρία ή στις ασκήσεις. Για τώρα θα δούμε μια εφαρμογή της πρώτης και μια της τέταρτης.

Παράδειγμα 9.6. Για κάθε $n \geq 1$ θέτουμε $s_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$. Θα δείξουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n}{n(n+1)} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Πράγματι, γράφουμε το άθροισμα ως

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\frac{1}{k}\mathbf{1}_{k\leq n} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\frac{1}{k}\mathbf{1}_{k\leq n}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

Στη δεύτερη ισότητα αλλάξαμε σειρά άθροισης, κάτι το οποίο επιτρέπεται καθώς όλοι οι προσθεταίοι είναι μη αρνητικοί (θεώρημα Tonelli). Στην προτελευταία ισότητα απλώς αθροίσαμε την τηλεσκοπική σειρά.

Παράδειγμα 9.7. Αν X είναι τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0,\infty)$, τότε ισχύει

$$\mathbf{E}\,X = \int_0^{\infty}\mathbf{P}(X>t)\,dt. \tag{9.4}$$

Πράγματι το δεξί μέλος γράφεται

$$\int_0^{\infty}\mathbf{E}(\mathbf{1}_{X>t})\,dt = \mathbf{E}\left(\int_0^{\infty}\mathbf{1}_{X>t}\,dt\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^{X} 1\,dt\right) = \mathbf{E}\,X$$

Εδώ η συνάρτηση δύο μεταβλητών την οποία ολοκληρώνουμε είναι η $f(t,\omega) = \mathbf{1}_{X(\omega)>t}$. Η εναλλαγή σειράς ολοκλήρωσης επιτρέπεται γιατί η συνάρτηση f είναι μη αρνητική, οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα Tonelli.

9.3 Γινόμενο χώρων πιθανότητας. Αυθαίρετο πλήθος

Θα ορίσουμε σε αυτή την παράγραφο χώρο γινόμενο αυθαίρετου (ενδεχομένως και άπειρου) πλήθους χώρων μέτρου. Μας ενδιαφέρει μόνο η περίπτωση που είναι όλοι χώροι πιθανότητας.

Έστω λοιπόν σύνολο δεικτών $I \neq \emptyset$ και $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i)$ χώρος πιθανότητας για κάθε $i \in I$. Θεωρούμε τον χώρο γινόμενο

$$\Omega = \prod_{i\in I} \Omega_i = \{(\omega_i)_{i\in I} : \omega_i \in \Omega_i \text{ για κάθε } i \in I\} = \left\{\omega : I \to \cup_{i\in I}\Omega_i \,\middle|\, \omega_i \in \Omega_i \text{ για κάθε } i \in I\right\}.$$

Μετρήσιμο κύλινδρο στο Ω λέμε κάθε $A \subset \Omega$ της μορφής

$$A = \prod_{i\in I} A_i$$

ώστε $A_i \in \mathcal{F}_i$ για κάθε $i \in I$, και με το σύνολο $J = \{i \in I : A_i \neq \Omega_i\}$ πεπερασμένο.

Δηλαδή ένας μετρήσιμος κύλινδρος είναι καρτεσιανό γινόμενο μετρήσιμων συνόλων, αλλά μόνο πεπερασμένα από αυτά διαφέρουν από τον δειγματικό χώρο του οποίου είναι υποσύνολα. Συμβολίζουμε με $\otimes_{i\in I}\mathcal{F}_i$ τη σ-άλγεβρα που παράγει το σύνολο των μετρήσιμων κυλίνδρων. Δηλαδή θέτουμε

$$\otimes_{i\in I}\mathcal{F}_i := \sigma(\{A \subset \Omega : A \text{ μετρήσιμος κύλινδρος}\}).$$

Για έναν μετρήσιμο κύλινδρο A όπως πριν, ορίζουμε

$$\mathbf{P}(A) := \prod_{i\in I} \mathbf{P}_i(A_i) = \prod_{i\in J} \mathbf{P}_i(A_i).$$

Το πρώτο γινόμενο δεν πρέπει να μας ανησυχεί γιατί, ακόμα και το I να είναι άπειρο, μόνο πεπερασμένοι όροι του γινομένου είναι διαφορετικοί του 1. Η δεύτερη ισότητα ισχύει γιατί ακριβώς παραλείπουμε όρους του γινομένου που είναι σίγουρα 1, δηλαδή αυτούς με $i \in I \backslash J$.

Αποδεικνύεται ότι η $\mathbf{P}$ επεκτείνεται μοναδικά σε μέτρο πιθανότητας στη σ-άλγεβρα $\otimes_{i\in I}\mathcal{F}_i$. Ονομάζουμε αυτή την επέκταση **μέτρο γινόμενο** των $(\mathbf{P}_i)_{i\in I}$ και το συμβολίζουμε με $\otimes_{i\in I}\mathbf{P}_i$. Αν το I είναι πεπερασμένο, έστω $I = \{1, 2, \dots, n\}$, το συμβολίζουμε με $\mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{P}_n$.

Έχουμε λοιπόν ορίσει έναν νέο χώρο πιθανότητας, τον **χώρο γινόμενο**

$$\Big(\prod_{i\in I} \Omega_i, \otimes_{i\in I}\mathcal{F}_i, \otimes_{i\in I}\mathbf{P}_i\Big)$$

των $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i) : i \in I\}$. Η χρησιμότητά του θα φανεί στην Παράγραφο 10.4.

Παράδειγμα 9.8 (Ένας υπολογισμός σε χώρο γινόμενο)**.** Θεωρούμε το πείραμα ρίψης ενός νομίσματος άπειρες (αριθμήσιμες) φορές που φέρνει K με πιθανότητα $p \in (0, 1)$. Ας δούμε τον χώρο πιθανότητας του πειράματος.

Για $i = 1, 2, 3, \dots$ η i–οστή ρίψη έχει χώρο πιθανότητας $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i) = (\{K, \Gamma\}, \mathscr{P}(\{K, \Gamma\}), \mathbf{P}^p)$, όπου $\mathbf{P}^p$ το μέτρο με $\mathbf{P}^p(\{K\}) = p$ και $\mathbf{P}^p(\{\Gamma\}) = 1 - p$. Ο χώρος πιθανότητας για όλο το πείραμα είναι ο χώρος γινόμενο των $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i) : i \in \mathbb{N}^+\}$.

Ας υπολογίσουμε τώρα την πιθανότητα στις ρίψεις 2, 3 και 5 το αποτέλεσμα να είναι K, K, Γ αντίστοιχα. Το ενδεχόμενο είναι ο μετρήσιμος κύλινδρος

$$A = \{K, \Gamma\} \times \{K\} \times \{K\} \times \{K, \Gamma\} \times \{\Gamma\} \times \prod_{i\geq 6} \Omega_i.$$

Άρα

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}_2(\{K\})\,\mathbf{P}_3(\{K\})\,\mathbf{P}_5(\{\Gamma\}) = p^2(1 - p).$$

Ασκήσεις

9.1 Έστω $(q_k)_{k\geq 1}$ μια αρίθμηση των ρητών του $(0,1)$. Ορίζουμε $f:\mathbb{R}\to[0,\infty]$ ως

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{1}{\sqrt{|x-q_n|}}.$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι το μέτρο Lebesgue των σημείων του $(0,1)$ στα οποία η f απειρίζεται είναι 0, δηλαδή ότι η f είναι σχεδόν παντού πεπερασμένη.
[Υπόδειξη: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της f στο $(0,1)$ ως προς το μέτρο Lebesgue.]

9.2 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0,\infty)$.
(α) Για $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(g(X))=g(0)+\int_0^{\infty}g'(t)\,\mathbf{P}(X>t)\,dt$$

υποθέτοντας ότι $g'\geq 0$ ή ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει απολυτα.
(β) Για $p>0$ ισχύει

$$\mathbf{E}(X^p)=p\int_0^{\infty}t^{p-1}\,\mathbf{P}(X>t)\,dt,$$

και επιπλέον, αν η X παίρνει ακέραιες μη αρνητικές τιμές, τότε

$$\mathbf{E}(X^p)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(X\geq k)(k^p-(k-1)^p).$$

9.3 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$ για την οποία ορίζεται η $\mathbf{E}(X)$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(X)=\int_0^{\infty}\mathbf{P}(X\geq t)\,dt-\int_{-\infty}^{0}\mathbf{P}(X\leq t)\,dt.$$

9.4 **Διάμεσο** ενός μέτρου πιθανότητας ν στο $\mathbb{R}$ λέμε οποιονδήποτε αριθμό m ικανοποιεί τις

$$\nu((-\infty,m])\geq\frac{1}{2},\nu([m,\infty))\geq\frac{1}{2}.$$

Διάμεσο μιας τυχαίας μεταβλητής με τιμές στο $\mathbb{R}$ λέμε οποιονδήποτε διάμεσο της κατανομής της.
(α) Να δειχθεί ότι κάθε μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον έναν διάμεσο και να δοθεί παράδειγμα όπου ο διάμεσος δεν είναι μοναδικός.
(β) Έστω X τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}|X|<\infty$ και της οποίας η συνάρτηση κατανομής είναι συνεχής. Να δειχθεί ότι οι διάμεσοι της X είναι ακριβώς τα σημεία στα οποία παίρνει το ολικό της ελάχιστο η συνάρτηση $f(a):=\mathbf{E}|X-a|$.
(γ) Έστω X τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μ, διάμεσο m, και διασπορά σ^2. Να δειχθεί ότι

$$|m-\mu|\leq\sigma$$

και η ισότητα ισχύει μόνο όταν η X είναι σταθερή.

10

Ανεξαρτησία

10.1 Ανεξαρτησία για οικογένειες συνόλων και τυχαίες μεταβλητές

Στην παράγραφο αυτή δουλεύουμε σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Δίνουμε καταρχάς τον ορισμό της ανεξαρτησίας για ενδεχόμενα, σύνολα ενδεχομένων, και τυχαίες μεταβλητές.

Ορισμός 10.1. Έστω $(A_i)_{i\in I}$ στοιχεία της $\mathcal{F}$. Τα $(A_i)_{i\in I}$ λέγονται **ανεξάρτητα** αν για κάθε $J \subset I$ πεπερασμένο ισχύει ότι

$$\mathbf{P}\left(\cap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} \mathbf{P}(A_i). \tag{10.1}$$

Η τομή και το γινόμενο στην τελευταία ισότητα έχουν πεπερασμένο πλήθος όρων.

Ορισμός 10.2. Έστω $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ οικογένεια υποσυνόλων της $\mathcal{F}$ (δηλαδή $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$ για κάθε $i \in I$). Η οικογένεια $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ λέγεται **ανεξάρτητη** αν για κάθε $J \subset I$ πεπερασμένο και $A_i \in \mathcal{F}_i$ για κάθε $i \in J$ ισχύει η (10.1). Λέμε επίσης ότι τα $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ είναι ανεξάρτητα.

Ορισμός 10.3. Έστω $\{(E_i, \mathcal{E}_i) : i \in I\}$ μετρήσιμοι χώροι και $(X_i)_{i\in I}$ οικογένεια τυχαίων μεταβλητών με $X_i : \Omega \to E_i$ για κάθε $i \in I$. Οι $(X_i)_{i\in I}$ λέγονται **ανεξάρτητες** αν η οικογένεια των σ-αλγεβρών $(\sigma(X_i))_{i\in I}$, που είναι υποσύνολα της $\mathcal{F}$, είναι ανεξάρτητη.

Παρατήρηση 10.4. Ο Ορισμός 10.3, σύμφωνα με τον Ορισμό 10.2, απαιτεί

$$\mathbf{P}(X_{i_1} \in A_{i_1}, X_{i_2} \in A_{i_2}, \dots, X_{i_n} \in A_{i_n}) = \mathbf{P}(X_{i_1} \in A_{i_1})\,\mathbf{P}(X_{i_2} \in A_{i_2}) \cdots \mathbf{P}(X_{i_n} \in A_{i_n}) \tag{10.2}$$

για κάθε $n \geq 2$, κάθε επιλογή δεικτών $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$, και κάθε $A_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \dots, A_{i_n} \in \mathcal{E}_{i_n}$, αφού κάθε στοιχείο μιας $\sigma(X_i)$ είναι της μορφής $X_i^{-1}(A_i) = \{X_i \in A_i\}$ με $A_i \in \mathcal{E}_i$. Το ενδεχόμενο στο αριστερό μέλος της (10.2) είναι συντομογραφία του ενδεχομένου $X_{i_1}^{-1}(A_{i_1}) \cap X_{i_2}^{-1}(A_{i_2}) \cap \cdots \cap X_{i_n}^{-1}(A_{i_n})$.

Σύμβαση: Στο εξής, όποτε λέμε ότι κάποιες τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες, θα εννοείται ότι ορίζονται στον ίδιο χώρο πιθανότητας, δηλαδή έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού. Αυτό εξασφαλίζει ότι το ενδεχόμενο $X_{i_1}^{-1}(A_{i_1}) \cap X_{i_2}^{-1}(A_{i_2}) \cap \cdots \cap X_{i_n}^{-1}(A_{i_n})$ στο αριστερό μέλος της (10.2) είναι στοιχείο της $\mathcal{F}$, που είναι το πεδίο ορισμού της $\mathbf{P}$.

Παράδειγμα 10.5 (Δυό ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές)**.** Θεωρούμε το πείραμα δύο ρίψεων ενός νομίσματος που φέρνει κορώνα με πιθανότητα p. Το σύνηθες μέτρο που μοντελοποιεί το πείραμα είναι τέτοιο ώστε τα αποτελέσματα των δύο ρίψεων να είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Πιο συγκεκριμένα, ο δειγματικός μας χώρος είναι ο $\Omega = \{K, \Gamma\} \times \{K, \Gamma\}$ και σ-άλγεβρα η $\mathcal{F} = \mathscr{P}(A)$. Για $\omega \in \Omega$ θέτουμε

$$p_\omega = \begin{cases} p(1-p) & \text{αν } \omega = (K, \Gamma) \text{ ή } (\Gamma, K), \\ p^2 & \text{αν } \omega = (K, K), \\ (1-p)^2 & \text{αν } \omega = (\Gamma, \Gamma). \end{cases}$$

Έστω $\mathbf{P}$ το μοναδικό μέτρο πιθανότητας στην $\mathcal{F}$ με $\mathbf{P}(\omega) = p_\omega$. Έστω $E = \{K, \Gamma\}$ και $\mathcal{E} = \mathscr{P}(E)$. Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές $X, Y : \Omega \to E$, με $X((x, y)) = x$ και $Y((x, y)) = y$. Δηλαδή, η X είναι η ένδειξη της πρώτης ρίψης και η Y η ένδειξη της δεύτερης.

Ισχυρισμος: Οι X, Y είναι ανεξάρτητες.
Θα δείξουμε ότι για κάθε $A, B \in \mathcal{E}$ ισχύει

$$\mathbf{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbf{P}(X \in A)\,\mathbf{P}(Y \in B). \tag{10.3}$$

- Αν $A = \emptyset$ ή $B = \emptyset$, η (10.3) ισχύει.
- Αν $A = \{K, \Gamma\}$, τότε $\{X \in A, Y \in B\} = \{Y \in B\}$, και $\mathbf{P}(X \in A) = 1$. Άρα η (10.3) πάλι ισχύει.
- Αν $B = \{K, \Gamma\}$, η (10.3) αποδεικνύεται όμοια.

Τέλος, μένουν οι περιπτώσεις που τα A, B είναι μονοσύνολα. Για παράδειγμα, αν $A = \{K\}$ και $B = \{\Gamma\}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X = K, Y = \Gamma) &= \mathbf{P}(X^{-1}(\{K\}) \cap Y^{-1}(\{\Gamma\})) = \mathbf{P}(\{(K, \Gamma), (K, K)\} \cap \{(K, \Gamma), (\Gamma, \Gamma)\})\\ &= \mathbf{P}(\{K, \Gamma\}) = p(1 - p).\end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X = K) &= \mathbf{P}(\{(K, \Gamma), (K, K)\}) = p(1 - p) + pp = p\\ \mathbf{P}(Y = \Gamma) &= \mathbf{P}(\{(K, \Gamma), (\Gamma, \Gamma)\}) = p(1 - p) + (1 - p)^2 = 1 - p,\end{aligned}$$

που το γινόμενό τους είναι $p(1 - p) = \mathbf{P}(X = K, Y = \Gamma)$, και έτσι η (10.3) ισχύει πάλι.
Όμοια αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες περιπτώσεις όπου τα A, B είναι μονοσύνολα.

Το επόμενο θεώρημα διευκολύνει τον έλεγχο ανεξαρτησίας δύο τυχαίων μεταβλητών.

Θεώρημα 10.6. *Έστω $(E, \mathcal{E})$, $(G, \mathcal{G})$ μετρήσιμοι χώροι και $X : \Omega \to E$, $Y : \Omega \to G$ τυχαίες μεταβλητές. Θεωρούμε τη σχέση*

$$\mathbf{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbf{P}(X \in A)\,\mathbf{P}(Y \in B). \tag{$*$}$$

Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) Οι X, Y είναι ανεξάρτητες.

(ii) Η $(*)$ ισχύει για κάθε $A \in \mathcal{E}$ και $B \in \mathcal{G}$.

(iii) Η $(*)$ ισχύει για κάθε $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{D}$, όπου $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ οικογένειες κλειστές στις πεπερασμένες τομές με $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$, $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{G}$.

Σημαντική είναι η ισοδυναμία των (*i*) και (*iii*). Δηλαδή αρκεί να ελέγξουμε την $(*)$ για λιγότερα σύνολα από ότι απαιτεί η (*ii*) ώστε να διαπιστώσουμε την ανεξαρτησία των X, Y.

Απόδειξη. Η (ii) είναι αναδιατύπωση του ορισμού της ανεξαρτησίας και προφανώς συνεπάγεται την (iii). Μένει να δείξουμε ότι η (iii) συνεπάγεται την (ii).

Έστω $A \in \mathcal{C}$ και

$$\mathcal{D}_1(A) := \{B \in \mathcal{G} : \text{ η } (*) \text{ ισχύει για τα } A, B\}.$$

Έχουμε ότι $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_1(A)$ από υπόθεση και η $\mathcal{D}_1(A)$ είναι κλάση Dynkin (Άσκηση 3.1). Άρα $\delta(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}_1(A)$. Επειδή η $\mathcal{D}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, το θεώρημα π-λ δίνει ότι $\sigma(\mathcal{D}) = \delta(\mathcal{D})$. Άρα $\sigma(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}_1(A)$, δηλαδή η $(*)$ ισχύει για κάθε $A \in \mathcal{C}$ και $B \in \mathcal{G}$. Τώρα για $B \in \mathcal{G}$ θέτουμε

$$\mathcal{D}_2(B) := \{A \in \mathcal{E} : \text{ η } (*) \text{ ισχύει για τα } A, B\}.$$

Όμοια, όπως με το $\mathcal{D}_1(A)$, δείχνουμε ότι $\mathcal{D}_2(B) = \mathcal{E}$, και έτσι αποδείχθηκε η (ii). ∎

Στις στοιχειώδεις πιθανότητες μαθαίνουμε (χωρίς απόδειξη) ότι δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν η από κοινού συνάρτηση κατανομή τους, $F_{X,Y}$, γράφεται ως $F_{X,Y}(x, y) = F_X(y)F_Y(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Τώρα είμαστε σε θέση να το αποδείξουμε.

Πόρισμα 10.7. *Έστω $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές. Τότε οι X, Y είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν*

$$\mathbf{P}(X \le x, Y \le y) = \mathbf{P}(X \le x)\,\mathbf{P}(Y \le y)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Προκύπτει από το Θεώρημα 10.6 αν πάρουμε $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$. ■

Θεώρημα 10.8. *Έστω $X, Y : \Omega \to [-\infty, \infty]$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές μη αρνητικές ή με $\mathbf{E}\,|X|, \mathbf{E}\,|Y| < \infty$. Τότε*

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y).$$

Απόδειξη. Το σχέδιο της απόδειξης είναι να δείξουμε κάτι φαινομενικά ισχυρότερο. Δηλαδή το εξής. Ισχυρισμος:

$$\mathbf{E}\{f(X)g(Y)\} = \mathbf{E}(f(X))\,\mathbf{E}(g(Y)) \tag{10.4}$$

για κάθε $f : [-\infty, \infty] \to [-\infty, \infty]$, $g : [-\infty, \infty] \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμες που είναι μη αρνητικές ή ικανοποιούν $\mathbf{E}\,|f(X)|, \mathbf{E}\,|g(Y)| < \infty$.

Θα δείξουμε την (10.4) σταδιακά με τον γνωστό τρόπο (Τυπική Μηχανή).

Βήμα 1. Αν $f = \mathbf{1}_A$ και $g = \mathbf{1}_B$, όπου $A, B \in \mathscr{B}([-\infty, \infty])$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(f(X)g(Y)) &= \mathbf{E}(\mathbf{1}_{X\in A}\mathbf{1}_{Y\in B}) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{X\in A\}\cap\{Y\in B\}}) = \mathbf{P}(X \in A, Y \in B)\\ &= \mathbf{P}(X \in A)\,\mathbf{P}(Y \in B) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{X\in A})\,\mathbf{E}(\mathbf{1}_{Y\in B}).\end{aligned}$$

Η τέταρτη ισότητα ισχύει γιατί οι X, Y είναι ανεξάρτητες. Και έτσι προκύπτει η (10.4) για τις συγκεκριμένες f, g.

Βήμα 2. Αν $f, g \ge 0$ απλές μετρήσιμες, έστω

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathbf{1}_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{1}_{B_j},$$

σε κανονική μορφή, όπου $A_i, B_j \in \mathscr{B}([-\infty, \infty])$, τότε

$$\mathbf{E}(f(X)g(Y)) = \mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \mathbf{1}_{A_i}(X)\mathbf{1}_{B_j}(Y)\Big).$$

Και λόγω γραμμικότητας και του προηγούμενου βήματος, η τελευταία μέση τιμή ισούται με

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j\,\mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_i}(X))\,\mathbf{E}(\mathbf{1}_{B_j}(Y)) = \mathbf{E}(f(X))\,\mathbf{E}(g(Y)).$$

Βήμα 3. Αν $f, g \ge 0$ μετρήσιμες, τότε υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μη αρνητικών απλών συναρτήσεων έτσι ώστε

$$\lim_{n\to\infty} r_n = f, \quad \lim_{n\to\infty} s_n = g.$$

Συνεπώς, από τα προηγούμενα έχουμε ότι

$$\mathbf{E}(r_n(X)s_n(Y)) = \mathbf{E}(r_n(X))\,\mathbf{E}(s_n(Y)) \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Επειδή οι ακολουθίες $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες, για $n \to \infty$, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι

$$\mathbf{E}(f(X)g(Y)) = \mathbf{E}(f(X))\,\mathbf{E}(g(Y)).$$

Δηλαδή η (10.4) ισχύει για τις f, g.
Βήμα 4. Αν οι f, g είναι μετρήσιμες με $\mathbf{E}\,|f(X)|, \mathbf{E}\,|g(Y)| < \infty$, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{f(X)g(Y)\} &= \mathbf{E}\{(f^+(X) - f^-(X))(g^+(Y) - g^-(Y))\}\\ &= \mathbf{E}\{f^+(X)g^+(Y)\} - \mathbf{E}\{f^+(X)g^-(Y)\} - \mathbf{E}\{f^-(X)g^+(Y)\} + \mathbf{E}\{f^-(X)g^-(Y)\}\\ &= \mathbf{E}(f^+(X))\,\mathbf{E}(g^+(Y)) - \mathbf{E}(f^+(X))\,\mathbf{E}(g^-(Y)) - \mathbf{E}(f^-(X))\,\mathbf{E}(g^+(Y)) + \mathbf{E}(f^-(X))\,\mathbf{E}(g^-(Y))\\ &= \mathbf{E}(f(X))\,\mathbf{E}(g(Y)).\end{aligned}$$

Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι η (10.4) ισχύει για μη αρνητικές μετρήσιμες. Επίσης στον τελευταίο υπολογισμό δεν εμφανίζεται πουθενά κάποια απροσδιόριστη μορφή $\infty - \infty$ γιατί οι f, g ικανοποιούν $\mathbf{E}\,|f(X)|, \mathbf{E}\,|g(Y)| < \infty$. Έτσι ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Επιστρέφουμε τώρα στην απόδειξη του θεωρήματος. Αν $X, Y \geq 0$, εφαρμόζουμε τον ισχυρισμό για

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \in [0, \infty],\\ 0 & \text{αν } x \in [-\infty, 0).\end{cases}$$

Στην περίπτωση που $\mathbf{E}\,|X|, \mathbf{E}\,|Y| < \infty$, εφαρμόζουμε τον ισχυρισμό για $f(x) = g(x) = x$ για κάθε $x \in [-\infty, \infty]$. ■

Παρατήρηση 10.9. Ανάλογα των Θεωρημάτων 10.6, 10.8 ισχύουν αν αντί δύο έχουμε περισσότερες ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Για παράδειγμα, η αντίστοιχη της (10.4) είναι η

$$\mathbf{E}\{f_1(X_1)f_2(X_2)\cdots f_n(X_n)\} = \mathbf{E}\{f_1(X_1)\}\,\mathbf{E}\{f_2(X_2)\}\cdots\mathbf{E}\{f_n(X_n)\}$$

με τις $f_1, f_2, \ldots, f_n$ μετρήσιμες και μη αρνητικές ή με $\mathbf{E}\,|f_k(X_k)| < \infty$ για κάθε k. Η απόδειξη των αντίστοιχων αυτών ισχυρισμών γίνεται με επαγωγή.

Υπενθυμίζουμε εδώ ότι για $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ τυχαίες μεταβλητές στον ίδιο χώρο πιθανότητας, με πραγματικές τιμές και με $\mathbf{E}(X_k^2) < \infty$ για κάθε $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ισχύει

$$\operatorname{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \operatorname{Var}(X_1) + \cdots + \operatorname{Var}(X_n) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\operatorname{Cov}(X_i, X_j). \tag{10.5}$$

Η απόδειξη γίνεται όπως ακριβώς την έχουμε δει στις στοιχειώδεις πιθανότητες. Όταν οι $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ είναι ανεξάρτητες, το προηγούμενο θεώρημα δίνει ότι όλες οι συνδιακυμάνσεις είναι 0, οπότε

$$\operatorname{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \operatorname{Var}(X_1) + \cdots + \operatorname{Var}(X_n). \tag{10.6}$$

10.2 Ανεξαρτησία και ομαδοποίηση

Αν οι τυχαίες μεταβλητές X, Y, Z, V, W είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, περιμένουμε και οι $X+Y, Z^2W, |V|$ να είναι ανεξάρτητες εφόσον χρησιμοποιούν διαφορετικά ανεξάρτητα συστατικά. Θα διατυπώσουμε ένα θεώρημα που δίνει αποτελέσματα αυτής της μορφής. Προηγουμένως, διατυπώνουμε το αντίστοιχο αποτέλεσμα για οικογένειες συνόλων. Η απόξειξή του δίνεται στο Παράρτημα Β΄.

Θεώρημα 10.10. *Έστω $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ ανεξάρτητη οικογένεια υποσυνόλων της $\mathcal{F}$ και $\{I_j : j \in J\}$ διαμέριση [1] του συνόλου δεικτών I. Για κάθε $j \in J$ θεωρούμε τη σ-άλγεβρα*

$$\mathcal{G}_j := \sigma\left(\cup_{i\in I_j}\mathcal{F}_i\right).$$

Οι $(\mathcal{G}_j)_{j\in J}$ είναι ανεξάρτητες.

[1] Δηλαδή τα $I_j (j \in J)$, είναι μη κενά, ξένα ανα δύο, και έχουν ένωση το I.

Και το αποτέλεσμα που αφορά τυχαίες μεταβλητές είναι το εξής.

Θεώρημα 10.11. *Έστω $(X_i)_{i\in I}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, $\{I_j : j \in J\}$ διαμέριση του συνόλου δεικτών I, και για κάθε $j \in J$, μετρήσιμη συνάρτηση $f_j : \mathbb{R}^{I_j} \to \mathbb{R}$. Για κάθε $j \in J$ θεωρούμε τη συνάρτηση $Y_j := f_j((X_i)_{i\in I_j}) : \Omega \to \mathbb{R}$. Οι $(Y_j)_{j\in J}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.*

Για αυτό το θεώρημα, σε πρώτη ανάγνωση καλό είναι να υποθέσει κανείς ότι τα σύνολα I, I_j είναι πεπερασμένα και επομένως οι συναρτήσεις f_j ορίζονται σε χώρους της μορφής $\mathbb{R}^d$. Σε όλες τις περιπτώσεις θεωρούμε ότι ο $\mathbb{R}^{I_j}$ είναι εφοδιασμένος με τη σ-άλγεβρα γινόμενο $\otimes_{i\in I_j}\mathscr{B}(\mathbb{R})$ (όλοι οι όροι του γινομένου είναι ίδιοι). Η απόδειξη και αυτού του θεωρήματος δίνεται στο Παράρτημα Β′.

Εφαρμόζοντάς το έχουμε, για παράδειγμα, ότι αν οι τυχαίες μεταβλητές $(X_n)_{n\ge1}$ είναι ανεξάρτητες, τότε και οι $(Y_n)_{n\ge1}$ με $Y_n := \sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} X_i$ για κάθε $n \ge 1$ είναι ανεξάρτητες. Όμοια, είναι ανεξάρτητα και τα σύνολα $\{X_{2n} + X_{2n+1} > 0\}, n \ge 1$.

10.3 Ανεξαρτησία=Μέτρο γινόμενο

Πρόταση 10.12. *Έστω $X := (X_1, X_2, \dots, X_n)$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στον $\mathbb{R}^n$. Τότε οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν*

$$\mathbf{P}^X = \mathbf{P}^{X_1} \otimes \mathbf{P}^{X_2} \otimes \ldots \otimes \mathbf{P}^{X_n}.$$

Απόδειξη. $\Rightarrow$ Η τιμή του μέτρου $\mathbf{P}^X$ σε έναν μετρήσιμο κύλινδρο $A := A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ του $\mathbb{R}^n$ είναι

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^X(A) &= \mathbf{P}(X_1 \in A_1, \cdots, X_n \in A_n) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1)\,\mathbf{P}(X_2 \in A_2)\cdots\mathbf{P}(X_n \in A_n)\\ &= \mathbf{P}^{X_1}(A_1)\,\mathbf{P}^{X_2}(A_2)\cdots\mathbf{P}^{X_n}(A_n).\end{aligned}$$

Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία των $X_1, \dots, X_n$. Όμως το $\mathbf{P}^{X_1} \otimes \mathbf{P}^{X_2} \otimes \ldots \otimes \mathbf{P}^{X_n}$ είναι το μοναδικό μέτρο που παίρνει την τιμή $\mathbf{P}^{X_1}(A_1)\,\mathbf{P}^{X_2}(A_2)\cdots\mathbf{P}^{X_n}(A_n)$ στο A. Η ζητούμενη ισότητα έπεται.

$\Leftarrow$ Ελέγχουμε τη σχέση (10.2). Έστω $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Τότε

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_1 \in A_1, \cdots, X_n \in A_n) &= \mathbf{P}^{X_1} \otimes \mathbf{P}^{X_2} \otimes \ldots \otimes \mathbf{P}^{X_n}(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)\\ &= \mathbf{P}^{X_1}(A_1)\,\mathbf{P}^{X_2}(A_2)\cdots\mathbf{P}^{X_n}(A_n)\\ &= \mathbf{P}(X_1 \in A_1)\,\mathbf{P}(X_2 \in A_2)\cdots\mathbf{P}(X_n \in A_n).\end{aligned}$$

Στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση και στη δεύτερη τον ορισμό του μέτρου γινομένου. ∎

Η προηγούμενη πρόταση σε συνδυασμό με τα θεωρήματα Tonelli και Fubini μας δίνει τον πιο συνηθισμένο τρόπο υπολογισμού της μέσης τιμής ποσοτήτων που είναι συναρτήσεις ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών. Ο τρόπος αυτός φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 10.13. Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ώστε $X \sim \mathbf{Exp}(2)$ και $Y \sim U(0, 1)$. Θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή $\mathbf{E}(e^{XY})$. Από την Πρόταση 10.12 και το Θεώρημα Tonelli έχουμε ότι

$$\mathbf{E}(e^{XY}) = \int\int e^{xy}\, d\,\mathbf{P}_X(x)\, d\,\mathbf{P}_Y(y) = \int\int g(y)\, d\,\mathbf{P}_Y(y) = \mathbf{E}(g(Y))$$

όπου $g(y) = \int e^{xy}\, d\,\mathbf{P}_X(x) = \mathbf{E}(e^{Xy})$. Αυτό σημαίνει ότι βρίσκουμε τη μέση τιμή σε δύο βήματα. Πρώτα σταθεροποιούμε την τυχαία μεταβλητή Y και παίρνουμε μέση τιμή μόνο ως προς την X. Το αποτέλεσμα είναι η τυχαία μεταβλητή $g(Y)$. Έπειτα παίρνουμε τη μέση τιμή της $g(Y)$. Οι υπολογισμοί έχουν ως εξής:

$$g(y) = \mathbf{E}(e^{Xy}) = \frac{2}{2-y}$$

και έπειτα
$$\mathbf{E}\{g(Y)\} = \int_0^1 g(y)\,dy = 2\log 2.$$
Βέβαια θα μπορούσαμε να κάνουμε την ολοκλήρωση με άλλη σειρά. Δηλαδή να πάρουμε πρώτα μέση τιμή ως προς Y (με το X σταθερό) και μετά ως προς X.

10.4 Κατασκευή ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με δεδομένη κατανομή

Υπάρχουν ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές; Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε τέτοιες και βέβαια τον χώρο πιθανότητας στον οποίο αυτές ορίζονται; Τη λύση σε αυτά τα προβλήματα δίνουν οι χώροι γινόμενο, τους οποίους είδαμε στην Παράγραφο 10.3. Σε αυτή την παράγραφο θα τους χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με επιθυμητές ιδιότητες.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $(E, \mathcal{E})$ είναι μετρήσιμος χώρος και $X : \Omega \to E$ τυχαία μεταβλητή, κατανομή της X λέμε το μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}^X$ που ορίζεται στον $(E, \mathcal{E})$ με $\mathbf{P}^X(A) = \mathbf{P}(X^{-1}(A))$ για κάθε $A \in \mathcal{E}$.

Έστω I σύνολο δεικτών και $(E_i, \mathcal{E}_i, \mathbf{P}_i)_{i\in I}$ οικογένεια χώρων πιθανότητας. Θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και τυχαίες μεταβλητές $X_i : \Omega \to E_i$ έτσι ώστε

(α) Η κατανομή της X_i να είναι η $\mathbf{P}_i$ για κάθε $i \in I$.

(β) Η $(X_i)_{i\in I}$ να είναι οικογένεια ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών.

Το να κάνουμε ένα από τα (α) ή (β) είναι εύκολο. Αυτό που είναι μη τετριμμένο είναι να κάνουμε και τα δύο μαζί. Και το κατορθώνουμε με χρήση του χώρου γινομένου ως εξής.

Έστω $\Omega = \prod_{i\in I} E_i, \mathcal{F} = \otimes_{i\in I}\mathcal{E}_i$, και $\mathbf{P}$ το μέτρο γινόμενο των $\mathbf{P}_i$, $i \in I$. Για κάθε $r \in I$ ορίζουμε $X_r : \Omega \to E_r$ ως
$$X_r((\omega_i)_{i\in I}) = \omega_r,$$
δηλαδή η X_r είναι η προβολή στην r-συντεταγμένη.

Εύκολα βλέπουμε ότι η X_r είναι τυχαία μεταβλητή γιατί για $A \in E_r$ έχουμε
$$X_r^{-1}(A) = \prod_{i\in I} A_i, \text{ με } A_i = \begin{cases} \Omega & \text{αν } i \neq r, \\ A & \text{αν } i = r. \end{cases}$$
Άρα $X_r^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ ως μετρήσιμος κύλινδρος.

Θα δείξουμε τώρα ότι πράγματι αυτή η κατασκευή ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος.

Πρόταση 10.14. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $(E_i, \mathcal{E}_i, \mathbf{P}_i)_{i\in I}$ όπως πριν και $X_r : \Omega \to E_r$, $r \in I$, η r-προβολή. Τότε*

(i) Η X_r έχει κατανομή $\mathbf{P}_r$.

(ii) Οι $(X_r)_{r\in I}$ είναι ανεξάρτητες.

Απόδειξη. (i) Έστω $A \in E_r$. Έχουμε,
$$\mathbf{P}^{X_r}(A) = \mathbf{P}(X_r^{-1}(A)) = \mathbf{P}\Big(\prod_{i\in I} A_i\Big) = \prod_{i\in I} \mathbf{P}_i(A_i) = \mathbf{P}_r(A),$$
γράφοντας το $X_r^{-1}(A)$ ως μετρήσιμο κύλινδρο όπως προηγουμένως. Άρα, $\mathbf{P}^{X_r} = \mathbf{P}_r$.

(ii) Έστω $J = \{j_1, j_2, \dots, j_n\} \subset I$, και $B_{j_1} \in \mathcal{E}_{j_1}, B_{j_2} \in \mathcal{E}_{j_2}, \dots, B_{j_n} \in \mathcal{E}_{j_n}$. Τότε
$$\mathbf{P}(\{X_{j_1} \in B_{j_1}\} \cap \{X_{j_2} \in B_{j_2}\} \cap \cdots \cap \{X_{j_n} \in B_{j_n}\}) = \mathbf{P}\Big(\prod_{i\in I} A_i\Big),$$

όπου

$$A_i = \begin{cases} \Omega_i & \text{αν } i \in I \backslash J, \\ B_i, & \text{αν } i \in J. \end{cases}$$

Από τον ορισμό του $\mathbf{P}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\Big(\prod_{i\in I} A_i\Big) &= \prod_{i\in I} \mathbf{P}(A_i) = \prod_{i\in J} \mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}_{j_1}(B_{j_1})\,\mathbf{P}_{j_2}(B_{j_2})\ldots\mathbf{P}_{j_n}(B_{j_n}) \\ &= \mathbf{P}(X_{j_1} \in B_{j_1})\,\mathbf{P}(X_{j_2} \in B_{j_2})\cdots\mathbf{P}(X_{j_n} \in B_{j_n}). \end{aligned}$$

Συνεπώς οι $\{X_r : r \in I\}$ είναι ανεξάρτητες. ■

Μια συνέπεια της Πρότασης 10.14 είναι ότι για δεδομένη κατανομή $\mathbf{Q}$ σε έναν μετρήσιμο χώρο $(E, \mathcal{E})$ και σύνολο I υπάρχει σύνολο ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $(X_i)_{i\in I}$ που καθεμία έχει κατανομή $\mathbf{Q}$.

Ασκήσεις

Στις ασκήσεις πιο κάτω, εκτός αν δηλώνεται διαφορετικά, οι τυχαίες μεταβλητές που εμφανίζονται παίρνουν τιμές στο $\mathbb{R}$.

10.1 Έστω $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρες στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Αν για κάθε $A \in \mathcal{F}_1$ ισχύει ότι $\mathbf{P}(A) = 0$ ή $\mathbf{P}(A) = 1$, να δείξετε ότι οι $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ είναι ανεξάρτητες.

10.2 Έστω X, Y όπως στη διατύπωση του Θεωρήματος 10.6. Να δειχθεί ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Οι X, Y είναι ανεξάρτητες.

(β) Οι $f(X), g(Y)$ είναι ανεξάρτητες για κάθε $f : E \to \mathbb{R}$, $g : G \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες.

10.3 Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ώστε $\mathbf{P}(X = Y) = 1$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{P}(X = c) = 1$, δηλαδή με πιθανότητα 1 η X είναι σταθερή τυχαία μεταβλητή.

10.4 Έστω X, Y ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένη δεύτερη ροπή (δηλαδή $\mathbf{E}(X^2), \mathbf{E}(Y^2) < \infty$) και διασπορά σ^2. Να δειχθεί ότι $\mathbf{E}\{(X - Y)^2/2\} = \sigma^2$.

10.5 Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένη δεύτερη ροπή ώστε οι $X, X - Y$ να είναι ανεξάρτητες αλλά και οι $Y, X - Y$ να είναι ανεξάρτητες. Να δειχθεί ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{P}(X - Y = c) = 1$.
[Υπόδειξη: $Y = X - (X - Y)$.]

10.6 Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{E}\,|X + Y| < \infty$. Να δειχθεί ότι $\mathbf{E}\,|X| < \infty$ και $\mathbf{E}\,|Y| < \infty$.

10.7* Έστω X τυχαία μεταβλητή και $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι οι μέσες τιμές $\mathbf{E}\{f(X)g(X)\}$, $\mathbf{E}\{f(X)\}, \mathbf{E}\{g(X)\}$ ορίζονται και είναι πραγματικοί αριθμοί. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}\{f(X)g(X)\} \geq \mathbf{E}\{f(X)\}\,\mathbf{E}\{g(X)\}.$$

Αυτή είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας FKG (Fortuin-Kasteleyn-Ginibre. 1971).

10.8 Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \sim \exp(a_i)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ όπου $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (0, \infty)$ είναι σταθερές. Ποια η κατανομή της $m := \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$;

10.9 Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών έτσι ώστε $\mathbf{E}(X_1) = 0, \mathbf{E}(X_1^2) = 1, \mathbf{E}(X_1^4) = c < \infty$. Θέτουμε $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ για κάθε $n \geq 1$. Να δείξετε ότι

(α) $\mathbf{E}(S_n^2) = n$.

(β) $\mathbf{E}(S_n^4) = nc + 3n(n - 1)$.

(γ) $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ καθώς $n \to \infty$.
[Υποδειξη για το (γ): Χρησιμοποιήστε την ανισότητα Markov και το (α).]

10.10 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών καθεμία με κατανομή την ομοιόμορφη στο $(0, 1)$. Για κάθε $n \geq 1$ θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές

$$\begin{aligned} m_n &= \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, \\ M_n &= \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}. \end{aligned}$$

Να δειχθεί ότι $m_n \to 0$ και $M_n \to 1$ κατά πιθανότητα καθώς $n \to \infty$.

10.11 Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, η ορίζουσα του και η permanent του ορίζονται από τους τύπους

$$\det(A) := \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)}, \tag{10.7}$$

$$\operatorname{per}(A) := \sum_{\pi\in S_n} a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)}. \tag{10.8}$$

S_n είναι το σύνολο των μεταθέσεων στο $\{1, 2, \ldots, n\}$ και $\operatorname{sgn}(\pi)$ είναι το πρόσημο της μετάθεσης π (1 για άρτια μετάθεση και -1 για περιττή).

Έστω $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{C}^n$ δεδομένος πίνακας. Θεωρούμε ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $\{u_{i,j} : 1 \leq i, j \leq n\}$ με τιμές στο $\mathbb{R}$ ώστε καθεμία έχει μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Ορίζουμε τον πίνακα $B = (u_{i,j} \sqrt{a_{i,j}})_{1\leq i,j\leq n}$ όπου $\sqrt{a_{i,j}}$ είναι μία τετραγωνική ρίζα του $a_{i,j}$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(\det(B^2)) = \operatorname{per}(A).$$

11

Τα λήμματα Borel-Cantelli και ο νόμος 0-1 του Kolmogorov

Τα βασικότερα εργαλεία για την απόδειξη θεωρημάτων που αφορούν τη σχεδόν βέβαιη σύγκλιση είναι δύο απλά αποτελέσματα, τα δύο λήμματα Borel-Cantelli, τα οποία θα δούμε σε αυτό το κεφάλαιο. Επίσης θα δούμε τον νόμο 0-1 του Kolmogorov, ο οποίος είναι πολύ χρήσιμος όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μια ιδιότητα ισχύει με πιθανότητα 1. Σύμφωνα με αυτόν τον νόμο, αν η ιδιότητα έχει μια συγκεκριμένη μορφή, τότε αναγκαστικά έχει πιθανότητα 0 ή 1. Επομένως για να δείξουμε ότι ισχύει με πιθανότητα 1, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει με θετική πιθανότητα. Και το τελευταίο πολλές φορές είναι σημαντικά ευκολότερο.

11.1 Τα λήμματα Borel-Cantelli

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{F}$. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\limsup_{n\geq 1} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ ανήκει σε άπειρα } A_n\}.$$

Πρόταση 11.1 (Πρώτο λήμμα Borel-Cantelli). *Έστω $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ενδεχομένων στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Άν $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < \infty$, τότε*

$$\mathbf{P}(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 0.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητη $X = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n}$. Τότε

$$\limsup_{n\geq 1} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ ανήκει σε άπειρα } A_n\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = \infty\} = \{X = \infty\},$$

και

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) < \infty.$$

Επειδή $\mathbf{E}(X) < \infty$ και $X \geq 0$, η Πρόταση 6.14(iii) δίνει ότι $\mathbf{P}(X = \infty) = 0$, δηλαδή $\mathbf{P}(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 0$. ■

Λήμμα 11.2. *Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n \geq 2$, ανεξάρτητα ενδεχόμενα στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, τότε και τα $A_1^c, A_2^c, \ldots, A_n^c$ είναι ανεξάρτητα.*

Απόδειξη. Αυτό είναι συνέπεια του Θεωρήματος 10.10. Επιλέγουμε $I = J = \{1, 2, \ldots, n\}$, και $I_j = \{j\}, \mathcal{F}_j = \{A_j\}$ για κάθε $j \in J$. Μπορούμε όμως να το δείξουμε και στοιχειωδώς ξεκινώντας από τον εξής ισχυρισμό.

Ισχυρισμος: Τα $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n^c$ είναι ανεξάρτητα.

Πράγματι, για $k \leq n$, έστω δείκτες $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$.

- Αν $i_k < n$, τότε τα $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ είναι ανεξάρτητα από υπόθεση. Επομένως

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1}) \mathbf{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbf{P}(A_{i_k}) \tag{11.1}$$

- Αν $i_k = n$, τότε

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_n^c) &= \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}}) - \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_n) \\ &= \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}}) - \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}})\,\mathbf{P}(A_n) \\ &= \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}})(1 - \mathbf{P}(A_n)) \\ &= \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}})\,\mathbf{P}(A_n^c) \\ &= \mathbf{P}(A_{i_1})\,\mathbf{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbf{P}(A_n^c).\end{aligned}$$

Στη δεύτερη και στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία των $A_1, A_2, \ldots, A_{i_k}$.

Άρα και στις δύο περιπτώσεις η πιθανότητα της τομής ισούται με το γινομενο των πιθανοτήτων και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.
Χρησιμοποιώντας τον ισχυρισμό, δείχνουμε επαγωγικά ότι τα $A_1^c, A_2^c, \ldots, A_n^c$ είναι ανεξάρτητα. ■

Το δεύτερο λήμμα Borel-Cantelli αφορά την περίπτωση που η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n)$ απειρίζεται. Όμως τώρα υποθέτουμε επιπλέον ότι τα $(A_n)_{n\geq 1}$ είναι ανεξάρτητα. Η ακριβής διατύπωση έχει ως εξής.

Πρόταση 11.3 (Δεύτερο λήμμα Borel-Cantelli)**.** *Έστω $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Άν $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = \infty$, τότε*

$$\mathbf{P}(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 1.$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $\mathbf{P}(\{\limsup_{n\geq 1} A_n\}^c) = 0$. Έχουμε ότι

$$\mathbf{P}(\{\limsup_{n\geq 1} A_n\}^c) = \mathbf{P}(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k^c) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\cap_{k=n}^{\infty} A_k^c)$$

εφόσον η ακολουθία $(B_n)_{n\geq 1}$ με $B_n = \cap_{k=n}^{\infty} A_k^c$ για κάθε $n \geq 1$ είναι αύξουσα. Για δεδομένο $n \geq 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\cap_{k=n}^{\infty} A_k^c) &= \lim_{m\to\infty} \mathbf{P}(\cap_{k=n}^{m} A_k^c) = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} \mathbf{P}(A_k^c) \\ &= \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} (1 - \mathbf{P}(A_n)) \leq \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} e^{-\mathbf{P}(A_k)} \\ &= \lim_{m\to\infty} e^{-\sum_{k=n}^{m} \mathbf{P}(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}(A_k)} = e^{-\infty} = 0.\end{aligned}$$

Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το Λήμμα 11.2, ενώ η ανισότητα προκύπτει από την $1 + x \leq e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $\mathbf{P}((\limsup_{n\geq 1} A_n)^c) = 0$ και το ζητούμενο αποδείχθηκε. ■

Αν παραλείψουμε την υπόθεση της ανεξαρτησίας από τη διατύπωση του δεύτερου λήμματος Borel-Cantelli, τότε το συμπέρασμά του ενδέχεται να μην ισχύει. Για παράδειγμα, αν πάρουμε λ το μέτρο Lebesgue στον $\Omega := [0, 1]$ (που είναι μέτρο πιθανότητας) και $A_n = (0, 1/n)$ για κάθε $n \geq 1$, τότε $\lambda(A_n) = 1/n$, και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = \infty$, ενώ $\limsup_{n\geq 1} A_n = \emptyset$. Κανένας αριθμός δεν ανήκει σε άπειρα από τα A_n. Βέβαια τα $(A_n)_{n\geq 1}$ δεν είναι ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 11.4. Θεωρούμε το πείραμα ρίψης ενός νομίσματος άπειρες (αριθμήσιμες) φορές που φέρνει «κορώνα» (K) με πιθανότητα $p \in (0, 1)$. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα $\mathbf{P}$(K έρχεται απειρες φορές).

Ο χώρος πιθανότητας του πειράματος είναι ο χώρος γινόμενο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ των $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}_n)_{n\geq 1}$, όπου, για κάθε $n \geq 1$, $\Omega_n = \{K, \Gamma\}$ (Γ = το ενδεχόμενο «γράμματα») , $\mathcal{F}_n = \mathscr{P}(\Omega_n)$ και $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}^{(p)}$ ($\mathbf{P}^{(p)}$ το μέτρο πιθανότητας με $\mathbf{P}^{(p)}(\{K\}) = p$). Για $n \geq 1$, θεωρούμε το ενδεχόμενο A_n = {έρχεται K στη n ρίψη} και την τυχαία μεταβλητή $X_n : \Omega \to \{K, \Gamma\}$ με $X_n(\omega) = \omega_n$ = το αποτέλεσμα της n ρίψης.

Γνωρίζουμε ότι οι $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητες (Πρόταση 10.2) και, εφόσον $A_n = X_n^{-1}(\{K\})$, έχουμε ότι τα $(A_n)_{n\geq 1}$ είναι ανεξάρτητα. Επιπλέον, $\mathbf{P}(A_n) = p$, άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = \infty.$$

Από το 2ο λήμμα Borel-Cantelli έχουμε $\mathbf{P}(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 1$, δηλαδή $\mathbf{P}(K$ έρχεται άπειρες φορές$) = 1$.

Παρατήρηση 11.5. Συνήθως για το $\limsup_{n\geq 1} A_n$ χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$\{A_n \text{ συμβαίνει άπειρες φορές}\},$$

και το σκεπτικό του είναι το εξής. Ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ μοντελοποιεί ένα πείραμα, και μια πραγματοποίηση του πειράματος είναι ένα $\omega \in \Omega$ (στο προηγούμενο παράδειγμα η πραγματοποίηση είναι ένα $\omega \in \{K, \Gamma\}^{\mathbb{N}^+}$). Πολλές φορές παρ' όλ' αυτά, αντιλαμβανόμαστε ότι το πείραμα γίνεται σε πολλά στάδια (π.χ. ρίχνουμε ένα νόμισμα άπειρες φορές, τη μία μετά την άλλη και όχι μονομιάς). Ορίζουμε A_n να είναι ένα σύνολο που αφορά το στάδιο n, και αυτό πραγματοποιείται αν $\omega \in A_n$. Τότε το να συμβεί το A_n άπειρες φορές (δηλαδή για άπειρα n) σημαίνει ακριβώς ότι η πραγματοποίηση ω ανήκει σε άπειρα από τα $\{A_n : n \geq 1\}$.

Παράδειγμα 11.6. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $X_1 \sim \mathrm{Exp}(1)$, δηλαδή με πυκνότητα $f(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{x>0}$. Θα δείξουμε ότι

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{X_n}{\log n} = 1 \text{ με πιθανότητα } 1.$$

[Μεταφράζοντας τη σημασία του $\overline{\lim}$, αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $X_n/\log n > 1+\varepsilon$ για *πεπερασμένα* το πλήθος n, ενώ ισχύει $X_n/\log n > 1-\varepsilon$ για *άπειρα* το πλήθος n. Άμεσα βλέπουμε τη συνάφεια των λημμάτων Borel-Cantelli με το ερώτημα.]
Για κάθε $n \geq 1$ και $r > 0$, θέτουμε $A_n^{(r)} = \{X_n \geq r\log n\}$. Τότε,

$$\mathbf{P}(A_n^{(r)}) = \mathbf{P}(X_n \geq r\log n) = e^{-r\log n} = \frac{1}{n^r}.$$

Έστω $r > 1$. Τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < \infty,$$

και από το πρώτο λήμμα Borel-Cantelli έχουμε ότι $\mathbf{P}(\limsup_{n\geq 1} A_n^{(r)}) = 0$, άρα

$$\mathbf{P}\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{X_n}{\log n} > r\right) = 0.$$

Συνεπώς, θέτοντας $C_r = \left\{\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{X_n}{\log n} > r\right\}$, έχουμε ότι

$$\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{X_n}{\log n} > 1\right\} = \cup_{k=1}^{\infty} C_{1+\frac{1}{k}},$$

άρα $\mathbf{P}\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{X_n}{\log n} > 1\right) = 0$ εφόσον $\mathbf{P}(C_{1+\frac{1}{k}}) = 0$ για κάθε $k \geq 1$. Επομένως,

$$\mathbf{P}\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{X_n}{\log n} \leq 1\right) = 1. \tag{11.2}$$

Έστω $r = 1$. Τότε, εφόσον τα $(A_n)_{n\geq 1}$ είναι ανεξάρτητα (οι $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι ανεξάρτητες) και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n^{(1)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

από το 2ο λήμμα Borel-Cantelli, έχουμε ότι $\mathbf{P}(\limsup_{n\geq 1} A_n^{(1)}) = 1$. Όμως για $\omega \in \limsup_{n\geq 1} A_n^{(1)}$ ισχύει ότι $X_n(\omega) \geq \log n$ για άπειρα $n \geq 1$, άρα

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{X_n(\omega)}{\log n} \geq 1,$$

από το οποίο προκύπτει ότι $\mathbf{P}\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{X_n}{\log n} \geq 1\right) = 1$. Η τελευταία ισότητα μαζί με την (11.2) δίνουν το ζητούμενο. Δηλαδή, στο σύνολο $\left\{\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} \leq 1\right\} \cap \left\{\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} \geq 1\right\}$, που έχει πιθανότητα 1, ισχύει $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} = 1$.

Παρατήρηση 11.7. Στο προηγούμενο παράδειγμα, ορίσαμε κάποια σύνολα (τα $A_n^{(r)}$ και C_r) και μιλήσαμε για τις πιθανότητες τους. Τυπικά θα έπρεπε προηγουμένως να δείξουμε ότι είναι στοιχεία της $\mathcal{F}$, δηλαδή είναι μετρήσιμα σύνολα. Δεν το κάναμε, ούτε θα το κάνουμε στο εξής για τα σύνολα που θα ορίζουμε. Όλα θα είναι μετρήσιμα, και η τυπική δικαιολόγηση αφήνεται στον αναγνώστη.

11.2 Ο νόμος 0-1 του Kolmogorov*

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $((E_n, \mathcal{E}_n))_{n\geq 1}$ μετρήσιμοι χώροι και $X_n : \Omega \to E_n$, $n \geq 1$, τυχαίες μεταβλητές. Για $n \geq 1$ θέτουμε

$$\mathscr{C}_n := \sigma(\{X_k : k \geq n+1\}),$$

τη σ-άλγεβρα που παράγεται από τις $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$

Ορισμός 11.8. Η **τελική σ-άλγεβρα** που παράγεται από τις $(X_n)_{n\geq 1}$ ορίζεται ως

$$\mathscr{C}_\infty = \cap_{n=1}^{\infty} \mathscr{C}_n.$$

Τι σημαίνει πρακτικά για ένα ενδεχόμενο A να ανήκει στην $\mathscr{C}_\infty$; Σημαίνει ότι για κάθε $n \geq 1$ η πραγματοποίηση ή όχι του A δεν εξαρτάται από την τιμή που παίρνουν οι πρώτες n από τις X_i. Δηλαδή οποιοδήποτε δεδομένο πεπερασμένο πλήθος από τις X_i δεν επηρεάζει την πραγματοποίηση του A. Αυτή η ασαφής περιγραφή θα γίνει ξεκάθαρη στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 11.9. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ όπως προηγουμένως με τιμές στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$A = \{\omega : \overline{\lim}_{k\to\infty} X_k(\omega) \geq 1\}, \quad B = \left\{\omega : \overline{\lim}_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) \geq 0\right\},$$

$$\Gamma = \{\omega : \inf_{n\geq 1} X_n(\omega) \leq 0\}, \qquad \Delta = \left\{\omega : \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) \leq 10\right\}.$$

Τα A, B ανήκουν στην $\mathscr{C}_\infty$, ενώ τα Γ, Δ δεν ανήκουν σε αυτήν αναγκαστικά.

Πράγματι, όσον αφορά τα A, B, έχουμε ότι για κάθε $m \geq 1$ ισχύει

$$A = \{\omega : \overline{\lim_{k\to\infty}} X_k(\omega) \geq 1\} = \{\omega : \overline{\lim_{k\to\infty}} X_{m+1+k}(\omega) \geq 1\} \in \mathscr{C}_m$$

και

$$\begin{aligned} B &= \left\{\omega : \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) \geq 0\right\} = \left\{\omega : \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} X_k(\omega) + \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{n} X_k(\omega)\right) \geq 0\right\} \\ &= \left\{\omega : \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{n} X_k(\omega) \geq 0\right\} \in \mathscr{C}_m \end{aligned}$$

εφόσον (προσοχή, το άθροισμα δεν εξαρτάται από το n)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} X_k(\omega) = 0.$$

Άρα $A, B \in \mathscr{C}_\infty$.

Για τα Γ και Δ αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για συγκεκριμένες επιλογές των τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\ge1}$, τα σύνολα Γ και Δ εξαρτώνται από την τιμή του X_1. Για παράδειγμα, στο Γ, αν οι $(X_n)_{n\ge1}$ είναι ανεξάρτητες και $X_1 \sim N(0,1)$, $X_k \sim U(1,3)$ (ομοιόμορφη στο $(1,3)$) για κάθε $k \ge 2$, τότε $\Gamma = \{X_1 \le 0\}$, το οποίο έχει πιθανότητα 1/2. Αν υποθέσουμε ότι $\Gamma \in \mathscr{C}_\infty$, τότε $\Gamma \in \sigma(\{X_k : k \ge 2\})$, και αυτή η σ-άλγεβρα είναι ανεξάρτητη από την $\sigma(X_1)$, η οποία περιέχει το Γ. Άρα το Γ είναι ανεξάρτητο από το εαυτό του, δηλαδή $\mathbf{P}(\Gamma \cap \Gamma) = \mathbf{P}(\Gamma)\,\mathbf{P}(\Gamma)$, το οποίο δίνει ότι $\mathbf{P}(\Gamma) \in \{0,1\}$. Άτοπο.

Πριν κάνουμε τις παραπάνω αποδείξεις για τα A, B, βλέπουμε ότι για δεδομένο ω (δηλαδή για μία πραγματοποίηση του πειράματος), το αν ισχύει $\omega \in A$, δηλαδή το αν το A πραγματοποιήθηκε, δεν εξαρτάται από τις πρώτες τιμές της $(X_n(\omega))_{n\ge1}$. Για το A, η τιμή του $\overline{\lim}$ μένει η ίδια αν αλλάξουμε, π.χ., τους πρώτους 1000 όρους της ακολουθίας. Το ίδιο συμβαίνει και με το B. Αυτή η παρατήρηση μας πείθει ότι $A, B \in \mathscr{C}_\infty$ και τη χρησιμοποιούμε στην τυπική απόδειξη.

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου αφορά την τελική σ-άλγεβρα ακολουθίας *ανεξάρτητων* τυχαίων μεταβλητών.

Θεώρημα 11.10 (Νόμος 0-1 του Kolmogorov)**.** *Έστω $(X_n)_{n\ge1}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και $\mathscr{C}_\infty$ η τελική σ-άλγεβρά τους. Αν $C \in \mathscr{C}_\infty$, τότε $\mathbf{P}(C) = 0$ ή 1.*

Η απόξειξη του θεωρήματος δίνεται στο Παράρτημα Β΄.

Το θεώρημα χρησιμοποιείται συνήθως για να δείξουμε ότι ένα γεγονός έχει πιθανότητα 1. Δείχνουμε ότι ανήκει στην τελική σ-άλγεβρα και έχει θετική πιθανότητα. Μια τέτοια χρήση γίνεται στην Άσκηση 11.16. Το να δείξει κανείς ότι το γεγονός του ερωτήματος (β) της άσκησης έχει θετική πιθανότητα είναι πολύ απλό, ενώ το να δείξει ότι έχει πιθανότητα 1 είναι αρκετά περίπλοκο αν δεν χρησιμοποιήσουμε τον νόμο 0-1 του Kolmogorov.

Άμεση συνέπεια του νόμου 0-1 είναι το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 11.11. *Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ τυχαία μεταβλητή $\mathscr{C}_\infty$-μετρήσιμη. Τότε η X είναι σταθερή με πιθανοτητα 1.*

Απόδειξη. Εφόσον η X είναι $\mathscr{C}_\infty$-μετρήσιμη, τα σύνολα $\{X = -\infty\}, \{X = \infty\}$ είναι στοιχεία της $\mathscr{C}_\infty$, και επομένως έχουν πιθανότητα 0 ή 1. Άν κάποιο από αυτά έχει πιθανότητα 1, δείχθηκε το ζητούμενο. Διαφορετικά, έχουμε ότι η X παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$. Σε αυτή την περίπτωση, για τη συνάρτηση κατανομής της, F, το Θεώρημα 11.10 δίνει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$F(x) = \mathbf{P}(X \le x) = \mathbf{P}(X^{-1}((-\infty, x])) \in \{0,1\}. \tag{11.3}$$

Ξέρουμε όμως ότι η $\mathbf{F}$ είναι αύξουσα, δεξιά συνεχής και $\mathbf{F}(-\infty) = 0$, $\mathbf{F}(\infty) = 1$. Αυτές οι ιδιότητες μαζί με την (11.3) συνεπάγονται ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < c, \\ 1 & \text{αν } x \ge c. \end{cases}$$

Συνεπώς $\mathbf{P}(X = c) = \mathbf{F}(c) - \mathbf{F}(c-) = 1$, δηλαδή η X ισούται με τη σταθερά c με πιθανότητα 1. ∎

Παρατήρηση 11.12. Στην απόδειξη του Πορίσματος 11.11, από το ότι η X είναι $\mathscr{C}_\infty$-μετρήσιμη χρησιμοποιήσαμε μόνο ότι όλα τα σύνολα της $\mathscr{C}_\infty$ έχουν πιθανότητα 0 ή 1. Έτσι, το ίδιο επιχείρημα δίνει ότι αν η X είναι τυχαία μεταβλητή στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στο $[-\infty, \infty]$ και $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρα τέτοια ώστε η X να είναι $\mathcal{A}/\mathscr{B}([-\infty, \infty])$-μετρήσιμη και $\mathbf{P}(A) \in \{0,1\}$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$, τότε η X είναι σταθερή με πιθανότητα 1.

Επιστρέφουμε στο Παράδειγμα 11.6. Εκεί η $Z := \overline{\lim}_{n\to\infty}(X_n/\log n)$ είναι μια $\mathscr{C}_\infty$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0,\infty]$ και οι $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι ανεξάρτητες. Το Πόρισμα 11.11 εφαρμόζεται. Άρα εκ των προτέρων ξέρουμε ότι η Z είναι σταθερή με πιθανότητα 1.

Ασκήσεις

11.1* Έστω $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων με $\mathbf{P}(A_n) < 1$ για κάθε $n \geq 1$ και $\mathbf{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$. Να δείξετε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = \infty$.

11.2 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{P}(X_n \neq 0) = \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \geq 1$. Να δείξετε ότι με πιθανότητα 1 για κάθε $\omega \in \Omega$, υπάρχει $n(\omega) \in \mathbb{N}$ ώστε $X_n(\omega) = 0$ για κάθε $n \geq n(\omega)$. (Συνεπώς $X_n \to 0$ με πιθανότητα 1.)

11.3 Στην Άσκηση 10.10, να δειχθεί ότι επίσης $m_n \to 0$ και $M_n \to 1$ σχεδόν βέβαια καθώς $n \to \infty$.

11.4 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών ώστε

$$\mathbf{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}, \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Να δειχθεί ότι

(α) $X_n \to 0$ κατά πιθανότητα καθώς $n \to \infty$,

(β) αλλά δεν ισχύει $X_n \to 0$ σχεδόν βέβαια. Μάλιστα $\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = 0) = 0$.

11.5 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $[0,\infty)$ ώστε $\mathbf{P}(X_1 > 0) > 0$. Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \infty.$$

11.6 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ακολουθία $(a_n)_{n\geq 1}$ πραγματικών θετικών αριθμών τέτοια ώστε $\mathbf{P}\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{a_n} = 0\Big) = 1$.

11.7 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι για την τυχαία μεταβλητή $X^* = \sup_{n\geq 1} X_n$ ισχύει ότι $\mathbf{P}(X^* < \infty) = 1$ αν και μόνο αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_n > M) < \infty$.

11.8* Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με $X_n \sim N(0,1)$ για κάθε $n \geq 1$. Να δείξετε ότι με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{X_n}{\sqrt{2\log n}} = 1. \tag{11.4}$$

11.9 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με $X_n \sim Exp(1)$ για κάθε $n \geq 1$. Αν $M_n := \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ για κάθε $n \geq 1$, να δείξετε ότι με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{\log n} = 1. \tag{11.5}$$

11.10 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{P}(X_1 = K) = \mathbf{P}(X_1 = \Gamma) = 1/2$. Οι $(X_n)_{n\geq 1}$ καταγράφουν τα αποτελέσματα ακολουθίας ρίψεων ενός αμερόληπτου νομίσματος. Για κάθε $n \geq 1$ θέτουμε

$$L_n := \max\{m \geq 1 : X_n = X_{n+1} = \ldots = X_{n+m-1}\}.$$

Για παράδειγμα, αν οι ρίψεις δώσουν το αποτέλεσμα $(K, K, \Gamma, \Gamma, K, \Gamma, \Gamma, \Gamma, K, \ldots)$, τότε $L_1(\omega) = 2$, $L_5(\omega) = 1$, και $L_6(\omega) = 3$. Δείξτε ότι

(α) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{L_n}{\log_2 n} \leq 1$ με πιθανότητα 1.

(β) $\underline{\lim}_{n\to\infty} L_n = 1$ με πιθανότητα 1.

11.11* Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών. Να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{X_n}{n} = 0$ με πιθανότητα 1.

(β) $\mathbf{E}\,|X_1| < \infty$.

11.12 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $[0,\infty)$, και $c > 1$. Να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) $\mathbf{E}\{(\log X_1)^+\} < \infty$.

(β)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{c^n} < \infty$ με πιθανότητα 1.

11.13* Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ισόνομων και ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$ ώστε η κατανομή της X_1 να μην είναι συγκεντρωμένη σε ένα σημείο (δηλαδή δεν υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ με $\mathbf{P}(X_1 = c) = 1$). Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} X_n \text{ υπάρχει }) = 0.$$

11.14 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ θετικές τυχαίες μεταβλητές. Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\overline{\lim}\, \frac{1}{n} \log X_n \leq \overline{\lim}\, \frac{1}{n} \log \mathbf{E}\, X_n. \tag{11.6}$$

11.15 Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$ και $C_\infty := \cap_{n=1}^{\infty} \sigma(X_n, X_{n+1}, ...)$ η τελική σ-άλγεβρα.

(α) Υποθέτουμε ότι οι X_i παίρνουν μη αρνητικές τιμές. Ποιες από τις παρακάτω τυχαίες μεταβλητές είναι C_∞ μετρήσιμες;

(i) $\underline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{X_n}{n}$, (ii) $\underline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$, (iii) $\overline{\lim}_{n\to\infty} n(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$,

(iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{2^k}$, (v) $\overline{\lim}_{n\to\infty} (X_n + X_{n+1})$.

(β) Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι στοιχεία της C_∞;

(i) $\left\{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |X_n| < \infty\right\}$, (ii) $\{X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 0 \text{ για άπειρα } n\}$,

(iii) $\left\{\overline{\lim}_{n\to\infty} n|X_1 + X_2 + \cdots + X_n| \leq 1\right\}$, (iv) $\left\{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ συγκλίνει σε πραγματικό άριθμό}\right\}$,

(v) $\left\{\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} X_k > 0 \text{ για άπειρα } n\right\}$.

[Σχόλιο: Καταρχάς, τα ερωτήματα να απαντηθούν διαισθητικά. Έπειτα, σχετικά με το (β), για τα σύνολα τα οποία είναι στοιχεία της C_∞ να αποδειχθεί αυτό τυπικά. Για τα υπόλοιπα, να μην αποδειχθεί τίποτε. Για εκείνα δεν ισχυριζόμαστε ότι πάντοτε δεν είναι στοιχεία της C_∞. Εξαρτάται από τη συγκεκριμένη επιλογή της ακολουθίας $(X_i)_{i\geq 1}$. Παρόμοιο σχόλιο ισχύει για το μέρος (α) της άσκησης.]

11.16 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με κατανομή την τυπική κανονική $N(0,1)$. Για κάθε $n \geq 1$ θέτουμε $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

(α) Για κάθε $A > 0$ και $n \geq 1$ να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq A\right) = 1 - \Phi(A) > 0,$$

όπου Φ είναι η συνάρτηση κατανομής της $N(0,1)$. [Εδώ μπορείτε να χρησιμοποιήσετε πράγματα για κανονικές τυχαίες μεταβλητές και αθροίσματα τους από τις στοιχειώδεις πιθανότητες.]

(β) Για κάθε $A > 0$, με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq A.$$

(γ) Με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty.$$

11.17 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $\{A_i : i \in I\}$ στοιχεία της $\mathcal{F}$.

(α) Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές $X_i := \mathbf{1}_{A_i}, i \in I$. Να δειχθεί ότι οι $\{X_i : i \in I\}$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν τα $\{A_i : i \in I\}$ είναι ανεξάρτητα.

(β) Υποθέτουμε ότι $I = \mathbb{N}^+$. Αν τα $\{A_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ είναι ανεξάρτητα, τότε τα σύνολα $\liminf_{n\geq 1} A_n, \limsup_{n\geq 1} A_n$ έχουν πιθανότητα 0 ή 1.

11.18 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τη δυναμοσειρά

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n z^n.$$

(α) Να δειχθεί ότι η ακτίνα σύγκλισης R της f είναι μετρήσιμη ως προς την τελική σ-άλγεβρα των $(X_n)_{n\geq 1}$ και άρα είναι σταθερή με πιθανότητα 1.

(β) Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι καθεμία από τις $(X_n)_{n\geq 1}$ έχει κατανομή $N(0,1)$, τότε με πιθανότητα 1 ισχύει $R = 1$.

11.19 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, και $\{A_n : n \geq 1\}$ στοιχεία της $\mathcal{F}$ τα οποία είναι ανα δύο ανεξάρτητα (δηλαδή $\mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j)$ για κάθε $i, j \geq 1, i \neq j$). Θέτουμε

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}$$

και

$$s_n := \mathbf{E}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i).$$

(α) Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(S_n^2) = s_n + s_n^2 - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)^2 \leq s_n + s_n^2.$$

(β) Για κάθε $\varepsilon > 0$, να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon s_n) \geq (1-\varepsilon)^2 \frac{s_n^2}{s_n^2 + s_n}.$$

[Υπόδειξη: Άσκηση 6.6.]

(γ)* Αν επιπλέον ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i) = \infty$, να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 1$.

[Η άσκηση αυτή γενικεύει το 2ο λήμμα Borel-Cantelli κατά το ότι υποθέτουμε τα $\{A_n : n \geq 1\}$ ανά δύο ανεξάρτητα και όχι απαραίτητα πλήρως ανεξάρτητα.]

11.20 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $\{A_n : n \geq 1\}$ στοιχεία της $\mathcal{F}$ για τα οποία ισχύει $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i) = \infty$ και υπάρχει $C \in (0, \infty)$ ώστε

$$\mathbf{P}(A_i \cap A_j) \leq C\, \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j)$$

για κάθε $i, j \geq 1$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}(\limsup_{n\geq 1} A_n) \geq 1/C > 0.$$

12

Ο Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα της Θεωρίας Πιθανοτήτων, τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών. Η διατύπωση που θα αποδείξουμε δεν είναι η ισχυρότερη μορφή του νόμου, όμως η απόδειξή της είναι ευκολότερη τεχνικά και διατηρεί αρκετά από τα στοιχεία της απόδειξης της ισχυρής μορφής.

12.1 Το θεώρημα

Θεώρημα 12.1 (Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών). *Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\mathbf{E}\,(X_1^2) < \infty$. Θέτουμε $\mu = \mathbf{E}(X_1)$ και $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu \text{ με πιθανότητα 1.}$$

Απόδειξη. Έστω $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$.
Πρώτα θα αποδείξουμε το ζητούμενο για $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με τιμές στο $[0,\infty]$. Για $n \geq 1$, θέτουμε $Y_n = \frac{S_n}{n} - \mu$. Τότε

$$\mathbf{E}(Y_n) = \frac{1}{n}\,\mathbf{E}(S_n) - \mu = \frac{1}{n} n\,\mathbf{E}(X_1) - \mu = 0,$$

και

$$\mathbf{E}\,(Y_n^2) = \mathrm{Var}(Y_n^2) = \mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\,\mathrm{Var}(S_n).$$

Όμως $\mathrm{Var}(S_n) = n\,\mathrm{Var}(X_1)$ εφόσον οι $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι ανεξάρτητες. Επομένως,

$$\mathbf{E}\,(Y_n^2) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Έτσι, για την υπακολουθία $(Y_{n^2})_{n\geq 1}$, έχουμε ότι

$$\mathbf{E}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} Y_{n^2}^2\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2}{n^2} < \infty.$$

Άρα, με πιθανότητα 1, $\sum_{n=1}^{\infty} Y_{n^2}^2 < \infty$, συνεπώς $\lim_{n\to\infty} Y_{n^2} = 0$.

Τώρα, από το $\lim_{n\to\infty} Y_{n^2} = 0$, θέλουμε να περάσουμε στο $\lim_{n\to\infty} Y_n = 0$.
Έστω $k \geq 1$. Θέτουμε $n(k) = [\sqrt{k}]$. Τότε

$$\frac{S_{n(k)^2}}{(n(k)+1)^2} \leq \frac{S_k}{k} \leq \frac{S_{(n(k)+1)^2}}{n(k)^2}$$

εφόσον $n(k) \leq \sqrt{k} \leq n(k)+1$ και η S_n είναι άθροισμα θετικών όρων. Όμως, για $k \to \infty$, με πιθανότητα 1,

$$\frac{S_{n(k)^2}}{(n(k)+1)^2} = \frac{S_{n(k)^2}}{n(k)^2}\Big(\frac{n(k)}{n(k)+1}\Big)^2 \to \mu$$

και

$$\frac{S_{(n(k)+1)^2}}{n(k)^2} = \frac{S_{(n(k)+1)^2}}{(n(k)+1)^2}\Big(\frac{n(k)+1}{n(k)}\Big)^2 \to \mu.$$

Άρα, με πιθανότητα 1, έχουμε ότι $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{S_k}{k} = \mu$.

Στην περίπτωση που οι $(X_n)_{n\geq 1}$ παίρνουν τιμές στο $[-\infty, \infty]$, έχουμε

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{X_1^+ + X_2^+ + \ldots + X_n^+}{n} - \frac{X_1^- + X_2^- + \ldots + X_n^-}{n}.$$

Οι $(X_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$, όπως και οι $(X_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και $\mathbf{E}\left((X_1^+)^2\right) < \infty$, $\mathbf{E}\left((X_1^-)^2\right) < \infty$ εφόσον $(X_1^+)^2 \leq X_1^2$, $(X_1^-)^2 \leq X_1^2$. Από τα προηγούμενα, έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1^+ + X_2^+ + \ldots + X_n^+}{n} = \mathbf{E}(X_1^+) \qquad \text{με πιθανότητα 1}$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1^- + X_2^- + \ldots + X_n^-}{n} = \mathbf{E}(X_1^+) \qquad \text{με πιθανότητα 1.}$$

Συνεπώς, με πιθανότητα 1,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbf{E}(X_1^+) - \mathbf{E}(X_1^-) = \mu.$$

■

Το συμπέρασμα του θεωρήματος ισχύει και αν αντί της $\mathbf{E}(X_1^2) < \infty$ υποθέσουμε ότι $\mathbf{E}\,|X_1| < \infty$, δηλαδή κάτι λιγότερο. Αυτή είναι η γενική μορφή του νόμου των μεγάλων αριθμών και στο εξής θα τον θεωρούμε δεδομένο με αυτή, την ισχυρότερη μορφή.

Στην Άσκηση 12.3 διατυπώνεται ένα είδος αντίστροφου του νόμου των μεγάλων αριθμών. Δηλαδή, αν ο μέσος όρος ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών συγκλίνει με πιθανότητα 1 σε πεπερασμένο αριθμό, τότε αναγκαστικά $\mathbf{E}\,|X_1| < \infty$. Άρα η υπόθεση $\mathbf{E}\,|X_1| < \infty$ στο θεώρημα είναι απαραίτητη για την ισχύ του συμπεράσματος.

Επίσης, στην Άσκηση 12.2 δείχνουμε ότι το συμπέρασμα του νόμου των μεγάλων αριθμών ισχύει ακόμα και όταν η μέση τιμή $\mu := \mathbf{E}(X_1)$ είναι $-\infty$ ή ∞. Άρα το συμπέρασμα ισχύει πάντοτε όταν η $\mathbf{E}(X_1)$ μπορεί να οριστεί.

Όταν η $\mathbf{E}(X_1)$ δεν μπορεί να οριστεί, δηλαδή όταν $\mathbf{E}(X_1^+) = \mathbf{E}(X_1^-) = \infty$, τότε ισχύει ακριβώς ένα από τα εξής

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = -\infty$ με πιθανότητα 1.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \infty$ με πιθανότητα 1.

(iii) $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = -\infty, \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \infty$ με πιθανότητα 1.

Ποιο από τα σενάρια συμβαίνει εξαρτάται από την κατανομή της X_1 και υπάρχει μάλιστα κριτήριο που το καθορίζει αλλά δεν θα το διατυπώσουμε [δες Erickson (1973)].

Σύμβαση: Αν $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$, στο εξής θα συμβολίζουμε με S_n το n-οστό μερικό άθροισμά τους.

Πόρισμα 12.2. *(Ο Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\mu := \mathbf{E}\,(X_1) \in \mathbb{R}$. Τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu \text{ κατά πιθανότητα.}$$

Απόδειξη. Έπεται από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών (ισχυρή μορφή) και το ότι η σχεδόν βέβαιη σύγκλιση συνεπάγεται την κατά πιθανότητα [Θεώρημα 8.2(ii))]. ∎

Παρατήρηση 12.3 (Η μέθοδος Monte Carlo)**.** Ο νόμος των μεγάλων αριθμών δικαιολογεί την εξής μέθοδο για τον προσεγγιστικό υπολογισμό μέσης τιμής μιας δεδομένης τυχαίας μεταβλητής X. Παράγουμε με κάποιο τρόπο έναν μεγάλο αριθμό ανεξάρτητων πραγματοποιήσεων της τυχαίας μεταβλητής X, έστω $x_1, x_2, \ldots, x_n$, και υπολογίζουμε τον μέσο τους όρο $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$. Αυτός ο μέσος όρος είναι η ζητούμενη προσέγγιση.

Με αυτή τη μέθοδο μπορούμε να βρούμε προσεγγίσεις για οποιαδήποτε ποσότητα μπορεί να παρασταθεί ως μέση τιμή κάποιας τυχαίας μεταβλητής. Η ποσότητα ενδέχεται να εμφανίζεται φυσιολογικά ως μέση τιμή σε κάποιο πρόβλημα πιθανοτήτων και να μην μπορεί να υπολογιστεί με κλειστό τύπο. Επίσης μπορεί να μην έχει καμία σχέση με πιθανότητες. Για παράδειγμα, για τον αριθμό π έχουμε την αναπαράσταση $\pi = 4\,\mathbf{E}(\mathbf{1}_{U^2+V^2<1})$ όπου οι U, V είναι ανεξάρτητες ομοιόμορφες τυχαίες μεταβλητές στο $(-1, 1)$. Η τυχαία μεταβλητή (U, V) είναι ομοιόμορφη στο τετράγωνο $(-1, 1) \times (-1, 1)$ και η μέθοδος Monte Carlo για την προσέγγιση της $\mathbf{E}(\mathbf{1}_{U^2+V^2<1})$ παίρνει πολλές πραγματοποιήσεις της (U, V) και υπολογίζει το ποσοστό αυτών που πέφτουν μέσα στον μοναδιαίο δίσκο.

12.2 Δύο εφαρμογές

Ανανεωτική θεωρία. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $[0, \infty)$. Θέτουμε

$$T_0 := 0,$$
$$T_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

για κάθε $n \geq 1$. Η ερμηνεία που σκεφτόμαστε για τις ακολουθίες $(X_n)_{n\geq 1}, (T_n)_{n\geq 1}$ είναι η εξής. Για το φωτισμό ενός δωματίου, έχουμε άπειρο πλήθος λαμπών, κάθε μία από τις οποίες έχει τυχαίο χρόνο ζωής. X_n είναι ο χρόνος ζωής της n λάμπας. Τη χρονική στιγμή 0 τοποθετούμε τη λάμπα 1. Μόλις αυτή καεί, τοποθετούμε τη λάμπα 2 και συνεχίζουμε όμοια. T_n είναι ο χρόνος που καίγεται η λάμπα n. Τώρα για $t \geq 0$, θέτουμε

$$N_t := \sup\{n \geq 0 : T_n \leq t\}.$$

Η τυχαία μεταβλητή N_t μετράει πόσες λάμπες κάηκαν κατά το χρονικό διάστημα $[0, t]$. Έστω ότι $\mu := \mathbf{E}(X_1)$. Αφού κάθε λάμπα ζει περίπου χρόνο μ, για το χρονικό διάστημα $[0, t]$ αναμένουμε να χρειάζονται t/μ λάμπες περίπου. Δηλαδή $N_t \approx t/\mu$.

Θεώρημα 12.4. *Με πιθανότητα 1 ισχύει*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

Απόδειξη. Από τον νόμο των μεγάλων αριθμών, υπάρχει ένα μετρήσιμο σύνολο $A \subset \Omega$ με $\mathbf{P}(A) = 1$ ώστε για κάθε $\omega \in A$ να ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} = \mu. \tag{12.1}$$

Από τον ορισμό του N_t έχουμε

$$T_{N_t} \leq t \leq T_{N_t+1},$$

και άρα

$$\frac{T_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} \leq \frac{T_{N_t+1}}{N_t} = \frac{T_{N_t+1}}{N_t+1}\frac{N_t+1}{N_t}. \tag{12.2}$$

Ισχυρισμος: Για κάθε $\omega \in \Omega$ ισχύει $N_t \to \infty$.

Πράγματι, επειδή η N_t είναι αύξουσα συνάρτηση του t, αν δεν ισχύει ο ισχυρισμός, τότε η N_t θα ήταν φραγμένη. Δηλαδή θα υπήρχε φυσικός $\ell \geq 1$ ώστε $N_t \leq \ell$ για κάθε $t \geq 0$. Άρα $X_1 + X_2 + \cdots + X_\ell \geq t$ για κάθε $t \geq 0$, το οποίο δεν μπορεί να ισχύει γιατί οι $X_1, X_2, .., X_\ell$ παίρνουν πραγματικές τιμές (και όχι την τιμή ∞).

Για $\omega \in A$, και χρησιμοποιώντας τον ισχυρισμό και την (12.1), έχουμε

$$\lim_{t\to\infty} \frac{T_{N_t}}{N_t} = \lim_{t\to\infty} \frac{T_{N_t+1}}{N_t + 1} = \mu.$$

Άρα για $t \to \infty$, η (12.2) δίνει $\lim_{t\to\infty} t/N_t = \mu$ που είναι το ζητούμενο. ∎

Εντροπία. Έστω X διακριτή τυχαία μεταβλητή, S το (αριθμήσιμο) σύνολο τιμών της, και $f(x) = \mathbf{P}(X = x)$ η συνάρτηση πιθανότητας της. **Εντροπία** της X ονομάζουμε τον αριθμό

$$H(X) := -\sum_{x\in S} f(x)\log f(x) \tag{12.3}$$

με τη σύμβαση $0\log 0 = 0$. Ισχύει $H(X) \geq 0$ γιατί $f(x) \in [0, 1]$. Επίσης, $H(X) = -\mathbf{E}\{\log f(X)\}$.

Η εντροπία της X εκφράζει το μέγεθος της αβεβαιότητας που έχουμε για την τιμή που θα πάρει η X αν επιχειρήσουμε να παραγάγουμε μια πραγματοποίηση της. Ας πούμε ότι η X παίρνει τιμές στο $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ με αντίστοιχες πιθανότητες $p_j := \mathbf{P}(X = x_j)$. Αν $p_1 = 1$ και $p_2 = \cdots = p_k = 0$, τότε $H(X) = 0$, και βέβαια δεν υπάρχει καμία αβεβαιότητα για την πραγματοποίηση της X, θα είναι x_1. Η εντροπία μεγιστοποιείται όταν $p_1 = p_2 = \cdots = p_k = 1/k$ (Άσκηση 12.9). Τότε όλα τα ενδεχόμενα είναι το ίδιο πιθανά και η αβεβαιότητα μας μέγιστη. Σε περίπτωση άνισων πιθανοτήτων, η αβεβαιότητα είναι μικρότερη γιατί περιμένουμε η X να πάρει μία από τις τιμές που έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα.

Τον Ορισμό (12.3) υπαγορεύει ένας υπολογισμός που θα δούμε αμέσως τώρα. Ο ίδιος υπολογισμός δίνει και την εμπειρική σημασία της εντροπίας.

Έστω $(X_k)_{k\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων διακριτών τυχαίων μεταβλητών, καθεμία ισόνομη με τη X. Για $n \geq 1$ σταθερό και δεδομένα $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$, υπολογίζουμε την πιθανότητα οι n πραγματοποιήσεις $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ της X να ταυτιστούν με το διάνυσμα $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Αυτή ισούται με

$$p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \mathbf{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n). \tag{12.4}$$

Για παράδειγμα, όταν η X παίρνει τις τιμές 1 και 0 με πιθανότητες $p := 1/3$ και $2/3$ αντίστοιχα, τότε $f(x) = p^x(1-p)^{1-x}\mathbf{1}_{x\in\{0,1\}}$ και η πιθανότητα εμφάνισης της n-άδας $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ είναι

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1+\cdots+x_n} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-x_1-\cdots-x_n}$$

Αυτή η πιθανότητα παίρνει τιμές από $(1/3)^n$ ως και $(2/3)^n$. Δεν είναι σταθερή, η τιμή της εξαρτάται από την επιλογή της n-άδας $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Όμως η πιθανότητα πραγματοποίησης μιας *τυχαίας* n-άδας $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ είναι περίπου η ίδια σχεδόν για κάθε πραγματοποίηση της $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Πιο συγκεκριμένα, στη γενική περίπτωση θέλουμε να εκτιμήσουμε την $p_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Αυτή η πιθανότητα είναι μια τυχαία μεταβλητή (εξαρτάται από τις $X_1, X_2, \ldots, X_n$), φθίνει εκθετικά με το n και από το νόμο των μεγάλων αριθμών έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\log p_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) &= \frac{1}{n}\log f(X_1)f(X_2)\cdots f(X_n) \\ &= \frac{\log f(X_1) + \log f(X_2) + \cdots + \log f(X_n)}{n} \to \mathbf{E}(\log f(X_1)) = -H(X) \end{aligned} \tag{12.5}$$

με πιθανότητα 1 καθώς $n \to \infty$. Δηλαδή, με πιθανότητα 1, για μεγάλο n, ισχύει

$$p_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) \approx e^{-nH(X)}.$$

Στο παράδειγμα πιο πάνω, $H(X) = -(1/3)\log(1/3) - (2/3)\log(2/3)$ και η $e^{-nH(X)}$ είναι μια πιθανότητα ανάμεσα στις $(1/3)^n, (2/3)^n$.

Ας υποθέσουμε ότι το S είναι πεπερασμένο. Αν ορίσουμε

$$A_n^\varepsilon = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S^n : e^{-n(H(X)+\varepsilon)} < p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) < e^{-n(H(X)-\varepsilon)}\},$$

τότε $\mathbf{P}(A_n^\varepsilon) \to 1$ λόγω της (12.5). Ακολουθίες στο A_n^ε τις λέμε ε-τυπικές. Αφού όλες τους έχουν πιθανότητα περίπου $e^{-nH(X)}$ και το άθροισμα των πιθανοτήτων τους είναι σχεδόν 1, το A_n^ε έχει πληθικότητα περίπου $e^{nH(X)}$. Στη γενική περίπτωση ισχύει $H(X) < \log|S|$ (Άσκηση 12.9), οπότε το A_n^ε είναι (από πλευράς πληθικότητας) ένα πολύ μικρό κομμάτι του S^n αφού το S^n έχει πληθικότητα $|S|^n = e^{n\log|S|}$. Παρ' όλα αυτά, το A_n^ε συγκεντρώνει σχεδόν όλη την πιθανότητα.

Η έννοια της εντροπίας είναι κεντρικής σημασίας στη Θεωρία Πληροφορίας και έχει πολλές εφαρμογές [Δες Cover and Thomas (2014)].

Ασκήσεις

12.1 (Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών. Ασθενής έκδοση.) Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\mathbf{E}(X_1^2) < \infty$. Θέτουμε $\mu = \mathbf{E}(X_1)$. Χωρίς χρήση του ισχυρού νόμου των μεγάλων αριθμών να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right) = 0 \text{ για κάθε } \epsilon > 0.$$

Δηλαδή η ακολουθία $\frac{S_n}{n}$ συγκλίνει στο μ κατά πιθανότητα.

12.2* Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\mathbf{E}(X_1^+) = \infty$ και $\mathbf{E}(X_1^-) < \infty$. Να δείξετε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \infty$$

με πιθανότητα 1.

12.3* (Αντίστροφο του Νόμου των Μεγάλων Αριθμών) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\lim_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n} = \mu$ σχεδόν βέβαια με $\mu \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $\mathbf{E}|X_1| < \infty$ και $\mathbf{E}(X_1) = \mu$.
[Υπόδειξη: Χρήσιμη είναι η Άσκηση 11.11.]

12.4 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $X_1 \sim N(1,3)$. Να δείξετε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{(X_1)^2 + (X_2)^2 + \ldots + (X_n)^2} = \frac{1}{4}$$

με πιθανότητα 1.

12.5 Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\mathbf{E}|X_1| < \infty$ και $\mathbf{E}(X_1) > 0$. Να δείξετε ότι

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

με πιθανότητα 1.

12.6 Έστω $(U_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με κατανομή $U(0,1)$, δηλαδή ομοιόμορφη στο $(0,1)$. Να δειχθεί ότι

(α) $\lim_{n\to\infty}(U_1U_2\cdots U_n)^{1/n} = e^{-1}$ με πιθανότητα 1.

(β) $\lim_{n\to\infty} U_1U_2\cdots U_n = 0$ με πιθανότητα 1.

(γ) $\lim_{n\to\infty} \frac{U_1^a+\cdots+U_n^a}{n} = \begin{cases} \frac{1}{1+a} & \text{με πιθανότητα 1 αν } a > -1, \\ \infty & \text{με πιθανότητα 1 αν } a \leq -1. \end{cases}$

12.7 Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mu = \mathbf{E}(X_1) \in \mathbb{R}$ και $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1) < \infty$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (X_k - \mu)^2 = \sigma^2 \text{ με πιθανότητα 1.}$$

12.8* Έστω $p \in [0,1]$ και$(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{P}(X_1 = 0) = 1 - p, \mathbf{P}(X_1 = 1) = p$. Θέτουμε

$$X := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} X_n.$$

Δηλαδή ο X είναι ένας αριθμός που γραμμένος στο δυαδικό σύστημα έχει ψηφία τις τυχαίες μεταβλητές $(X_n)_{n\geq 1}$. Να δειχθεί ότι:

(α) Αν $p = 1/2$ τότε η κατανομή της X είναι ο περιορισμός του μέτρου Lebesgue στο $[0,1]$.

(β) Αν $p \neq 1/2$ τότε η κατανομή της X είναι ιδιάζουσα.

12.9 Έστω $k \geq 2, S = \{x_1, \dots, x_k\}$ σύνολο με k στοιχεία, και X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο S. Να δειχθεί ότι $H(X) \leq \log k$ και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\mathbf{P}(X = x_j) = 1/k$ για κάθε $1 \leq j \leq k$.
[Υπόδειξη: Εφαρμόστε κατάλληλα την ανισότητα Jensen.]

12.10 Έστω $(X_k)_{k\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $S = \{1, 2, \dots, r\}$ και f η συνάρτηση πιθανότητας της X_1. Έστω επίσης $(Y_k)_{k\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο S και g η συνάρτηση πιθανότητας της Y_1. Υποθέτουμε ότι για $k \in S$ ισχύει $f(k) = 0 \Rightarrow g(k) = 0$. Ορίζουμε την p_n όπως στην (12.4). Δείξτε ότι η πιθανότητα $p_n(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ φθίνει εκθετικά και υπολογίστε το ρυθμό μείωσης. Αυτή είναι η πιθανότητα στις πρώτες n συντεταγμένες η ακολουθία X να μοιάζει με δείγμα παρμένο από την Y.

13

Χαρακτηριστικές συναρτήσεις

13.1 Μετασχηματισμός Fourier μέτρου πιθανότητας στο $\mathbb{R}$

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ Borel-μετρήσιμη συνάρτηση. Το πραγματικό και φανταστικό μέρος της f, που τα συμβολίζουμε με $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f)$, είναι συναρτήσεις στο Ω με πραγματικές τιμές και είναι εύκολο να δει κανείς ότι είναι Borel-μετρήσιμες. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue της f ως προς το μέτρο μ ως εξής:

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \int \mathrm{Re}(f)\,\mathrm{d}\mu + i \int \mathrm{Im}(f)\,\mathrm{d}\mu$$

με την προϋπόθεση ότι τα δύο πραγματικά ολοκληρώματα ορίζονται και είναι πραγματικοί αριθμοί. Τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και για κάθε τέτοια f ισχύει

$$\Big| \int f \,\mathrm{d}\mu \Big| \le \int |f| \,\mathrm{d}\mu, \tag{13.1}$$

$$\int \overline{f} \,\mathrm{d}\mu = \overline{\int f \,\mathrm{d}\mu}, \tag{13.2}$$

όπου $|\cdot|$ συμβολίζει το μέτρο μιγαδικού. Η δεύτερη ιδιότητα είναι προφανής, ενώ για την πρώτη γράφουμε το ολοκλήρωμα σε πολική μορφή

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = e^{i\theta} \Big| \int f \,\mathrm{d}\mu \Big|$$

με $\theta \in [0, 2\pi)$. Τότε

$$\Big| \int f \,\mathrm{d}\mu \Big| = e^{-i\theta} \int f \,\mathrm{d}\mu = \int e^{-i\theta} f \,\mathrm{d}\mu = \int \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f) \,\mathrm{d}\mu \le \int |e^{-i\theta} f| \,\mathrm{d}\mu = \int |f| \,\mathrm{d}\mu, \tag{13.3}$$

από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο. Η τρίτη ισότητα ισχύει γιατί ξέρουμε ότι το αριστερό της μέλος είναι πραγματικός αριθμός.

Ορισμός 13.1. Έστω μ μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. **Μετασχηματισμό Fourier** του μ ονομάζουμε τη συνάρτηση $\hat{\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ που ορίζεται ως

$$\hat{\mu}(t) := \int e^{itx} \,\mathrm{d}\mu(x) = \int \cos(tx) \,\mathrm{d}\mu(x) + i \int \sin(tx) \,\mathrm{d}\mu(x)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 13.2. *Έστω μ μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}$. Τότε:*

(i) $|\hat{\mu}(t)| \le 1$ *για κάθε* $t \in \mathbb{R}$.

(ii) $\hat{\mu}(0) = 1$.

(iii) Η $\hat{\mu}$ *είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη. (i) Για $t \in \mathbb{R}$, εχουμε ότι

$$|\hat{\mu}(t)| = \left|\int e^{itx}\,\mathrm{d}\mu(x)\right| \leq \int |e^{itx}|\,\mathrm{d}\mu(x) = \int 1\,\mathrm{d}\mu(x) = 1.$$

(ii) $\hat{\mu}(0) = \int e^0\,\mathrm{d}\mu(x) = 1$.

(iii) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ακολουθία $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ στον $\mathbb{R}$ με $\delta_k \to 0$ ισχύει ότι

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} |\hat{\mu}(t+\delta_k) - \hat{\mu}(t)| = 0.$$

Έστω $t, \zeta \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\begin{aligned}|\hat{\mu}(t+\zeta) - \hat{\mu}(t)| &= \left|\int (e^{i(t+\zeta)x} - e^{itx})\,\mathrm{d}\mu(x)\right| = \left|\int e^{itx}(e^{i\zeta x} - 1)\,\mathrm{d}\mu(x)\right| \\ &\leq \int |e^{itx}||e^{i\zeta x} - 1|\,\mathrm{d}\mu(x) = \int |e^{i\zeta x} - 1|\,\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

Άρα, αν $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι μηδενική ακολουθία, για $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\hat{\mu}(t+\delta_k) - \hat{\mu}(t)| \leq \int |e^{i\delta_k x} - 1|\,\mathrm{d}\mu(x). \tag{13.4}$$

Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, το δεξί μέλος της (13.4) τείνει στο 0. Γιατί θέτοντας $f_k(x) = |e^{i\delta_k x} - 1|$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, έχουμε

(α) $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) $|f_k(x)| \leq 2 =: g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(γ) $\int g(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = 2 < \infty$.

Και έτσι προκύπτει το ζητούμενο. ∎

13.2 Χαρακτηριστικές συναρτήσεις

Ορισμός 13.3. Έστω X τυχαία μεταβλητή σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στον $\mathbb{R}$. **Χαρακτηριστική συνάρτηση** της X λέμε τη συνάρτηση $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με

$$\phi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX}).$$

Από την Πρόταση 7.2, $\phi_X(t) = \int e^{itx}\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^X(x)$, δηλαδή $\phi_X = \widehat{\mathbf{P}^X}$.

Πρόταση 13.4. *Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στον $\mathbb{R}$ και $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε*

(i) $\phi_X(-t) = \overline{\phi_X(t)}$,

(ii) $\phi_{aX+b}(t) = e^{itb}\phi_X(at)$

(iii) Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες, τότε $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$.

Απόδειξη. (i) $\phi_X(-t) = \mathbf{E}(e^{i(-t)X}) = \mathbf{E}\,(\overline{e^{itX}}) = \overline{\mathbf{E}(e^{itX})} = \overline{\phi_X(t)}$.

(ii) $\phi_{aX+b}(t) = \mathbf{E}(e^{it(aX+b)}) = e^{itb}\,\mathbf{E}(e^{iatX}) = e^{itb}\phi_X(at)$.

(iii) $\phi_{X+Y}(t) = \mathbf{E}(e^{it(X+Y)}) = \mathbf{E}(e^{itX}e^{itY}) = \mathbf{E}(e^{itX})\,\mathbf{E}(e^{itY}) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$, όπου στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία των X, Y και το Θεώρημα 10.8. ∎

Στο επόμενο παράδειγμα, υπολογίζουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν κάποια από τις γνωστές κατανομές.

Παράδειγμα 13.5. (i) Έστω $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$. Τότε, $\phi_X(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\phi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX}) &= \sum_{k=0}^{n} e^{itk}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{it}p)^k(1-p)^{n-k} = (e^{it}p + 1 - p)^n.\end{aligned}$$

(ii) Έστω $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Τότε, $\phi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$ [αποδεικνύεται όμοια με το (*i*)].

(iii) Έστω $X \sim \mathrm{U}(-a, a)$. Τότε

$$\phi_X(t) = \begin{cases}\frac{\sin(at)}{at} & \text{αν } t \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\\ 1 & \text{αν } t = 0.\end{cases}$$

Πράγματι, η X έχει πυκνότητα

$$f_X(x) = \begin{cases}\frac{1}{2a} & \text{αν } x \in (-a, a),\\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus (-a, a).\end{cases}$$

Άρα, για $t \neq 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}\phi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX}) &= \int_{-a}^{a} e^{itx}\frac{1}{2a}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\cos(tx)\,\mathrm{d}x + i\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\sin(tx)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2a}\frac{\sin(tx)}{t}\bigg|_{-a}^{a} + 0 = \frac{1}{2a}\Big(\frac{\sin(ta)}{t} - \frac{\sin(-ta)}{t}\Big) = \frac{\sin(ta)}{ta}.\end{aligned}$$

Η τέταρτη ισότητα ισχύει γιατί έχουμε ολοκλήρωμα περιττής συνάρτησης σε διάστημα συμμετρικό γύρω από το 0. Για $t = 0$, προφανώς $\phi_X(0) = 1$.

(iv) Έστω $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$. Τότε, $\phi_X(t) = e^{-t^2/2}$.

Ο υπολογισμός της χαρακτηριστικής συνάρτησης στην περίπτωση αυτή είναι πιο περίπλοκος. Ένας τρόπος είναι με χρήση επιχειρημάτων από τη Μιγαδική Ανάλυση και θα τον δούμε στο Παράδειγμα 13.18 της Παραγράφου 13.6. Ένας άλλος, όχι και τόσο προφανής τρόπος, είναι ο εξής:

$$\begin{aligned}\phi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itx}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(tx)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x + i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sin(tx)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(tx)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί η συνάρτηση $x \mapsto \sin(tx)e^{-x^2/2}$ είναι περιττή. Πλέον η συνάρτηση $\phi_X(t)$ είναι πραγματική, παραγωγίσιμη και ισχύει ότι

$$\phi_X'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-x)\sin(tx)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.$$

Η παραγώγιση κάτω από το ολοκλήρωμα απαιτεί δικαιολόγηση την οποία παραλείπουμε. Ολοκληρώνοντας κατά μέρη, έχουμε

$$\phi_X'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t \cos(tx) e^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x = -t\phi_X(t).$$

Έτσι καταλήγουμε στη συνήθη διαφορική εξίσωση $\phi_X'(t) = -t\phi_X(t)$, η οποία έχει γενική λύση

$$\phi_X(t) = Ce^{-t^2/2}.$$

Και εφόσον $\phi_X(0) = 1$, έχουμε ότι $C = 1$. Άρα $\phi_X(t) = e^{-t^2/2}$.

(v) Έστω $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Τότε

$$\phi_X(t) = e^{it\mu - t^2 \frac{\sigma^2}{2}}.$$

Από τα προηγούμενα, θεωρώντας την τυχαία μεταβλητή $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, έχουμε ότι $Z \sim \mathbf{N}(0,1)$ και $X = \sigma Z + \mu$. Άρα, $\phi_X(t) = \phi_{\sigma Z+\mu}(t) = e^{it\mu}\phi_Y(t\sigma) = e^{it\mu}e^{-t^2\frac{\sigma^2}{2}}$.

(vi) Έστω $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Τότε, $\phi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX}) &= \int_0^{\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x \\
&= \lambda \int_0^{\infty} e^{x(-\lambda + it)} \, \mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty} \lambda \int_0^{M} e^{x(-\lambda+it)} \, \mathrm{d}x \\
&= \lim_{M\to\infty} \lambda \frac{e^{x(-\lambda+it)}}{-\lambda+it}\bigg|_0^M = \lim_{M\to\infty} \lambda \frac{e^{M(-\lambda+it)} - 1}{-\lambda+it} \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - it},
\end{aligned}$$

γιατί $\lim_{M\to\infty} e^{-\lambda M} e^{itM} = 0$ αφού $|e^{itM}| = 1$ και $\lambda > 0$.

(vii) Έστω $X \sim \Gamma(a, \lambda)$, με $a, \lambda > 0$ σταθερές. Δηλαδή η X έχει πυκνότητα

$$f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x \geq 0}.$$

Τότε, $\phi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^a$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Αυτό θα προκύψει από τη σχέση ροπογεννητριών και χαρακτηριστικών συναρτήσεων που εκτίθεται στην Παράγραφο 13.6 παρακάτω.

13.3 Μετασχηματισμός Fourier στο $\mathbb{R}^n$

Έστω $n \geq 1$. Για $x, y \in \mathbb{R}^n$ με $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο των x και y ορίζεται ως

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Ορισμός 13.6. Έστω μ μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$. **Μετασχηματισμό Fourier** του μ ονομάζουμε τη συνάρτηση $\hat{\mu} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ που ορίζεται ως

$$\hat{\mu}(u) := \int e^{i\langle u, x\rangle} \, \mathrm{d}\mu(x) = \int \cos(\langle u, x \rangle) \, \mathrm{d}\mu(x) + i \int \sin(\langle u, x \rangle) \, \mathrm{d}\mu(x)$$

για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$.

Και σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση $\hat{\mu}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, έχει μέτρο φραγμένο από 1, και $\hat{\mu}(0) = 1$.

Ορισμός 13.7. Έστω X τυχαία μεταβλητή σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στον $\mathbb{R}^n$. **Χαρακτηριστική συνάρτηση** της X λέμε τη συνάρτηση $\phi_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ με

$$\phi_X(u) = \mathbf{E}(e^{i\langle u, X\rangle}).$$

Το ανάλογο της Πρότασης 13.4 είναι το εξής.

Πρόταση 13.8. *Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές στον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στον $\mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και $b \in \mathbb{R}^m$. Τότε για κάθε $u \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^m$ έχουμε*

(i) $\phi_X(-u) = \overline{\phi_X(u)}$,

(ii) $\phi_{AX+b}(v) = e^{i\langle v, b\rangle}\phi_X(A^t v)$.

(iii) Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες, τότε $\phi_{X+Y}(u) = \phi_X(u)\phi_Y(u)$.

A^t είναι ο ανάστροφος του πίνακα A.

Η απόδειξη της πρότασης αφήνεται ως άσκηση.

13.4 Θεώρημα μοναδικότητας και εφαρμογές

Στην παράγραφο αυτή βασιζόμαστε στο επόμενο θεώρημα, το οποίο είναι απόρροια του θεωρήματος μοναδικότητας του μετασχηματισμού Fourier και η απόδειξή του παραλείπεται γιατί ξεφεύγει από τα πλαίσια του σκοπού μας. Ο αναγνώστης μπορεί να αναζητήσει την απόδειξη του σε βιβλία Ανάλυσης Fourier ή Πιθανοτήτων [π.χ. Θεώρημα 14.1 στο Jacod and Protter (2003)].

Θεώρημα 13.9 (Θεώρημα Μοναδικότητας)**.** *Έστω μ, ν μέτρα πιθανότητας στον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ ώστε $\hat{\mu}(u) = \hat{\nu}(u)$ για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$. Τότε, $\mu = \nu$.*

Το θεώρημα μεταφέρει τον έλεγχο $\mu(A) = \nu(A)$ για κάθε $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ στον $\hat{\mu}(u) = \hat{\nu}(u)$ για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$, που είναι ένας έλεγχος πάνω σε αριθμούς.

Αναδιατύπωση του θεωρήματος είναι το ακόλουθο πόρισμα το οποίο αφορά τυχαίες μεταβλητές.

Πόρισμα 13.10. *Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές με τιμές στον $\mathbb{R}^n$. Αν $\phi_X(u) = \phi_Y(u)$ για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$, τότε οι X, Y έχουν την ίδια κατανομή, δηλαδή $\mathbf{P}^X = \mathbf{P}^Y$.*

Απόδειξη. Επειδή $\phi_X(u) = \widehat{\mathbf{P}^X}(u)$, από το θεώρημα μοναδικότητας προκύπτει το ζητούμενο. ∎

Πόρισμα 13.11. *Έστω $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στον $\mathbb{R}^n$. Τότε οι $\{X_j : 1 \le j \le n\}$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν $\phi_X(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \phi_{X_1}(u_1)\phi_{X_2}(u_2)\cdots\phi_{X_n}(u_n)$ για κάθε $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. $\Rightarrow$ Έστω ότι οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες. Τότε

$$\phi_X(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \mathbf{E}\left(e^{i\sum_{j=1}^n u_j X_j}\right) = \mathbf{E}(e^{iu_1X_1}e^{iu_2X_2}\cdots e^{iu_nX_n}).$$

Εφόσον οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες, από προφανή γενίκευση της Άσκησης 10.2, οι $e^{iu_1X_1}$, $e^{iu_2X_2}, \ldots, e^{iu_nX_n}$ είναι ανεξάρτητες (και προφανώς φραγμένες), άρα

$$\mathbf{E}(e^{iu_1X_1}e^{iu_2X_2}\cdots e^{iu_nX_n}) = \mathbf{E}(e^{iu_1X_1})\,\mathbf{E}(e^{iu_2X_2})\cdots\mathbf{E}(e^{iu_nX_n}),$$

από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

$\Leftarrow$ Από την υπόθεση, για $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{P^X}(u) = \phi_X(u) &= \phi_{X_1}(u_1)\phi_{X_2}(u_2)\cdots\phi_{X_n}(u_n) \\
&= \widehat{\mathbf{P}^{X_1}}(u_1)\widehat{\mathbf{P}^{X_2}}(u_2)\cdots\widehat{\mathbf{P}^{X_n}}(u_n) \\
&= \int e^{iu_1x_1}\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^{X_1}(x_1)\int e^{iu_2x_2}\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^{X_2}(x_2)\cdots\int e^{iu_nx_n}\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^{X_n}(x_n) \\
&= \int e^{i\sum_{j=0}^{n} u_jx_j}\,\mathrm{d}(\mathbf{P}^{X_1}\otimes\mathbf{P}^{X_2}\otimes\ldots\otimes\mathbf{P}^{X_n})(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&= \widehat{\mathbf{P}^{X_1}\otimes\mathbf{P}^{X_2}\otimes\ldots\otimes\mathbf{P}^{X_n}}(u).
\end{aligned}$$

Συνεπώς, από το θεώρημα μοναδικότητας έχουμε ότι

$$\mathbf{P}^X = \mathbf{P}^{X_1}\otimes\mathbf{P}^{X_2}\otimes\ldots\otimes\mathbf{P}^{X_n},$$

το οποίο από την Πρόταση 10.12 ισοδυναμεί με το ζητούμενο. ■

Ορισμός 13.12. Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$. Λέμε ότι η X έχει συμμετρική κατανομή αν $X \overset{d}{=} -X$, δηλαδή, για κάθε $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ ισχύει $\mathbf{P}(X \in A) = \mathbf{P}(-X \in A)$.

Παράδειγμα 13.13. Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$ και πυκνότητα f άρτια συνάρτηση. Τότε η X έχει συμμετρική κατανομή. Πράγματι,

$$\mathbf{P}(X \in A) = \int_A f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{-A} f(-x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{-A} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \mathbf{P}(X \in -A).$$

Παράδειγμα τέτοιας τυχαίας μεταβλητής είναι μια $X \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$. Όμως μια $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, δεν έχει συμμετρική κατανομή.

Παράδειγμα 13.14. (i) Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $X_1 \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$. Αν $Y = \sum_{j=1}^{n} X_j$, τότε $Y \sim \mathrm{Bin}(n, p)$. Πράγματι, η χαρακτηριστική συνάρτηση καθεμίας από τις X_j ισούται με $\phi_{X_1}(t) = e^{it}p + 1 - p$ και από την Πρόταση 13.4(iii) έπεται ότι

$$\phi_Y(t) = \phi_{X_1}(t)^n = (e^{it}p + 1 - p)^n,$$

που είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της $\mathrm{Bin}(n, p)$. Το θεώρημα μοναδικότητας (Πόρισμα 13.10) δίνει ότι $Y \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

(ii) Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ και $Y \sim \mathrm{Poisson}(\mu)$. Τότε για τη $Z \sim X + Y$ έχουμε ότι $Z \sim \mathrm{Poisson}(\lambda + \mu)$. Πράγματι, καταρχάς παρατηρούμε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση της Z είναι

$$\phi_Z(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}e^{\mu(e^{it}-1)} = e^{(\lambda+\mu)(e^{it}-1)},$$

όπου η πρώτη ισότητα ισχύει γιατί οι X, Y είναι ανεξάρτητες. Συνεπώς, η ϕ_Z είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της κατανομής $\mathrm{Poisson}(\lambda + \mu)$, και από το θεώρημα μοναδικότητας η Z έχει κατανομή $\mathrm{Poisson}(\lambda + \mu)$.

(iii) Έστω $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ και $Y \sim \mathrm{Bin}(m, p)$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Τότε η $Z = X + Y$ έχει κατανομή $\mathrm{Bin}(n + m, p)$. Αυτό προκύπτει εύκολα με τη χρήση χαρακτηριστικών συναρτήσεων ή με χρήση του (*i*), αναπαριστώντας τις X, Y ως άθροισμα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών κατανομής $\mathrm{Bernoulli}(p)$.

(iv) Έστω $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ και $Y \sim \mathrm{N}(\nu, \tau^2)$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Τότε, η $Z = X + Y$ έχει κατανομή $\mathrm{N}(\mu + \nu, \sigma^2 + \tau^2)$. Αυτό γιατί η χαρακτηριστική συνάρτηση της Z είναι

$$\phi_Z(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t) = e^{it\mu - t^2 \frac{\sigma^2}{2}} e^{it\nu - t^2 \frac{\tau^2}{2}} = e^{it(\mu+\nu) - t^2 \frac{\sigma^2+\tau^2}{2}}.$$

Η τελευταία συνάρτηση είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της κατανομής $\mathrm{N}(\mu + \nu, \sigma^2 + \tau^2)$ και από το θεώρημα μοναδικότητας προκύπτει το ζητούμενο.

(v) Έστω $X \sim \Gamma(a_1, \lambda)$ και $Y \sim \Gamma(a_2, \lambda)$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Τότε, δουλεύοντας όμοια με τα προηγούμενα, δείχνουμε ότι η $Z = X + Y$ έχει κατανομή $\Gamma(a_1 + a_2, \lambda)$.

Μια συνέπεια αυτού του αποτελέσματος είναι η εξής αναπαράσταση της κατανομής χι τετράγωνο με p βαθμούς ελευθερίας ($p \in \mathbb{N}^+$). Αν οι $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $\mathrm{N}(0, 1)$, τότε η

$$X := Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_p^2$$

έχει κατανομή χ_p^2. Υπενθυμίζουμε ότι χ_p^2 είναι η κατανομή $\Gamma(\frac{p}{2}, \frac{1}{2})$.

Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, δείχνουμε με τη γνωστή τεχνική από τις στοιχειώδεις πιθανότητες ότι αν $Y \sim \mathrm{N}(0, 1)$, τότε η $Y^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (περίπτωση $p = 1$ του ισχυρισμού). Έπειτα εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα που δείξαμε για άθροισμα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που έχουν κατανομή Γάμμα με κοινή παράμετρο κλίμακας λ.

13.5 Ροπογεννήτριες

Για μια τυχαία μεταβλητή X με τιμές στο $[-\infty, \infty]$ η ροπογεννήτριά της είναι η συνάρτηση $M_X : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ με

$$M_X(t) = \mathbf{E}(e^{tX}).$$

Η M_X ως μέση τιμή θετικής τυχαίας μεταβλητής ορίζεται για κάθε $t \in \mathbb{R}$, απλώς ενδέχεται σε κάποια t να παίρνει την τιμή ∞. Αν η X παίρνει τιμές στο $[0, \infty]$ (αντίστοιχα στο $[-\infty, 0]$), τότε η M_X είναι πεπερασμένη για κάθε $t \leq 0$ (αντίστοιχα, για κάθε $t \geq 0$), και μάλιστα $M_X(t) \leq 1$ για εκείνα τα t. Πάντοτε $M_X(0) = 1$, ενώ το δεδομένο $M_X(t) < \infty$ για κάποιο $t \neq 0$ έχει χρήσιμες συνέπειες. Καταγράφουμε μία από αυτές στο επόμενο λήμμα (Δες επίσης την Άσκηση 6.5).

Λήμμα 13.15. *(i) Αν $\varepsilon > 0$ και $M_X(\varepsilon) < \infty$, τότε $M_X(t) < \infty$ για κάθε $t \in [0, \varepsilon]$ και $\mathbf{E}((X^+)^k) < \infty$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.*
(ii) Αν $\varepsilon > 0$ και $M_X(-\varepsilon) < \infty$, τότε $M_X(t) < \infty$ για κάθε $t \in [-\varepsilon, 0]$ και $\mathbf{E}((X^-)^k) < \infty$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. (i) Για $t \in [0, \varepsilon]$ έχουμε $e^{tX} \leq e^{\varepsilon X} + 1$ (παίρνουμε τις περιπτώσεις $X(\omega) \geq 0$ και $X(\omega) < 0$), άρα $M_X(t) < \infty$. Έπειτα, πάλι παίρνοντας περιπτώσεις, έχουμε $0 \leq \varepsilon^k (X^+)^k \leq k!\, e^{\varepsilon X}$ και το συμπέρασμα έπεται.
(ii) Όμοια όπως στο μέρος (i). ■

Το λήμμα συνεπάγεται ότι το $D_X := \{t \in \mathbb{R} : M_X(t) < \infty\}$ είναι ένα διάστημα που περιέχει το 0. Στη χειρότερη περίπτωση είναι το $\{0\}$. Επίσης, αν η X είναι τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}(X^-) = \mathbf{E}(X^+) = \infty$, το λήμμα δίνει ότι $D_X = \{0\}$. Παράδειγμα τέτοιας τυχαίας μεταβλητής είναι η Cauchy (Παράδειγμα 7.9), ενώ και άλλες τυχαίες μεταβλητές με $D_X = \{0\}$ δίνει η Άσκηση 13.5. Όλες αυτές οι τυχαίες μεταβλητές έχουν την ίδια ροπογεννήτρια αλλά διαφορετική κατανομή. Άρα η ροπογεννήτρια δεν χαρακτηρίζει την κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής, δεν την κωδικοποιεί.

Μελετούμε τώρα την περίπτωση που το D_X περιέχει ένα ανοιχτο διάστημα $(-\varepsilon, \varepsilon)$ γύρω από το 0.

Πρόταση 13.16. *Αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $M_X(-\varepsilon), M_X(\varepsilon) < \infty$, τότε*

(i) $M_X(t) < \infty$ για κάθε $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

(ii) $\mathbf{E}(|X|^k) < \infty$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$.

(iii) Η M_X *αναλύεται σε δυναμοσειρά ως*

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{E}(X^k)}{k!} t^k \tag{13.5}$$

με ακτίνα σύγκλισης τουλάχιστον ε.

(iv) $\mathbf{E}(X^k) = M_X^{(k)}(0)$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. (i) Έπεται από το προηγούμενο λήμμα.

(ii) Έπεται από το προηγούμενο λήμμα και το ότι $|X|^k = (X^-)^k + (X^+)^k$.

(iii) Για $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ έχουμε

$$M_X(t) = \mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k X^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}\left(\frac{t^k X^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k\, \mathbf{E}(X^k)}{k!}.$$

Η εναλλαγή ολοκληρώματος και αθροίσματος έπεται από το θεώρημα Fubini (εφαρμοσμένο στα μέτρα $\mathbf{P}$, αριθμητικό μέτρο στο $\mathbb{N}$) γιατί

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t^k X^k|}{k!}\right) = \mathbf{E}(e^{|tX|}) < \mathbf{E}(e^{-tX}) + \mathbf{E}(e^{tX}) < \infty.$$

(iv) Έπεται από το (iii) και τη θεωρία των δυναμοσειρών. ∎

Για να θυμάται κανείς τον τύπο $\mathbf{E}(X^k) = M_X^{(k)}(0)$ χρήσιμη είναι η εξής «απόδειξή» του. Στην $M_X(t) = \mathbf{E}(e^{tX})$ παραγωγίζουμε k φορές και παίρνουμε

$$M_X^{(k)}(t) = \mathbf{E}(X^k e^{tX}). \tag{13.6}$$

Δηλαδή περνάμε την παράγωγο μέσα από τη μέση τιμή. Το ότι αυτό είναι σωστό αποδεικνύεται με χρήση του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης, αλλά το παραλείπουμε (η απόδειξη όταν $k = 1$ δίνεται στο Λήμμα 17.7). Έπειτα θέτουμε $t = 0$ στην (13.6).

Αντιπαραβάλλουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση με τη ροπογεννήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής. Γράφουμε (+) στα προτερήματα και (−) στα ελαττώματα.

Η χαρακτηριστική συνάρτηση:

(i) Είναι πάντοτε πεπερασμένος αριθμός. (+)

(ii) Ο υπολογισμός της ενδέχεται να εμπλέκει ολοκληρώματα μιγαδικών συναρτήσεων. (−)

(iii) Χαρακτηρίζει την κατανομή της X. Δύο τυχαίες μεταβλητές με ίδια χαρακτηριστική συνάρτηση έχουν την ίδια κατανομή (Πόρισμα 13.10). (+)

Η ροπογεννήτρια:

(i) Ενδέχεται να πάρει την τιμή ∞. (−)

(ii) Ο υπολογισμός της εμπλέκει ολοκληρώματα ή αθροίσματα στο $\mathbb{R}$. (+)

(iii) Γενικά, δεν χαρακτηρίζει την κατανομή της X. Δύο τυχαίες μεταβλητές ενδέχεται να έχουν την ίδια ροπογεννήτρια αλλά διαφορετική κατανομή. (−)

(iv) Η υπόθεση $M_X(t) < \infty$ για κάποιο $t \neq 0$ δίνει πληροφορίες για τη X (π.χ., Λήμμα 13.15 και Άσκηση 6.5). (+)

13.6 Χαρακτηριστικές συναρτήσεις μέσω ροπογεννητριών*

Έχοντας υπολογίσει κανείς την ροπογεννήτρια M_X της X είναι δελεαστικό να προσπαθήσει να υπολογίσει τη χαρακτηριστική συνάρτηση ως

$$\phi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX}) \stackrel{?}{=} M_X(it).$$

Ένα πρώτο πρόβλημα είναι ότι το σύμβολο $M_X(it)$ δεν έχει νόημα αφού η M_X έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Ας το παραβλέψουμε. Η ιδέα είναι να βρούμε έναν τύπο για τη M_X στον οποίο να μπορέσουμε να βάλουμε όπου t το it. Και έχουμε παραδείγματα που αυτό δουλεύει. Π.χ. στην περίπτωση που η X ακολουθεί κάποια κανονική ή εκθετική κατανομή.

Ας δούμε τι γίνεται αν η $X \sim \mathrm{N}(0,1)$. Βρίσκουμε ότι $M_X(t) = e^{t^2/2}$. Βάζοντας όπου t το it βρίσκουμε $e^{-t^2/2}$ που είναι ο σωστός τύπος για τη χαρακτηριστική συνάρτηση της X. Είναι δυνατόν όμως να πει κανείς ότι $M_X(t) = e^{|t|^2/2}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και η αντικατάσταση $t \to it$ δίνει $e^{t^2/2}$, που είναι λάθος. Τι καλύτερο έχει ο τύπος $e^{t^2/2}$ από τον $e^{|t|^2/2}$;

Πρόταση 13.17. *Έστω X πραγματική τυχαία μεταβλητή με ροπογεννήτρια M_X. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε*

(i) Η M_X είναι πεπερασμένη στο $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

(ii) Υπάρχει αναλυτική συνάρτηση $h : \{z \in \mathbb{C} : |Re(z)| < \varepsilon\} \to \mathbb{C}$ ώστε το σύνολο $\{t \in \mathbb{R} : M_X(t) = h(t)\}$ να έχει σημείο συσσώρευσης στο $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Τότε $\phi_X(t) = h(it)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έστω $A_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| < \varepsilon\}$. Θέτουμε $g : A_\varepsilon \to \mathbb{C}$ με $g(z) := \mathbf{E}(e^{zX})$ για κάθε $z \in A_\varepsilon$.

Ισχυρισμος: Η g είναι καλά ορισμένη[1] και αναλυτική στο A_ε.

Επειδή $|e^{zX}| = e^{X\,\mathrm{Re}\,z}$ και $\mathbf{E}(e^{X\,\mathrm{Re}\,z}) < \infty$ από την υπόθεση (i), έπεται ότι η g είναι καλά ορισμένη. Τώρα για $z_0 \in A_\varepsilon$ και $z \in \mathbb{C}$ με $|z| < \varepsilon - |\mathrm{Re}(z_0)|$ ισχύει

$$g(z_0 + z) = \mathbf{E}(e^{z_0X}e^{zX}) = \mathbf{E}\left\{e^{z_0X}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(zX)^k}{k!}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{E}\left\{X^k e^{z_0X}\right\}}{k!}z^k. \tag{13.7}$$

Χρειάζεται δικαιολόγηση μόνο η τελευταία ισότητα. Δηλαδή η αλλαγή σειράς μέσης τιμής και άθροισης. Αυτό έπεται από το θεώρημα Fubini αφού

$$\mathbf{E}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left|e^{z_0X}\frac{(zX)^k}{k!}\right|\right\} = \mathbf{E}\left\{e^{\mathrm{Re}(z_0)X+|zX|}\right\} \le \mathbf{E}(e^{|X|(|z|+|\mathrm{Re}(z_0)|)}) < \infty.$$

Το ότι η τελευταία ποσότητα είναι πεπερασμένη έπεται από το ότι $|z|+|\mathrm{Re}(z_0)| < \varepsilon$ και την υπόθεση (i). Εδώ λοιπον είναι κρίσιμη η υπόθεση ότι η M_X είναι πεπερασμένη στο $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Επίσης συμπεραίνουμε ότι στο δεξί μέλος της (13.7) έχουμε μια δυναμοσειρά του z με πεπερασμένους συντελεστές η οποία συγκλίνει αφού η $g(z_0 + z)$ είναι πεπερασμένη. Έπεται ότι η g αναλύεται σε δυναμοσειρά με κέντρο z_0 και ακτίνα σύγκλισης τουλάχιστον $\varepsilon - |\mathrm{Re}(z_0)| > 0$, πράγμα που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Από την υπόθεση (ii) το σύνολο των σημείων που ισχύει $g(z) = h(z)$ έχει σημείο συσσώρευσης στο $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset A_\varepsilon$. Από την αρχή αναλυτικής συνέχισης οι συναρτήσεις h, g ταυτίζονται στο A_ε. Άρα, για $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X(t) = g(it) = h(it)$$

αφού $it \in A_\varepsilon$. ∎

[1] Το καλά ορισμένη σημαίνει ότι η μέση τιμή μπορεί να οριστεί και είναι στοιχείο του $\mathbb{C}$. Δεν εμφανίζεται κάποια μορφή $\infty - \infty$.

Επιστρέφοντας στη συζήτηση πριν την πρόταση, το πρόβλημα με την $e^{|z|^2/2}$ είναι ότι δεν είναι αναλυτική συνάρτηση (ούτε καν σε ένα σημείο του $\mathbb{C}$). Έτσι δεν μπορεί να παίξει τον ρόλο της h που αναφέρει η πρόταση.

Παράδειγμα 13.18. (i) Μια $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ έχει ροπογεννήτρια $M_X(t) = e^{t^2/2}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Η M_X είναι σαφώς πεπερασμένη σε περιοχή του 0. Η συνάρτηση $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $h(z) = e^{z^2/2}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ είναι αναλυτική σε όλο το $\mathbb{C}$ και συμφωνεί με τη M_X στο $\mathbb{R}$ (Είναι η μόνη αναλυτική που το κάνει αυτό). Άρα η Πρόταση 13.17 εφαρμόζεται και δίνει ότι $\phi_X(t) = h(it) = e^{-t^2/2}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Μια $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ έχει ροπογεννήτρια

$$M_X(t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda - t} & \text{αν } t < \lambda, \\ \infty & \text{αν } t \geq \lambda. \end{cases}$$

Η M_X είναι πεπερασμένη στην περιοχή $(-\lambda, \lambda)$ του 0. Η συνάρτηση $h : \mathbb{C}\backslash\{\lambda\} \to \mathbb{C}$ με $h(z) = \lambda/(\lambda - z)$ είναι αναλυτική στο πεδίο ορισμού της [το οποίο περιέχει μια λωρίδα της μορφής $\{z : |\mathrm{Re}(z)| < \varepsilon\}$ με $\varepsilon > 0$, π.χ. με $\varepsilon = \lambda$.] και συμφωνεί με τη M_X στο $(-\infty, \lambda)$. Άρα η Πρόταση 13.17 εφαρμόζεται και δίνει ότι $\phi_X(t) = h(it) = \lambda/(\lambda - it)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Συνέπεια της απόδειξης της Πρότασης 13.17 είναι το εξής θεώρημα μοναδικότητας για ροπογεννήτριες.

Θεώρημα 13.19 (Θεώρημα μοναδικότητας για ροπογεννήτριες)**.** *Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές με τιμές στον $\mathbb{R}$. Αν*
(i) υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε M_X, M_Y είναι πεπερασμένες στο $(-\varepsilon, \varepsilon)$ και
(ii) $M_X(t) = M_Y(t)$ για κάθε $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$,
τότε οι X, Y έχουν την ίδια κατανομή, δηλαδή $\mathbf{P}^X = \mathbf{P}^Y$.

Απόδειξη. Η υπόθεση (i) και η απόδειξη της Πρότασης 13.17 δίνουν ότι οι συναρτήσεις $g(z) = \mathbf{E}(e^{zX}), h(z) = \mathbf{E}(e^{zY})$ είναι αναλυτικές στο $A_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| < \varepsilon\}$. Η υπόθεση (ii) και η αρχή αναλυτικής συνέχισης δίνουν ότι οι g, h ταυτίζονται στο A_ε. Άρα για $t \in \mathbb{R}$, έχουμε $\phi_X(t) = g(it) = h(it) = \phi_Y(t)$. Το συμπέρασμα έπεται από το Πόρισμα 13.10 (θεώρημα μοναδικότητας για χαρακτηριστικές συναρτήσεις). ∎

Προσέξτε ότι το προηγούμενο θεώρημα ζητάει οι ροπογεννήτριες των X, Y να ταυτίζονται σε μια περιοχή του 0 (και να είναι πεπερασμένες σε αυτήν), ενώ το θεώρημα μοναδικότητας για χαρακτηριστικές συναρτήσεις (Πόρισμα 13.10) ζητάει ταύτισή τους σε όλο το $\mathbb{R}$. Ταύτιση των χαρακτηριστικών σε περιοχή του 0 δεν αρκεί για να δώσει ισότητα των κατανομών. Αντιπαραδείγματα δίνονται στην Παράγραφο 2α του Κεφαλαίου XV του Feller (1971).

13.7 Άθροισμα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών

Ορισμός 13.20. Έστω μ, ν μέτρα πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Συνέλιξη των μ, ν λέμε το μέτρο πιθανότητας $\mu * \nu$ στο $\mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$\mu * \nu(A) := \int \int \mathbf{1}_A(x+y)\, \mathrm{d}\mu(x)\, \mathrm{d}\nu(y)$$

για κάθε $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Παρατήρηση 13.21. Εύκολα βλέπουμε ότι η συνέλιξη είναι συμμετρική, δηλαδή $\mu * \nu = \nu * \mu$. Επίσης, ισχύει ότι

$$\mu * \nu(A) = \int \int \mathbf{1}_{(A-y)}(x)\, \mathrm{d}\mu(x)\, \mathrm{d}\nu(y) = \int \mu(A-y)\, \mathrm{d}\nu(y) = \int \nu(A-x)\, \mathrm{d}\mu(x).$$

Θεώρημα 13.22. *Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$ και κατανομές $\mathbf{P}^X, \mathbf{P}^Y$ αντίστοιχα. Τότε $\mathbf{P}^{X+Y} = \mathbf{P}^X * \mathbf{P}^Y$.*

Απόδειξη. Εφόσον οι X, Y είναι ανεξάρτητες, η κατανομή της (X, Y) είναι το μέτρο γινόμενο $\mathbf{P}^X \otimes \mathbf{P}^Y$ στον $\mathbb{R}^2$ (Πρόταση 10.12). Για $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{X+Y}(A) &= \mathbf{P}(X+Y \in A) = \mathbf{E}\{\mathbf{1}_A(X+Y)\}\\ &= \int \mathbf{1}_A(x+y)\,\mathrm{d}(\mathbf{P}^X \otimes \mathbf{P}^Y)(x,y) = \int\int \mathbf{1}_A(x+y)\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^X(x)\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^Y(y)\\ &= \mathbf{P}^X * \mathbf{P}^Y(A).\end{aligned}$$

Στην πρώτη ισότητα της δεύτερης γραμμής χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 7.2 για τη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $g(x,y) = \mathbf{1}_A(x+y)$ και την τυχαία μεταβλητή (X, Y). ■

Θεώρημα 13.23. *Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$ και $Z = X + Y$. Τότε:*

(i) Αν η X έχει πυκνότητα f_X, τότε η Z έχει πυκνότητα και μια τέτοια είναι η

$$f_Z(z) = \int f_X(z-y)\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^Y(y)$$

για κάθε $z \in \mathbb{R}$.

(ii) Αν οι X, Y έχουν αντίστοιχα πυκνότητες f_X, f_Y, τότε η

$$f_Z(z) = \int f_X(z-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$

για κάθε $z \in \mathbb{R}$ είναι πυκνότητα της Z.

Απόδειξη. (i) Έστω $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Τότε, από το Θεώρημα 13.22,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z \in A) &= \int \mathbf{P}^X(A-y)\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^Y(y) = \int\int_{A-y} f_X(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^Y(y)\\ &\overset{x=z-y}{=} \int\int_A f_X(z-y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^Y(y) = \int_A\int f_X(z-y)\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^Y(y)\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

άρα η $f_Z(z) = \int f_X(z-y)\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^Y(y)$ είναι πυκνότητα της Z.

(ii) Έστω $z \in \mathbb{R}$. Τότε, από το (i) και την Πρόταση 7.8, έχουμε

$$f_Z(z) = \int f_X(z-y)\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^Y(y) = \int f_X(z-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

Η δεύτερη ισότητα στην εκφώνηση προκύπτει με μια απλή αλλαγή μεταβλητής. ■

Το προηγούμενο θεώρημα συμπληρώνει την τεχνική προσδιορισμού κατανομής αθροίσματος που είδαμε στο Παράδειγμα 13.14. Το θεώρημα είναι χρήσιμο όταν η χαρακτηριστική συνάρτηση του αθροίσματος δεν είναι κάποια από τις γνωστές χαρακτηριστικές συναρτήσεις. Μια τέτοια περίπτωση περιγράφεται στην Άσκηση 13.14.

Ασκήσεις

13.1 Να δειχθεί ότι ισχύει η ισότητα στην (13.1) αν και μόνο αν υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) = |f(x)|e^{ia}$ μ-σχεδόν παντού στο Ω.

13.2 Έστω ότι για την τυχαία μεταβλητή X με τιμές στο $\mathbb{R}$ και ένα $t_0 \neq 0$ ισχύει $|\phi_X(t_0)| = 1$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε με πιθανότητα 1 η X να παίρνει τιμές στο $\{a + k(2\pi/t_0) : k \in \mathbb{Z}\}$. Αν $\phi_X(t_0) = 1$, τότε μπορούμε να πάρουμε $a = 0$.

13.3 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{E}\,|X| < \infty$. Να δειχθεί ότι η ϕ_X είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\phi'_X(0) = i\,\mathbf{E}(X)$.
[Υπόδειξη: Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.]

13.4 Έστω $X \sim \Gamma(a, \lambda)$. Να δειχθεί ότι η X έχει χαρακτηριστική συνάρτηση

$$\phi_X(t) = \frac{1}{\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^a}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

13.5 Έστω $a > 0$ και X τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f(x) = \frac{a}{2|x|^{a+1}}\,\mathbf{1}_{|x|\geq 1}.$$

Να δειχθεί ότι $M_X(t) = \infty$ για κάθε $t \neq 0$.

13.6 Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή $N(0,1)$ και $Y := e^X$. Να δειχθεί ότι

(α) $\mathbf{E}(Y^k) < \infty$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

(β) $M_Y(t) < \infty$ αν και μόνο αν $t \leq 0$.

13.7 Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η X έχει συμμετρική κατανομή (δηλαδή $X \overset{d}{=} -X$) αν και μόνο αν $\phi_X(u) \in \mathbb{R}$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$.

13.8 Έστω X, Y ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η $X - Y$ έχει συμμετρική κατανομή.

13.9 Λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει κατανομή Cauchy αν έχει πυκνότητα $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε γνωστό για αυτή την άσκηση ότι $\phi_X(u) = e^{-|u|}$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι

(α) Αν $X, Y \sim$ Cauchy ανεξάρτητες, τότε $\frac{X+Y}{2} \sim$ Cauchy.

(β) Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim$ Cauchy ανεξάρτητες, τότε $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} \sim$ Cauchy.

13.10 Έστω $\alpha \in (0, 2]$. Είναι γνωστό ότι υπάρχει τυχαία μεταβλητή X με χαρακτηριστική συνάρτηση την $\phi_X(t) = e^{-|t|^\alpha}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Έστω τώρα n θετικός ακέραιος και $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές καθεμία με κατανομή την ίδια με αυτήν της X. Να δειχθεί ότι $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \overset{d}{=} n^{1/\alpha} X_1$.

13.11 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{P}(X_1 = -1) = \mathbf{P}(X_1 = 1) = 1/2$. Να δειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{2^n}$ συγκλίνει με πιθανότητα 1 σε μια τυχαία μεταβλητή με κατανομή την ομοιόμορφη στο $(-1, 1)$.
Σημείωση: Εναλλακτική διατύπωση αυτού του αποτελέσματος είναι ότι αν οι $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι ανεξάρτητες ισόνομες και καθεμία έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο $\{0, 1\}$, τότε η σειρά συγκλίνει σχεδόν βέβαια σε μια τυχαία μεταβλητή με κατανομή την ομοιόμορφη στο $(0, 1)$.

13.12 Έστω X τυχαία μεταβλητή όπως στην Άσκηση 13.5 με $a \in (0, 2)$. Να δειχθεί ότι υπάρχει σταθερά $C(a) \in (0, \infty)$ ώστε

$$\lim_{t\to 0} \frac{1 - \phi_X(t)}{t^a} = C(a). \tag{13.8}$$

13.13* Έστω X τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα $f(x) = |x|^{-3}\mathbf{1}_{|x|\geq 1}$. Να δειχθεί ότι για κάθε $t \in [-1, 1]$ ισχύει

$$|\phi_X(t) - 1 - t^2 \log|t|| \leq 3t^2. \tag{13.9}$$

13.14 Έστω $X, Y \sim U(0, 1)$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Να δείξετε ότι η $Z = X + Y$ έχει πυκνότητα

$$f_Z(z) = \begin{cases} z & \text{αν } z \in (0, 1], \\ 2 - z & \text{αν } z \in (1, 2), \\ 0 & \text{αν } z \in \mathbb{R} \setminus (0, 2). \end{cases}$$

14

Σύγκλιση κατά κατανομή

14.1 Σύγκλιση κατά κατανομή

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε μια ασθενέστερη, από όσες έχουμε δει έως τώρα, μορφή σύγκλισης, τη σύγκλιση κατά κατανομή. Θα θεωρήσουμε μέτρα πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός 14.1. Έστω $\mu, (\mu_n)_{n\geq 1}$ μέτρα πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Λέμε ότι η $(\mu_n)_{n\geq 1}$ **συγκλίνει ασθενώς** στο μ αν

$$\mu_n((-\infty, x]) \to \mu((-\infty, x]) \tag{14.1}$$

καθώς $n \to \infty$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\mu(\{x\}) = 0$. Γράφουμε τότε $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Το κατά κατανομή όριο μιας ακολουθίας μέτρων που συγκλίνει κατά κατανομή είναι μοναδικό. Γιατί αν η ακολουθία συγκίνει σε δύο μέτρα μ, ν, τότε οι συναρτήσεις κατανομής τους είναι ίσες στο $\{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) = \nu(\{x\}) = 0\}$ το οποίο έχει αριθμήσιμο συμπλήρωμα (το δείχνουμε με χρήση της Άσκησης 2.5), άρα είναι πυκνό. Και επειδή οι συναρτήσεις κατανομής είναι δεξιά συνεχείς, έπεται ότι ισούνται σε όλο το $\mathbb{R}$. Έτσι, το Θεώρημα 4.10 δίνει ότι $\mu = \nu$.

Ορισμός 14.2. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}, X$ τυχαίες μεταβλητες με τιμές στο $\mathbb{R}$. Λέμε ότι η $(X_n)_{n\geq 1}$ *συγκλίνει κατά κατανομή* στη X και γράφουμε[1]

$$X_n \Rightarrow X \text{ ή } X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X \text{ ή } X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X,$$

αν η ακολουθία κατανομών $(\mathbf{P}^{X_n})_{n\geq 1}$ των X_n συγκλίνει ασθενώς στην κατανομή $\mathbf{P}^X$ της X.

Το πιο πάνω σχόλιο για τη μοναδικότητα του ορίου κατά κατανομή, με όρους τυχαίων μεταβλητών, λέει ότι, αν η $(X_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει κατά κατανομή σε δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y, τότε οι X, Y έχουν την ίδια κατανομή.

Θεώρημα 14.3. *Έστω $(X_n)_{n\geq 1}, X$ όπως στον Ορισμό 14.2. Τότε $X_n \Rightarrow X$ αν και μόνο αν*

$$F_{X_n}(x) \to F_X(x)$$

καθώς $n \to \infty$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $F_X(x) = F_X(x-)$, δηλαδή για κάθε σημείο συνέχειας της F_X.

Απόδειξη. Προκύπτει από τον Ορισμό 14.1, τον ορισμό της συνάρτησης κατανομής, και το ότι $\mathbf{P}^X(\{x\}) = \mathbf{P}(X = x) = F_X(x) - F_X(x-)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. ■

Μια συνάρτηση κατανομής F έχει αριθμήσιμο πλήθος σημείων ασυνέχειας (Άσκηση 4.1). Δηλαδή αυτά τα σημεία είναι λίγα. Σε οποιοδήποτε διάστημα θετικού μήκους μπορούμε να βρούμε σημείο συνέχειας της F.

Παρατήρηση 14.4. (i) Στον Ορισμό 14.2, οι $X, \{X_n : n \geq 1\}$, δεν είναι απαραίτητο να ορίζονται στον ίδιο χώρο πιθανότητας. Κάθε μία ορίζεται σε χώρο πιθανότητας $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}_n)$ και η X σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Αυτό θα δημιουργούσε πρόβλημα αν θέλαμε να θεωρήσουμε τη διαφορά $X_n(\omega) - X(\omega)$.

[1] d από το distribution, και $\mathscr{L}$ από το law.

(ii) Αν οι $\{X_n : n \geq 1\}$ και X ορίζονται στον ίδιο χώρο πιθανότητας έχει νόημα να εξετάσουμε πώς η σύγκλιση κατά κατανομή συνδέεται με τα υπόλοιπα είδη σύγκλισης που είδαμε στο Κεφάλαιο 8 (σχεδόν βέβαιη, στον $\mathcal{L}^p$, κατά πιθανότητα). Το Θεώρημα 14.13 πιο κάτω αφορά αυτό το ερώτημα.

Παράδειγμα 14.5. Έστω $(p_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στο $(0,1)$ έτσι ώστε $p_n \to 0$ και $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών έτσι ώστε $X_n \sim$ Γεωμετρική(p_n) για κάθε $n \geq 1$. Θα δείξουμε ότι

$$p_n X_n \Rightarrow X,$$

όπου X τυχαία μεταβλητή με κατανομή $\mathrm{Exp}(1)$.

Η F_X είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Συγκεκριμένα, έχουμε ότι

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t}\mathbf{1}_{t>0}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \leq 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{αν } x > 0. \end{cases}$$

Για $x \leq 0$,

$$F_{p_nX_n}(x) = \mathbf{P}(p_nX_n \leq 0) = 0,$$

αφού $p_n > 0$ και $X_n \geq 1$. Για $x > 0$,

$$\begin{aligned} F_{p_nX_n}(x) &= \mathbf{P}\left(X_n \leq \frac{x}{p_n}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(X_n > \frac{x}{p_n}\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(X_n > \left[\frac{x}{p_n}\right]\right) = 1 - (1-p_n)^{\left[\frac{x}{p_n}\right]}, \end{aligned}$$

εφόσον για $Y \sim$ Γεωμετρική(p) ισχύει $\mathbf{P}(Y \geq k) = (1-p)^{k-1}$. Τώρα παρατηρούμε ότι

$$(1-p_n)^{\left[\frac{x}{p_n}\right]} = e^{\left[\frac{x}{p_n}\right]p_n\frac{\log(1-p_n)}{p_n}} \to e^{-x}$$

για $n \to \infty$. Άρα, $F_{p_nX_n}(x) \to 1 - e^{-x}$. Από το Θεώρημα 14.3 έπεται το ζητούμενο.

Παρατηρήστε ότι η τυχαία μεταβλητή X_n παίρνει τιμές στο $\mathbb{N}^+$ και άρα η p_nX_n στο $p_n\mathbb{N}^+$, το οποίο είναι ένα σύνολο που απλώνεται στο $[0,\infty)$ με όλο και πιό πυκνό τρόπο καθώς $n \to \infty$. Κατά μια έννοια, αυτό το σύνολο συγκλίνει στο $[0,\infty)$, το οποίο είναι το στήριγμα της κατανομής της X.

Παράδειγμα 14.6. Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με καθεμία να ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο 1. Για κάθε $n \geq 1$ θετικό ακέραιο, θέτουμε $W_n := \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ και $Z_n := W_n - \log n$. Θα δείξουμε ότι

$$W_n - \log n \Rightarrow Z \tag{14.2}$$

όπου Z είναι τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής $F_Z(t) := e^{-e^{-t}} (t \in \mathbb{R})$.

Η F_Z είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Έστω λοιπόν $t \in \mathbb{R}$. Για $n > e^{-t}$ έχουμε

$$\begin{aligned} F_{W_n - \log n}(t) &:= \mathbf{P}(W_n - \log n \leq t) = \mathbf{P}(\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq t + \log n) \\ &= \mathbf{P}(X_1 \leq t + \log n, \dots, X_n \leq t + \log n) \\ &= \mathbf{P}(X_1 \leq t + \log n)^n = (1 - e^{-t-\log n})^n = \left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

Στην τέταρτη ισότητα χρησιμοποιούμε ότι οι X_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Στην πέμπτη ι-σότητα ότι $t + \log n > 0$ και ότι η X_1 ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο 1. Άρα $\lim_{n\to\infty} F_{W_n - \log n}(t) = e^{-e^{-t}} = F_Z(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Αυτό που μας λέει η σύγκλιση (14.2) είναι ότι το μέγιστο n ανεξάρτητων εκθετικών τυχαίων μεταβλητών με παράμετρο 1 είναι της τάξης του $\log n$. Δηλαδή ισούται με $\log n$ συν μια διόρθωση που είναι περίπου μια τυχαία μεταβλητή όπως η Z. Αυτή η διόρθωση δεν αλλάζει την τάξη μεγέθους, γιατί, π.χ., με πιθανότητα 0.95 ισχύει $|Z| \leq 3$ (υπολογίζουμε $\mathbf{P}(|Z| \leq 3) = F_Z(3) - F_Z(-3-) = e^{-e^{-3}} - e^{-e^{3}}$).

Παρατήρηση 14.7. [Ισοκατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές.] Συνεχίζοντας από την Παρατήρηση 7.4, στο προηγούμενο παράδειγμα, αφού ολες οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ έχουν την ίδια κατανομή με τη X_1, γιατί στην ποσότητα

$$\mathbf{P}(X_1 \le t + \log n, \dots, X_n \le t + \log n)$$

δεν αντικαθιστούμε όλες τις τυχαίες μεταβλητές με τη X_1; Και τότε η ποσότητα θα γινόταν $\mathbf{P}(X_1 \le t + \log n)$. Αυτό βέβαια δεν είναι σωστό και δεν μπορεί να δικαιολογηθεί με χρήση της Πρότασης 7.2 γιατί, για να είναι η χρήση της σωστή, θα έπρεπε τα δύο *διανύσματα* $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ και $(X_1, X_1, \dots, X_1)$ να έχουν την ίδια κατανομή, πράγμα το οποίο δεν ισχύει.
Όταν όμως με χρήση της ανεξαρτησίας γράψουμε την πιο πάνω πιθανότητα ως

$$\mathbf{P}(X_1 \le t + \log n) \cdots \mathbf{P}(X_n \le t + \log n),$$

τότε κάθε όρος του γινομένου ισούται με $\mathbf{P}(X_1 \le t + \log n)$ επειδή κάθε μία από τις X_i έχει την ίδια κατανομή με τη X_1.

Για την ανάπτυξη της θεωρίας είναι πιο βολικό αντί να δουλεύουμε με τον ορισμό της ασθενούς σύγκλισης να χρησιμοποιούμε τον χαρακτηρισμό της που δίνεται από το επόμενο θεώρημα. Η απόδειξή του δίνεται στο Παράρτημα Β′.

Θεώρημα 14.8. *Έστω $\mu, (\mu_n)_{n\ge1}$ μέτρα πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Τότε $\mu_n \Rightarrow \mu$ αν και μόνο αν*

$$\int f(x)\, d\mu_n(x) \to \int f(x)\, d\mu(x) \tag{14.3}$$

για κάθε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχή και φραγμένη.

Το ίδιο θεώρημα, με όρους τυχαίων μεταβλητών, γράφεται ως εξής.

Θεώρημα 14.9. *Έστω $X, (X_n)_{n\ge1}$ τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$. Τότε $X_n \Rightarrow X$ αν και μόνο αν*

$$\mathbf{E}\{f(X_n)\} \to \mathbf{E}\{f(X)\} \tag{14.4}$$

για κάθε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχή και φραγμένη.

Πιο αναλυτικά, έχουμε $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}), (\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}_n)$, $n \ge 1$ χώρους πιθανότητας και τυχαίες μεταβλητές $X : \Omega \to \mathbb{R}, X_n : \Omega_n \to \mathbb{R}$ για κάθε $n \ge 1$. Η μέση τιμή στο αριστερό μέλος της (14.4) είναι ως προς το μέτρο $\mathbf{P}_n$, ενώ στο δεξί ως προς το μέτρο $\mathbf{P}$.

Το προηγούμενο θεώρημα είναι περισσότερο χρήσιμο για την απόδειξη θεωρητικών αποτελεσμάτων και όχι για αποδείξεις σύγκλισης κατά κατανομή ακολουθιών τυχαίων μεταβλητών που εμφανίζονται συχνά. Μία από τις εξαιρέσεις είναι η ακόλουθη.

Παράδειγμα 14.10. Έστω $(X_n)_{n\ge1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ώστε η X_n να είναι ομοιόμορφη διακριτή στο σύνολο $\{1, 2, \dots, n\}$. Θα δείξουμε ότι

$$\frac{1}{n} X_n \Rightarrow U \tag{14.5}$$

καθώς $n \to \infty$, όπου $U \sim \mathrm{U}(0, 1)$.

Για $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχή και φραγμένη και $n \to \infty$ έχουμε

$$\mathbf{E}\left\{ f\left(\frac{X_n}{n}\right)\right\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_n = k) f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f(x)\, dx = \mathbf{E}\{f(U)\}$$

Η σύγκλιση ισχύει γιατί έχουμε ένα άθροισμα Riemann για την f στο $[0, 1]$. Η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί η U είχει πυκνότητα $1_{(0,1)}$.

Η σύγκλιση (14.5) είναι αναμενόμενη αφού η κατανομή της X_n/n δίνει μάζα $1/n$ σε καθένα από τα σημεία $\{1/n, 2/n, \dots, n/n\}$. Η μάζα ισομοιράζεται και τελικά, καθώς $n \to \infty$, κάθε υποδιάστημα του $[0, 1]$ παίρνει μάζα ανάλογη προς το μέγεθός του.

Δίνουμε ακόμη έναν χαρακτηρισμό της ασθενούς σύγκλισης. Αυτός είναι χρήσιμος στις εφαρμογές.

Θεώρημα 14.11. *Έστω $\mu, (\mu_n)_{n\geq 1}$ μέτρα πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα*

(i) $\mu_n \Rightarrow \mu$.

(ii) Για κάθε $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ με $\mu(\partial A) = 0$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A).$$

Απόδειξη. (ii) $\Rightarrow$ (i). Αυτή η κατεύθυνση είναι εύκολη. Αν το $x \in \mathbb{R}$ είναι σημείο με $\mu(\{x\}) = 0$, τότε εφαρμόζοντας την υπόθεση για το σύνολο $A = (-\infty, x]$, το οποίο έχει $\partial A = \{x\}$, παίρνουμε την (14.1), που είναι το ζητούμενο.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Δίνεται στο Παράρτημα Β′. ∎

Άμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος είναι ο εξής εναλλακτικός χαρακτηρισμός για τη σύγκλιση κατά κατανομή.

Θεώρημα 14.12. *Έστω $X, (X_n)_{n\geq 1}$ τυχαίες μεταβλητές όπως στο Θεώρημα 14.9. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα.*

(i) $X_n \Rightarrow X$

(ii) Για κάθε $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ με $\mathbf{P}(X \in \partial A) = 0$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_n(X_n \in A) = \mathbf{P}(X \in A).$$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι η σύγκλιση κατά κατανομή είναι η ασθενέστερη μορφή σύγκλισης τυχαίων μεταβλητών από όσες έχουμε δει ως τώρα.

Θεώρημα 14.13. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(X_n)_{n\geq 1}$, X τυχαίες μεταβλητές ορισμένες σε αυτόν και με τιμές στο $\mathbb{R}$. Αν $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$, τότε $X_n \Rightarrow X$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $X_n \not\Rightarrow X$. Τότε υπάρχουν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και φραγμένη, $\varepsilon > 0$, και υπακολουθία $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ της $(X_n)_{n\geq 1}$ έτσι ώστε:

$$|\,\mathbf{E}(f(X_{n_k})) - \mathbf{E}(f(X))| \geq \varepsilon. \tag{14.6}$$

Επειδή $X_{n_k} \xrightarrow{\mathbf{P}} X$, από το Θεώρημα 8.4 υπάρχει υπακολουθία $(X_{n_{k_r}})_{r\in\mathbb{N}}$ της $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε $X_{n_{k_r}} \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$. Αφού η f είναι συνεχής, από το Θεώρημα 8.6 έχουμε ότι $f(X_{n_{k_r}}) \xrightarrow{\sigma.\beta.} f(X)$. Η f είναι φραγμένη, άρα υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, έχουμε $|f(X_{n_{k_r}})| \leq M$ για κάθε $r \in \mathbb{N}$ (και κάθε $\omega \in \Omega$). Από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης,

$$\mathbf{E}(f(X_{n_{k_r}})) \to \mathbf{E}(f(X)),$$

το οποίο συγκρούεται με την (14.6). Άρα $X_n \Rightarrow X$. ∎

Μία περίπτωση κατά την οποία η σύγκλιση κατά κατανομή συνεπάγεται τη σύγκλιση κατά πιθανότητα είναι εκείνη κατά την οποία το όριο είναι μια σταθερή τυχαία μεταβλητή.

Θεώρημα 14.14. *Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ορισμένων σε κοινό χώρο πιθανότητας, με τιμές στο $\mathbb{R}$ και $C \in \mathbb{R}$. Αν $X_n \Rightarrow C$, τότε $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} C$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|X_n - C| > \varepsilon) &= \mathbf{P}(X_n > C + \varepsilon) + \mathbf{P}(X_n < C - \varepsilon)\\ &= 1 - F_{X_n}(C + \varepsilon) + \mathbf{P}(X_n < C - \varepsilon)\\ &\le 1 - F_{X_n}(C + \varepsilon) + F_{X_n}(C - \varepsilon).\end{aligned}$$

Τα $C - \varepsilon$, $C + \varepsilon$ είναι σημεία συνέχειας της F_C ($F_C(x) = \mathbf{1}_{[C,\infty)}(x)$), άρα από το Θεώρημα 14.3,

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(C - \varepsilon) = F_C(C - \varepsilon) = 0$$

και

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(C + \varepsilon) = F_C(C + \varepsilon) = 1.$$

Συνεπώς $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|X_n - C| > \varepsilon) = 0$. ■

14.2 Σφιχτότητα και υπακολουθιακά όρια

Ορισμός 14.15. Μια οικογένεια $\{\mu_i : i \in I\}$ μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ λέγεται **σφιχτή** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε

$$\mu_i(\mathbb{R}\setminus[-M, M]) < \varepsilon \tag{14.7}$$

για κάθε $i \in I$.

Δηλαδή για μια σφιχτή οικογένεια υπάρχει ένα φραγμένο υποσύνολο K του $\mathbb{R}$ ώστε κάθε στοιχείο της να δίνει «σχεδόν όλη» του τη μάζα στο K (το πολύ μάζα ε βρίσκεται εκτός του $K := [-M, M]$). Το σύνολο K είναι το ίδιο για όλα τα στοιχεία της οικογένειας.

Η απαίτηση του ορισμού μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{i\in I} \mu_i(\mathbb{R}\setminus[-M, M]) = 0. \tag{14.8}$$

Παρατήρηση 14.16. Αν το μ είναι μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$, τότε εύκολα βλέπουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε $\mu(\mathbb{R}\setminus[-M, M]) < \varepsilon$ (Άσκηση 14.7).

Ορισμός 14.17. Έστω $\{X_i : i \in I\}$ οικογένεια τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$. Η $\{X_i : i \in I\}$ λέγεται **σφιχτή** αν η οικογένεια κατανομών $\{\mathbf{P}^{X_i} : i \in I\}$ είναι σφιχτή.

Εννοείται εδώ ότι για κάθε $i \in I$ έχουμε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i)$ και $X_i : \Omega_i \to \mathbb{R}$. Επειδή $\mathbf{P}^{X_i}(\mathbb{R}\setminus[-M, M]) = \mathbf{P}_i(|X_i| > M)$, η οικογένεια $\{\mathbf{P}^{X_i} : i \in I\}$ είναι σφιχτή αν και μόνο αν

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{i\in I} \mathbf{P}_i(|X_i| > M) = 0. \tag{14.9}$$

Παρατήρηση 14.18. Έστω $(X_n)_{n\ge1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών έτσι ώστε $X_n \sim \mathbf{Exp}(\frac{1}{n})$. Τότε η $(X_n)_{n\ge1}$ δεν είναι σφιχτή. Πράγματι, για $M > 0$,

$$\sup_{n\ge1} \mathbf{P}(|X_n| > M) = \sup_{n\ge1} e^{-\frac{M}{n}} = 1.$$

Αυτό συμβαίνει γιατί η X_n έχει μέση τιμή n και η κατανομή της δίνει την περισσότερή της μάζα γύρω από το n (δηλαδή η X_n πέφτει κοντά στο n με μεγάλη πιθανότητα). Καθώς όμως το $n \to \infty$ αυτό το σημείο συγκέντρωσης απομακρύνεται. Δεν μπορούμε να βρούμε ένα φραγμένο σύνολο ώστε *όλες* οι X_n να πέφτουν εκεί με πιθανότητα κοντά στο 1.

Η έννοια της σφιχτότητας στα μέτρα πιθανότητας είναι ανάλογη της έννοιας του φραγμένου συνόλου σε Ευκλείδειο χώρο (δηλαδή κάποιον $\mathbb{R}^d$ εφοδιασμένο με την Ευκλείδεια μετρική). Οι όροι μιας συγκλίνουσας ακολουθίας σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο ορίζουν ένα φραγμένο σύνολο. Το αντίστοιχο εδώ είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 14.19. *Έστω $(\mu_n)_{n\geq 1}$, μ μέτρα πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\mu_n \Rightarrow \mu$. Τότε η $\{\mu_n : n \geq 1\}$ είναι σφιχτή.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε $\mu(\mathbb{R}\setminus[-M, M]) < \varepsilon/2$ και $\mu(\{-M\}) = \mu(\{M\}) = 0$ (το τελευταίο επειδή η $\mu(\{x\}) > 0$ ισχύει για αριθμήσιμο πλήθος $x \in \mathbb{R}$). Από την υπόθεση έχουμε

$$\mu_n(\mathbb{R}\setminus[-M, M]) = \mu_n((-\infty, -M]) + 1 - \mu_n((-\infty, M]) \to \mu(\mathbb{R}\setminus[-M, M])(< \varepsilon/2)$$

για $n \to \infty$. Άρα υπάρχει $n_0 \geq 1$ έτσι ώστε

$$\mu_n(\mathbb{R}\setminus[-M, M]) < \varepsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$.
Έπειτα, για τα $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n_0-1}$ υπάρχει $\tilde{M} > 0$ έτσι ώστε $\mu_i(\mathbb{R}\setminus[-\tilde{M}, \tilde{M}]) < \varepsilon$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n_0 - 1$ (Άσκηση 14.8).
Έστω $L = \max\{M, \tilde{M}\}$. Τότε $\mu_n(\mathbb{R}\setminus[-L, L]) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq 1$. ∎

Το ανάλογο του ότι κάθε φραγμένη ακολουθία σε έναν Ευκλείδειο χώρο έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (Θεώρημα Bolzano-Weierstrass) είναι το επόμενο αποτέλεσμα. Η απόδειξή του είναι απαιτητική και την παραλείπουμε. Μπορεί να τη βρεί κανείς στο Jacod and Protter (2003) (Θεώρημα 18.6).

Θεώρημα 14.20 (Θεώρημα Prokhorov)**.** *Έστω $(\mu_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Αν η $\{\mu_n : n \geq 1\}$ είναι σφιχτή, τότε υπάρχει υπακολουθία $(\mu_{k_n})_{n\geq 1}$ της $(\mu_n)_{n\geq 1}$ που συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$.*

Άμεση συνέπειά του είναι το εξής αποτέλεσμα για τυχαίες μεταβλητές.

Θεώρημα 14.21. *Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$. Αν η $\{X_n : n \geq 1\}$ είναι σφιχτή, τότε υπάρχει υπακολουθία $(X_{k_n})_{n\geq 1}$ της $(X_n)_{n\geq 1}$ που συγκλίνει κατά κατανομή σε κάποια τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$.*

Ασκήσεις

14.1 Να αποδειχθεί η (14.5) με χρήση του Θεωρήματος 14.3.

14.2 (α) Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή την Cauchy, δηλαδή με πυκνότητα $f(x) = \pi^{-1}(1 + x^2)^{-1}$. Να δειχθεί ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\frac{1}{1+x} < \pi\,\mathbf{P}(X > x) < \frac{1}{x}. \tag{14.10}$$

(β) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με κατανομή την Cauchy. Θέτουμε $M_n := \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ για κάθε $n \geq 1$. Να δειχθεί ότι

$$\frac{M_n}{n} \Rightarrow \frac{1}{W}$$

όπου η W ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $1/\pi$.

14.3 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών που συγκλίνει κατά κατανομή σε μια τυχαία μεταβλητή X. Για καθένα από τα ακόλουθα ζεύγη κατανομής για τη X και συνόλου $A \subset \mathbb{R}$, συνεπάγεται η σύγκλιση κατά κατανομή $X_n \Rightarrow X$ την

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \in A) = \mathbf{P}(X \in A);$$

	Κατανομή της X	Σύνολο A
(i)	$Poisson(2)$	$(2, 32.1) \cup \{100\}$
(ii)	$Poisson(2)$	$\mathbb{Q}$
(iii)	Γεωμετρική$(1/3)$	$(-1.5, 2.8)$
(iv)	$N(0, 1)$	$(-2, \pi)$
(v)	$U(0, 1)$	$(0, 1/3)\setminus\mathbb{Q}$
(vi)	Bernouli$(2/5)$ στο $\{0, 1\}$	$(0, 1/2) \cup (2, 4)$

14.4 (Αυτή η άσκηση δείχνει πώς αντιμετωπίζουμε όρια της μορφής $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \in A_n)$ όταν $X_n \Rightarrow X$. Το σύνολο A_n εξαρτάται από το n). Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών που συγκλίνει κατά κατανομή σε μια τυχαία μεταβλητή X (όλες με τιμές στο $\mathbb{R}$).

(α) Να δειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \leq n) = 1$.

(β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δειχθεί ότι $\overline{\lim}_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \in [x - n^{-1}, x + n^{-1}]) \leq \mathbf{P}(X = x)$. Να δοθεί παράδειγμα $(X_n)_{n\geq 1}, X, x$ που η προηγούμενη ανισότητα ισχύει ως $<$.

14.5 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}, (Y_n)_{n\geq 1}$ τυχαίες μεταβλητές ορισμένες σε κοινό χώρο πιθανότητας και με τιμές στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι σφιχτή και ότι $Y_n \Rightarrow 0$. Να δειχθεί ότι $X_n Y_n \Rightarrow 0$.

14.6 (Θεώρημα Slutsky) Έστω $X, (X_n)_{n\geq 1}, (Y_n)_{n\geq 1}$ τυχαίες μεταβλητές σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, με τιμές στο $\mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$.

(α) Αν $X_n \Rightarrow X$ και $Y_n \to c$ κατά πιθανότητα, τότε $X_n + Y_n \Rightarrow X + c$.

(β) Αν $X_n \Rightarrow X$ και $Y_n \to c$ κατά πιθανότητα, τότε $X_n Y_n \Rightarrow cX$.

Παρατηρήστε ότι το (α) έχει την εξής άμεση συνέπεια

(γ) Αν $X_n \Rightarrow X$ και $Y_n - X_n \to 0$ κατά πιθανότητα, τότε $Y_n \Rightarrow X$.

Για το (β), για αποφυγή μη ουσιαστικών λεπτομερειών, υποθέστε ότι $c > 0$ και ότι οι Y_n παίρνουν τιμές στο $[0, \infty)$.

14.7 Έστω p μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ έτσι ώστε $p(\mathbb{R}\setminus[-M, M]) < \varepsilon$.

14.8 Έστω $\{p_i : i \in I\}$ οικογένεια μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ με I πεπερασμένο. Να δείξετε ότι η $\{p_i : i \in I\}$ είναι σφιχτή.

14.9 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ αύξουσα με $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$ έτσι ώστε $\sup_{n\geq 1} \mathbf{E}\{h(|X_n|)\} < \infty$. Να δείξετε ότι η $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι σφιχτή.

14.10 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$. Αν η $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι σφιχτή, $\mathbf{E}(X_n^2) < \infty$ για κάθε $n \geq 1$, και $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n^2) = \infty$, να δειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(X_n) = \infty$.

14.11 Έστω $(\mu_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η $(\mu_n)_{n\geq 1}$ είναι σφιχτή αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία της, $(\mu_{n_k})_{k\geq 1}$, έχει υπακολουθία που συγκλίνει ασθενώς (σε ένα μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$).

15

Σύγκλιση κατά κατανομή και χαρακτηριστικές συναρτήσεις

Αν $X, (X_n)_{n\geq 1}$ είναι τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$, για να δείξουμε την ασθενή σύγκλιση $X_n \Rightarrow X$ έχουμε δει δύο τρόπους (Παραδείγματα 14.5, 14.6 για τον πρώτο και Παράδειγμα 14.10 για τον δεύτερο). Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε έναν τρίτο. Σύμφωνα με αυτόν,

η σύγκλιση $X_n \Rightarrow X$ ισοδυναμεί με τη συνθήκη: για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει $\phi_{X_n}(t) \to \phi_X(t)$.

Καθένας από τους τρείς αυτούς τρόπους λειτουργεί καλά σε διαφορετικές περιτώσεις. Ο πρώτος είναι χρήσιμος σε περιπτώσεις που η συνάρτηση κατανομής της X_n υπολογίζεται εύκολα (π.χ., αν η X_n αφορά μέγιστο ή ελάχιστο ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών ή έχει γνωστή κατανομή). Ο τρίτος είναι χρήσιμος όταν η X_n εμπλέκει άθροισμα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών (τέτοια είναι η περίπτωση του κεντρικού οριακού θεωρήματος).

15.1 Το Θεώρημα Συνέχειας του Lévy

Λήμμα 15.1. *Έστω μ μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και $\hat{\mu}$ ο μετασχηματισμός Fourier του. Τότε*

$$\mu\left(\left\{x : |x| > \frac{2}{u}\right\}\right) \leq \frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-\hat{\mu}(t))\,\mathrm{d}t \tag{15.1}$$

για κάθε $u > 0$.

Η απόξειξή του λήμματος δίνεται στο Παράρτημα Β′. Είναι χρήσιμο γιατί αποδεικνύει σφιχτότητα για σύνολο μέτρων αν υπάρχει αρκετός έλεγχος στον μετασχηματισμό Fourier τους για t κοντά στο 0.

Θεώρημα 15.2. *(Θεώρημα συνέχειας του Lévy) Έστω $(\mu_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και $(\hat{\mu}_n)_{n\geq 1}$ η ακολουθία μετασχηματισμών Fourier τους.*

(i) Αν μ μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\mu_n \Rightarrow \mu$, τότε $\lim_{n\to\infty} \hat{\mu}_n(t) = \hat{\mu}(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Αν το $\lim_{n\to\infty} \hat{\mu}_n(t)$ υπάρχει για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και η $f(t) := \lim_{n\to\infty} \hat{\mu}_n(t)$ είναι συνεχής στο 0, τότε υπάρχει μέτρο πιθανότητας μ στο $\mathbb{R}$ ώστε $\hat{\mu}(t) = f(t)$ και $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Απόδειξη. (i) Από την υπόθεση και το Θεώρημα 14.8, για κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχή και φραγμένη έχουμε

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x) \to \int f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Εφόσον οι συναρτήσεις $\cos y$, $\sin y$ είναι συνεχείς και φραγμένες, έχουμε

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_n(t) = \int e^{itx}\,\mathrm{d}\mu_n(x) &= \int \cos(tx)\,\mathrm{d}\mu_n(x) + i\int \sin(tx)\,\mathrm{d}\mu_n(x)\\ &\to \int \cos(tx)\,\mathrm{d}\mu(x) + i\int \sin(tx)\,\mathrm{d}\mu(x) = \hat{\mu}(t)\end{aligned}$$

για $n \to \infty$.

(ii) **Βήμα 1**: Η $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ είναι σφιχτή.

Έστω $\varepsilon > 0$. Για $u > 0$ και για κάθε $n \geq 1$, από το Λήμμα 15.1, έχουμε ότι

$$\mu_n\left(\left\{x : |x| > \frac{2}{u}\right\}\right) \leq \frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1 - \hat{\mu}_n(t))\,\mathrm{d}t. \tag{15.2}$$

Από την υπόθεση και το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης, η τελευταία ανισότητα δίνει

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mu_n\left(\left\{x : |x| > \frac{2}{u}\right\}\right) \leq \frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1 - f(t))\,\mathrm{d}t. \tag{15.3}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0 και $f(0) = 1$ ($\mu_n(0) = 1$, για κάθε $n \geq 1$) το όριο του δεξιού μέλους της ανισότητας για $u \to 0^+$ ισούται με $1 - f(0) = 0$. Άρα υπάρχει $u_0 > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε

$$\mu_n\left(\left\{x : |x| > \frac{2}{u_0}\right\}\right) < \varepsilon \text{ για κάθε } n \geq n_0. \tag{15.4}$$

Από την (15.4) και εφόσον η $\{\mu_k : 1 \leq k \leq n_0 - 1\}$ είναι σφιχτή (Άσκηση 14.8), έπεται ότι η $\{\mu_n : n \geq 1\}$ είναι σφιχτή.

Βήμα 2: Υπάρχει μέτρο μ ώστε $f(t) = \hat{\mu}(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Πράγματι, η $(\mu_n)_{n\geq 1}$ είναι σφιχτή και από το Θεώρημα 14.20 προκύπτει ότι υπάρχει υπακολουθία $(\mu_{n_k})_{n\geq 1}$ τέτοια ώστε να συγκλίνει ασθενώς σε ένα μέτρο πιθανότητας μ. Λόγω του (i) του θεωρήματος,

$$\lim_{n\to\infty}\hat{\mu}_{n_k}(t) = \hat{\mu}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Όμως

$$\lim_{k\to\infty}\hat{\mu}_{n_k}(t) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς, $f(t) = \hat{\mu}(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Βημα 3: Αν μια υπακολουθία της $(\mu_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει ασθενώς σε ένα μέτρο πιθανότητας ν, τότε $\nu = \mu$.

Πράγματι, αν $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ είναι γνήσια αύξουσα ακολουθία στο $\mathbb{N}$ και ν μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\mu_{\lambda_n} \Rightarrow \nu$, από το ($i$),

$$\lim_{n\to\infty}\hat{\mu}_{\lambda_n}(t) = \hat{\nu}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Όμοια με πριν (Βήμα 2), $\hat{\nu}(t) = f(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και λόγω μοναδικότητας του μετασχηματισμού Fourier, $\nu = \mu$.

Βήμα 4:[1] Η $(\mu_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει ασθενώς στο μ.

Έστω ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε υπάρχει $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και φραγμένη, $\varepsilon > 0$ και $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στο $\mathbb{N}$ έτσι ώστε

$$\left|\int h(x)\,\mathrm{d}\mu_{\lambda_n}(x) - \int h(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right| \geq \varepsilon, \quad \forall n \geq 1. \tag{5}$$

Η $(\mu_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ είναι σφιχτή, άρα υπάρχει υπακολουθία της, έστω $(\mu_{\lambda_{r_n}})_{n\geq 1}$, και μέτρο πιθανότητας ν στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\mu_{\lambda_{r_n}} \Rightarrow \nu$ (Θεώρημα 14.20). Από τα προηγούμενα (Βήμα 3) προκύπτει ότι $\nu = \mu$, δηλαδή $\mu_{\lambda_{r_n}} \Rightarrow \mu$. Συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty}\int h(x)\,\mathrm{d}\mu_{\lambda_{r_n}}(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}\mu(x),$$

το οποίο είναι άτοπο λόγω της (5). ■

[1] Για την καλύτερη κατανόηση της απόδειξης θεωρείστε την εξής ανάλογη άσκηση απειροστικού λογισμού: Έστω $\ell \in \mathbb{R}$ και $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών έτσι ώστε κάθε υπακολουθία της, $(x_{n_k})_{k\geq 1}$, να έχει υπακολουθία $(x_{n_{k_r}})_{r\geq 1}$ που συγκλίνει στο ℓ. Τότε $x_n \to \ell$.

Πόρισμα 15.3. *Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$, X τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$. Τότε $X_n \Rightarrow X$ αν και μόνο αν $\phi_{X_n}(t) \to \phi_X(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ καθώς $n \to \infty$.*

Απόδειξη. Ισχύει ότι $\phi_{X_n}(t) = \widehat{\mathbf{P}^{X_n}}(t)$ και $\widehat{\mathbf{P}^X}(t) = \widehat{\mathbf{P}^X}(t)$, όπου $\mathbf{P}^{X_n}$, $\mathbf{P}^X$ οι κατανομές των X_n και X αντίστοιχα. Το συμπέρασμα έπεται με εφαρμογή του θεωρήματος συνέχειας του Lévy για τα μέτρα $(\mathbf{P}^{X_n})_{n\geq 1}$ και $\mathbf{P}^X$. ∎

Το τελευταίο πόρισμα είναι ο βασικότερος τρόπος για να δείξει κανείς σύγκλιση κατά κατανομή. Θα το ονομάζουμε και αυτό θεώρημα συνέχειας του Lévy. Θα το χρησιμοποιήσουμε πολλές φορές στο εξής και ιδιαίτερα για να αποδείξουμε το κεντρικό οριακό θεώρημα.

15.2 Εφαρμογές

Σε υπολογισμούς ορίων της μορφής $\lim_{n\to\infty} \phi_{X_n}(t)$ χρήσιμο είναι το εξής απλό αποτέλεσμα.

Λήμμα 15.4. *Αν $(c_n)_{n\geq 1}$ είναι ακολουθία στο $\mathbb{C}$ τέτοια ώστε $c_n \to c$, με $c \in \mathbb{C}$, τότε*

$$\Big(1 + \frac{c_n}{n}\Big)^n \to e^c.$$

Η απόδειξή του δίνεται στο Παράρτημα Α′ (Πόρισμα Α′.3).

Παράδειγμα 15.5. Έστω $X_n \sim \mathrm{Bin}(n, \frac{\lambda}{n})$ για κάθε $n \geq 1$ και $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$. Τότε

$$\begin{aligned}
\phi_{X_n}(t) = \mathbf{E}(e^{itX_n}) &= \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \binom{n}{k} \Big(\frac{\lambda}{n}\Big)^k \Big(1 - \frac{\lambda}{n}\Big)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(\frac{e^{it}\lambda}{n}\Big)^k \Big(1 - \frac{\lambda}{n}\Big)^{n-k} \\
&= \Big(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda e^{it}}{n}\Big)^n \\
&= \Big(1 + \frac{\lambda(e^{it} - 1)}{n}\Big)^n
\end{aligned}$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{\lambda(e^{it} - 1)}{n}\Big)^n = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Όμως

$$\phi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Άρα, $\phi_{X_n}(t) \to \phi_X(t)$. Συνεπώς, από το θεώρημα συνέχειας του Lévy προκύπτει ότι $X_n \Rightarrow X$.

Παράδειγμα 15.6. Έστω $X_n \sim \mathrm{Poisson}(n)$ και $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$. Θέτουμε $Z_n = \frac{X_n - n}{\sqrt{n}}$. Τότε

$$\begin{aligned}
\phi_{Z_n}(t) = \mathbf{E}(e^{itZ_n}) &= \mathbf{E}\left(e^{it\left(\frac{X_n - n}{\sqrt{n}}\right)}\right) \\
&= e^{-it\sqrt{n}}\, \mathbf{E}\big(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}X_n}\big) = e^{-it\sqrt{n}} \phi_{X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\
&= e^{it\sqrt{n}} e^{n(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}}-1)} = e^{n(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}}-1) - it\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Τότε ο εκθέτης στην τελευταία ποσότητα ισούται με

$$\frac{e^{i\varepsilon t} - 1}{\varepsilon^2} - \frac{it}{\varepsilon} = \frac{e^{i\varepsilon t} - 1 - i\varepsilon t}{\varepsilon^2}.$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του L' Hospital,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{i\varepsilon t}-1-i\varepsilon t}{\varepsilon^2}=\frac{-t^2}{2}.$$

Άρα $\phi_{Z_n}(t)\to\phi_Z(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$ και από το θεώρημα συνέχειας του Lévy προκύπτει ότι $Z_n\Rightarrow Z$.

Παράδειγμα 15.7. Έστω X_n ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με

$$f_{X_1}(x)=\begin{cases}\frac{1}{|x|^3} & \text{αν } |x|\geq 1,\\ 0 & \text{αν } |x|<1.\end{cases}$$

Θέτουμε $S_n=X_1+\cdots+X_n$ για κάθε $n\geq 1$. Θα δείξουμε ότι

$$\frac{S_n}{\sqrt{n\log n}}\Rightarrow Z$$

με $Z\sim N(0,1)$.
Έστω $a_n:=\sqrt{n\log n}$. Για $t\in\mathbb{R}$,

$$\phi_{S_n/a_n}(t)=\left(\phi_{X_1}(t/a_n)\right)^n=\left(1+\frac{C_n(t)}{n}\right)^n$$

με $C_n(t):=n(\phi_{X_1}(t/a_n)-1)$. Από την Άσκηση 13.13 έχουμε ότι για μεγάλα n (αρκεί το n να ικανοποιεί την $|t|\leq a_n$) ισχύει

$$\phi_{X_1}(t/a_n)=1+\frac{t^2}{a_n^2}\log\frac{|t|}{a_n}+b(n,t)$$

με $|b(n,t)|\leq 3t^2/a_n^2$. Οπότε

$$C_n(t)=n\left(\frac{t^2}{a_n^2}\log|t|-\frac{t^2}{a_n^2}\log a_n+b(n,t)\right)=n\left(\frac{t^2}{n\log n}\log|t|-\frac{t^2}{2n\log n}\log(n\log n)+b(n,t)\right)\to-\frac{t^2}{2}$$

καθώς $n\to\infty$. Το συμπέρασμα έπεται από το Λήμμα 15.4 και το θεώρημα συνέχειας του Lévy.

Ασκήσεις

15.1 Έστω μ μέτρο πιθανότητας στο $[0,\infty)$. Μετασχηματισμό Laplace του μ λέμε τη συνάρτηση $L:[0,\infty)\to[0,\infty)$ με $L(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,d\mu(x)$ για κάθε $s\geq 0$. Να δειχθεί ότι για κάθε $u>0$ ισχύει

$$\mu\left(\left[\frac{2}{u},\infty\right)\right)\leq\frac{2}{u}\int_0^u(1-L(s))\,ds. \tag{15.5}$$

15.2 Έστω $(Y_n)_{n\geq 1}$ τυχαίες μεταβλητές ώστε $Y_n\sim N(\mu_n,\sigma_n^2)$ όπου $\mu_n\in\mathbb{R},\sigma_n\in(0,\infty)$ για κάθε $n\geq 1$. Για δεδομένα $\mu\in\mathbb{R},\sigma\in(0,\infty)$ θεωρούμε $Y\sim N(\mu,\sigma^2)$. Τότε $\lim_{n\to\infty}\mu_n=\mu$ και $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$ αν και μόνο αν $Y_n\Rightarrow Y$.

15.3 (α) Έστω Y τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p\in(0,1]$. Δηλαδή $\mathbf{P}(Y=k)=p\,(1-p)^{k-1}$ για $k=1,2,\ldots$ Να υπολογιστεί η χαρακτηριστική συνάρτηση της Y.

(β) Έστω $a>0$ και $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ώστε η X_n να ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p_n=a/n$. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $(X_n/n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια τυχαία μεταβλητή $X\sim\mathrm{Exp}(1)$ χρησιμοποιώντας

(i) τον χαρακτηρισμό της σύγκλισης κατά κατανομή μέσω συναρτήσεων κατανομής,

(ii) χαρακτηριστικές συναρτήσεις.

15.4 (α) Έστω X τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$. Να υπολογιστεί η χαρακτηριστική συνάρτηση της X.

(β) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ώστε η X_n να ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτους $n, p_n \in (0,1)$. Αν $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$, να δειχθεί ότι η ακολουθία $(X_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει κατά κατανομή στην τυχαία μεταβλητή X του ερωτήματος (α).

15.5 Έστω $c > 0$, και $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ώστε $X_n \sim \Gamma(nc, n)$ για κάθε $n \geq 1$ και Z τυχαία μεταβλητή με $Z \sim N(0, c)$. Να δειχθεί ότι

$$\sqrt{n}(X_n - c) \Rightarrow Z$$

καθώς $n \to \infty$.

15.6 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές ώστε η χαρακτηριστική συνάρτηση ϕ της X_1 να είναι διαφορίσιμη στο 0 και $\phi'(0) = ia$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Για κάθε $n \geq 1$, θέτουμε $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Να δειχθεί ότι

$$\frac{S_n}{n} \to a$$

κατά πιθανότητα για $n \to \infty$.

15.7 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών ώστε για κάθε $k \geq 1$ έχουμε

$$X_k = \begin{cases} -k & \text{με πιθανότητα } 1/2k, \\ k & \text{με πιθανότητα } 1/2k, \\ 0 & \text{με πιθανότητα } 1 - k^{-1}. \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι η ακολουθία $(S_n/n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια τυχαία μεταβλητή Y με χαρακτηριστική συνάρτηση

$$\phi_Y(t) = e^{-\int_0^1 \frac{1-\cos(tx)}{x}\, dx}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
[Υπόδειξη: Χρήσιμο είναι το Λήμμα Α΄.2.]

15.8 Έστω $(X_k)_{k\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{E}(X_1) = 0, \mathrm{Var}(X_1) = 1$. Για κάθε $n \geq 1$, θέτουμε $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ και $T_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$. Να βρεθεί $\alpha > 0$ και η κατανομή τυχαίας μεταβλητής Y με τιμές στο $\mathbb{R}$ και μη μηδενική ώστε

$$\frac{T_n}{n^\alpha} \Rightarrow Y$$

καθώς $n \to \infty$.

15.9 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών ώστε για κάθε $k \geq 1$ έχουμε

$$X_k = \begin{cases} -k & \text{με πιθανότητα } 1/(2k^2), \\ k & \text{με πιθανότητα } 1/2k^2, \\ -1 & \text{με πιθανότητα } (1-k^{-2})/2, \\ -1 & \text{με πιθανότητα } (1-k^{-2})/2. \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι
(α) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(S_n)/n = 2$,
(β) η ακολουθία $(S_n/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια τυχαία μεταβλητή Z με $Z \sim N(0,1)$.
[Υπόδειξη: Χρήσιμο είναι το Θεώρημα Slutsky (Άσκηση 14.6). Εναλλακτικά, μπορούμε να πάμε ευθέως με χαρακτηριστικές συναρτήσεις και να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα Α΄.2.]

15.10 Έστω $(X_k)_{k\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με πυκνότητα όπως στην Άσκηση 13.5 με $a \in (0,2)$. Για κάθε $n \geq 1$, θέτουμε $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $(S_n/n^{1/a})_{n\geq 1}$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια τυχαία μεταβλητή Y με χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi_Y(t) = e^{-C|t|^a}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ με $C > 0$ σταθερά.

16

Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών λέει ότι ο μέσος όρος n ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, S_n/n, για μεγάλο n είναι πολύ κοντά στην κοινή τους μέση τιμή $\mu := \mathbf{E}(X_1)$. Τώρα, με την επιπλέον υπόθεση $\sigma^2 := \mathrm{Var}(X_1) \in (0, \infty)$, το κεντρικό οριακό θεώρημα συγκεκριμενοποιεί το πόσο κοντά. Λέει ότι μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{S_n}{n} = \mu + \frac{Z_n}{\sqrt{n}}\sigma$$

με τη Z_n να ακολουθεί προσεγγιστικά την τυπική κανονική κατανομή $\mathrm{N}(0, 1)$. Ισοδύναμα, $S_n = \mu n + \sigma\sqrt{n}Z_n$, δηλαδή τυπικά το S_n βρίσκεται σε απόσταση της τάξης του $\sqrt{n}$ γύρω από τη μέση του τιμή $n\mu$.

16.1 Προετοιμασία

Για την απόδειξη του κεντρικού οριακού θεωρήματος, κρίσιμη είναι η συμπεριφορά κοντά στο 0 της χαρακτηριστικής συνάρτησης $\phi_X(t)$ οποιασδήποτε τυχαίας μεταβλητής X με πεπερασμένη πρώτη και δεύτερη ροπή. Χρήσιμη είναι η ανισότητα

$$\left| e^{ix} - 1 - ix - \frac{1}{2}(ix)^2 \right| \leq 2x^2, \tag{16.1}$$

που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για την απόδειξή της παρατηρούμε ότι η ποσότητα μέσα στο μέτρο του αριστερού μέλους είναι $\cos x - 1 + x^2/2 + i(\sin x - x)$, οπότε το μέτρο της είναι φραγμένο από το

$$|\cos x - 1| + \frac{x^2}{2} + |\sin x - x|.$$

Για την πρώτη ποσότητα παρατηρούμε ότι από το θεώρημα Taylor ισχύει $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}\cos\xi$ για κάποιο ξ μεταξύ 0 και x. Άρα $|\cos x - 1| \leq x^2/2$. Όμοια δείχνουμε ότι $|\sin x - x| \leq x^2/2$.

Λήμμα 16.1. *Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\mathbf{E}(X^2) < \infty$. Θέτουμε $\mathbf{E}(X) = \mu$ και $\mathbf{E}(X^2) = \beta$. Τότε*

$$\phi_X(t) = 1 + it\mu - \frac{t^2\beta}{2} + \nu(t), \tag{16.2}$$

όπου η ν ικανοποιεί $\lim_{t\to 0} \frac{\nu(t)}{t^2} = 0$.

Δηλαδή η συνάρτηση ν που ορίζεται ως $\nu(t) := \phi_X(t) - 1 - it\mu + (1/2)t^2\beta$ τείνει στο 0 γρηγορότερα από το t^2.

Οι πρώτοι τρεις όροι του αναπτύγματος (16.2) προκύπτουν αν στη $\phi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX})$ αναπτύξουμε την e^{itX} σε δυναμοσειρά, κρατήσουμε τους 3 πρώτους όρους

$$1 + itX + \frac{1}{2}(itX)^2,$$

και πάρουμε τη μέση τιμή τους. Η $\nu(t)$ είναι η μέση τιμή της υπόλοιπης δυναμοσειράς.

Απόδειξη. Έστω $A(x) := e^{ix} - 1 - ix - (ix)^2/2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$|\nu(t)| = \left|\phi_X(t) - 1 - it\mu + \frac{t^2\beta}{2}\right| = \left|\mathbf{E}\left(e^{itX} - 1 - itX - \frac{(itX)^2}{2}\right)\right| \le \mathbf{E}\,|A(tX)|$$

Για την απόδειξη του λήμματος αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{t\to 0} \mathbf{E}(|A(tX)|/t^2) = 0$. Έστω ακολουθία $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ τέτοια ώστε $t_n \to 0$. Τότε

- $A(t_nX)/t_n^2 \to 0$ για $n \to \infty$ λόγω του αναπτύγματος της e^{ix} σε δυναμοσειρά.
- $|A(t_nX)/t_n^2| \le 2X^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ λόγω της (16.1) και $\mathbf{E}(X^2) < \infty$.

Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(|A(t_nX)|/t_n^2) = \mathbf{E}(\lim_{n\to\infty} |A(t_nX)|/t_n^2) = 0$. ∎

16.2 Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Θεώρημα 16.2 (Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα)**.** *Έστω $(X_n)_{n\ge 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{E}(X_1) = \mu$ και $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 \in (0,\infty)$. Θέτουμε $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ για κάθε $n \ge 1$. Τότε*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \Rightarrow Z, \quad \text{όπου } Z \sim N(0,1).$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε αρχικά την περίπτωση όπου $\mu = 0$, οπότε $\sigma^2 = \mathbf{E}(X^2)$. Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα συνέχειας του Lévy (Πόρισμα 15.3). Υπολογίζουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση της $S_n/\sqrt{n\sigma^2}$. Για $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned}
\phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n\sigma^2}}}(t) &= \mathbf{E}\left(e^{it\frac{S_n}{\sqrt{n\sigma^2}}}\right) = \mathbf{E}\left(e^{it\frac{X_1}{\sqrt{n\sigma^2}}} \cdots e^{it\frac{X_n}{\sqrt{n\sigma^2}}}\right) \\
&= \mathbf{E}\left(e^{it\frac{X_1}{\sqrt{n\sigma^2}}}\right) \cdots \mathbf{E}\left(e^{it\frac{X_n}{\sqrt{n\sigma^2}}}\right) && \text{(λόγω ανεξαρτησίας)} \\
&= \phi_{X_1}\left(\tfrac{t}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \cdots \phi_{X_n}\left(\tfrac{t}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \\
&= \left(\phi_{X_1}\left(\tfrac{t}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)\right)^n && \text{(λόγω ισονομίας).}
\end{aligned}$$

Από το Λήμμα 16.1,

$$\begin{aligned}
\phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) &= 1 + \frac{it}{\sqrt{n\sigma^2}}\mathbf{E}(X_1) - \frac{t^2}{2n\sigma^2}\mathbf{E}\left((X_1)^2\right) + \nu\left(\frac{t}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + \nu\left(\frac{t}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \\
&= 1 + \frac{C_n}{n}
\end{aligned}$$

με $C_n = -\frac{t^2}{2} + n\nu\left(\frac{t}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \to -t^2/2$ για $n \to \infty$ λόγω του ότι $\lim_{s\to 0}\nu(s)/s^2 = 0$. Συνεπώς, το Λήμμα 15.4 δίνει

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n\sigma^2}}}(t) = e^{-t^2/2}.$$

Η ίδια σχέση ισχύει προφανώς και για $t = 0$. Μια $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ έχει χαρακτηριστική συνάρτηση $e^{-t^2/2}$. Από το θεώρημα συνέχειας του Lévy, $S_n/\sqrt{n\sigma^2} \Rightarrow Z$.

Στην περίπτωση όπου $\mathbf{E}(X_1) = \mu \neq 0$, θεωρούμε τις ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $Y_n = X_n - \mu$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, που καθεμία έχει μέση τιμή 0, και εφαρμόζουμε τα προηγούμενα. ∎

Ας επιστρέψουμε στο Παράδειγμα 15.7. Αυτό που συμβαίνει εκεί είναι ότι $\mathbf{E}(X_1) = 0$ αλλά $\mathrm{Var}(X_1) = \infty$. Ο νόμος των μεγάλων αριθμών εφαρμόζεται και δίνει ότι $S_n/n \to 0$. Όμως το ότι $\mathrm{Var}(X_1) = \infty$ σημαίνει ότι το άθροισμα S_n έχει μεγαλύτερη μεταβλητότητα από την περίπτωση που $\mathrm{Var}(X_1) < \infty$. Έτσι, χρειάζεται να διαιρέσουμε το S_n με το $\sqrt{n}\sqrt{\log n}$ (που είναι κατά πολύ μεγαλύτερο του $\sqrt{n}$) ώστε να πάρουμε ποσότητα που συγκλίνει κατά κατανομή. Το παράδειγμα αυτό δείχνει επίσης ότι σύγκλιση σε κανονική κατανομή μπορεί να πάρει κανείς από την S_n και με παράγοντα κανονικοποίησης διαφορετικό από τον $\sqrt{n}$.

16.3 Εφαρμογές

Το κεντρικό οριακό θεώρημα δίνει προσεγγίσεις για πιθανότητες που αφορούν άθροισμα ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών. Έχει εφαρμογές στη στατιστική, για παράδειγμα στην κατασκευή προσεγγιστικών διαστημάτων εμπιστοσύνης. Το χρησιμοποιούμε θεωρώντας ότι μια ποσότητα της μορφής

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \in A\right) \tag{16.3}$$

προσεγγίζεται (για n μεγάλο) από την

$$\mathbf{P}(Z \in A) \tag{16.4}$$

όπου $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$ και A είναι ένα διάστημα ή μια πεπερασμένη ένωση διαστημάτων (αφού το όριο της πρώτης ποσότητας για $n \to \infty$ είναι η δεύτερη).

Παράδειγμα 16.3. Έχουμε ένα νόμισμα και θέλουμε να ελέγξουμε αν είναι αμερόληπτο. Το ρίχνουμε 100 φορές και έρχεται «Κεφαλή» 38 φορές. Πρέπει να μπούμε σε σκέψεις ότι δεν είναι αμερόληπτο;

Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές $(X_k)_{k\geq 1}$ με $X_k = 1$ όταν η k ρίψη φέρνει «Κεφαλή» και $X_k = 0$ όταν η k ρίψη φέρνει γράμματα. Ο συνολικός αριθμός κεφαλών σε n δοκιμές είναι $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Υποθέτουμε ότι πράγματι το νόμισμα είναι αμερόληπτο (δηλαδή φέρνει «Κεφαλή» με πιθανότητα $p = 1/2$) και υπολογίζουμε την πιθανότητα $\mathbf{P}(S_{100} \leq 38)$. Έχουμε $\mu = \mathbf{E}(X_1) = 1/2, \sigma^2 := \mathrm{Var}(X_1) = p(1 - p) = 1/4$ και

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S_{100} \leq 38) &= \mathbf{P}\left(\frac{S_{100} - 100 \times 0.5}{\sqrt{100/4}} \leq \frac{38 - 100 \times 0.5}{\sqrt{100/4}}\right) \approx \mathbf{P}(Z \leq -12/5)\\ &= \Phi(-2.4) = 1 - \Phi(2.4) \approx 0.0082\end{aligned}$$

Η πιθανότητα είναι πολύ μικρή, μικρότερη του 1%. Μπορούμε να πούμε με μεγάλη βεβαιότητα ότι το νόμισμα δεν είναι αμερόληπτο.

Αν ερχόταν «Κεφαλή» 43 φορές, η ίδια διαδικασία δίνει την προσέγγιση $\mathbf{P}(S_{100} \leq 43) \approx 0.0887$, περίπου 9%. Είναι ένα ενδεχόμενο που έχει σημαντική πιθανότητα να συμβεί. Δεν θα μας έκανε εντύπωση.

Παράδειγμα 16.4. Θεωρούμε ότι το βάρος έλξης κατά το οποίο σπάει ένα συγκεκριμένο συρματόσχοινο από μια πολύ μεγάλη ποσότητα που ένα εργοστάσιο μόλις παρήγαγε είναι μια τυχαία μεταβλητή με άγνωστη μέση τιμή μ και διασπορά $\sigma = 1/10$. Θέλουμε να προσδιορίσουμε προσεγγιστικά τη μέση τιμή μ. Πραγματοποιούμε n ανεξάρτητες μετρήσεις $X_1, X_2, \ldots, X_n$ και θα χρησιμοποιήσουμε τον μέσο όρο $\bar{X}_n := (X_1 + \cdots + X_n)/n$ ως προσέγγιση της μ. Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το n ώστε να ξέρουμε ότι θα συμβεί $|\bar{X}_n - \mu| \leq 1/100$ με πιθανότητα τουλάχιστον 0.95;

Για την πιθανότητα του γεγονότος που μας ενδιαφέρει έχουμε την εξής προσέγγιση

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \leq \frac{1}{100}\right) = \mathbf{P}\left(\frac{|S_n - n\mu|}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq \sqrt{n}\frac{1}{100\,\sigma}\right) \approx \mathbf{P}\left(|Z| \leq \sqrt{n}\frac{1}{100\,\sigma}\right) \tag{16.5}$$

$$= \Phi\left(\sqrt{n}\frac{1}{100\,\sigma}\right) - \Phi\left(-\sqrt{n}\frac{1}{100\,\sigma}\right) = 2\Phi\left(\sqrt{n}\frac{1}{100\,\sigma}\right) - 1. \tag{16.6}$$

Z είναι μια $\mathrm{N}(0, 1)$ τυχαία μεταβλητή. Η τελευταία ποσότητα είναι τουλάχιστον 0.95 αν

$$\Phi\left(\sqrt{n}\frac{1}{100\,\sigma}\right) \geq 1 - 0.025.$$

Από πίνακες της Φ βρίσκουμε τον μοναδικό αριθμό $z_{0.025}$ που ικανοποιεί $\Phi(z_{0.025}) = 1 - 0.025$. Ισχύει $z_{0.025} \approx 1.96$. Πρέπει $\sqrt{n}\frac{1}{100\sigma} \geq z_{0.025}$ οπότε

$$n \geq (100\sigma z_{0.025})^2 \approx 384.16$$

Άρα παίρνουμε οποιονδήποτε φυσικό n με $n \geq 385$.

Σχόλιο: Στην προσέγγιση της γραμμής (16.5) φαίνεται να επικαλούμαστε την προσέγγιση της (16.3) από την (16.4) για ένα σύνολο A που εξαρτάται από το n. Αυτό σαφώς δεν έπεται από το κεντρικό οριακό θεώρημα. Το θεώρημα ζητάει το σύνολο A να είναι σταθερό. Δικαιολογούμε την (16.5) λέγοντας ότι για σταθερό n, αφού

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{|S_k - k\mu|}{\sqrt{k\sigma^2}} \leq \sqrt{n}\frac{1}{100\,\sigma}\right) = \mathbf{P}\left(|Z| \leq \sqrt{n}\frac{1}{100\,\sigma}\right),$$

ήδη για $k = n$ οι δύο αριθμοί

$$\mathbf{P}\left(\frac{|S_n - n\mu|}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq \sqrt{n}\frac{1}{100\,\sigma}\right),\ \mathbf{P}\left(|Z| \leq \sqrt{n}\frac{1}{100\,\sigma}\right) \tag{16.7}$$

είναι πολύ κοντά. Έχουμε στο μυαλό μας ότι το n είναι μεγάλο, επομένως η επιλογή $k = n$ δίνει κάτι κοντά στην οριακή συμπεριφορά.

16.4 Ισχύς των προσεγγίσεων

Έστω μ, σ, S_n όπως στο κεντρικό οριακό θεώρημα. Για $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ με $\mathbf{P}(Z \in \partial A) = 0$, το ότι

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \in A\right) = \mathbf{P}(Z \in A), \tag{16.8}$$

σημαίνει ότι για μεγάλο n οι δύο ποσότητες $\mathbf{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \in A\right), \mathbf{P}(Z \in A)$ είναι πολύ κοντά. Πόσο κοντά όμως; Το πότε η δεύτερη ποσότητα είναι αποδεκτή ως προσέγγιση για την πρώτη εξαρτάται από το τι θέλει να κάνει κανείς. Ένα αυστηρό κριτήριο είναι να ζητήσουμε το πηλίκο τους να βρίσκεται κοντά στο 1 ή ας πούμε στο διάστημα $[1/2, 2]$ (και να έχουμε τρόπο να το διασφαλίσουμε αυτό). Το κεντρικό οριακό θεώρημα δεν μας δίνει κάποια πληροφορία προς αυτή την κατεύθυνση. Έλεγχο στο λάθος της προσέγγισης δίνουν αποτελέσματα όπως το Θεώρημα Berry-Esseen το οποίο λέει ότι αν επιπλέον για τις X_n υποθέσουμε ότι έχουν $\mathbf{E}\,|X_1 - \mu|^3 = \rho < \infty$, τότε για κάθε $n \geq 1$ και $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\left|\mathbf{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq x\right) - \Phi(x)\right| \leq \frac{3\rho}{\sigma^2\sqrt{n}}.$$

Και πάλι αυτό το φράγμα είναι μικρής αξίας αν, π.χ., αυτό είναι της τάξης του 10^{-3} και το $\Phi(x)$ είναι της ίδιας τάξης ή μικρότερο (Για θετικό αριθμό a, η ανισότητα $|a - 10^{-3}| \leq 10^{-3}$ δίνει μόνο το άνω φράγμα $a \leq 2 \times 10^{-3}$).

Πειραματιζόμαστε στο παρακάτω παράδειγμα με την ποιότητα της προσέγγισης.

Παράδειγμα 16.5. Έστω ότι οι $(X_n)_{n\geq 1}$ έχουν καθεμία την εκθετική κατανομή με παράμετρο 1. Καταγράφουμε στον πιο κάτω πίνακα την ακριβή τιμή για τις πιθανότητες $\mathbf{P}(S_{100} \geq 125), \mathbf{P}(S_{100} \geq 150)$, καθώς και την προσέγγιση που δίνει το κεντρικό οριακό θεώρημα. Έχουμε $\mathbf{E}(S_{100}) = 100$, $\sqrt{\mathrm{Var}(S_{100})} = 10$. Άρα τα γεγονότα $S_{100} \geq 125, S_{100} \geq 150$ είναι σημαντικές αποκλίσεις από τη μέση τιμή (2.5 και 5 φορές αντίστοιχα το μέγεθος της τυπικής απόκλισης).

Πιθανότητα	Προσέγγιση μέσω ΚΟΘ	Ακριβής τιμή
$\mathbf{P}(S_{100} \geq 125)$	0.0062	0.0093
$\mathbf{P}(S_{100} \geq 150)$	2.86×10^{-7}	5.92×10^{-6}

Παρατηρήστε ότι η προσέγγιση για την πιθανότητα $\mathbf{P}(S_{100} \geq 150)$ είναι περίπου το 1/20 της αληθινής τιμής της πιθανότητας.

Γενικά η σύγκλιση (16.8) συμβαίνει γρήγορα όταν

- το σύνολο A έχει μεγάλη πιθανότητα $\mathbf{P}(Z \in A)$ (για παράδειγμα, είναι ένα διάστημα όχι πολύ μικρό γύρω από το 0) και
- οι τυχαίες μεταβλητές X_i έχουν κατανομή που δίνει μικρή μάζα σε σύνολα μακριά από το μηδέν. Δηλαδή η $\mathbf{P}(|X_1| > t)$ φθίνει γρήγορα για $t \to \infty$ όσο όταν $X_1 \sim \mathrm{N}(0,1)$ ή συντομότερα.

Οι πιθανότητες που μας απασχόλησαν στο προηγούμενο παράδειγμα ήταν ενδεχομένων με πολύ μικρή πιθανότητα (μη τυπική συμπεριφορά της S_n). Για την εκτίμηση της πιθανότητας τέτοιων, απίθανων, ενδεχομένων καταλληλότερη είναι η θεωρία των μεγάλων αποκλίσεων, στοιχεία της οποίας εκτίθενται στο επόμενο κεφάλαιο.

16.5 Η σύγκλιση στο κεντρικό οριακό θεώρημα*

Ας υποθέσουμε ότι οι $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι ανεξάρτητες ισόνομες με $\mathbf{E}(X_1) = 0, \mathrm{Var}(X_1) = 1$ Το κεντρικό οριακό θεώρημα λέει ότι η ακολουθία $R_n := S_n/\sqrt{n}$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια τυχαία μεταβλητή με κατανομή την $\mathrm{N}(0,1)$. Μήπως όμως συγκλίνει με πιθανότητα 1 ή έστω κατά πιθανότητα σε κάποια τυχαία μεταβλητή; Η απάντηση είναι όχι. Γιατί, αν συνέκλινε κατά πιθανότητα σε μια τυχαία μεταβλητή W, τότε θα υπήρχε υπακολουθία $(R_{n_k})_{k\geq 1}$ που να συγκλίνει στην W με πιθανότητα 1. Εφαρμόζοντας τα επιχειρήματα της Άσκησης 16.7 (τώρα για την ακολουθία $(R_{n_k})_{k\geq 1}$) δείχουμε ότι $\underline{\lim}_{k\to\infty} R_{n_k} = -\infty, \overline{\lim}_{k\to\infty} R_{n_k} = \infty$ με πιθανότητα 1. Άρα η $(R_{n_k})_{k\geq 1}$ δεν μπορεί να συγκλίνει με πιθανότητα 1.

Ασκήσεις

Στις ασκήσεις πιο κάτω, αν $(X_i)_{i\geq 1}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, συμβολίζουμε με S_n το άθροισμα των πρώτων n από αυτές. Δηλαδή $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ για κάθε $n \geq 1$.

16.1 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{E}(X_1) = \mu \in \mathbb{R}$ και διασπορά $\sigma^2 \in (0,\infty)$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n > n\mu) = \frac{1}{2}.$$

16.2 Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $EX_1 = 2, \mathrm{Var}(X_1) = 1$. Να υπολογιστούν τα όρια

(α) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n > 2.1n)$,

(β) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n > 2n + \sqrt{n})$,

(γ) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n > 10\sqrt{n})$,

(δ) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n < 3n)$,

(ε) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n > 10^{10})$.

16.3 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές έτσι ώστε $X_1 \sim \mathrm{Poisson}(1)$. Να δείξετε ότι

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \Rightarrow Z, \text{ όπου } Z \sim \mathrm{N}(0,1).$$

16.4 Έστω $p \in (0,1)$ και $A \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{np+A\sqrt{n}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

16.5 Να δείξετε ότι

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

16.6* Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{E}(X_1) \in \mathbb{R}$ και $\mathrm{Var}(X_1) = 1$. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - (X_{n+1} + \cdots + X_{2n})}{\sqrt{n}}\right| \leq 1\right).$$

16.7 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{E}(X_1) = 0$, $\mathrm{Var}(X_1) = 1$. Να δειχθεί ότι

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty.$$

[Υπόδειξη: Η στρατηγική της Άσκησης 11.16 λειτουργεί. Απλώς το (α) μέρος χρειάζεται μια μικρή τροποποίηση.]

17

Μεγάλες αποκλίσεις*

17.1 Η έννοια της μεγάλης απόκλισης

Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές ώστε $\mathbf{P}(X_1 = -1) = \mathbf{P}(X_1 = 1) = 1/2$ και $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ το άθροισμα των πρώτων n από αυτές. Ο νόμος των μεγάλων αριθμών λέει ότι με πιθανότητα 1 ο μέσος όρος S_n/n συγκλίνει στο 0. Μεγάλη απόκλιση για τον μέσο όρο λέμε ένα ενδεχόμενο της μορφής

$$\left\{\frac{S_n}{n} \in A\right\}$$

όπου $A \subset \mathbb{R}$ είναι ένα σύνολο «μακριά» από το 0, δηλαδή με $0 \notin \bar{A}$. Για παράδειγμα, το A μπορεί να είναι ένα από τα $(1, \infty), (-4, -1) \cup (0.5, 10)$ αλλά όχι το $\{1/n : n \in \mathbb{N}^+\}$. Επειδή η S_n/n συγκλίνει στο 0 με πιθανότητα 1, μια μεγάλη απόκλιση ζητάει από την S_n/n να κάνει κάτι που η ακολουθία δεν θέλει να κάνει. Και η πιθανότητα μιας μεγάλης απόκλισης τείνει στο 0 εξαιτίας του ασθενούς νόμου των μεγάλων αριθμών (Πόρισμα 12.1). Μας ενδιαφέρει να έχουμε μια καλή εκτίμηση του πόσο σύντομα συμβαίνει αυτό. Θα δούμε ότι για πολλά σύνολα A (τα οποία θα προσδιορίσουμε) ισχύει

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in A\right) \approx e^{-c(A)n}, \tag{17.1}$$

όπου $c(A)$ είναι μια θετική σταθερά που εξαρτάται από το σύνολο A. Θα διευκρινίσουμε τη σημασία του $\approx$ και θα υπολογίσουμε αυτή τη σταθερά $c(A)$.

Επίσης, δεν θα περιοριστούμε μόνο στην πιο πάνω ακολουθία $(X_n)_{n\geq 1}$ αλλά θα θεωρήσουμε οποιαδήποτε ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$.

Προηγουμένως όμως θα εξηγήσουμε γιατί είναι σημαντικό να ξέρουμε τον ακριβή ρυθμό με τον οποίο φθίνει η πιθανότητα μιας μεγάλης απόκλισης. Γιατί ασχολούμαστε με την πιθανότητα ενός ενδεχομένου που εκ των προτέρων ξέρουμε ότι είναι ελάχιστη (και επομένως δεν περιμένουμε το ενδεχόμενο να συμβεί);

Συμβολισμός: Για $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$ ακολουθίες θετικών πραγματικών αριθμών γράφουμε $a_n \approx b_n$ αν

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log a_n}{\log b_n} = 1.$$

17.2 Γιατί οι μεγάλες αποκλίσεις είναι σημαντικές

Θεωρούμε το εξής παιχνίδι. Ξεκινάμε με αρχική περιουσία $P_0 = 1$ Ευρώ και πραγματοποιούμε μια ακολουθία ρίψεων ενός αμερόληπτου νομίσματος. Όποτε το νόμισμα φέρνει «Κεφαλή», η περιουσία μας διπλασιάζεται, όποτε φέρνει «Γράμματα», η περιουσία μας υποδιπλασιάζεται.

Ερώτημα: Ποια είναι η μέση τιμή της περιουσίας μετά από n βήματα;

Η περιουσία μετά n βήματα είναι $P_n = 2^{S_n}$, όπου S_n είναι η ακολουθία της προηγούμενης ενότητας.

Μια διαισθητική προσέγγιση: Έστω $\varepsilon_n := S_n/n$, που ξέρουμε ότι τείνει στο μηδέν με πιθανότητα 1. Τότε

$$\mathbf{E}(P_n) = \mathbf{E}(e^{S_n}) = \mathbf{E}(e^{n\varepsilon_n}) \doteq e^{na_n}$$

με a_n ακολουθία που τείνει στο 0. Η τελευταία ισότητα είναι μια εικασία. Παίρνουμε μέση τιμή μιας ποσότητας με ρυθμό εκθετικής αύξησης $\frac{1}{n}\log e^{n\varepsilon_n}(=\varepsilon_n)$ που είναι περίπου 0. Αναμένουμε η συνολική μέση τιμή να έχει ρυθμό εκθετικής αύξησης επίσης περίπου 0.

Τι πραγματικά συμβαίνει: Η μέση τιμή $\mathbf{E}(P_n)$ υπολογίζεται άμεσα ως

$$\mathbf{E}(P_n) = \mathbf{E}(2^{X_1})^n = \left(\frac{2+2^{-1}}{2}\right)^n = e^{n\log(5/4)}. \tag{17.2}$$

Δηλαδή έχει *θετικό* εκθετικό ρυθμό αύξησης ίσο με $\log(5/4)$.

Εξήγηση: Ποιο είναι το πρόβλημα με τη διαισθητική προσέγγιση πιο πάνω; Το κλάσμα $\varepsilon_n := S_n/n$ παίρνει τιμές στο $U_n := \{k/n : k \in \mathbb{Z}, |k| \le n\}$. Προσεγγιστικά ισχύει

$$\mathbf{P}(\varepsilon_n = x) \approx e^{-nI(x)},$$

με I μια συνεχή συνάρτηση στο $[-1,1]$ περίπου της μορφής x^2. Δηλαδή τιμές του x μακριά από το 0 είναι δύσκολο να ληφθούν από την S_n/n.

Ο υπολογισμός της $\mathbf{E}(P_n)$ γίνεται ως εξής:

$$\mathbf{E}(2^{S_n}) = \sum_{x\in U_n} e^{nx\log 2}\,\mathbf{P}(\varepsilon_n = x). \tag{17.3}$$

Η διαισθητική προσέγγιση πρότεινε να αγνοήσουμε όλους τους όρους με $x \ne 0$ γιατί έχουν πολύ μικρή πιθανότητα. Βέβαια κάθε τέτοιος όρος δεν έχει μόνο κόστος (συγκεκριμένα $\approx e^{-nI(x)}$) αλλά και όφελος (συγκεκριμένα $e^{nx\log 2}$) το οποίο ίσως να ισοσκελίζει το κόστος. Κυρίαρχος όρος στο άθροισμα είναι αυτός που μεγιστοποιεί τη διαφορά $x\log 2 - I(x)$ (όφελος μείον κόστος). Πιο κάτω που θα έχουμε την ακριβή μορφή της συνάρτησης I (Παράδειγμα 17.10), θα δούμε ότι το καλύτερο x είναι το $x = 3/5$. Η μέγιστη συνεισφορά στη μέση τιμή προέρχεται από μια μεγάλη απόκλιση. Η τυπική συμπεριφορά του μέσου S_n/n είναι αδιάφορη στον υπολογισμό.

Στο πιο πάνω πρόβλημα η επίκληση των μεγάλων αποκλίσεων δεν ήταν απαραίτητη αφού υπάρχει απλούστερος τρόπος αντιμετώπισης. Υπάρχουν όμως άλλα προβλήματα στα οποία μια μεγάλη απόκλιση παίζει κεντρικό ρόλο και η θεωρία των μεγάλων αποκλίσεων είναι το μόνο διαθέσιμο εργαλείο.

17.3 Η αρχή μεγάλων αποκλίσεων

Έστω $\mathcal{X}$ μετρικός χώρος. **Συνάρτηση ρυθμού** στον $\mathcal{X}$ ονομάζουμε οποιαδήποτε συνάρτηση $I : \mathcal{X} \to [0,\infty]$ που είναι κάτω ημισυνεχής [δηλαδή το σύνολο $[I > a]$ είναι ανοιχτό για κάθε $a \in \mathbb{R}$].

Έστω τώρα $(\mu_n)_{n\ge1}$ ακολουθία μέτρων πιθανότητας στον $(\mathcal{X}, \mathscr{B}(\mathcal{X}))$ και $(a_n)_{n\ge1}$ αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Ορισμός 17.1. Λέμε ότι η ακολουθία $(\mu_n)_{n\ge1}$ ικανοποιεί την **αρχή μεγάλων αποκλίσεων** με **ταχύτητα** a_n και **συνάρτηση ρυθμού** I αν για κάθε $A \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$ ισχύει

$$-\inf_{x\in A^\circ} I(x) \le \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}\log\mu_n(A) \le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}\log\mu_n(A) \le -\inf_{x\in\bar{A}} I(x). \tag{17.4}$$

Στην πράξη, συνήθως έχουμε μια ακολουθία $(Y_n)_{n\ge1}$ τυχαίων μεταβλητών στον X που συγκλίνει κατά πιθανότητα σε ένα σημείο x_0 του X και εξετάζουμε αν η ακολουθία $(\mu_n)_{n\ge1}$ των *κατανομών* των Y_n ικανοποιεί την αρχή των μεγάλων αποκλίσεων. Αν την ικανοποιεί, λέμε ότι η ακολουθία $(Y_n)_{n\ge1}$ ικανοποιεί την αρχή μεγάλων αποκλίσεων.

Παράδειγμα 17.2. Έστω Y_n ακολουθία τυχαίων μεταβλητών (στον ίδιο χώρο πιθανότητας) με την Y_n να ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο n (και άρα μέση τιμή $1/n$). Η Y_n συγκλίνει κατά πιθανότητα στο 0. Η ακολουθία (των κατανομών) των Y_n ικανοποιεί την αρχή των μεγάλων αποκλίσεων με ταχύτητα n και συνάρτηση ρυθμού

$$I(x) = \begin{cases} \infty & \text{αν } x < 0, \\ x & \text{αν } x \geq 0. \end{cases}$$

Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

Παρατήρηση 17.3. (α) Για κάθε σύνολο $A \subset \mathcal{X}$, εισάγουμε τη συντομογραφία

$$I(A) = \inf_{x \in A} I(x).$$

(β) Όταν για ένα σύνολο Borel $A \subset X$ ισχύει $I(A^\circ) = I(\bar{A})$, τότε έχουμε ότι η $\frac{1}{n} \log \mu_n(A)$ συγκλίνει στην τιμή $I(A^\circ) = I(A) = I(\bar{A})$. Δηλαδή

$$\mu_n(A) \approx e^{-nI(A)}.$$

(γ) Η (17.4) ισοδυναμεί με την απαίτηση το άνω φράγμα να ισχύει για A κλειστό και το κάτω φράγμα να ισχύει για A ανοιχτό. Δηλαδή

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(F) \leq -\inf_{x \in F} I(x) \tag{17.5}$$

για κάθε $F \subset X$ κλειστό και

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(G) \geq -\inf_{x \in G} I(x) \tag{17.6}$$

για κάθε $G \subset X$ ανοιχτό. Επιπλέον, το κάτω φράγμα ισοδυναμεί με το εξής: Για κάθε $x \in X$ και ανοιχτό σύνολο $G \subset X$ που περιέχει το x ισχύει

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(G) \geq -I(x). \tag{17.7}$$

Για την απόδειξη της αρχής μεγάλων αποκλίσεων, θα χρησιμοποιούμε αυτές τις ισοδύναμες μορφές του ορισμού.

17.4 Το Θεώρημα Cramer

Για $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$, ορίζουμε τον μετασχηματισμό Legendre της f ως τη συνάρτηση $f^* : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ με

$$f^*(x) := \sup_{t \in \mathbb{R}} \{xt - f(t)\}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου υπενθυμίζουμε ότι $\sup \emptyset = -\infty$ και $\sup A = \infty$ αν το $A \subset \mathbb{R}$ είναι μη φραγμένο.

Έστω τώρα $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$ και μ η κατανομή καθεμιάς. Συμβολίζουμε με M τη ροπογεννήτρια της X_1, με Λ τον λογάριθμο της M και με Λ^* τον μετασχηματισμό Legendre της Λ. Δηλαδή

$$M(\lambda) := \mathbf{E}(e^{\lambda X}) = \int e^{\lambda x}\, d\mu(x), \tag{17.8}$$

$$\Lambda(\lambda) := \log M(\lambda), \tag{17.9}$$

$$\Lambda^*(x) := \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda x - \Lambda(\lambda)\} \tag{17.10}$$

για κάθε $\lambda, x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 17.4. Ας δούμε την περίπτωση που η X_1 είναι η ομοιόμορφη στο $\{-1, 1\}$. Τότε

$$\Lambda(\lambda) = \log\left(\frac{e^{-\lambda} + e^{\lambda}}{2}\right)$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και είναι άσκηση απειροστικού λογισμού (μεγιστοποίησης) να δείξει κανείς ότι

$$\Lambda^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\{(1+x)\log(1+x) + (1-x)\log(1-x)\} & \text{αν } x \in [-1, 1], \\ \infty & \text{αν } x \in \mathbb{R}\setminus[-1, 1], \end{cases} \tag{17.11}$$

με τη σύμβαση $0 \log 0 = 0$.

Το θεώρημα Cramer λέει ότι η ακολουθία $(S_n/n)_{n\geq 1}$ ικανοποιεί την αρχή μεγάλων αποκλίσεων με ταχύτητα n και συνάρτηση ρυθμού Λ^*. Ξεκινάμε με δύο λήμματα που ουσιαστικά αποδεικνύουν το άνω φράγμα της αρχής.

Λήμμα 17.5. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει*

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq x\right) \leq e^{-n \sup_{\lambda\geq 0}\{\lambda x - \Lambda(\lambda)\}}, \tag{17.12}$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq x\right) \leq e^{-n \sup_{\lambda\leq 0}\{\lambda x - \Lambda(\lambda)\}}. \tag{17.13}$$

Δηλαδή μια απόκλιση προς τα πάνω ελέγχεται από τις τιμές της ροπογεννήτριας $M(\lambda)$ για $\lambda \geq 0$ ενώ μια απόκλιση προς τα κάτω ελέγχεται από τις τιμές της $M(\lambda)$ για $\lambda \leq 0$.

Απόδειξη. Για $\lambda \geq 0$, εφαρμόζοντας την ανισότητα Markov, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq x\right) &= \mathbf{P}(S_n \geq nx) = \mathbf{P}(\lambda S_n \geq \lambda nx) = \mathbf{P}(e^{\lambda S_n} \geq e^{\lambda nx}) \leq e^{-\lambda nx}\,\mathbf{E}(e^{\lambda S_n}) \\ &= e^{-\lambda nx} M(\lambda)^n = e^{n\Lambda(\lambda) - \lambda nx} = e^{-n\{\lambda x - \Lambda(\lambda)\}}. \end{aligned}$$

Επειδή το φράγμα ισχύει για κάθε $\lambda \geq 0$, η ιδέα είναι να διαλέξουμε το λ που δίνει το καλύτερο/μικρότερο φράγμα. Συγκεκριμένα παίρνουμε ότι η πιθανότητα $\mathbf{P}(S_n/n \geq x)$ φράσσεται πάνω από την ποσότητα

$$\inf_{\lambda\geq 0} e^{-n\{\lambda x - \Lambda(\lambda)\}} = e^{-n \sup_{\lambda\geq 0}\{\lambda x - \Lambda(\lambda)\}}.$$

Η πρώτη ανισότητα αποδείχθηκε.
Για την απόδειξη της δεύτερης, παρατηρούμε ότι για $\lambda \leq 0$ ισχύει

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq x\right) = \mathbf{P}(S_n \leq nx) = \mathbf{P}(\lambda S_n \geq \lambda nx) = \mathbf{P}(e^{\lambda S_n} \geq e^{\lambda nx}) \leq e^{-\lambda nx}\,\mathbf{E}(e^{\lambda S_n}) = e^{-n\{\lambda x - \Lambda(\lambda)\}}.$$

Και η απόδειξη συνεχίζεται όπως και για την πρώτη ανισότητα. ■

Λήμμα 17.6. *Υποθέτουμε ότι $m := \mathbf{E}(X_1) \in \mathbb{R}$. Τότε*
(i) $x \geq m \Rightarrow \Lambda^*(x) = \sup_{\lambda\geq 0}\{\lambda x - \Lambda(\lambda)\}$.
(ii) $x \leq m \Rightarrow \Lambda^*(x) = \sup_{\lambda\leq 0}\{\lambda x - \Lambda(\lambda)\}$.
(iii) $\Lambda^*(m) = 0$.

Απόδειξη. (i) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ εφαρμόζοντας την ανισότητα Jensen έχουμε

$$\Lambda(\lambda) = \log \mathbf{E}(e^{\lambda X_1}) \geq \mathbf{E}(\lambda X_1) = \lambda m,$$

επομένως $\lambda m - \Lambda(\lambda) \leq 0$. Τώρα θέλουμε να δείξουμε ότι στο supremum που ορίζει το $\Lambda^*(x)$ μπορούμε να αγνοήσουμε τους αριθμούς $\lambda x - \Lambda(\lambda)$ που έχουν $\lambda < 0$. Πράγματι, για $x \geq m$ και $\lambda < 0$ έχουμε

$\lambda x \le \lambda m (\le \Lambda(\lambda)$ όπως δείξαμε πιο πάνω), οπότε $\lambda x - \Lambda(\lambda) \le 0$. Όμως 0 είναι η τιμή του $\lambda x - \Lambda(\lambda)$ όταν $\lambda = 0$. Άρα οι όροι με $\lambda < 0$ δεν μπορούν να αυξήσουν το supremum.
(ii) Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτήν στο (i).
(iii) Όταν $x = m$, οι (i), (ii) δίνουν ότι το $\Lambda^*(m)$ ισούται με την τιμή του $\lambda x - \Lambda(\lambda)$ για $\lambda = 0$, η οποία είναι 0. ■

Το επόμενο λήμμα είναι κρίσιμο για την απόδειξη του κάτω φράγματος της αρχής μεγάλων αποκλίσεων.

Λήμμα 17.7. *(α) Η M είναι διαφορίσιμη στο εσωτερικό του $D_M := \{\lambda \in \mathbb{R} : M(\lambda) < \infty\}$ με παράγωγο $M'(\lambda) = \mathbf{E}(X_1 e^{\lambda X_1})$.*
(β) Αν $\mu((-\infty, a)), \mu((a, \infty)) > 0$ και το μ έχει συμπαγή φορέα τότε $D_M = \mathbb{R}$ και υπάρχει $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $\Lambda^*(a) = \lambda_0 a - \Lambda(\lambda_0)$. Για αυτό το λ_0 ισχύει $\Lambda'(\lambda_0) = a$

Απόδειξη. (α) Ο τύπος για την παράγωγο προκύπτει διαφορίζοντας την $\mathbf{E}(e^{\lambda X_1})$ μέσα από την μέση τιμή. Πρέπει όμως να δείξουμε ότι αυτό είναι επιτρεπτό. Έστω λ εσωτερικό σημείο του D_M και $\delta > 0$ με $[\lambda - \delta, \lambda + \delta] \subset D_M$. Τότε για $\varepsilon \in [-\delta, \delta], \varepsilon \neq 0$ έχουμε

$$\frac{M(\lambda + \varepsilon) - M(\lambda)}{\varepsilon} = \mathbf{E}\left(\frac{e^{(\lambda+\varepsilon)X_1} - e^{\lambda X_1}}{\varepsilon}\right) = \mathbf{E}\left(e^{\lambda X_1} \frac{e^{\varepsilon X_1} - 1}{\varepsilon}\right).$$

Το όριο για $\varepsilon \to 0$ της ποσότητας στη μέση τιμή είναι το επιθυμητό $X_1 e^{\lambda X_1}$ και η απόλυτή της τιμή φράσσεται από

$$e^{\lambda X_1} \frac{e^{\delta |X_1|} - 1}{\delta} \le \delta^{-1} \{e^{(\lambda-\delta)X_1} + e^{(\lambda+\delta)X_1}\}.$$

Για να δούμε το πρώτο φράγμα, αναπτύσσουμε σε δυναμοσειρά την $e^{\varepsilon X_1}$. Το δεξί μέλος της τελευταίας ανισότητας δεν εξαρτάται από το ε και έχει πεπερασμένη μέση τιμή εξαιτίας του ότι $\lambda - \delta, \lambda + \delta \in D_M$. Το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

(β) Έχουμε $\Lambda^*(a) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} A(\lambda)$ με $A(\lambda) := \lambda a - \Lambda(\lambda) = -\log \mathbf{E}(e^{\lambda(X_1 - a)})$. Η A είναι πεπερασμένη και διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}$ με όρια $A(-\infty) = A(\infty) = -\infty$ εξαιτίας της $\mu((-\infty, a)), \mu((a, \infty)) > 0$. Άρα παίρνει μέγιστο σε ένα σημείο $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ και $0 = A'(\lambda_0) = a - \Lambda'(\lambda_0)$. Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε. ■

Θεώρημα 17.8 (Θεώρημα Cramer)**.** *Υποθέτουμε ότι $m := \mathbf{E}(X_1) \in \mathbb{R}$. Η ακολουθία $(S_n/n)_{n \ge 1}$ ικανοποιεί την αρχή μεγάλων αποκλίσεων με ταχύτητα n και συνάρτηση ρυθμού $I(x) := \Lambda^*(x)$.*

Απόδειξη. Έστω μ_n η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής S_n/n. Ακολουθούμε τη μέθοδο της Παρατήρησης 17.3(γ).

Άνω φραγμα: Έστω $F \subset \mathbb{R}$ κλειστό μη κενό. Αν $I(F) = 0$, δεν έχουμε να αποδείξουμε τίποτα γιατί το αριστερό μέλος της (17.5) είναι μη θετικό πάντοτε.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $I(F) > 0$. Επειδή $I(m) = 0$ (Λήμμα 17.6), έπεται ότι το m είναι στοιχείο του ανοιχτού συνόλου $\mathbb{R} \setminus F$. Έστω (a, b) το μέγιστο υποδιάστημα του $\mathbb{R} \setminus F$ που περιέχει το m. Αυτό το υποδιάστημα είναι ανοιχτό (και άρα $a, b \in F$) γιατί το $\mathbb{R} \setminus F$ είναι ανοιχτό και ενδέχεται $a = -\infty$ ή $b = \infty$ (όχι όμως και τα δύο γιατί $F \neq \emptyset$). Επειδή $F \subset \mathbb{R} \setminus (a, b)$, όταν $a, b \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\mu_n(F) \le \mu_n((-\infty, a]) + \mu_n([b, \infty)) \le e^{-n\Lambda^*(a)} + e^{-n\Lambda^*(b)} \le 2e^{-nI(F)}. \tag{17.14}$$

Η πρώτη ανισότητα έπεται από τα Λήμματα 17.5, 17.6, ενώ η δεύτερη από το ότι $a, b \in F$. Αν $a = -\infty$, οι ανισότητες ισχύουν αν παραλείψουμε τους όρους $\mu_n((-\infty, a]), e^{-n\Lambda^*(a)}$. Ανάλογα και όταν $b = \infty$. Τώρα το άνω φράγμα έπεται από την (17.14).

Κάτω φραγμα: Με βάση την (17.7), επειδή η S_n/n παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και $\delta > 0$ ισχύει

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mu_n((a - \delta, a + \delta)) \ge -\Lambda^*(a). \tag{17.15}$$

Περίπτωση 1. $\mu((-\infty,a)),\mu((a,\infty))>0$ και το μ έχει συμπαγή φορέα.

Τότε με βάση το Λήμμα 17.7 υπάρχει $\lambda_0\in\mathbb{R}$ ώστε $\Lambda^*(a)=\lambda_0 a-\Lambda(\lambda_0)$. Ορίζουμε ένα νέο μέτρο $\tilde\mu$ από τη σχέση (Δες Παράδειγμα 6.32)

$$\frac{d\tilde\mu}{d\mu}(x)=e^{\lambda_0 x-\Lambda(\lambda_0)},\, x\in\mathbb{R}. \tag{17.16}$$

Το $\tilde\mu$ είναι μέτρο πιθανότητας γιατί

$$\tilde\mu(\mathbb{R})=\int_{\mathbb{R}}e^{\lambda_0 x-\Lambda(\lambda_0)}\,d\mu(x)=\frac{1}{M(\lambda_0)}\int_{\mathbb{R}}e^{\lambda_0 x}\,d\mu(x)=1$$

και έχει μέση τιμή a γιατί

$$\int_{\mathbb{R}}x\,d\tilde\mu(x)=\frac{\int_{\mathbb{R}}xe^{\lambda_0 x}\,d\mu(x)}{M(\lambda_0)}=\frac{M'(\lambda_0)}{M(\lambda_0)}=\Lambda'(\lambda_0)=a$$

Επίσης, συμβολίζουμε με $\tilde\mu_n$ την κατανομή του μέσου όρου $\tilde X_1+\cdots+\tilde X_n/n$ όταν οι $\tilde X_1,\tilde X_2,\ldots,\tilde X_n$ είναι ανεξάρτητες ισόνομες καθεμία με κατανομή $\tilde\mu$. Και τώρα είμαστε σε θέση να δείξουμε το ζητούμενο κάτω φράγμα. Για οποιοδήποτε $\varepsilon\in(-\delta,\delta)$ υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\mu_n((a-\varepsilon,a+\varepsilon))=\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\right)&=\int_{|x_1+x_2+\cdots+x_n-na|<n\varepsilon}d\mu(x_1)\cdots d\mu(x_n)\\
&=\int_{|x_1+x_2+\cdots+x_n-na|<n\varepsilon}e^{n\Lambda(\lambda_0)-\lambda_0(x_1+\cdots+x_n)}d\tilde\mu(x_1)\cdots\tilde d\mu(x_n)\\
&\ge e^{n\Lambda(\lambda_0)-\lambda_0 na-|\lambda_0|n\varepsilon}\tilde\mu_n((a-\varepsilon,a+\varepsilon))=e^{-n\Lambda^*(a)-n|\lambda_0|\varepsilon}\tilde\mu_n((a-\varepsilon,a+\varepsilon)).
\end{aligned}$$

Άρα

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac1n\log\mu_n((a-\delta,a+\delta))\ge-\Lambda^*(a)-|\lambda_0|\varepsilon-\varliminf_{n\to\infty}\frac1n\log\tilde\mu_n((a-\delta,a+\delta)). \tag{17.17}$$

Τώρα $\lim_{n\to\infty}\tilde\mu_n((a-\delta,a+\delta))=1$ από τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών γιατί

$$\tilde\mu_n((a-\delta,a+\delta))=\mathbf{P}\left(\frac{\tilde X_1+\cdots+\tilde X_n}{n}\in(a-\delta,a+\delta)\right)$$

και οι $\tilde X_1,\ldots,\tilde X_n$ είναι ανεξάρτητες ισόνομες με μέση τιμή a. Άρα το $\varliminf$ στο δεξί μέλος της ανισότητας (17.17) είναι 0 και παίρνοντας $\varepsilon\to0$ έχουμε την (17.7).

Περίπτωση 2. $\mu((-\infty,a)),\mu((a,\infty))>0$ και το μ δεν έχει συμπαγή φορέα.

Υπάρχει $R_0>0$ μεγάλο ώστε $\mu((-R_0,a)),\mu((a,R_0))>0$. Θεωρούμε τώρα οποιοδήποτε $R>R_0$ και ακολουθία $(\hat X_i)_{i\ge1}$ ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κατανομή αυτήν της X_1 με τη δέσμευση $|X_1|\le R$. Δηλαδή

$$\mathbf{P}(\hat X_1\in A)=\frac{\mathbf{P}(X_1\in A,|X_1|\le R)}{\mathbf{P}(|X_1|\le R)}$$

για κάθε $A\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Θέτουμε $\hat S_n=\hat X_1+\hat X_2+\cdots+\hat X_n$. Τότε

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\right)\ge\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon),|X_i|\le R\text{ για κάθε } i=1,2,\ldots,n\right) \tag{17.18}$$

$$=\frac{\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon),|X_i|\le R\text{ για κάθε } i=1,2,\ldots,n\right)}{\mathbf{P}(|X_i|\le R\text{ για κάθε } i=1,2,\ldots,n)} \tag{17.19}$$

$$\times\mathbf{P}(|X_i|\le R\text{ για κάθε } i=1,2,\ldots,n) \tag{17.20}$$

$$=\mathbf{P}\left(\frac{\hat S_n}{n}\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\right)\mathbf{P}(|X_1|\le R)^n \tag{17.21}$$

Τώρα για την ακολουθία $\hat{S}_n/n$ εφαρμόζεται η περίπτωση 1 του κάτω φράγματος. Συμβολίζουμε με I_R τη συνάρτηση ρυθμού της αρχής μεγάλων αποκλίσεων που ικανοποιεί η ακολουθία. Άρα

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n((a-\delta, a+\delta)) \geq -I_R(a) + \log \mathbf{P}(|X_1| \leq R).$$

Αρχικά, θα βελτιώσουμε την έκφραση του κάτω φράγματος. Θέτουμε $C_R(\lambda) = \log \mathbf{E}(e^{\lambda X_1}\mathbf{1}_{|X_1|\leq R})$. Η ροπογεννήτρια της $\hat{X}_1$ είναι $\mathbf{E}(e^{\lambda X_1}\mathbf{1}_{|X_1|\leq R})/\,\mathbf{P}(|X_1| \leq R)$, με λογάριθμο $C_R(\lambda) - \log \mathbf{P}(|X_1| \leq R)$, άρα $I_R(a) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\{\lambda a - C_R(\lambda)\} + \log \mathbf{P}(|X_1| \leq R)$. Επομένως το προηγούμενο κάτω φράγμα είναι απλώς

$$-\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\{\lambda a - C_R(\lambda)\},$$

το οποίο είναι το αντίθετο του μετασχηματισμού Legendre $C_R^*(a)$ της C_R στο a. Έτσι, το ζητούμενο κάτω φράγμα έπεται από τον εξής ισχυρισμό.

Ισχυρισμος: $\varliminf_{R\to\infty} C_R^*(a) \leq \Lambda^*(a)$.

Η $C_R^*(a)$ είναι φθίνουσα ως προς R γιατί η $C_R(\lambda)$ είναι αύξουσα ως προς R. Άρα $\varliminf_{R\to\infty} C_R^*(a) \leq C_r^*(a)$ για κάθε $r > 0$. Έστω $u < \varliminf_{R\to\infty} C_R^*(a)$. Θέτουμε

$$K_r := \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda a - C_r(\lambda) \geq u\}.$$

Για $r \geq R_0$, το K_r είναι μη κενό αφού $u < C_r^*(a)$ και συμπαγές γιατί η $A_r(\lambda) := \lambda a - C_r(\lambda)$ είναι πεπερασμένη παντού και συνεχής ως προς λ με $A_r(-\infty) = A_r(\infty) = -\infty$ (απόδειξη όπως στο Λήμμα 17.7(β)). Επίσης η $(K_r)_{r\geq R_0}$ είναι φθίνουσα ως προς r, άρα η τομή $\cap_{r\geq R_0} K_r$ είναι μη κενή και έστω λ_0 ένα σημείο σε αυτήν. Τότε

$$\lambda_0 a - C_r(\lambda_0) \geq u$$

για κάθε $r \geq R_0$. Για $r \to \infty$ η τελευταία ανισότητα και το θεώρημα μονότονης σύγκλισης δίνουν $\lambda_0 a - \log \Lambda(\lambda_0) \geq u$, και άρα $\Lambda^*(a) \geq u$. Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Περίπτωση 3. Κανένας περιορισμός στο μ (πέραν του $\mathbf{E}(X_1) \in \mathbb{R}$).

Μένει να εξετάσουμε την περίπτωση που ένα τουλάχιστον από τα $\mu((-\infty, a)), \mu((a, \infty))$ είναι 0. Τότε

$$\Lambda^*(a) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\{\lambda a - \log \mathbf{E}(e^{\lambda X_1})\} = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\{-\log \mathbf{E}(e^{\lambda(X_1-a)})\} = -\log \mathbf{P}(X_1 = a).$$

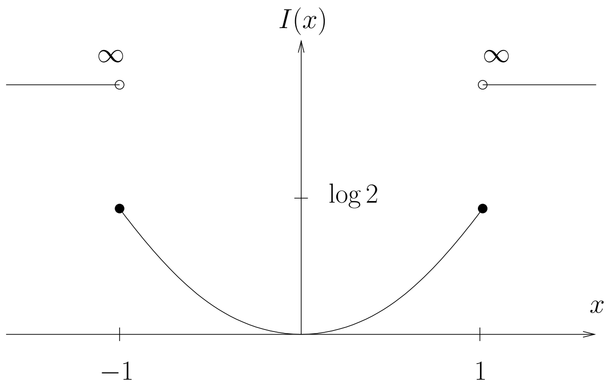
Η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί κάτω από τις υποθέσεις μας, η $\mathbf{E}(e^{\lambda(X_1-a)})$ είναι μονότονη ως προς λ και άρα το infimum της ισούται με το όριό της στο $-\infty$ όταν $\mu((-\infty, a)) = 0$ και με το όριο της στο ∞ όταν $\mu((a, -\infty)) = 0$. Τώρα το συμπέρασμα έπεται γιατί

$$\mu_n((a-\delta, a+\delta)) \geq \mathbf{P}(X_1 = X_2 = \cdots = X_n = a) = \mathbf{P}(X_1 = a)^n.$$

■

Παρατήρηση 17.9. (α) (Η ιδέα της αλλαγής μέτρου) Το ουσιαστικό κομμάτι της απόδειξης του κάτω φράγματος είναι η Περίπτωση 1. Ας πάρουμε την περίπτωση $a \neq m$ και ε μικρό. Το γεγονός $A_n = \{S_n/n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$ είναι μη τυπικό όταν οι X_i έχουν κατανομή μ, και δυσκολευόμαστε να εκτιμήσουμε την πιθανότητά του. Αυτό που κάνουμε είναι να αλλάξουμε τον νόμο των X_i με τέτοιο τρόπο ώστε το A_n να γίνει τυπικό για αυτόν τον νέο νόμο. Και πράγματι, ο νόμος $\tilde{\mu}$ έχει μέση τιμή a, οπότε, όταν οι X_i είναι ανεξάρτητες, καθεμία με κατανομή $\tilde{\mu}$, το A_n έχει πιθανότητα που τείνει στο 1. Το κόστος για την αλλαγή νόμου (μέτρου) είναι η παράγωγος Radon-Nikodym, για την οποία ευτυχώς έχουμε καλό έλεγχο. Στο σύνολο A_n αυτή έχει τιμή περίπου $e^{n\{\Lambda(\lambda_0)-\lambda_0 a\}}$.

(β) Προσέξτε ότι για την Περίπτωση 2 του κάτω φράγματος εφαρμόσαμε την τεχνική της περικοπής ώστε να αναχθούμε στην Περίπτωση 1. Με τον ίδιο τρόπο αποδείξαμε την επέκταση του νόμου των μεγάλων αριθμών στην Άσκηση 12.2.



Σχήμα 17.1: Η συνάρτηση ρυθμού της αρχής μεγάλων αποκλίσεων για τον μέσο όρο ομοιόμορφων στο $\{-1, 1\}$.

(γ) Το θεώρημα Cramer ισχύει ακόμα και χωρίς την υπόθεση ότι η $\mathbf{E}(X_1)$ ορίζεται και είναι πραγματικός αριθμός. Αυτό αποδεικνύεται με λίγες παρεμβάσεις στην απόδειξη πιο πάνω (Δες Dembo and Zeitouni (1998), Θεώρημα 2.2.3).

Παράδειγμα 17.10. Το θεώρημα Cramer εφαρμόζεται στην ακολουθία $(S_n/n)_{n\geq 1}$ της Παραγράφου 17.1 και δίνει ότι αυτή ικανοποιεί την αρχή μεγάλων αποκλίσεων με συνάρτηση ρυθμού $I(x)$ τη $\Lambda^*(x)$ της (17.11). Το γράφημά της δίνεται στο Σχήμα 17.1. Να παρατηρήσουμε τα εξής

- Η I έχει την τιμή 0 στη μέση τιμή $\mathbf{E}(X_1) = 0$.
- Η I έχει την τιμή ∞ για $x \notin [-1, 1]$, που είναι αναμενόμενο αφού η S_n/n παίρνει τιμές στο $[-1, 1]$.
- Όσο απομακρυνόμαστε από το 0 (τη μέση τιμή των X_i), η $I(x)$ αυξάνει. Το γεγονός $\{S_n/n$ είναι κοντά στο $x\}$ γίνεται ακριβότερο/πιο απίθανο.

Τώρα μπορούμε να επιστρέψουμε στην Παράγραφο 17.2 και να δούμε ότι πράγματι η διαφορά $x \log 2 - I(x)$ λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της όταν $x = 3/5$ και αυτή η τιμή είναι η $\log(5/4)$, σε συμφωνία με την (17.2).

Ασκήσεις

17.1 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Λ^* στην περίπτωση που η X_1 ακολουθεί την κατανομή:

(α) Poisson(a),

(β) exp(a),

(γ) $N(0, \sigma^2)$,

όπου $a, \sigma > 0$. Επίσης, με χρήση Mathematica ή άλλου προγράμματος να γίνει σε κάθε περίπτωση η γραφική παράσταση του Λ^*.

17.2 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Λ^* στην περίπτωση που η X_1 έχει πυκνότητα $f(x) = (3/2)|x|^{-4}\mathbf{1}_{|x|\geq 1}$. Τι πληροφορίες δίνει το άνω και το κάτω φράγμα της αρχής μεγάλων αποκλίσεων για την ακολουθία S_n/n;

17.3 Εκτελούμε μια ακολουθία ανεξάρτητων ρίψεων ενός αμερόληπτου νομίσματος και ονομάζουμε S_n το πλήθος των φορών που ήρθε η ένδειξη «Κεφαλή» στις πρώτες n ρίψεις.
(α) Να δειχθεί ότι η ακολουθία $(S_n/n)_{n\geq 1}$ ικανοποιεί την αρχή μεγάλων αποκλίσεων με ταχύτητα n και συνάρτηση ρυθμού

$$I(x) := \begin{cases} \log 2 + x \log x + (1-x)\log(1-x) & \text{αν } x \in [0, 1], \\ \infty & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]. \end{cases}$$

(β) Για την πιθανότητα $\mathbf{P}(S_{1000} \geq 700)$ να προσδιοριστεί το άνω φράγμα που δίνουν τα Λήμματα 17.5 και 17.6 και η προσέγγιση που δίνει το κεντρικό οριακό θεώρημα.

17.4 Έστω ακολουθία μέτρων πιθανότητας $(\mu_n)_{n\geq 1}$ σε έναν μετρικό χώρο $\mathcal{X}$ η οποία ικανοποιεί την αρχή μεγάλων αποκλίσεων με ταχύτητα a_n και συνάρτηση ρυθμού I. Να δειχθεί ότι $\inf\{I(x) : x \in \mathcal{X}\} = 0$.

17.5 Για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, έστω Y_n τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή $N(0, 1/n)$. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $(Y_n)_{n\geq 1}$ ικανοποιεί την αρχή μεγάλων αποκλίσεων με ταχύτητα n και συνάρτηση ρυθμού $I(x) = x^2/2$, $x \in \mathbb{R}$.

17.6 Να αποδειχθεί ο ισχυρισμός του Παραδείγματος 17.2.

17.7 Έστω $f : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ και $D_f := \{x \in \mathbb{R} : f(x) < \infty\}$.

(α) Αν $0 \in D_f^\circ$, τότε

$$\varliminf_{|x|\to\infty} \frac{f^*(x)}{|x|} > 0,$$

και άρα $\lim_{|x|\to\infty} f^*(x) = \infty$.

(β) Αν $D_f = \mathbb{R}$, τότε

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{f^*(x)}{|x|} = \infty.$$

17.8 Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X_1 (με τιμές στο $\mathbb{R}$) έχει μέση τιμή $m = \mathbf{E}(X_1)$ και ροπογεννήτρια M η οποία είναι πεπερασμένη για όλα τα λ σε μια περιοχή του μηδενός. Να δειχθεί ότι για τη συνάρτηση ρυθμού της αρχής μεγάλων αποκλίσεων που δίνει το θεώρημα Cramer ισχύει $I(x) > 0$ για κάθε $x \neq m$. Οπότε, παίρνοντας υπόψιν το Λήμμα 17.6(*iii*), έχουμε ότι το m είναι το μοναδικό μηδενικό της I.

17.9 Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $[0, \infty)$ ώστε η ροπογεννήτρια της X_1 να είναι η

$$M(t) = \begin{cases} e^{-C|t|^a} & \text{αν } t \leq 0, \\ \infty & \text{αν } t > 0, \end{cases}$$

όπου $C > 0$ και $a \in (0, 1)$. Θέτουμε $S_k := X_1 + X_2 + \cdots + X_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^+$. Να δειχθεί ότι για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\mathbf{P}(S_k < tk^{1/a}) \leq e^{-C_1 t^{-\frac{a}{1-a}}} \tag{17.22}$$

με $C_1 := (1 - a)(Ca^a)^{(1-a)^{-1}}$.

Σχόλια: 1) Αποδεικνύεται ότι για κάθε $C > 0$ και $a \in (0, 1)$ υπάρχει τυχαία μεταβλητή με ροπογεννήτρια όπως πιο πάνω. Μάλιστα αυτή η τυχαία μεταβλητή έχει μέση τιμή ∞.

2) Μπορούμε να δείξουμε ότι η $S_k/k^{1/a}$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια μη σταθερή τυχαία μεταβλητή Y με πυκνότητα. Άρα το όριο για $k \to \infty$ της πιθανότητας στην (17.22) είναι $\mathbf{P}(Y < t)$. Προσέξτε ότι η (17.22) ισχύει για όλα τα k και όχι απλώς για τα μεγάλα k.

Παραρτήματα

Α΄

Αναλυτικά αποτελέσματα

Κύριος στόχος αυτού του παραρτήματος είναι η διατύπωση του Λήμματος Α΄.2 παρακάτω που αφορά υπολογισμό ορίων απειρογινομένων και χρησιμοποιείται σε αποδείξεις ασθενούς σύγκλισης μέσω χαρακτηριστικών συναρτήσεων.

Για $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, με $\log z$ συμβολίζουμε τον κύριο κλάδο του λογαρίθμου του z. Δηλαδή

$$\log z = \log |z| + i\operatorname{Arg}(z),$$

όπου $\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi)$ είναι το όρισμα του z.
Για $z \in \mathbb{C}$ κοντά στο 0, έχουμε $e^z \simeq 1 + z$ και $\log(1 + z) \simeq z$.
Αυτές οι δύο προσεγγίσεις μας καθοδηγούν όταν κάνουμε ασυμπτωτική ανάλυση απειρογινομένων. Και έπειτα, για να δικαιολογήσουμε αυστηρά το αποτέλεσμα που μας υποδεικνύουν, χρησιμοποιούμε κάποια από τις ανισότητες στο παρακάτω λήμμα.

Λήμμα Α΄.1. *(i)* $e^x \geq 1 + x$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $\log x \leq x - 1$ *για κάθε* $x \in (0, \infty)$.

(iii) $|e^z - (1 + z)| \leq |z|^2$ *για κάθε* $z \in \mathbb{C}$ *με* $|z| \leq 1$.

(iv) $|\log(1 + z) - z| \leq 2|z|^2$ *για κάθε* $z \in \mathbb{C}$ *με* $|z| \leq 1/2$.

Απόδειξη. Τα (i), (ii) είναι γνωστά από το λύκειο.
(iii) Με χρήση της δυναμοσειράς για την e^z έχουμε

$$|e^z - (1 + z)| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \leq |z|^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq |z|^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = |z|^2.$$

Για την πρώτη ανισότητα, βγάλαμε κοινό παράγοντα το $|z|^2$ και χρησιμοποιήσαμε το ότι $|z| \leq 1$.
(iv) Για $z \in \mathbb{C}$ με $|z| \leq 1/2$ ισχύει

$$|\log(1 + z) - z| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k \right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} |z|^k = |z|^2 \frac{1}{1 - |z|} \leq 2|z|^2.$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει για κάθε z με $|z| < 1$, ενώ η τελευταία ανισότητα για $|z| \leq 1/2$. ∎

Λήμμα Α΄.2. *Έστω* $(k_n)_{n\geq 1}$ *ακολουθία φυσικών αριθμών και* $\{a_{n,j} : n \geq 1, 1 \leq j \leq k_n\}$ *μιγαδικοί αριθμοί. Υποθέτουμε ότι*

(i) $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} a_{n,j} = A$ *με* $A \in \mathbb{C}$ *και*

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} |a_{n,j}|^2 = 0$.

Τότε

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{k_n} (1 + a_{n,j}) = e^A.$$

Το συμπέρασμα είναι αναμενόμενο αφού λόγω του (ii) όλα τα $a_{n,j}$ είναι κοντά στο 0 και άρα

$$\prod_{j=1}^{k_n}(1+a_{n,j}) \simeq \prod_{j=1}^{k_n} e^{a_{n,j}} = e^{\sum_{j=1}^{k_n} a_{n,j}}.$$

Ο εκθέτης στην τελευταία έκφραση τείνει στο A. Πρέπει να δείξουμε βέβαια αυστηρά ότι το $\simeq$ στο όριο γίνεται $=$.

Απόδειξη. Από την υπόθεση (ii), υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^+$ ώστε $|a_{n,j}| \leq 1/2$ για κάθε $n \geq n_0$ $1 \leq j \leq k_n$. Έπειτα, έχουμε

$$\frac{\prod_{j=1}^{k_n}(1+a_{n,j})}{e^{\sum_{j=1}^{k_n} a_{n,j}}} = e^{\sum_{j=1}^{k_n}\{\log(1+a_{n,j})-a_{n,j}\}} \tag{A$'$.1}$$

Ο εκθέτης με χρήση του Λήμματος Α$'$.1(iv) φράσσεται ως εξής

$$\left|\sum_{j=1}^{k_n}\{\log(1+a_{n,j})-a_{n,j}\}\right| \leq \sum_{j=1}^{k_n} |\log(1+a_{n,j})-a_{n,j}| \leq 2\sum_{j=1}^{k_n} |a_{n,j}|^2.$$

Η τελευταία ποσότητα τείνει στο 0 από υπόθεση. Άρα το πηλίκο στην (Α$'$.1) τείνει στο 1 και το λήμμα αποδείχθηκε. ∎

Πόρισμα Α$'$.3. *Αν $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο $\mathbb{C}$ τέτοια ώστε $c_n \to c$, με $c \in \mathbb{C}$, τότε*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{c_n}{n}\right)^n = e^c.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Λήμμα Α$'$.2 με $k_n = n, a_{n,j} = c_n/n$ για κάθε $n \geq 1$ και $1 \leq j \leq n$. Έχουμε $\sum_{j=1}^n \frac{c_n}{n} = c_n \to c$ και $\sum_{j=1}^n \left(\frac{c_n}{n}\right)^2 = \frac{c_n^2}{n} \to 0$ για $n \to \infty$. ∎

Τέλος, διατυπώνουμε την προσέγγιση Stirling για τη συνάρτηση Γ. Ο ορισμός της Γ είναι

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

για κάθε $x > 0$. Αποδεικνύονται εύκολα οι εξής βασικές ιδιότητές της.

(i) $\Gamma(1) = 1$.

(ii) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

(iii) $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ για κάθε $x > 0$.

(iv) $\Gamma(n) = (n-1)!$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$.

Η προσέγγιση Stirling είναι η εξής.

Θεώρημα Α$'$.4. *Για κάθε $x > 0$, υπάρχει $\theta_x \in (0,1)$ έτσι ώστε*

$$\Gamma(x) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{x}}\, e^{\theta_x/(12x)}. \tag{A$'$.2}$$

Για την απόδειξη του θεωρήματος, δες την Παράγραφο 12.33 στο Whittaker and Watson (1965).
Για $n \in \mathbb{N}^+$, έχουμε την εξής ειδική περίπτωση:

$$n! = \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

καθώς $n \to \infty$.

B′

Τεχνικές αποδείξεις

Το παράρτημα αυτό περιέχει αποδείξεις κάποιων αποτελεσμάτων οι οποίες είναι πέρα από τον στόχο των σημειώσεων. Καταγράφονται εδώ για τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη.

Κεφάλαιο 10

Απόδειξη του Θεωρήματος 10.10: Επειδή η οικογένεια $(\mathcal{G}_j)_{j\in J}$ είναι ανεξάρτητη αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένη υποοιογένεια της είναι ανεξάρτητη, αρκεί να δείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση που το J είναι πεπερασμένο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $J = \{1, 2, \dots, n\}$ για κάποιο $n \ge 2$. Για κάθε $k \in J$, ονομάζουμε C_k το σύνολο των συνόλων της μορφής $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots \cap A_{i_r}$ όπου $r \ge 1$ και $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_r} \in \cup_{i\in I_k}\mathcal{F}_i$. Παρατηρούμε ότι $\sigma(C_k) = \mathcal{G}_k$ γιατί σαφώς $C_k \subset \mathcal{G}_k$ και $C_k \supset \cup_{i\in I_k}\mathcal{F}_i$. Θέτουμε

$$\mathcal{D}_1 := \{A \in \mathcal{G}_1 : \mathbf{P}(A \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(A_2)\cdots\mathbf{P}(A_n) \text{ για κάθε } A_2 \in C_2, \dots, A_n \in C_n\}.$$

Από υπόθεση, $C_1 \subset \mathcal{D}_1$. Εύκολα δείχνουμε ότι η $\mathcal{D}_1$ είναι κλάση Dynkin, άρα $\delta(C_1) \subset \mathcal{D}_1$. Όμως η C_1 είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, οπότε το θεώρημα π-λ δίνει ότι $\delta(C_1) = \sigma(C_1) = \mathcal{G}_1$. Άρα

$$\text{τα } \mathcal{G}_1, C_2, C_3, \dots, C_n \text{ είναι ανεξάρτητα.}$$

Με ανάλογο επιχείρημα δείχνουμε ότι

$$\text{τα } \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, C_3, \dots, C_n \text{ είναι ανεξάρτητα,}$$

και τελικά το θεώρημα. (Η τυπική απόδειξη γίνεται με επαγωγή.) ∎

Απόδειξη του Θεωρήματος 10.11: Έστω $\mathcal{G}_j := \sigma(\cup_{i\in I_j}\sigma(X_i))$. Από την υπόθεση ανεξαρτησίας των $(X_i)_{i\in I}$ και το προηγούμενο θεώρημα, οι σ-άλγεβρες $(\mathcal{G}_j)_{i\in J}$ είναι ανεξάρτητες. Αρκεί επομένως να δείξουμε ότι για κάθε $j \in J$, η Y_j είναι $\mathcal{G}_j$-μετρήσιμη. Έστω $W_j := (X_i)_{i\in I_j} : \Omega \to \mathbb{R}^{I_j}$, οπότε $Y_j = f_j \circ W_j$, και για $A \subset \mathbb{R}$ σύνολο Borel, έχουμε $Y_j^{-1}(A) = W_j^{-1}(f_j^{-1}(A))$. Δεδομένου ότι η f_j είναι μετρήσιμη, μένει να δείξουμε τον εξής ισχυρισμό.

Ισχυρισμος: Η W_j είναι $\mathcal{G}_j$ μετρήσιμη.

Πράγματι, η οικογένεια $\mathcal{B}_j := \{B \subset \mathbb{R}^{I_j} : W_j^{-1}(B) \in \mathcal{G}_j\}$ είναι σ-άλγεβρα [Άσκηση 1.7(α)] και περιέχει τους μετρήσιμους κυλίνδρους γιατί αν πάρουμε έναν τέτοιο $B = \prod_{i\in I_j} B_i$, θα έχουμε

$$W_j^{-1}(B) = \cap_{i\in I_j} X_i^{-1}(B_i).$$

Σε αυτή την τομή, μόνο πεπερασμένα σύνολα είναι διαφορετικά από το Ω αφού το $\{i \in I_j : B_i \neq \mathbb{R}\}$ είναι πεπερασμένο. Άρα, ως αριθμήσιμη (πεπερασμένη μάλιστα) τομή στοιχείων της σ-άλγεβρας $\mathcal{G}_j$ είναι στοιχείο της $\mathcal{G}_j$. Και επειδή η σ-άλγεβρα γινόμενο παράγεται από τους μετρήσιμους κυλίνδρους, έπεται ότι $\otimes_{i\in I_j}\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}_j$. Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε. ∎

Κεφάλαιο 11

Απόδειξη του Θεωρήματος 11.10: Θα δείξουμε ότι το C είναι ανεξάρτητο από τον εαυτό του. Γιατί αυτό δίνει $\mathbf{P}(C \cap C) = \mathbf{P}(C)\,\mathbf{P}(C)$, δηλαδή $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}^2(C)$, που γράφεται $\mathbf{P}(C)\{1 - \mathbf{P}(C)\} = 0$, από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

Ισχυρισμος 1: Για κάθε $n \geq 1$, οι σ-άλγεβρες $\mathscr{D}_n = \sigma(\{X_k : k \leq n\})$, $\mathscr{C}_n$ είναι ανεξάρτητες.

Αυτό έπεται από το ότι οι $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι ανεξάρτητες, τους Ορισμούς 10.3, 5.17, και το Θεώρημα 10.10 για τη διαμέριση $\{\{1, 2, \dots, n\}, \{n+1, n+2, \dots\}\}$ του $\mathbb{N}^+$.

Θέτουμε τώρα $\mathscr{D} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{D}_n$.

Ισχυρισμος 2: Το C είναι ανεξάρτητο από κάθε στοιχείο της $\sigma(\mathscr{D})$.

Επειδή το C είναι στοιχείο της $\mathscr{C}_n$ για κάθε $n \geq 1$, έπεται ότι το C είναι ανεξάρτητο από κάθε $\mathscr{D}_n$ και άρα από κάθε στοιχείο της ένωσής τους, που είναι το $\mathscr{D}$. Το σύνολο $\mathcal{E}$ των στοιχείων της $\sigma(\mathscr{D})$ που είναι ανεξάρτητα από το C είναι μια κλάση Dynkin (Άσκηση 3.1) που περιέχει την $\mathscr{D}$ και η $\mathscr{D}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές. Άρα, από το θεώρημα π-λ, $\sigma(\mathscr{D}) = \delta(\mathscr{D})$. Όμως $\delta(\mathscr{D}) \subset \mathcal{E} \subset \sigma(\mathscr{D})$, οπότε $\mathcal{E} = \sigma(\mathscr{D})$.

Τώρα $\mathscr{C}_\infty \subset \sigma(\mathscr{D})$ γιατί εύκολα βλέπουμε ότι $\sigma(\mathscr{D}) = \sigma(\{X_n : n \geq 1\})$. Άρα από τον Ισχυρισμό 2 έχουμε ότι το C είναι ανεξάρτητο από τον εαυτό του. ■

Κεφάλαιο 14

Απόδειξη του Θεωρήματος 14.8: Έστω F και F_n η συνάρτηση κατανομής των μέτρων μ, μ_n αντίστοιχα. «⇒» Αν τα a, b είναι σημεία συνέχειας της F, τότε για την $f := \mathbf{1}_{(a,b]}$ ισχύει η (14.3). Πράγματι

$$\int \mathbf{1}_{(a,b]}(x)\, d\mu_n(x) = \mu_n((a,b]) = F_n(b) - F_n(a) \to F(b) - F(a) = \int \mathbf{1}_{(a,b]}(x)\, d\mu(x) \qquad (\text{B}'.1)$$

για $n \to \infty$.

Έστω τώρα f συνεχής και φραγμένη. Θέτουμε $\|f\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Παίρνουμε $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $K > 0$ ώστε τα $-K, K$ να είναι σημεία συνέχειας της F και $F(-K) \leq \varepsilon, 1 - F(K) \leq \varepsilon$. Σταθεροποιούμε $\varepsilon_1 > 0$. Επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[-K, K]$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$x, y \in [-K, K], |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon_1. \qquad (\text{B}'.2)$$

Βρίσκουμε στο $[-K, K]$ σημεία $-K = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{N-1} < a_N = K$ ώστε $0 < a_i - a_{i-1} < \delta$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, N$ και η F να είναι συνεχής σε καθένα από τα $a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$. Έστω $I_i := (a_{i-1}, a_i]$ για $i = 1, 2, \dots, N$ και

$$s(x) := \sum_{i=1}^N f(a_{i-1}) \mathbf{1}_{(a_{i-1}, a_i]}(x).$$

Τότε

- $\lim_{n\to\infty} \int s(x)\, d\mu_n(x) = \int s(x)\, d\mu(x)$ λόγω της (B′.1) και του ότι τα $a_0, a_1, \dots, a_N$ είναι σημεία συνέχειας της F.

- $|f(x) - s(x)| < \varepsilon_1$ για κάθε $x \in (-K, K]$. Άρα

$$\left| \int f(x)\, d\mu_n(x) - \int s(x) d\mu_n(x) \right| \leq \int |f(x) - s(x)|\, d\mu_n(x) \qquad (\text{B}'.3)$$

$$\leq \int |f(x) - s(x)| \mathbf{1}_{x\leq -K}\, d\mu_n(x) + \int |f(x) - s(x)| \mathbf{1}_{x>K}\, d\mu_n(x) + \int |f(x) - s(x)| \mathbf{1}_{x\in(-K,K]}\, d\mu_n(x) \qquad (\text{B}'.4)$$

$$\leq \|f\|_\infty \{\mu_n((-\infty, -K]) + \mu_n((K, \infty))\} + \varepsilon_1 \mu_n((-K, K]) \qquad (\text{B}'.5)$$

$$\leq \|f\|_\infty \{F_n(-K) + 1 - F_n(K)\} + \varepsilon_1 \qquad (\text{B}'.6)$$

Άρα $\overline{\lim}_{n\to\infty} \left| \int f(x)\, d\mu_n(x) - \int s(x) d\mu_n(x) \right| \leq 2\varepsilon \|f\|_\infty + \varepsilon_1$.

- Όμοια, $\left| \int f(x)\, d\mu(x) - \int s(x) d\mu(x) \right| \leq 2\varepsilon \|f\|_\infty + 2\varepsilon_1$.

Άρα, από την τριγωνική ανισότητα,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int f(x)\,d\mu_n(x) - \int f(x)\,d\mu(x)\right| \le 4\varepsilon\|f\|_\infty + \varepsilon_1.$$

Το αριστερό μέλος δεν εξαρτάται από τα $\varepsilon, \varepsilon_1$. Θεωρούμε λοιπόν $\varepsilon, \varepsilon_1 \to 0^+$ και το ζητούμενο έπεται.
«$\Leftarrow$» Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ σημείο συνέχειας της F. Για $\varepsilon > 0$, θεωρούμε τη συνεχή και φραγμένη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \le x_0, \\ -(x - x_0 - \varepsilon)/\varepsilon & \text{αν } x \in (x_0, x_0 + \varepsilon], \\ 0 & \text{αν } x \ge x_0 + \varepsilon. \end{cases} \tag{B$'$.7}$$

η οποία ικανοποιεί $\mathbf{1}_{(-\infty,x_0]}(x) \le f(x) \le \mathbf{1}_{(-\infty,x_0+\varepsilon]}(x)$. Παίρνοντας ολοκλήρωμα ως προς μ_n στην πρώτη ανισότητα, ως προς μ στη δεύτερη ανισότητα, και χρησιμοποιώντας την υπόθεση παίρνουμε

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} F_n(x_0) \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \int f(x)\,d\mu_n(x) = \int f(x)\,d\mu(x) \le F(x_0 + \varepsilon).$$

Όμως το ε είναι αυθαίρετο. Και επειδή η F είναι δεξιά συνεχής στο x_0, για $\varepsilon \to 0^+$ παίρνουμε

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} F_n(x_0) \le F(x_0). \tag{B$'$.8}$$

Για το κάτω φράγμα, παίρνουμε $\varepsilon > 0$ και θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \le x_0 - \varepsilon, \\ -(x - x_0)/\varepsilon & \text{αν } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0], \\ 0 & \text{αν } x \ge x_0, \end{cases} \tag{B$'$.9}$$

η οποία ικανοποιεί $\mathbf{1}_{(-\infty,x_0-\varepsilon]}(x) \le g(x) \le \mathbf{1}_{(-\infty,x_0]}(x)$. Όπως πριν παίρνουμε

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} F_n(x_0) \ge \underline{\lim_{n\to\infty}} \int g(x)\,d\mu_n(x) = \int g(x)\,d\mu(x) \ge F(x_0 - \varepsilon).$$

Επειδή η F είναι αριστερά συνεχής στο x_0 (εδώ μόνο χρησιμοποιούμε ότι το x_0 είναι σημείο συνέχειας της F), για $\varepsilon \to 0^+$ παίρνουμε

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} F_n(x_0) \ge F(x_0). \tag{B$'$.10}$$

Η τελευταία σχέση μαζί με την (B$'$.8) δίνουν το ζητούμενο. ∎

Απόδειξη του Θεωρήματος 14.11 (i) $\Rightarrow$ (ii): Ισχυρισμος: Αν το A είναι κλειστό, τότε

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mu_n(A) \le \mu(A).$$

Σταθεροποιούμε $r > 0$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $f_r(x) := 1/(1 + d(x, A))^r$, όπου $d(x, A) := \inf\{|x - y| : y \in A\}$ είναι η απόσταση του x από το A. Η f_r είναι συνεχής, φραγμένη, και ικανοποιεί $\mathbf{1}_A \le f_r$. Άρα

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mu_n(A) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \int \mathbf{1}_A(x)\,d\mu_n(x) \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \int f_r(x)\,d\mu_n(x) = \int f_r(x)\,d\mu(x). \tag{B$'$.11}$$

Τώρα, $\lim_{r\to\infty} f_r(x) = \mathbf{1}_A(x)$ για κάθε x επειδή κάθε $x \in \mathbb{R}\setminus A$ έχει $d(x, A) > 0$ (το A είναι κλειστό). Οπότε, παίρνοντας $r \to \infty$ στην (B$'$.11) κατά μήκος μιας ακολουθίας (π.χ. $r = k$ φυσικός) το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης δίνει ότι $\lim_{k\to\infty} \int f_k(x)\,d\mu(x) = \int \mathbf{1}_A(x)\,d\mu(x) = \mu(A)$. Και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Αν το A είναι ανοιχτό, τότε εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό για το κλειστό $\mathbb{R}\setminus A$ παίρνουμε

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \mu_n(A) \ge \mu(A).$$

Τώρα για ένα A όπως στην εκφώνηση έχουμε $\mu(\bar{A}) = \mu(A^\circ) + \mu(\partial A) = \mu(A^\circ)$. Και από τα πιο πάνω

$$\mu(A^\circ) \le \varliminf_{n\to\infty} \mu_n(A^\circ) \le \varliminf_{n\to\infty} \mu_n(A) \le \varlimsup_{n\to\infty} \mu_n(A) \le \varlimsup_{n\to\infty} \mu_n(\bar{A}) \le \mu(\bar{A}).$$

Το ζητούμενο έπεται. ■

Κεφάλαιο 15

Απόδειξη του Λήμματος 15.1: Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier του μέτρου μ έχουμε

$$\int_{-u}^{u} (1 - \hat{\mu}(t))\,\mathrm{d}t = \int_{-u}^{u}\int (1 - e^{itx})\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}t = \int\int_{-u}^{u} (1 - \cos(tx) + i\sin(tx))\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το Θεώρημα 9.4 (Fubini). Εφόσον η συνάρτηση $1 - \cos(tx)$ είναι άρτια και η συνάρτηση $\sin(tx)$ είναι περιττή, το τελευταίο ολοκλήρωμα ισούται με

$$2\int\int_0^u (1 - \cos(tx))\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu(x) = 2\int \left(u - \frac{\sin(ux)}{x}\right)\mathrm{d}\mu(x) = 2u\int\left(1 - \frac{\sin(ux)}{ux}\right)\mathrm{d}\mu(x).$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η συνάρτηση στο τελευταίο ολοκλήρωμα είναι μη αρνητική ($1 - \frac{\sin(ux)}{ux} \ge 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα, αν ολοκληρώσουμε σε μικρότερο χωρίο, το ολοκλήρωμα μικραίνει.) και για $|ux| > 2$ έχουμε

$$\left|\frac{\sin(ux)}{ux}\right| \le \frac{1}{ux} \le \frac{1}{2}.$$

Συνεπώς,

$$\int_{-u}^{u} \{1 - \hat{\mu}(t)\}\,\mathrm{d}t \ge 2u\int_{\{x:|x|>2/u\}} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\mu(x) = u\mu\left(\left\{x : |x| > \frac{2}{u}\right\}\right), \tag{B′.12}$$

που είναι το ζητούμενο. ■

Υποδείξεις για επιλεγμένες ασκήσεις

Κεφάλαιο 1

1.5 Αν παραγόταν, τότε η διαμέριση θα ήταν αναγκαστικά η $C := \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$. Έπειτα, χρησιμοποιούμε την Άσκηση 1.3.

1.6 $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots$

1.7 (α) $\emptyset \in \mathcal{B}$ γιατί $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ και $\emptyset \in \mathcal{F}$. Έπειτα, αν $A \in \mathcal{B}$ τότε $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$ και εφόσον $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ και η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα, έχουμε ότι $X \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. Άρα $Y \setminus A \in \mathcal{B}$. Τέλος, αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στη $\mathcal{B}$, τότε

$$f^{-1}\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \cup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \in \mathcal{A}.$$

1.9 (α) $\subset$. (β) $\supset$. (γ) Δεν συγκρίνονται. (δ) $\supset$. (ε) $\subset$.

Κεφάλαιο 2

2.2 Έχουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \le 1$. Αφού η σειρά συγκλίνει, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = 0$.

2.3 (α) Ισχύει ότι $\mathbf{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = 0$.
(β) Ισχύει ότι $\mathbf{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1 - \mathbf{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c) = 1$ αφού $\mathbf{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c) = 0$ λόγω του (α).

2.4 Λόγω της προηγούμενης άσκησης, πρέπει τα I, I' να είναι υπεραριθμήσιμα. Έστω $\Omega = (0,1), \mathcal{F} = \mathcal{B}((0,1)), \mathbf{P} = \lambda_1$ το μέτρο Lebesgue, $I = I' = (0,1)$, $A_x := \{x\}, B_x := (0,1)\setminus\{x\}$ για κάθε $x \in (0,1)$. Τότε

(α) $\mathbf{P}(A_x) = \mathbf{P}(\{x\}) = 0$ για κάθε $x \in (0,1)$, όμως $\mathbf{P}(\cup_{x\in(0,1)} A_x) = \mathbf{P}((0,1)) = 1$.

(β) $\mathbf{P}(B_x) = 1$ για κάθε $x \in (0,1)$, όμως $\cap_{x\in(0,1)} B_x = \emptyset$.

2.5 Για $n \in \mathbb{N}^+$, θέτουμε $B_n = \{\beta \in B : \mathbf{P}(A_\beta) \ge \frac{1}{n}\}$. Τότε $|B_n| \le n$, γιατί $\mathbf{P}(\cup_{\beta\in B_n} A_\beta) \le 1$ και $\mathbf{P}(\cup_{\beta\in B_n} A_\beta) = \sum_{\beta\in B_n} \mathbf{P}(A_\beta) \ge \frac{1}{n}|B_n|$. Αφού $B = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$, με $|B_n|$ πεπερασμένο για κάθε $n \ge 1$, έχουμε το ζητούμενο.

2.6 Για την πρώτη ανισότητα έχουμε

$$\mathbf{P}(\liminf_{n\ge1} A_n) = \mathbf{P}(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\cap_{k=n}^{\infty} A_k) \le \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει γιατί η ακολουθία $B_n := \cap_{k=n}^{\infty} A_k$ είναι αύξουσα, ενώ η ανισότητα ισχύει γιατί $B_n \subset A_n$. Η ανισότητα

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) \le \mathbf{P}(\limsup A_n)$$

αποδεικνύεται όμοια.

2.7 Το στήριγμα του μέτρου είναι το $[2,5] \cup \mathbb{N}$.

2.8 Το F ως υπόχωρος διαχωρίσιμου μετρικού χώρου είναι διαχωρίσιμος (Αυτό αποδεικνύεται ως εξής: Έστω A ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Για κάθε κάθε $x \in A$ και θετικό ακέραιο n επιλέγουμε $y \in F$ με $|y - x| < 1/n$ αν τέτοιο y υπάρχει. Το σύνολο όλων αυτών των y που συλλέγουμε έτσι είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του F). Έστω $D := \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολό του F. Θέτουμε $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \delta_{x_k}$. δ_x είναι το μέτρο Dirac στο σημείο x. Το μ έχει στήριγμα F.

Κεφάλαιο 3

3.1 Χρήσιμη είναι η Πρόταση 2.12

3.2 Η $\mathcal{A}$ δεν περιέχει το $\{2\}$ που είναι τομή των $\{1,2\}, \{2,3\}$.

3.3 Από το Θεώρημα 3.6 έχουμε ότι $\sigma(C_1) = \delta(C_1)$.

Κεφάλαιο 4

4.1 Έστω $A(F) := \{x \in \mathbb{R} : \text{Η } F \text{ είναι ασυνεχής στο } x\}$. Επειδή η F είναι αύξουσα, σε κάθε σημείο ασυνέχειας, η F έχει άλμα προς τα πάνω, δηλαδή, $F(x-) < F(x+)$ (βέβαια, $F(x+) = F(x)$, αλλά δεν το χρειαζόμαστε). Για $x \in A(F)$ επιλέγουμε έναν ρητό $q_x \in (F(x-), F(x+))$. Επειδή η F είναι αύξουσα, η απεικόνιση $x \mapsto q_x$ είναι 1-1 από το $A(F)$ στο $\mathbb{Q}$.

Εναλλακτικά, εφαρμόζουμε την Άσκηση 2.5 για $B = A(F)$ και $A_\beta = \{\beta\}$ για κάθε $\beta \in B$. Ισχύει $\mathbf{P}(A_\beta) = \mathbf{F}(\beta) - \mathbf{F}(\beta-) > 0$ αφού η $\mathbf{F}$ έχει άλμα στο β.

4.2 (α) Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbf{P}((0,4)) &= \lambda\,\mathbf{P}_1((0,4)) + (1-\lambda)\,\mathbf{P}_2((0,4)) = \lambda\int_0^4 e^{-x}\,\mathrm{d}x + (1-\lambda)\frac{1}{2}\\ &= \lambda(1-e^{-4}) + (1-\lambda)\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(β) Γνωρίζουμε ότι $F(x) = \mathbf{P}((-\infty, x]) = \lambda\,\mathbf{P}_1((-\infty, x]) + (1-\lambda)\,\mathbf{P}_2((-\infty, x])$. Εύκολα μπορεί κανείς να ελέγξει ότι

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < -2,\\ (1-\lambda)\frac{1}{2} & \text{αν } -2 \le x \le 0,\\ \lambda(1-e^{-x}) + (1-\lambda)\frac{1}{2} & \text{αν } 0 < x < 3,\\ 1-\lambda e^{-x} & \text{αν } x \ge 3.\end{cases}$$

4.3 Για το (α), έχουμε

$$\mathbf{P}(\{x\}) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^+}\left(x-\frac{1}{n}, x\right]\right) = \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\left(x-\frac{1}{n}, x\right]\right) \overset{(4.1)}{=} \lim_{n\to\infty}\left(F(y) - F\left(x-\frac{1}{n}\right)\right) = F(y) - F(x-).$$

Το όριο $F(x-)$ υπάρχει γιατί η F είναι αύξουσα. Για το (β),

$$\mathbf{P}([x,y]) = \mathbf{P}(\{x\}) + \mathbf{P}((x,y]) \overset{(\alpha),(4.1)}{=} F(x) - F(x-) + F(y) - F(x) = F(y) - F(x-).$$

Τα (γ) και (δ) προκύπτουν με τον ίδιο τρόπο.

Κεφάλαιο 5

5.1 Το σύνολο $\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R} : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ είναι σ-άλγεβρα [Άσκηση 1.7(i)]. Έστω $\mathcal{T}$ η οικογένεια των ανοιχτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Προφανώς το (α) συνεπάγεται τα (β), (γ). Αν υποθέσουμε το (β), δηλαδή $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$, τότε $\sigma(\mathcal{T}) \subset \mathcal{A}$, που είναι το (α). Έπειτα θέτουμε $\mathcal{A}_4 := \{[a,b] : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$. Αν ισχύει το (γ), δηλαδή $\mathcal{A}_4 \subset \mathcal{A}$, τότε $\sigma(\mathcal{A}_4) \subset \mathcal{A}$. Μένει να δείξουμε ότι $\sigma(\mathcal{A}_4) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$, το οποίο κάνουμε όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.14.

5.2 Τα σύνολα $\{-\infty\}, \{\infty\}$ είναι κλειστά.

5.3 Έστω f μετρήσιμη και $i_0 \in I$. Ας υποθέσουμε ότι η f παίρνει δύο διαφορετικές τιμές $a < b$ στο A_{i_0}. Θα έπρεπε λοιπόν το σύνολο $A_{i_0} \cap \{f < b\}$ να ανήκει στην $\mathcal{F}$. Όμως, αυτό το σύνολο είναι μη κενό και γνήσιο υποσύνολο του A_{i_0}. Τέτοιο σύνολο δεν υπάρχει στην $\mathcal{F}$ (δες στο Παράδειγμα 1.10 για την περιγραφή της $\mathcal{F}$). Επίσης, είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι μια συνάρτηση που είναι σταθερή σε κάθε σύνολο της διαμέρισης είναι μετρήσιμη. Άρα, αυτές είναι ακριβώς όλες οι μετρήσιμες συναρτήσεις στον $(\Omega, \mathcal{F})$.

5.4 (α) $\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = \infty\} = \cap_{k=1}^\infty \cup_{j=1}^\infty \cap_{r=j}^\infty \{X_r > k\}$.
(β) Το $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν η ακολουθία $(X_n(\omega))_{n\ge1}$ είναι βασική. Δηλαδή για κάθε $k \ge 1$ υπάρχει $j \ge 1$ ώστε $|X_r(\omega) - X_s(\omega)| < 1/k$ για κάθε $r, s \ge j$. Άρα, το δοσμένο σύνολο γράφεται ως ...
Για μια άλλη λύση, παρατηρούμε ότι το δοσμένο σύνολο γράφεται ως $\{\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n(\omega) = \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n(\omega)\} \cap \{\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n(\omega) \in \mathbb{R}\}$. Οι $\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n(\omega), \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n(\omega)$ είναι μετρήσιμες.

5.5 Χρησιμοποιούμε το Πόρισμα 5.4. Η αντίστροφη εικόνα κάθε διαστήματος είναι διάστημα (και άρα Borel-μετρήσιμο) αφού η f είναι μονότονη.

5.6 Θεωρούμε τη συνάρτηση $h = f - g$. Τότε η h είναι μετρήσιμη και ισχύει ότι $\{f = g\} = h^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{A}$, εφόσον $\{0\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.
Εναλλακτικά,

$$\begin{aligned}\Omega \setminus \{f = g\} &= \{f \neq g\} = \{f > g\} \cup \{g > f\} \\ &= \left(\cup_{q\in\mathbb{Q}} (\{f > q\} \cap \{g < q\})\right) \cup \left(\cup_{q\in\mathbb{Q}} (\{g > q\} \cap \{f < q\})\right),\end{aligned}$$

από το οποίο έπεται το ζητούμενο.

5.11 Επειδή το $\{X > 1\}$ έχει θετική πιθανότητα και ισούται με την αριθμήσιμη ένωση

$$\{X > 1\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{X > 1 + \frac{1}{n}\right\},$$

κάποιο από τα σύνολα της ένωσης πρέπει να έχει θετική πιθανότητα.

Κεφάλαιο 6

6.1 Στην ισότητα $1 - \mathbf{1}_{\cup_{i=1}^n A_i} = (1 - \mathbf{1}_{A_1})(1 - \mathbf{1}_{A_2}) \cdots (1 - \mathbf{1}_{A_n})$, αναπτύσσουμε το δεξί μέλος και παίρνουμε μέση τιμή.

6.2 Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $X = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}$.

6.4 Χρησιμοποιούμε την προηγούμενη άσκηση.

6.5 $\mathbf{P}(X > t) = \mathbf{P}(aX > at) = \mathbf{P}(e^{aX} > e^{at}) \leq \mathbf{E}(e^{aX})/e^{at}$. Παίρνουμε $C = \mathbf{E}(e^{aX}) \in (0, \infty)$.

6.6 (α) Δουλεύουμε όπως στην αποδειξη της ανισότητας Chebyshev.

$$\begin{aligned}P(X \leq a\,\mathbf{E}\,X) &= \mathbf{P}(X - \mathbf{E}\,X \leq -(1-a)\,\mathbf{E}\,X) \\ &\leq \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}\,X| \geq (1-a)\,\mathbf{E}\,X) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{(1-a)^2(\mathbf{E}\,X)^2}.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι $(1 - a)EX > 0$.

(β) Έστω $A := \{\omega : X(\omega) > a\,\mathbf{E}\,X\}$.

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\,X = \mathbf{E}(X1_{A^c}) + \mathbf{E}(X1_A) \leq a\,\mathbf{E}\,X + \mathbf{E}(X^2)^{1/2}\,\mathbf{P}(A)^{1/2} \Rightarrow \\ &(1-a)\,\mathbf{E}\,X \leq \mathbf{E}(X^2)^{1/2}\,\mathbf{P}(A)^{1/2} \Rightarrow \mathbf{P}(A) \geq (1-a)^2(\mathbf{E}\,X)^2 / \mathbf{E}(X^2)\end{aligned}$$

Στην πρώτη γραμμή χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz και το ότι $X \leq a\,\mathbf{E}\,X$ στο A^c.

6.7 Χρησιμοποιούμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

$$1 \leq \mathbf{E}(\sqrt{XY}) \leq (\mathbf{E}(X))^{1/2}(\mathbf{E}(Y))^{1/2}.$$

6.10 Η ακολουθία $A_n := \{|X| > n\}, n \geq 1$ είναι φθίνουσα με τομή το $\emptyset$ αφού η X παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$. Άρα $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0$.

6.13 Έστω $a_t := \int f_t(x) d\mu(x)$. Για οποιοδήποτε $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ ισχύει $\lim_{t\to\infty} a_t = \ell$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(t_n)_{n\geq1}$ με $t_n \to \infty$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} a_{t_n} = \ell$. Έτσι, αναγόμαστε στο γνωστό θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

6.14 Στην απόδειξη της ανισότητας Markov μπορούμε να είμαστε λιγότερο γενναιόδωροι και να παρατηρήσουμε ότι η ποσότητα $n\,\mathbf{P}(|X| \geq n)$ είναι μικρότερη από τη μέση τιμή $\mathbf{E}(|X|\mathbf{1}_{|X|\geq n})$.

6.16 Για το (α), αρκεί να το δείξουμε για κάθε ακολουθία $(\varepsilon_n)_{n\geq1}$ θετικών αριθμών με $\varepsilon_n \to 0$. Χρησιμοποιούμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης με κυριαρχούσα συνάρτηση την 1 αφού

$$\left|\frac{X}{\varepsilon}\,\mathbf{1}_{X<\varepsilon}\right| \leq 1.$$

6.18 $X = \sum_{k=1}^{X} 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{k\le X}$ και θεώρημα Beppo Levi.

6.19 $[X] \le X \le [X] + 1$.

Κεφάλαιο 7

7.4 Εύκολα ελέγχουμε την ισότητα για $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}$, $A_i \in \mathcal{F}$, απλή αφού $\int \mathbf{1}_A \, d\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(A) = \mathbf{E_P}(X\mathbf{1}_A)$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$ και λόγω γραμμικότητας. Αν τώρα η Y είναι μη αρνητική, γνωρίζουμε ότι υπάρχει ακολουθία $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ απλών μη αρνητικών συναρτήσεων έτσι ώστε $Y_n \nearrow Y$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \int Y_n \, d\mathbf{Q} = \int Y \, d\mathbf{Q}$ και $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E_P}(Y_n X) = \mathbf{E_P}(YX)$. Όμως, $\int Y_n \, d\mathbf{Q} = \mathbf{E_P}(Y_n X)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα και πάλι το ζητούμενο ισχύει. Τέλος, αν $\mathbf{E_P}(|Y|X) < \infty$, από τα προηγούμενα έχουμε ότι $\int Y^- \, d\mathbf{Q} = \mathbf{E_P}(Y^- X)$, $\int Y^+ \, d\mathbf{Q} = \mathbf{E_P}(Y^+ X)$ όπου και οι τέσσερις αυτοί αριθμοί είναι πεπερασμένοι εφόσον $\mathbf{E_P}(Y^- X) + \mathbf{E_P}(Y^+ X) = \mathbf{E_P}(|Y|X) < \infty$, $\int Y^- \, d\mathbf{Q} + \int Y^+ \, d\mathbf{Q} = \int |Y| \, d\mathbf{Q} = \mathbf{E_P}(|Y|X)$ (η τελευταία ισότητα ισχύει αφού η $|Y|$ είναι θετική). Συνεπώς,

$$\int Y \, d\mathbf{Q} = \int Y^+ \, d\mathbf{Q} - \int Y^- \, d\mathbf{Q} = \mathbf{E_P}(Y^+ X) - \mathbf{E_P}(Y^- X) = \mathbf{E_P}(YX).$$

7.5 Για την πρώτη ανισότητα, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $x \mapsto \mathbf{P}(X > x)$ έχει παράγωγο $-e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ και μελετούμε τη συνάρτηση της διαφοράς των δύο μελών.

Κεφάλαιο 8

8.1 Για τα ω στο σύνολο $\limsup_n A_n^\varepsilon$ έχουμε $|X_n| \ge \varepsilon$ για άπειρα n και άρα $\limsup_n A_n^\varepsilon \subset \Omega \backslash \{\lim_{n\to\infty} X_n = 0\}$. Για το ότι το (β) δίνει το (α), παρατηρούμε ότι $\Omega \backslash \{\lim_{n\to\infty} X_n = 0\} = \cup_{k=1}^{\infty} \limsup_n A_n^{1/k}$ και χρησιμοποιούμε την Άσκηση 2.3 (α).

8.2 (α) Για την τριγωνική ανισότητα. Επειδή $|X - Z| \le |X - Y| + |Y - Z|$ και η $f(x) = x/(1 + x) = 1 - (1 + x)^{-1}$ είναι αύξουσα [στο $[0, \infty)$], αρκεί να δείξει κανείς ότι για $x, y \ge 0$ ισχύει $f(x + y) \le f(x) + f(y)$. Αυτό προκύπτει με πράξεις ή παρατηρώντας ότι η $x \mapsto f(x + y) - f(x) - f(y)$ είναι φθίνουσα στο $[0, \infty)$.

8.5 Για κάθε $\varepsilon > 0$ και $n \ge 1$ ισχύει $\mathbf{P}(|X - Y| > \varepsilon) \le \mathbf{P}(|X - X_n| > \varepsilon/2) + \mathbf{P}(|X_n - Y| > \varepsilon/2)$.

Κεφάλαιο 9

9.1

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x - r_n|}}\,dx \le 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \infty$$

Από γνωστή πρόταση [Πρόταση 6.12(iii)] έπεται ότι το σύνολο των $x \in (0, 1)$ με $f(x) = \infty$ έχει μέτρο Lebesgue 0.

9.2 (α) Ένας τρόπος. Γράφουμε

$$g(X) = g(0) + \int_0^X g'(t)\,dt = g(0) + \int_0^\infty g'(t)\mathbf{1}_{t<X}\,dt.$$

Παίρνουμε μέση τιμή και εφαρμόζουμε το Θεώρημα Fubini.

9.4 (β) Σχόλιο: Η υπόθεση ότι η συνάρτηση κατανομής της X είναι συνεχής μπορεί να παραληφθεί αλλά τότε η απόδειξη είναι λίγο πιο απαιτητική.

Κεφάλαιο 10

10.1 Θέλουμε $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$ για κάθε $A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2$. Θεωρούμε τα δύο σενάρια $\mathbf{P}(A) = 0$ ή $\mathbf{P}(A) = 1$.

10.2. (α)⇒(β) Έστω $A, B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Τότε,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(f(X) \in A, g(Y) \in B) &= \mathbf{P}(X \in f^{-1}(A), Y \in g^{-1}(B)) = \mathbf{P}(X \in f^{-1}(A))\,\mathbf{P}(Y \in g^{-1}(B)) \\ &= \mathbf{P}(f(X) \in A)\,\mathbf{P}(g(Y) \in B).\end{aligned}$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την ανεξαρτησία των X, Y. Το ζητούμενο δείχθηκε.

(β)⇒(α) Έστω $\Gamma \in \mathcal{E}, \Delta \in \mathcal{G}$. Το (β) για τις $f = \mathbf{1}_C$ και $g = \mathbf{1}_D$ δίνει

$$\mathbf{P}(\{f(X) \in \{1\}\} \cap \{g(X) \in \{1\}\}) = \mathbf{P}(\{f(X) \in \{1\}\})\,\mathbf{P}(\{g(X) \in \{1\}\})$$

δηλαδή

$$\mathbf{P}(X \in \Gamma, Y \in D) = \mathbf{P}(X \in \Gamma)\,\mathbf{P}(Y \in D),$$

που είναι το ζητούμενο.

10.3. Έστω ότι δεν υπάρχει τέτοιο c. Τότε υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{P}(X < a) = p \in (0,1)$ και επομένως $\mathbf{P}(X \geq a) = 1 - p \in (0,1)$. Η ανεξαρτησία δίνει

$$\mathbf{P}(X < a, Y \geq a) = \mathbf{P}(X < a)\,\mathbf{P}(Y \geq a) > 0,$$

ενώ το αριστερό μέλος είναι μικρότερο απο $\mathbf{P}(X \neq Y) = 0$ από υπόθεση. Άτοπο.

10.6

$$\mathbf{E}\,|X+Y| = \int_{\mathbb{R}^2} |x+y|\,d\,\mathbf{P}^{(X,Y)}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} |x+y|\,d(\mathbf{P}^X \otimes \mathbf{P}^Y)(x,y) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |x+y|\,d\,\mathbf{P}^X(x) d\,\mathbf{P}^Y(y).$$

Έπειτα χρησιμοποιούμε την Πρόταση 6.14(*iii*).

10.9 (γ) Έχουμε ότι $\mathbf{E}(S_n) = n\,\mathbf{E}(X_1) = 0$ και λόγω του (α) ότι $\mathbf{E}(S_n^2) = n$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \epsilon\right) &= \mathbf{P}(|S_n| > n\epsilon) = \mathbf{P}(S_n^2 > n^2\epsilon^2)\\ &\leq \frac{\mathbf{E}(S_n^2)}{n^2\epsilon^2} = \frac{n}{n^2\epsilon^2} = \frac{1}{n\epsilon^2} \to 0\end{aligned}$$

για $n \to \infty$.

10.10. Για $\varepsilon > 0$, χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία των $X_1, X_2, \ldots$, βρίσκουμε

$$\mathbf{P}(|m_n| > \varepsilon) = \mathbf{P}(m_n > \varepsilon) = \mathbf{P}(X_1 > \varepsilon, \ldots, X_n > \varepsilon) = (1-\varepsilon)^n \to 0,$$

και όμοια

$$\mathbf{P}(|M_n - 1| > \varepsilon) = \mathbf{P}(M_n < 1-\varepsilon) = \mathbf{P}(X_1 < 1-\varepsilon, \ldots, X_n < 1-\varepsilon) = (1-\varepsilon)^n \to 0.$$

Κεφάλαιο 11

11.3. Αποδεικνύουμε το ζητούμενο για τη M_n. Το όριο είναι το πολύ 1 αφού κάθε μια X_i είναι το πολύ 1. Για το κάτω φράγμα, εφαρμόζουμε το πρώτο λήμμα Borel-Cantelli. Για $\varepsilon > 0$, θέτουμε $A_n^\varepsilon := \{M_n \leq 1-\varepsilon\}$. Επειδή $\mathbf{P}(A_n^\varepsilon) \leq (1-\varepsilon)^n$ και $\sum_{n\geq 1}\mathbf{P}(A_n^\varepsilon) < \infty$, με πιθανότητα 1 για όλα τα μεγάλα n ισχύει $M_n \geq 1-\varepsilon$. Άρα το σύνολο $B_\varepsilon := \{\underline{\lim}_{n\to\infty} M_n \geq 1-\varepsilon\}$ έχει πιθανότητα 1 και επομένως το ίδιο ισχύει και για το $\cap_{k=1}^\infty B_{1/k} = \{\underline{\lim}_{n\to\infty} M_n \geq 1\}$.

Εναλλακτικά, μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι $\mathbf{P}(A_n^{1/\sqrt{n}}) = (1-n^{-1/2})^n \leq e^{-\sqrt{n}}$ (με χρήση της $1-x \leq e^{-x}$) και $\sum_{n\geq 1} e^{-\sqrt{n}} < \infty$. Το συμπέρασμα έπεται από το πρώτο λήμμα Borel-Cantelli.

11.6 Αρκεί για κάθε $n \geq 1$ να βρούμε σταθερά M_n ώστε $\mathbf{P}(|X_n| > M_n) \leq n^{-2}$. Τότε η $a_n = nM_n$ ικανοποιεί το ζητούμενο (πρώτο λήμμα Borel-Cantelli).

11.7 Η κατεύθυνση ⇐ είναι πιο εύκολη. Αν υπάρχει τέτοιο M τότε (από το πρώτο λήμμα Borel-Cantelli) με πιθανότητα 1, ισχύει $X_n \leq M$ για όλα τα μεγάλα n και έπεται το συμπέρασμα.

[Να το γράψουμε και τυπικά. Το σύνολο $A := \limsup_{n\geq 1}\{X_n > M\}$ έχει πιθανότητα 0 και για κάθε $\omega \in \Omega\backslash A$ υπάρχει φυσικός $n_0(\omega)$ ώστε $X_n \leq M$ για κάθε $n \geq n_0(\omega)$. Άρα

$$X^*(\omega) \leq \max\{X_1, X_2, \ldots, X_{n_0(\omega)-1}, M\} < \infty,$$

ως μέγιστο πεπερασμένου αριθμού πραγματικών αριθμών.]

Για την άλλη κατεύθυνση, έστω ότι δεν υπάρχει τέτοιο M, τότε για κάθε $K \in \mathbb{N}$, το δεύτερο λήμμα Borel-Cantelli δίνει ότι $\mathbf{P}(\limsup_n\{X_n > K\}) = 1$ (εδώ χρησιμοποιούμε την ανεξαρτησία των X_n). Επομένως το $C_K := \{X^* \geq K\}$ έχει πιθανότητα 1 και άρα και το $\cap_{K=1}^{\infty} C_K$ (*αριθμήσιμη* τομή συνόλων με πιθανότητα 1). Όμως $\cap_{K=1}^{\infty} C_K = \{X^* = \infty\}$, το οποίο από υπόθεση έχει πιθανότητα 0, και έχουμε άτοπο.

11.8 Χρήσιμη είναι η Άσκηση 7.5.

11.9. Το όριο είναι το πολύ 1 λόγω του Παραδείγματος 11.6. Για το κάτω φράγμα, εφαρμόζουμε το πρώτο λήμμα Borel-Cantelli. Για $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\log n} \leq 1 - \varepsilon\right) = \mathbf{P}(X_1 \leq (1-\varepsilon)\log n)^n = (1 - n^{-(1-\varepsilon)})^n \leq (e^{-n^{\varepsilon-1}})^n = e^{-n^{\varepsilon}}$$

και συνεχίζουμε όπως στο Παράδειγμα 11.6.

11.10. (α) Έστω $\epsilon > 0$. Θέτουμε $B_\epsilon = \left\{\overline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{L_n}{\log_2 n} \leq 1 + \epsilon\right\}$. Θα δείξουμε ότι $\mathbf{P}(B_\epsilon) = 1$.

Έστω $A_n = \left\{\frac{L_n}{\log_2 n} > 1 + \epsilon\right\}$. Τότε

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_n) &= \mathbf{P}(L_n > (1+\epsilon)\log_2 n) = \mathbf{P}(X_n = X_{n+1} = \ldots = X_{n+[(1+\epsilon)\log_2 n]-1} = K \text{ ή } \Gamma) \\ &= 2\,\mathbf{P}(X_n = X_{n+1} = \ldots = X_{n+[(1+\epsilon)\log_2 n]-1} = K) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{[(1+\epsilon)\log_2 n]} \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^{(1+\epsilon)\log_2 n - 1} = \frac{4}{2^{(1+\epsilon)\log_2 n}} = \frac{4}{n^{1+\epsilon}}.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < \infty$$

και από το πρώτο Λήμμα Borel-Cantelli, $\mathbf{P}(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 0$, δηλαδή $\mathbf{P}(\{\limsup_{n\geq 1} A_n\}^c) = 1$.

Έστω τώρα $\omega \in (\limsup_{n\geq 1} A_n)^c$. Τότε υπάρχει $n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0(\omega)$ να ισχύει

$$\frac{L_n(\omega)}{\log_2 n} \leq 1 + \epsilon,$$

άρα

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{L_n(\omega)}{\log_2 n} \leq 1 + \epsilon.$$

Προκύπτει, λοιπόν, ότι $\omega \in B_\epsilon$. Άρα $(\limsup_{n\geq 1} A_n)^c \subset B_\epsilon$, οπότε $\mathbf{P}(B_\epsilon) = 1$.

Επειδή

$$\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{L_n}{\log_2 n} \leq 1\right\} = \cap_{k=1}^{\infty} B_{\frac{1}{k}}$$

και $\mathbf{P}(B_{1/k}) = 1$ για κάθε $k \geq 1$, από την Άσκηση 2.3 (β) έχουμε

$$\mathbf{P}\left(\cap_{k=1}^{\infty} B_{\frac{1}{k}}\right) = 1.$$

Έτσι, το (α) αποδείχθηκε.

(β) Επειδή κάθε L_n παίρνει τιμή που είναι ένας θετικός ακέραιος ή ∞, το ζητούμενο ισοδυναμεί με $\mathbf{P}(L_n = 1$ άπειρες φορές$) = 1$ (δηλαδή ο μόνος τρόπος να πλησιάσει η L_n το 1 είναι να πέσει πάνω του). Έστω

$$B_n = \{X_{2n} = K, X_{2n+1} = \Gamma\}$$

για κάθε $n \geq 1$. Εύκολα βλέπουμε ότι τα $(B_n)_{n\geq 1}$ είναι ανεξάρτητα και ισχύει ότι $\mathbf{P}(B_n) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(B_n) = \infty.$$

Από το δεύτερο Λήμμα Borel-Cantelli, έχουμε ότι $\mathbf{P}(\limsup_{n\geq 1} B_n) = 1$. Όμως

$$\limsup_{n\geq 1} B_n \subset \{L_n = 1 \text{ άπειρες φορές}\}.$$

Άρα και το τελευταίο ενδεχόμενο έχει πιθανότητα 1.

11.11 Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 8.1 και ότι οι X_n είναι ανεξάρτητες, δείχνουμε πρώτα ότι ο ισχυρισμός για το όριο είναι ισοδύναμος με τη $\sum_{n=1} \mathbf{P}(|X_n| \geq \varepsilon n) < \infty$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Έπειτα χρησιμοποιούμε ότι οι X_n είναι ισόνομες και την Άσκηση 6.19.

11.12 Χρησιμοποιούμε την Άσκηση 6.19 και τα δύο λήμματα Borel-Cantelli.

11.14. Αν το δεξί μέλος είναι ∞, δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε. Αν είναι πεπερασμένο, ας το ονομάσουμε a. Έπεται ότι υπάρχει ένας θετικός ακέραιος n_0 ώστε $\mathbf{E}(X_n) < \infty$ για κάθε $n \geq n_0$. Ως πρώτο βήμα δείχνουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, με πιθανότητα 1, η ανισότητα

$$\frac{1}{n} \log X_n > a + \varepsilon$$

ισχύει μόνο για πεπερασμένα n.

11.17. (β) Από το προηγούμενο ερώτημα, οι $(X_i)_{i\in I}$ είναι ανεξάρτητες. Άρα ο νόμος 0-1 του Kolmogorov εφαρμόζεται για την τελική σ-άλγεβρα τους

$$C_\infty := \cap_{n=1}^{\infty} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots).$$

Βέβαια το αν ένα $\omega \in \Omega$ ανήκει σε ένα από τα $\liminf A_i, \limsup A_i$ δεν εξαρτάται από οποιαδήποτε πεπερασμένο πλήθος $X_1(\omega), \ldots, X_k(\omega)$, οπότε και τα δύο σύνολα ανήκουν στη C_∞. Τυπικά το αποδεικνύουμε ως εξής. Για κάθε $n \geq 1$,

$$\liminf_i A_i = \cup_{j=1}^{\infty} \cap_{k=j}^{\infty} A_k = \cup_{j=n}^{\infty} \cap_{k=j}^{\infty} A_k = \cup_{j=n}^{\infty} \cap_{k=j}^{\infty} X_k^{-1}(\{1\}) \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots).$$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει γιατί έχουμε ένωση μιας αύξουσας ακολουθίας συνόλων. Όμοια

$$\limsup_i A_i = \cap_{j=1}^{\infty} \cup_{k=j}^{\infty} A_k = \cap_{j=n}^{\infty} \cup_{k=j}^{\infty} A_k = \cap_{j=n}^{\infty} \cup_{k=j}^{\infty} X_k^{-1}(\{1\}) \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots).$$

11.18. (α) Από τον απειροστικό λογισμό ξέρουμε ότι $R^{-1} = \overline{\lim}_{n\to\infty} |X_n|^{1/n}$.
(β) Δείχνουμε όπως στην Άσκηση 11.8 ότι $\overline{\lim}_{n\to\infty} |X_n|^{1/n} = 1$ με πιθανότητα 1. Μάλιστα εδώ αρκεί η χρήση του πρώτου λήμματος Borel-Cantelli για να δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} |X_n|^{1/n} = 1$.

11.20. Δουλεύουμε όπως στην προηγούμενη άσκηση.

Κεφάλαιο 12

12.1 Έστω $Y = \frac{S_n}{n}$. Τότε $\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{n}\mathbf{E}(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \frac{1}{n} n\,\mathbf{E}(X_1) = \mu$ και $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(\frac{1}{n} S_n) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \frac{1}{n}\mathrm{Var}(X_1)$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε,

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right) = \mathbf{P}(|Y - \mathbf{E}(Y)| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{\epsilon^2}\frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n} \to 0$$

για $n \to \infty$, από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

12.2 Έστω $M > 0$. Για κάθε $i \geq 1$ θέτουμε $Y_i^M = X_i \wedge M$. Οι Y_i^M είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, και ισχύει ότι $(Y_i^M)^- = X_i^-$, $(Y_i^M)^+ \leq M$. Συνεπώς $\mathbf{E}(|Y_i^M|) \leq \mathbf{E}(X_i^-) + M < \infty$. Θέτουμε $S_n^M = Y_1^M + Y_2^M + ... + Y_n^M$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε, με πιθανότητα 1,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{S_n^M}{n} = \mathbf{E}(Y_1^M),$$

όπου η ισότητα προκύπτει από τον νόμο των μεγάλων αριθμών. Έστω τώρα

$$\Omega_M = \left\{\omega \in \Omega : \varliminf_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} \geq \mathbf{E}(X_1 \wedge M)\right\}.$$

Δείξαμε ότι $\mathbf{P}(\Omega_M) = 1$ για κάθε $M > 0$. Θεωρώντας το σύνολο $A = \cap_{k=1}^{\infty}\Omega_k$, έχουμε ότι $\mathbf{P}(A) = 1$ και για $\omega \in A$, ισχύει ότι

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} \geq \mathbf{E}(X_1 \wedge k) \quad \text{για κάθε } k \geq 1. \tag{Β$'$.13}$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, $\mathbf{E}(Y_1^k) = \mathbf{E}(X_1^+ \wedge k) - \mathbf{E}(X_1^-) \to \mathbf{E}(X_1^+) - \mathbf{E}(X_1^-) = \infty$ για $k \to \infty$. Άρα, για $\omega \in A$, παίρνοντας $k \to \infty$ στην (Β$'$.13) έχουμε ότι $\varliminf_{n\to\infty} S_n(\omega)/n = \infty$, οπότε $\lim_{n\to\infty} S_n(\omega)/n = \infty$, που είναι το ζητούμενο.

12.3 Παρατηρούμε ότι

$$\frac{X_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n}\frac{S_{n-1}}{n-1} \to \mu - \mu = 0 \tag{Β$'$.14}$$

για $n \to \infty$ με πιθανότητα 1. Αυτό δίνει ότι $\mathbf{E}\,|X_1| < \infty$ λόγω της Άσκησης 11.11, αλλά θα το αποδείξουμε και εδώ (λύνοντας τη μισή άσκηση). Η (Β$'$.14) συνεπάγεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\frac{|X_n|}{n} \geq 1\right) < \infty$ γιατί αν $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\frac{|X_n|}{n} \geq 1\right) = \infty$, τότε το 2ο λήμμα Borel-Cantelli, εφαρμοζόμενο στην ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων $A_n = \left\{\frac{|X_n|}{n} \geq 1\right\}$, $n \geq 1$ θα έδινε ότι $\varlimsup |X_n|/n \geq 1$ με πιθανότητα 1, το οποίο συγκρούεται με την (Β$'$.14). Τέλος, ισχύει ότι (Άσκηση 6.19)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(|X_1| \geq n\right) \leq \mathbf{E}(|X_1|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(|X_1| \geq n\right) + 1.$$

και επιπλέον, επειδή οι $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι ισόνομες, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(|X_n| \geq n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(|X_1| \geq n\right)$. Άρα $\mathbf{E}(X_1) \in \mathbb{R}$ και από τον νόμο των μεγάλων αριθμών $\frac{S_n}{n} \to \mathbf{E}(X_1)$. Όμως, από υπόθεση $\frac{S_n}{n} \to \mu$, επομένως $\mathbf{E}(X_1) = \mu$.

12.4 Έχουμε ότι $\mathbf{E}(X_1) = 1$ και $\mathbf{E}(X_1^2) = \operatorname{Var}(X_1) + \mathbf{E}(X_1)^2 = 4$, καθώς επίσης και ότι οι $\{X_i^2, i \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Γράφουμε

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{(X_1)^2 + (X_2)^2 + \ldots + (X_n)^2} = \frac{\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}}{\frac{(X_1)^2+(X_2)^2+\ldots+(X_n)^2}{n}}.$$

Από τον νόμο των μεγάλων αριθμών ο αριθμητής συγκλίνει στο 1 με πιθανότητα 1 και αντίστοιχα ο παρονομαστής στο 2. Τυπικά, για τα

$$A_1 = \left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = 1\right\}$$
$$A_2 = \left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{(X_1)^2 + (X_2)^2 + \ldots + (X_n)^2}{n} = 1\right\}$$

έχουμε ότι $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = 1$. Άρα $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = 1$ και για $\omega \in A_1 \cap A_2$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1(\omega) + X_2(\omega) + \ldots + X_n(\omega)}{(X_1)^2(\omega) + (X_2)^2(\omega) + \ldots + (X_n)^2(\omega)} = \frac{1}{4},$$

από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

12.5. $S_n = n(S_n/n) \to \infty \times \mathbf{E}(X_1) = \infty$ αφού $\mathbf{E}(X_1) > 0$.

12.6. (α) $(U_1 U_2 \cdots U_n)^{1/n} = e^{\frac{1}{n}(\log U_1 + \cdots + \log U_n)}$ Επειδή $\mathbf{E}(\log U_1) = \int_0^1 \log x\, dx = \ldots = -1$, ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών για την ακολουθία $(\log U_i)_{i\geq 1}$ δίνει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log U_1 + \cdots + \log U_n}{n} = -1 \text{ με πιθανότητα } 1.$$

Το συμπέρασμα έπεται.

(β) Έπεται από το (α). Επιλέγουμε θ ώστε $e^{-1} < \theta < 1$. Με πιθανότητα 1, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για $n > n_0$ να ισχύει $(U_1 U_2 \cdots U_n)^{1/n} < \theta$. Άρα για $n > n_0$

$$0 < U_1 U_2 \cdots U_n < \theta^n \to 0$$

καθώς $n \to \infty$ επειδή $0 < \theta < 1$.

Εναλλακτικά, $U_1 U_2 \cdots U_n = e^{n \frac{\log U_1 + \cdots + \log U_n}{n}} \to 0$ αφού το όριο του εκθέτη είναι $\infty \times (-1) = -\infty$.

(γ) Η ακολουθία $(U_i^a)_{i \geq 1}$ αποτελείται από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία με μέση τιμή

$$\mathbf{E}(U_1^a) = \int_0^1 x^a \, dx = \begin{cases} \frac{1}{1+a} & \text{αν } a > -1, \\ \infty & \text{αν } a \leq -1. \end{cases}$$

Το συμπέρασμα έπεται από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών και την Άσκηση 12.2.

12.7. Οι όροι της ακολουθίας $((X_i - \mu)^2)_{i \geq 1}$ είναι ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία με μέση τιμή $\mathbf{E}((X_1 - \mu)^2) = V(X_1) = \sigma^2$. Ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών δίνει το συμπέρασμα.

12.8. Γιατί βρίσκεται αυτή η άσκηση σε αυτό το κεφάλαιο;

Κεφάλαιο 13

13.4 Η ροπογεννήτρια της X είναι

$$M_X(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-a} & \text{αν } t < \lambda, \\ \infty & \text{αν } t \geq \lambda. \end{cases}$$

Η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \backslash [\lambda, \infty) \to \mathbb{C}$ με

$$f(z) = \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)^{-a} = e^{-a \log\left(1 - \frac{z}{\lambda}\right)}$$

είναι αναλυτική στο πεδίο ορισμού της, το οποίο περιέχει το $\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| < \lambda\}$, και $M_X(t) = f(t)$ για κάθε $t \in (-\lambda, \lambda)$. Το συμπέρασμα έπεται από την Πρόταση 13.17.

13.7 Έστω $u \in \mathbb{R}$. Τότε $\phi_{-X}(u) = \mathbf{E}(e^{iu(-X)}) = \phi_X(-u) = \overline{\phi_X(u)}$. Συνεπώς, αν $X \stackrel{d}{=} -X$, έχουμε ότι $\phi_X(u) = \phi_{-X}(u) = \overline{\phi_X(u)}$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$, δηλαδή $\phi_X(u) \in \mathbb{R}$. Αντίστροφα, αν $\phi_X(u) \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι $\phi_X(u) = \overline{\phi_X(u)}$, όμως από τα παραπάνω $\overline{\phi_X(u)} = \phi_{-X}(u)$, άρα $X \stackrel{d}{=} -X$.

13.8 1η λύση (στοιχειώδης): Το ζευγάρι (X, Y) έχει την ίδια κατανομή με το (Y, X) (η οποία είναι το μέτρο γινόμενο $\mathbf{P}^X \otimes \mathbf{P}^X$). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x, y) = x - y$. Τότε $X - Y = f(X, Y) \stackrel{d}{=} f(Y, X) = Y - X$.

2η λύση: Έστω $u \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\begin{aligned} \phi_{X-Y}(u) &= \mathbf{E}(e^{iuX} e^{-iuY}) = \mathbf{E}(e^{iuX}) \, \mathbf{E}(e^{-iuY}) \\ &= \phi_X(u) \phi_Y(-u) = \phi_x(u) \phi_X(-u) \\ &= \phi_X(u) \overline{\phi_X(u)} = |\phi_X(u)|^2 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει λόγω ανεξαρτησίας. Από την Άσκηση 13.7 προκύπτει ότι η $X - Y$ έχει συμμετρική κατανομή.

13.9 (α) Η χαρακτηριστική συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής $\frac{X+Y}{2}$ είναι

$$\phi_{\frac{X+Y}{2}}(t) = \mathbf{E}(e^{iXt/2} e^{iYt/2}) = \mathbf{E}(e^{iXt/2}) \, \mathbf{E}(e^{iYt/2}) = \phi_X\left(\frac{t}{2}\right) \phi_Y\left(\frac{t}{2}\right) = e^{-|t|/2} e^{-|t|/2} = e^{-|t|},$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει λόγω ανεξαρτησίας. Γνωρίζουμε ότι η $e^{-|t|}$ είναι χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής με κατανομή Cauchy. Από το θεώρημα μοναδικότητας 13.9 έπεται

ότι $\frac{X+Y}{2} \sim$ **Cauchy**.
(β) Εργαζόμαστε όμοια με το (α) βασιζόμενοι στην ανεξαρτησία των $X_1, X_2, \dots, X_n$.

13.11 Η σειρά συγκλίνει απολύτως σε μια τυχαία μεταβλητή X. Υπολογίζουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση της X και δείχνουμε ότι είναι αυτή της ομοιόμορφης στο $(-1, 1)$.

13.13

$$\phi_X(t) - 1 = 2\int_1^\infty \frac{1}{|x|^3}(\cos(tx) - 1)\,dx$$

Το $|\cos(x) - 1|$ είναι περίπου $x^2/2$ όταν το x είναι κοντά στο 0 και φράσσεται από το 2 για οποιοδήποτε x.

13.14 Έχουμε ότι $f_X(x) = f_Y(x) = \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από το Θεώρημα 13.23 η $X + Y$ έχει πυκνότητα $f_{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z - x)\,dx$. Ο ολοκληρωτέος είναι μη μηδενικός για (x, z) τέτοια ώστε $0 < x < 1$ και $0 < z - x < 1$, δηλαδή,

$$\begin{aligned} 0 < x < 1, &\qquad \text{και} \\ z - 1 < x < z. & \end{aligned} \tag{B$'$.15}$$

- Αν $z \le 0$ ή $z \ge 2$, τότε δεν υπάρχουν x που ικανοποιούν την (B′.15).
- Αν $z \in (0, 1)$, τότε οι σχέσεις της (B′.15) ικανοποιούνται ακριβώς για $0 < x < z$ και έτσι $f_{X+Y}(z) = \int_0^z 1\,\mathrm{d}x = z$.
- Αν $z \in (1, 2)$ τότε οι σχέσεις της (B′.15) ικανοποιούνται ακριβώς για $z - 1 < x < 1$ και έτσι $f_{X+Y}(z) = \int_{z-1}^1 1\,\mathrm{d}x = 2 - z$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, προκύπτει το ζητούμενο.

Κεφάλαιο 14

14.1. Η συνάρτηση κατανομής της U είναι

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < 0, \\ x & \text{αν } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{αν } x > 1, \end{cases}$$

και τα σημεία συνέχειάς της είναι όλο το $\mathbb{R}$. Για $x \in [0, 1]$,

$$F_{X_n/n}(x) = \mathbf{P}(X_n \le nx) = \frac{[nx]}{n} \to x = F_U(x)$$

για $n \to \infty$ (π.χ., $nx - 1 < [nx] \le nx$, κ.λπ). Η σύγκλιση για τα υπόλοιπα $x \in \mathbb{R}$ είναι πιο εύκολη.

14.3. Με βάση το Θεώρημα 14.12, η σύγκλιση $X_n \Rightarrow X$ συνεπάγεται (μάλιστα ισοδυναμεί με) την

$$\mathbf{P}(X_n \in A) \to \mathbf{P}(X \in A) \text{ για όλα τα } A \subset \mathbb{R} \text{ Borel με } \mathbf{P}(X \in \partial A) = 0.$$

Είναι δυνατόν βέβαια η σχέση $\mathbf{P}(X_n \in A) \to \mathbf{P}(X \in A)$ να ισχύει για ένα σύνολο Borel A συμπτωματικά, ίσως εξαιτίας της φύσης της ακολουθίας $(X_n)_{n\ge1}$. Πάντως δεν μας την εγγυάται η $X_n \Rightarrow X$.

(i) Όχι. Γιατί $\partial A = \{2, 32.1, 100\}$, στο οποίο η κατανομή της X δίνει θετική πιθανότητα αφού περιέχει τους θετικούς ακέραιους $2, 100$.

(ii) Όχι. Γιατί $\partial A = \bar{A} \setminus A^o = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$ και $\mathbf{P}(X \in \mathbb{R}) = 1 > 0$.

(iii) Ναι. Γιατί $\partial A = \{-1.5, 2.8\}$ και $\mathbf{P}(X \in \{-1.5, 2.8\}) = 0$ αφού μια γεωμετρική τυχαία μεταβλητή παίρνει μόνο ακέραιες θετικές τιμές.

(iv) Ναι. Γιατί $\partial A = \{-2, \pi\}$ και $\mathbf{P}(X \in \partial A) = 0$ αφού η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή και το ∂A είναι πεπερασμένο.

(v) Όχι. Γιατί $\partial A = \bar{A} \backslash A^o = [0, 1/3] \backslash \emptyset = [0, 1/3]$ και $\mathbf{P}(X \in [0, 1/3]) = 1/3 > 0$.

(vi) Όχι. Γιατί $\partial A = \{0, 1/2, 2, 4\}$ και $\mathbf{P}(X \in \{0, 1/2, 2, 4\}) = \mathbf{P}(X = 0) = 3/5 > 0$.

14.4 (α) Έστω $M > 0$. Υπάρχει $x_M > M$ σημείο συνέχειας της F_X. Τότε

$$\varliminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \le n) \ge \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \le x_M) = \mathbf{P}(X \le x_M) \ge \mathbf{P}(X \le M).$$

Για $M \to \infty$ το δεξί μέλος τείνει στο 1.

(β) Για κάθε $M \ge 1$ υπάρχουν $x_M \in (x - 1/M, x), y_M \in (x, x + 1/M)$ σημεία συνέχειας της F_X. Τότε

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \in [x - n^{-1}, x + n^{-1}]) \le \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n \in [x_M, y_M]) = \mathbf{P}(X \in [x_M, y_M]) = F_X(y_M) - F_X(x_M)$$

Για $M \to \infty$ το δεξί μέλος τείνει στο $F(x) - F(x-) = \mathbf{P}(X = x)$. Για αντιπαράδειγμα, παίρνουμε $X_n = 2/n, X = 0$ (σταθερές συναρτήσεις) και $x = 0$.

14.5 Έστω $\varepsilon > 0$. Για οποιοδήποτε $M > 0$ έχουμε

$$\mathbf{P}(|X_n Y_n| > \varepsilon) \le \mathbf{P}(|Y_n| \ge \varepsilon/M) + \mathbf{P}(|X_n| \ge M)$$

Για $n \to \infty$ η πρώτη πιθανότητα στο δεύτερο μέλος τείνει στο 0, ενώ ο δεύτερος όρος είναι φραγμένος από το $\sup_{n\ge1} \mathbf{P}(|X_n| \ge M)$. Άρα

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(|X_n Y_n| > \varepsilon) \le \sup_{n\ge1} \mathbf{P}(|X_n| \ge M)$$

Το αριστερό μέλος δεν εξαρτάται από το M, ενώ το δεξί, για $M \to \infty$, τείνει στο 0.

14.6 (α) Έστω x σημείο συνέχειας της $F_{X+c}(x) = F_X(x - c)$, οπότε το $x - c$ είναι σημείο συνέχειας της F_X. Θα δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(x) = F_X(x - c)$.

Πρώτα δείχνουμε ότι $\varlimsup_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(x) \le F_X(x - c)$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε

$$\begin{aligned} F_{X_n+Y_n}(x) = \mathbf{P}(X_n + Y_n \le x) &= \mathbf{P}(X_n + Y_n \le x, X_n \le x - c + \varepsilon) + \mathbf{P}(X_n + Y_n \le x, X_n > x - c + \varepsilon) \\ &\le \mathbf{P}(X_n \le x - c + \varepsilon) + \mathbf{P}(Y_n < c - \varepsilon) \\ &= F_{X_n}(x - c + \varepsilon) + \mathbf{P}(Y_n < c - \varepsilon). \end{aligned}$$

Αν το $x - c + \varepsilon$ είναι σημείο συνέχειας της F_X, τότε

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x - c + \varepsilon) = F_X(x - c + \varepsilon)$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Y_n < c - \varepsilon) = 0$$

εφόσον $Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} c$. Άρα

$$\varlimsup_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(x) \le F_X(x - c + \varepsilon).$$

Τα σημεία ασυνέχειας της F_X είναι αριθμήσιμα, άρα υπάρχει φθίνουσα μηδενική ακολουθία $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε το $x - c + \varepsilon_k$ να είναι σημείο συνέχειας της F_X. Από τα παραπάνω, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\varlimsup_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(x) \le F_X(x - c + \varepsilon_k).$$

Εφόσον η F_X είναι συνεχής στο $x - c$, έχουμε $\lim_{k\to\infty} F_X(x + \varepsilon_k) = F(x)$, και άρα

$$\varlimsup_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(x) \le F_X(x - c).$$

Δείχνουμε τώρα ότι $\varliminf_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(x) \ge F_X(x - c)$.

Για $\varepsilon > 0$,

$$F_{X_n+Y_n}(x) = \mathbf{P}(X_n + Y_n \leq x) \geq \mathbf{P}(X_n \leq x - c - \varepsilon) - \mathbf{P}(Y_n > c + \varepsilon).$$

Αν το $x-c-\varepsilon$ είναι σημείο συνέχειας της F_X, η τελευταία ανισότητα δίνει $\underline{\lim}_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(x) \geq F_X(x-c-\varepsilon)$. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως προηγουμένως βλέπουμε ότι $\underline{\lim}_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(x) \geq F_X(x-c)$.

14.7 Έστω $A_n = \mathbb{R}\backslash[-n, n]$. Τότε η A_n είναι φθίνουσα ακολουθία, άρα,

$$\lim_{n\to\infty} p(A_n) = p(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = p(\emptyset) = 0.$$

Επομένως, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 έτσι ώστε $\mu(\mathbb{R}\backslash[-n_0, n_0]) < \epsilon$.

14.8 Από την Άσκηση 14.7, για κάθε $i \in I$ υπάρχει $M_i > 0$ έτσι ώστε $p_i([-M_i, M_i]) > 1-\epsilon$. Θέτοντας $M = \max\{M_i : i \in I\}$ έχουμε ότι $p_i([-M, M]) \geq p_i([-M_i, M_i]) > 1 - \epsilon$, από το οποίο προκύπτει ότι η $(p_i)_{i\in I}$ είναι σφιχτή.

14.9 Χρησιμοποιώντας ότι η h είναι αύξουσα και την ανισότητα του Markov έχουμε,

$$\mathbf{P}(|X_n| > M) = \mathbf{P}(h(|X_n|) > h(M)) \leq \frac{1}{h(M)} \mathbf{E}(h(|X_n|)) \leq \frac{1}{h(M)} C,$$

όπου $C = \sup_{n\geq 1} \mathbf{E}(h(|X_n|)) < \infty$. Άρα $\sup_{n\geq 1} \mathbf{P}(|X_n| > M) \leq \frac{C}{h(M)} \to 0$ για $M \to \infty$.

14.11 Για το αντίστροφο. Αν η ακολουθία δεν είναι σφιχτή, τότε υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και γνήσια αύξουσες ακολουθίες φυσικών $(n_k)_{k\geq 1}, (M_k)_{k\geq 1}$ ώστε $\mu_{n_k}(\mathbb{R}\backslash[-M_k, M_k]) \geq \varepsilon$. Η $(\mu_{n_k})_{k\geq 1}$ έχει υπακολουθία $(\mu_{n_{k_\ell}})_{\ell\geq 1}$ που συγκλίνει ασθενώς και άρα αυτή η υπακολουθία είναι σφιχτή. Προκύπτει έτσι άτοπο.

Κεφάλαιο 15

15.1. Μιμούμαστε την απόδειξη του Λήμματος 15.1. Χρήσιμη είναι η ανισότητα $e^{-y} - 1 + y \geq y/2$ για κάθε $y \geq 2$ (χρειάζεται απόδειξη).

15.3.(α) Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\phi_Y(t) = \mathbf{E}(e^{itX}) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk}(1-p)^{k-1}p = pe^{it}\sum_{j=0}^{\infty}(e^{it}(1-p))^j = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}.$$

Αθροίσαμε μια γεωμετρική πρόοδο της οποίας ο λόγος έχει μέτρο $|(1-p)e^{it}| = 1-p < 1$ αφού $p > 0$.

(β) (i) Τα σημεία συνέχειας της συνάρτησης κατανομής F_X της X είναι όλο το $\mathbb{R}$. Έστω $x > 0$. Τότε

$$\begin{aligned} F_{X_n/n}(x) &= \mathbf{P}\left(\frac{X_n}{n} \leq x\right) = \mathbf{P}(X_n \leq [nx]) = 1 - \mathbf{P}(X_n > [nx]) \\ &= 1 - (1-p_n)^{[nx]} = 1 - \left(\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n\right)^{[nx]/n}. \end{aligned}$$

Επειδή $[nx]/n \to x$ και $(1 - an^{-1})^n \to e^{-a}$, έπεται ότι $\lim_{n\to\infty} F_{X_n/n}(x) = 1 - e^{-ax} = F_X(x)$. Προφανώς το ίδιο ισχύει και για $x \leq 0$.

(ii) Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\phi_{X_n/n}(t) = \phi_{X_n}(t/n) = \frac{p_n e^{it/n}}{1-(1-p_n)e^{it/n}} = \frac{e^{it/n}}{\frac{1-e^{it/n}}{a/n} + e^{it/n}} \to \frac{1}{1-\frac{it}{a}} = \phi_X(t)$$

καθώς $n \to \infty$ αφού

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-e^{it/n}}{a/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{it}{a}\frac{1-e^{it/n}}{it/n} = -\frac{it}{a}.$$

Άρα η σύγκλιση $X_n/n \Rightarrow X$ έπεται από το θεώρημα συνέχειας του Lévy.

15.4. (α) Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\phi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

(β) Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\phi_{X_n}(t) = (p_n e^{it} + 1 - p_n)^n = (1 + p_n(e^{it} - 1))^n \to e^{\lambda(e^{it}-1)} = \phi_X(t)$$

αφού $\lim_{n\to\infty} p_n(e^{it} - 1)n = \lambda(e^{it} - 1)$. Άρα η σύγκλιση $X_n \Rightarrow X$ έπεται από το θεώρημα συνέχειας του Lévy.

15.5. Χρησιμοποιούμε το θεώρημα συνέχειας του Lévy και τον τύπο για τη χαρακτηριστική συνάρτηση της κατανομής Γάμμα (Άσκηση 13.4). Για $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\phi_{\sqrt{n}(X_n - c)} &= e^{-c\sqrt{n}ti}\phi_{X_n}(\sqrt{n}t) = e^{-c\sqrt{n}ti}\frac{1}{\left(1 - \frac{i\sqrt{n}t}{n}\right)^{nc}} \\ &= e^{-c\sqrt{n}ti - nc\operatorname{Log}\left(1 - \frac{it}{\sqrt{n}}\right)}\end{aligned}$$

Log είναι ο κλάδος του λογαρίθμου που είναι ολόμορφος στο $\mathbb{C}$ εκτός των αρνητικών πραγματικών και $\operatorname{Log}(1) = 0$. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά της $\operatorname{Log}(1 - z)$ με κέντρο το 0 (στον δίσκο $\{z : |z| < 1\}$) βρίσκουμε ότι ο εκθέτης στην τελευταία ποσότητα συγκλίνει στο $-ct^2/2$ και έτσι έχουμε το ζητούμενο.

Εναλλακτικά, με χρήση του κεντρικού οριακού θεωρήματος (το οποίο καλύπτεται στο επόμενο κεφάλαιο). Από ιδιότητες της κατανομής Γάμμα, η X_n έχει την ίδια κατανομή με την $(W_1 + W_2 + \ldots + W_n)/n$ όπου οι $W_1, \ldots, W_n$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες με $W_1 \sim \Gamma(c, 1)$. Το συμπέρασμα έπεται από το κεντρικό οριακό θεώρημα γιατί $\mathbf{E}(W_1) = \operatorname{Var}(W_1) = c$.

15.10. Χρήσιμη είναι η Άσκηση 13.12.

Κεφάλαιο 16

16.2. Για την ακολουθία $(S_n)_{n\geq 1}$ έχουμε ότι $S_n/n \to 2$ κατά πιθανότητα (ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών) και

$$\frac{S_n - 2n}{\sqrt{n}} \Rightarrow Z \sim N(0, 1)$$

(κεντρικό οριακό θεώρημα).

(α) Η σύγκλιση $S_n/n \to 2$ κατά πιθανότητα δίνει

$$\mathbf{P}(S_n > 2.1n) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} > 2.1\right) \leq \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2\right| > 0.1\right) \to 0$$

καθώς $n \to \infty$.

(β) Έχουμε

$$\mathbf{P}(S_n > 2n + \sqrt{n}) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n - 2n}{\sqrt{n}} > 1\right) \to \mathbf{P}(Z > 1) = 1 - \Phi(1)$$

καθώς $n \to \infty$ λόγω του κεντρικού οριακού θεωρήματος.

(γ) Ξέρουμε ότι $S_n \sim 2n$, άρα το ενδεχόμενο $S_n > 10\sqrt{n}$ είναι πολύ πιθανό. Τυπικά προχωρούμε ως εξής.

$$\mathbf{P}(S_n > 10\sqrt{n}) = P\left(\frac{S_n}{n} > \frac{10}{\sqrt{n}}\right) = 1 - P\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{10}{\sqrt{n}}\right).$$

Για $n > 100$,

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{10}{\sqrt{n}}\right) \leq \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2\right| > 1\right) \to 0$$

Άρα $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n > 10\sqrt{n}) = 1$.

(δ)

$$\mathbf{P}(S_n \geq 3n) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq 3\right) \leq \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2\right| > \frac{1}{2}\right) \to 0$$

καθώς $n \to \infty$. Άρα $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n < 3n) = 1$.

(ε) Για $n > 10^{10}$ έχουμε

$$\mathbf{P}(S_n \le 10^{10}) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \le \frac{10^{10}}{n}\right) \le \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2\right| > \frac{1}{2}\right) \to 0$$

καθώς $n \to \infty$. Άρα $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n > 10^{10}) = 1$.

16.3 Παρατηρούμε ότι $\mathbf{E}(X_1) = \operatorname{Var} X_1 = 1$ και εφαρμόζουμε το κεντρικό οριακό θεώρημα.

16.5 Παρατηρούμε ότι $\mathbf{P}(X = k) = e^{-n}\frac{n^k}{k!}$, όπου $X \sim \text{Poisson}(n)$. Έστω $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $X_1 \sim \text{Poisson}(1)$. Γνωρίζουμε ότι η $S_n = \sum_{k=1}^n X_k \sim \text{Poisson}(n)$. Άρα,

$$e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(S_n \le n) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \le 0\right) = F_{\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}}(0).$$

Από την Άσκηση 16.3, αφού $\frac{S_n-n}{\sqrt{n}} \Rightarrow Z$, με $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$, έχουμε ότι $F_{\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}}(0) \to F_Z(0) = \frac{1}{2}$ για $n \to \infty$.

16.6. Έστω ακολουθίες $(Y_n)_{n\ge1}, (Z_n)_{n\ge1}$ τυχαίες μεταβλητές στον ίδιο χώρο πιθανότητας ώστε οι $\{Y_n, Z_n : n \ge 1\}$ να είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και καθεμία να έχει την ίδια κατανομή με τη X_1.

Τότε επειδή το διάνυσμα $(X_1, \cdots, X_{2n})$ έχει την ίδια κατανομή με το $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ (το μέτρο γινόμενο $\otimes_{i=1}^{2n}\mathbf{P}^{X_1}$ της κατανομής $\mathbf{P}^{X_1}$ $2n$ φορές με τον εαυτό της), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - (X_{n+1} + \cdots + X_{2n})}{\sqrt{n}}\right| \le 1\right) \\
&\qquad = \mathbf{P}\left(\left|\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n - (Z_1 + \cdots + Z_n)}{\sqrt{n}}\right| \le 1\right) = \mathbf{P}\left(\left|\frac{W_1 + W_2 + \cdots + W_n}{\sqrt{n}}\right| \le 1\right),
\end{aligned}$$

όπου θέσαμε $W_i = Y_i - Z_i$ για κάθε $i \ge 1$. Από την υπόθεση, οι $\{W_i : i \ge 1\}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, καθεμία με μέση τιμή $\mathbf{E}(W_1) = 0$ και διασπορά $V(W_1) = V(X_1) + V(Y_1) - 2\mathrm{Cov}(X_1, Y_1) = 1 + 1 - 0 = 2$. Άρα, εφαρμόζοντας το κεντρικό οριακό θεώρημα, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\left|\frac{W_1 + W_2 + \cdots + W_n}{\sqrt{n}}\right| \le 1\right) &= \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\left|\frac{W_1 + W_2 + \cdots + W_n}{\sqrt{n2}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \mathbf{P}(|Z| \le 1/\sqrt{2}) = \Phi(1/\sqrt{2}) - \Phi(-1/\sqrt{2}) \\
&= 2\Phi(1/\sqrt{2}) - 1.
\end{aligned}$$

Κεφάλαιο 17

17.1. Λύνουμε τα αντίστοιχα προβλήματα μεγιστοποίησης με χρήση παραγώγων. Οι απαντήσεις είναι ως εξής.

(α) $\Lambda^*(x) = a - x + x\log(x/a)$ για $x \ge 0$ και $\Lambda^*(x) = \infty$ για $x < 0$.

(β) $\Lambda^*(x) = ax - 1 - \log(ax)$ για $x > 0$ και $\Lambda^*(x) = \infty$ για $x \le 0$.

(γ) $\Lambda^*(x) = x^2/(2\sigma)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

17.2. $M(\lambda) = \infty$ για κάθε $\lambda \ne 0$ και $M(0) = 1$. Έτσι $\Lambda^*(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Το άνω φράγμα της αρχής για ένα μη κενό σύνολο Borel A λέει απλώς ότι το όριο $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n^{-1}\log\mu_n(A)$ είναι ≤ 0, κάτι που το γνωρίζουμε από πριν αφού $\mu_n(A) \le 1$ (άρα το άνω φράγμα είναι άχρηστο). Το κάτω φράγμα όμως λέει κάτι χρήσιμο. Δηλαδή ότι αν το A έχει μη κενό εσωτερικό τότε η πιθανότητα $\mu_n(A)$ δεν είναι εκθετικά μικρή. Π.χ., μπορεί να είναι της τάξης του n^{-100} αλλά όχι της τάξης του e^{-n}.

17.3. Θέτουμε $X_i = 1$ αν η i ρίψη του νομίσματος φέρει κεφαλή και $X_i = 0$ αν αυτή η ρίψη φέρει γράμματα. Οι $(X_i)_{i\ge1}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, και $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

(α) Δουλεύουμε όπως στο Παράδειγμα 17.4. Εναλλακτικά, θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές $Y_i := 2X_i - 1$ και θέτουμε $\Sigma_n := Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$. Η $(\Sigma_n/n)_{n\geq 1}$ ικανοποιεί την αρχή μεγάλων αποκλίσεων με συνάρτηση ρυθμού $\tilde{I}$ όπως στο Παράδειγμα 17.4. Από αυτό προκύπτει η αρχή μεγάλων αποκλίσεων για την $(S/n)_{n\geq 1}$ με συνάρτηση ρυθμού $I(x) = \tilde{I}(2x-1)$.
(β) Τα λήμματα δίνουν το φράγμα $e^{-1000I(7/10)} \approx 1.84073 \times 10^{-36}$ [αφού $7/10 > 1/2 = \mathbf{E}(X_1)$]. Το κεντρικό οριακό θεώρημα δίνει την προσέγγιση

$$\mathbf{P}(S_{1000} \geq 700) \approx 1 - \Phi\left(\frac{20}{\sqrt{10}}\right) \approx 1.26981 \times 10^{-10}.$$

Προφανώς αυτή είναι λάθος. Δεν είναι αρμόζουσα η εφαρμογή του κεντρικού οριακού θεωρήματος σε αυτή την περίπτωση.

17.4. Εφαρμόζουμε τον ορισμό της αρχής για το σύνολο $\mathcal{X}$, το οποίο έχει $\mu_n(\mathcal{X}) = 1$.

17.5. Γράφουμε $Y_n = Z/\sqrt{n}$ με $Z \sim N(0,1)$. Έστω f_Z η πυκνότητα της f_Z. Για $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ έχουμε

$$\mathbf{P}(Y_n \in A) = \mathbf{P}(Z \in \sqrt{n}A) = \int_{\sqrt{n}A} f_Z(x)\,dx = \sqrt{n}\int_A f_Z(y\sqrt{n})\,dy.$$

Για το κάτω φράγμα της αρχής των μεγάλων αποκλίσεων παίρνουμε $x \in A^o$. Για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό, η πιο πάνω πιθανότητα φράσσεται από κάτω απο την ποσότητα

$$\sqrt{n}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f_Z(y\sqrt{n})\,dy \geq \frac{\sqrt{n}2\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \min\{e^{-(x-\varepsilon)^2 n/2}, e^{-(x+\varepsilon)^2 n/2}\}.$$

Η συνέχεια αφήνεται στον αναγνώστη. Για το άνω φράγμα, θέτουμε $c := \inf\{|x| : x \in \overline{A}\}$. Τότε $A \subset (-\infty, -c] \cup [c, \infty)$ και άρα με χρήση της Άσκησης 7.4 έχουμε

$$\mathbf{P}(Y_n \in A) \leq \mathbf{P}(|Z| \geq c\sqrt{n}) \leq 2\frac{1}{c\sqrt{n}\sqrt{2\pi}} e^{-nc^2/2}.$$

Άρα $\overline{\lim}_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbf{P}(Y_n \in A) \leq -c^2/2 = -\inf\{I(x) : x \in \overline{A}\}$.

17.6. Η απόδειξη είναι ανάλογη της προηγούμενης άσκησης. Μάλιστα οι εκτιμήσεις είναι πιο εύκολες.

17.7. Για κάθε t έχουμε $f^*(x) \geq tx - f(t)$. Παίρνοντας $t > 0$ με $f(t) < \infty$ έχουμε

$$\underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{f^*(x)}{x} \geq t,$$

ενώ αν πάρουμε $t < 0$ με $f(t) < \infty$ έχουμε

$$\underline{\lim}_{x\to-\infty} \frac{f^*(x)}{|x|} \geq |t|.$$

Τα (α), (β) έπονται εύκολα από αυτές τις ανισότητες.

17.8. Για κάθε $\lambda \neq 0$ αρκετά μικρό έχουμε

$$I(x) \geq \lambda x - \log M(\lambda) = \lambda\left(x - \frac{\log M(\lambda)}{\lambda}\right). \tag{B$'$.16}$$

Όμως το όριο της $\log M(\lambda)/\lambda$ για $\lambda \to 0$ ισούται με την παράγωγο της $\log M(\lambda)$ στο 0, η οποία ισούται με $M'(0)/M(0) = m$ με βάση το Λήμμα 17.6. Άρα αν $x > m$, τότε παρατηρούμε ότι για $\lambda > 0$ κοντά στο 0 το δεξί μέλος της (Β$'$.16) είναι θετικό. Αν $x < m$ παίρνουμε $\lambda < 0$ κοντα στο 0.

17.9. Για κάθε $\lambda < 0$ έχουμε

$$\mathbf{P}(S_k < tk^{1/a}) = \mathbf{P}(\lambda S_k > \lambda tk^{1/a}) \leq e^{-\lambda tk^{1/a}} M(\lambda)^k.$$

Παίρνουμε το ελάχιστο του δεξιού μέλους ως προς λ.

Βιβλιογραφία

T. Cover and J. Thomas. *Στοιχεία της θεωρίας πληροφορίας*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, (2014).

A. Dembo and O. Zeitouni. *Large deviations techniques and applications*, volume 38. Springer Science & Business Media, (1998).

R. Durrett. *Probability: theory and examples*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, fourth edition, (2010).

K. B. Erickson (1973). The strong law of large numbers when the mean is undefined. *Transactions of the American Mathematical Society*, 185:371–381.

W. Feller. *An introduction to probability and its applications, Vol. II*. Wiley, New York, (1971).

J. Jacod and P. Protter. *Probability essentials*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, second edition, (2003).

Κουμουλλής Γ. και Νεγρεπόντης Σ. *Θεωρία Μέτρου*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, (1991).

Νεγρεπόντης Σ., Γιωτόπουλος Σ., Γιαννακούλιας Ε. *Απειροστικός Λογισμός*. Εκδόσεις Αίθρα, Αθήνα, (1992).

E. M. Stein and R. Shakarchi. *Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces*. Princeton University Press, (2005).

Παπαδάτος Ν. *Θεωρία Πιθανοτήτων*. Αθήνα, (2006). Διατίθεται από τον συγγραφέα.

S. R. Varadhan. *Probability theory, volume 7 of Courant Lecture Notes in Mathematics*. American Mathematical Society, (2001).

E. T. Whittaker and G. N. Watson. *A course of modern analysis*. Cambridge university press, fourth edition, (1965).

D. Williams. *Probability with martingales*. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, Cambridge, (1991).

Ευρετήριο ελληνικών όρων

Ευρετήριο ξενόγλωσσων όρων

Μετάφραση ορολογίας

Άλγεβρα	Algebra
Ανανεωτική θεωρία	Renewal theory
Ανεξάρτητες οικογένειες συνόλων	Independent families of sets
Ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές	Independent random variables
Απλή συνάρτηση	Simple function
Απόλυτα συνεχής κατανομή	Absolutely continuous distribution
Αρχή μεγάλων αποκλίσεων	Large deviations principle
Ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών	Weak law of large numbers
Διακριτή κατανομή	Discrete distribution
Εντροπία	Entropy
Ιδιάζουσα κατανομή	Singular distribution
Ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών	Strong law of large numbers
Κατανομή τυχαίας μεταβλητής	Distribution of a random variable
Μετασχηματισμός Legendre	Legendre transform
Μετασχηματισμός ποσοστημορίων	Quantile transform
Μετρήσιμη συνάρτηση	Measurable function
Μετρήσιμο ορθογώνιο	Measurable rectangle
Μετρήσιμο σύνολο	Measurable set
Μετρήσιμος χώρος	Measurable space
Μέτρο	Measure
Μέτρο γινόμενο	Product measure
Ολοκλήρωμα Lebesgue	Lebesgue integral
Ολοκληρώσιμη συνάρτηση	Integrable function
Παράγωγος Radon-Nikodym	Radon-Nikodym derivative
Πυκνότητα μέτρου	Density of a measure
Ροπογεννήτρια	Moment generating function
Σύγκλιση ασθενής	Weak convergence
Σύγκλιση κατά κατανομή	Convergence in distribution
Σύγκλιση κατά πιθανότητα	Convergence in probability
Σύγκλιση σχεδόν βέβαιη	Almost sure convergence
Σ-άλγεβρα	Σ-algebra
Σ-πεπερασμένο	Σ-finite
Σφιχτή οικογένεια τυχαίων μεταβλητών	Tight family of random variables
Σφιχτή οικογένεια μέτρων	Tight family of measures
Στήριγμα μέτρου	Support of a measure
Συμμετρική κατανομή	Symmetric distribution
Συνάρτηση κατανομής	Distribution function
Συνάρτηση ρυθμού	Rate function
Συνεχής κατανομή	Continuous distribution
Σχεδόν βέβαια	Almost surely
Σχεδόν παντού	Almost everywhere
Τελική σ-άλγεβρα	Final σ-algebra
Τυπική μηχανή	Standard machine
Τυχαία μεταβλητή	Random variable
Φορέας μέτρου	Support of a measure
Χαρακτηριστική συνάρτηση	Characteristic function
Χώρος γινόμενο	Product space
Χώρος μέτρου	Measure space