5.5 Κρίσιμα σημεία

Σκοπός μας στις επόμενες Παραγράφους είναι να αποδείξουμε τα κύρια θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού και να δούμε πώς εφαρμόζονται στη μελέτη συναρτήσεων που ορίζονται σε κάποιο διάστημα I της πραγματικής ευθείας. Θα ξεκινήσουμε με κάποια παραδείγματα που δείχνουν ότι η μονοτονία ή η ύπαρξη κάποιου τοπικού ακρότατου μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης δίνουν κάποιες πληροφορίες για την παράγωγο. Το μοναδικό εργαλείο που θα χρησιμοποιήσουμε είναι ο ορισμός της παραγώγου.

Λήμμα 5.5.1. *Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι αύξουσα στο (a,b) τότε $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(a,b)$.*

Απόδειξη. Έστω $x\in(a,b)$. Υπάρχει $\delta>0$ ώστε $(x-\delta,x+\delta)\subset(a,b)$. Αν λοιπόν $|h|<\delta$ τότε η f ορίζεται στο $x+h$.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x, έχουμε

$$f'(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Έστω $0<h<\delta$. Αφού η f είναι αύξουσα στο (a,b) έχουμε $f(x+h)\geq f(x)$. Συνεπώς,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0 \quad \text{άρα} \quad f'(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0.$$

Παρατηρήστε ότι δείξαμε το ζητούμενο χωρίς να κοιτάξουμε τι γίνεται για αρνητικές τιμές του h (ελέγξτε όμως ότι αν $-\delta<h<0$ τότε η κλίση $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ είναι πάλι μη αρνητική, οπότε οδηγούμαστε στο ίδιο συμπέρασμα). □

Παρατήρηση 5.5.2. Αν υποθέσουμε ότι η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι *γνησίως αύξουσα*, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η f' είναι ***γνησίως θετική*** στο (a,b). Για παράδειγμα, η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, όμως $f'(x)=3x^2$, άρα *υπάρχει* σημείο στο οποίο η παράγωγος μηδενίζεται: $f'(0)=0$. Το Λήμμα 5.5.1 μας εξασφαλίζει φυσικά ότι $f'\geq 0$ παντού στο $\mathbb{R}$.

Παρατήρηση 5.5.3. Το αντίστροφο ερώτημα διατυπώνεται ως εξής: αν $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(a,b)$ τότε είναι σωστό ότι η f είναι αύξουσα στο (a,b); Η απάντηση είναι «ναι», αυτή είναι μία από τις βασικές συνέπειες του θεωρήματος μέσης τιμής (βλέπε §5.6). Χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό της παραγώγου, μπορούμε να δείξουμε κάτι πολύ ασθενέστερο:

Λήμμα 5.5.4. *Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in(a,b)$ και $f'(x_0)>0$. Τότε, υπάρχει $\delta>0$ ώστε $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq(a,b)$ και*

(α) *$f(x)>f(x_0)$ για κάθε $x\in(x_0,x_0+\delta)$.*

(β) *$f(x)<f(x_0)$ για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0)$.*

Απόδειξη. Έχουμε υποθέσει ότι $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) > 0$. Εφαρμόζοντας τον $\varepsilon - \delta$ ορισμό του ορίου με $\varepsilon = \frac{f'(0)}{2} > 0$, βρίσκουμε $\delta > 0$ ώστε: αν $0 < |x - x_0| < \delta$ τότε $x \in (a, b)$ και

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > f'(x_0) - \varepsilon = \frac{f'(x_0)}{2} > 0.$$

Έπεται ότι:

(α) Για κάθε $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ έχουμε

$$f(x) - f(x_0) > \frac{f'(x_0)}{2}(x - x_0) > 0 \text{ άρα } f(x) > f(x_0).$$

(β) Για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ έχουμε

$$f(x) - f(x_0) < \frac{f'(x_0)}{2}(x - x_0) < 0 \text{ άρα } f(x) < f(x_0). \qquad \square$$

Παρατηρήστε ότι τα (α) και (β) δεν δείχνουν ότι η f είναι αύξουσα στο $(x_0, x_0 + \delta)$ ή στο $(x_0 - \delta, x_0)$. $\square$

Ορισμός 5.5.5. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in I$. Λέμε ότι η f έχει *τοπικό μέγιστο* στο x_0 αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$\text{αν } x \in I \text{ και } |x - x_0| < \delta \text{ τότε } f(x_0) \geq f(x).$$

Ομοίως, λέμε ότι η f έχει *τοπικό ελάχιστο* στο x_0 αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$\text{αν } x \in I \text{ και } |x - x_0| < \delta \text{ τότε } f(x_0) \leq f(x).$$

Αν η f έχει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο στο x_0 τότε λέμε ότι η f έχει *τοπικό ακρότατο* στο σημείο x_0.

Αυτό που χρειαστήκαμε για την απόδειξη του Λήμματος 5.5.1 ήταν η ύπαρξη της $f'(x)$ (ο ορισμός της παραγώγου) και το γεγονός ότι (λόγω μονοτονίας) η ελάχιστη τιμή της f στο $[x, x+\delta)$ ήταν η $f(x)$. Επαναλαμβάνοντας λοιπόν το ίδιο ουσιαστικά επιχείρημα παίρνουμε την ακόλουθη Πρόταση (Fermat).

Θεώρημα 5.5.6 (Fermat). *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f έχει τοπικό ακρότατο σε κάποιο $x_0 \in (a, b)$ και ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε,*

$$f'(x_0) = 0.$$

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε οτι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a, b)$ και $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$ για κάθε $h \in (-\delta, \delta)$.

Αν $0 < h < \delta$ τότε

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0, \quad \text{άρα} \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Συνεπώς, $f'(x_0) \leq 0$.
Αν $-\delta < h < 0$ τότε

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0, \quad \text{άρα} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Συνεπώς, $f'(x_0) \geq 0$.
Από τις δύο ανισότητες έπεται ότι $f'(x_0) = 0$. □

Ορισμός 5.5.7. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$. Ένα εσωτερικό σημείο x_0 του I λέγεται κρίσιμο σημείο για την f αν $f'(x_0) = 0$.*

Παράδειγμα 5.5.8. Τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης είναι πολύ χρήσιμα όταν θέλουμε να βρούμε τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή της. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Γνωρίζουμε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή $\max(f)$ και ελάχιστη τιμή $\min(f)$ στο $[a,b]$. Αν $x_0 \in [a,b]$ και $f(x_0) = \max(f)$ ή $f(x_0) = \min(f)$, τότε αναγκαστικά συμβαίνει κάποιο από τα παρακάτω:

(i) $x_0 = a$ ή $x_0 = b$ (άκρο του διαστήματος).

(ii) $x_0 \in (a,b)$ και $f'(x_0) = 0$ (κρίσιμο σημείο).

(iii) $x_0 \in (a,b)$ και η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Δεδομένου ότι, στην πράξη, το πλήθος των σημείων που ανήκουν σε αυτές τις «τρεις ομάδες» είναι σχετικά μικρό, μπορούμε με απλό υπολογισμό και σύγκριση μερικών τιμών της συνάρτησης να απαντήσουμε στο ερώτημα.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^3 - x$ στο $[-1,2]$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,2)$, με παράγωγο $f'(x) = 3x^2 - 1$. Τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η παράγωγος είναι τα $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ και $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ τα οποία ανήκουν στο $(-1,2)$. Άρα, τα σημεία στα οποία μπορεί να παίρνει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή η f είναι τα άκρα του διαστήματος και τα δύο κρίσιμα σημεία:

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_3 = 2.$$

Οι αντίστοιχες τιμές είναι:

$$f(-1) = 0, \quad f(-1/\sqrt{3}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad f(1/\sqrt{3}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad f(2) = 6.$$

Συγκρίνοντας αυτές τις τέσσερις τιμές βλέπουμε ότι $\max(f) = f(2) = 6$ και $\min(f) = f(1/\sqrt{3}) = -2/(3\sqrt{3})$. □

5.6 Θεώρημα Μέσης Τιμής

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια σταθερή συνάρτηση. Δηλαδή, υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = c$ για κάθε $x \in [a, b]$. Γνωρίζουμε ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, παραγωγίσιμη στο (a, b), με την ιδιότητα $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Είναι σωστό ότι η f είναι σταθερή στο $[a, b]$;

Το ερώτημα αυτό είναι παρόμοιας φύσης με εκείνο της Παρατήρησης 5.5.3: αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση έχει παντού μη αρνητική παράγωγο, είναι σωστό ότι είναι αύξουσα; Είναι λογικό να περιμένουμε ότι η απάντηση είναι «ναι» στα δύο αυτά ερωτήματα. Σκεφτείτε ένα κινητό: $f(x)$ είναι η προσημασμένη απόσταση από την αρχική θέση τη χρονική στιγμή x και $f'(x)$ είναι η ταχύτητα τη χρονική στιγμή x. Αν η ταχύτητα είναι συνεχώς μηδενική, το κινητό «μένει ακίνητο» και η απόσταση παραμένει σταθερή. Αν η ταχύτητα είναι παντού μη αρνητική, το κινητό «απομακρύνεται από την αρχική του θέση» και η απόσταση αυξάνει με την πάροδο του χρόνου.

Για την αυστηρή όμως απόδειξη αυτών των δύο ισχυρισμών, θα χρειαστεί να συνδυάσουμε την έννοια της παραγώγου με τα βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις σε κλειστά διαστήματα. Το βασικό τεχνικό βήμα είναι η απόδειξη του «θεωρήματος μέσης τιμής».

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε οτι η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b): δηλαδή, για κάθε $x \in (a, b)$ ορίζεται καλά η εφαπτομένη του γραφήματος της f στο $(x, f(x))$. Θεωρούμε την ευθεία (ℓ) που περνάει από τα σημεία $A = (a, f(a))$ και $B = (b, f(b))$. Αν τη μετακινήσουμε παράλληλα προς τον εαυτό της, κάποια από τις παράλληλες θα εφάπτεται στο γράφημα της f σε κάποιο σημείο $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$. Η κλίση της εφαπτομένης θα πρέπει να ισούται με την κλίση της ευθείας (ℓ). Δηλαδή,

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Στο πρώτο μέρος αυτής της παραγράφου δίνουμε αυστηρή απόδειξη αυτού του ισχυρισμού (Θεώρημα Μέσης Τιμής). Αποδεικνύουμε πρώτα μια ειδική περίπτωση: το θεώρημα του Rolle.

Θεώρημα 5.6.1 (Rolle). *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b). Υποθέτουμε επιπλέον ότι $f(a) = f(b)$. Τότε, υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε*

$$f'(x_0) = 0.$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση που η f είναι σταθερή στο $[a, b]$, δηλαδή $f(x) = f(a) = f(b)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε, $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ και οποιοδήποτε από αυτά τα x μπορεί να παίξει το ρόλο του x_0.

Έστω λοιπόν ότι η f δεν είναι σταθερή στο $[a, b]$. Τότε, υπάρχει $x_1 \in (a, b)$ ώστε $f(x_1) \neq f(a)$ και χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(x_1) >$

$f(a)$. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, άρα παίρνει μέγιστη τιμή: υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ ώστε

$$f(x_0) = \max\{f(x) : x \in [a,b]\} \geq f(x_1) > f(a).$$

Ειδικότερα, $x_0 \neq a, b$. Δηλαδή, το x_0 βρίσκεται στο ανοικτό διάστημα (a,b). Η f έχει (ολικό) μέγιστο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Από το Θεώρημα 5.5.6 (Fermat) συμπεραίνουμε ότι $f'(x_0) = 0$. □

Το θεώρημα μέσης τιμής είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος του Rolle.

Θεώρημα 5.6.2 (θεώρημα μέσης τιμής). *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Τότε, υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε*

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Απόδειξη. Θα αναχθούμε στο Θεώρημα του Rolle ως εξής. Θεωρούμε τη γραμμική συνάρτηση $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ που παίρνει τις ίδιες τιμές με την f στα σημεία a και b. Δηλαδή,

$$h(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Ορίζουμε μια συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = f(x) - h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Η g είναι συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b) και από τον τρόπο επιλογής της h έχουμε

$$g(a) = f(a) - h(a) = 0 \quad \text{και} \quad g(b) = f(b) - h(b) = 0.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε $g'(x_0) = 0$. Όμως,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

στο (a,b). Άρα, το x_0 ικανοποιεί το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 5.6.3. Η υπόθεση ότι η f είναι συνεχής στο *κλειστό διάστημα* $[a,b]$ χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη και είναι απαραίτητη. Θεωρήστε, για παράδειγμα, την $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ αν $0 \leq x < 1$ και $f(1) = 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη (άρα, συνεχής) στο $(0,1)$ και έχουμε $f(0) = f(1) = 0$. Όμως δεν υπάρχει $x \in (0,1)$ που να ικανοποιεί την $f'(x) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 0$, αφού $f'(x) = 1$ για κάθε $x \in (0,1)$. Το πρόβλημα είναι στο σημείο 1: η f είναι ασυνεχής στο 1, δηλαδή δεν είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Το θεώρημα μέσης τιμής μας επιτρέπει να απαντήσουμε στα ερωτήματα που συζητήσαμε στην αρχή της παραγράφου.

Θεώρημα 5.6.4. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση.*

(i) *Αν $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, τότε η f είναι αύξουσα στο (a,b).*

(ii) *Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a,b).*

(iii) *Αν $f'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, τότε η f είναι φθίνουσα στο (a,b).*

(iv) *Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (a,b).*

(v) *Αν $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, τότε η f είναι σταθερή στο (a,b).*

Απόδειξη. Θα δείξουμε έναν από τους πρώτους τέσσερις ισχυρισμούς: υποθέτουμε ότι $f'(x) \geq 0$ στο (a,b), και θα δείξουμε ότι αν $a < x < y < b$ τότε $f(x) \leq f(y)$. Θεωρούμε τον περιορισμό της f στο $[x,y]$. Η f είναι συνεχής στο $[x,y]$ και παραγωγίσιμη στο (x,y), οπότε εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής βρίσκουμε $\xi \in (x,y)$ που ικανοποιεί την

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Αφού $f'(\xi) \geq 0$ και $y - x > 0$, έχουμε $f(y) - f(x) \geq 0$. Δηλαδή, $f(x) \leq f(y)$.

Για τον τελευταίο ισχυρισμό παρατηρήστε ότι αν $f' = 0$ στο (a,b) τότε $f' \geq 0$ και $f' \leq 0$ στο (a,b). Άρα, η f είναι ταυτόχρονα αύξουσα και φθίνουσα: αν $x < y$ στο (a,b) τότε $f(x) \leq f(y)$ και $f(x) \geq f(y)$, δηλαδή $f(x) = f(y)$. Έπεται ότι η f είναι σταθερή. □

Μια παραλλαγή (και γενίκευση) του θεωρήματος Μέσης Τιμής είναι το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy:

Θεώρημα 5.6.5 (θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy). *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, συνεχείς στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμες στο (a,b). Τότε, υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε*

$$(*) \qquad [f(b) - f(a)]\, g'(x_0) = [g(b) - g(a)]\, f'(x_0).$$

Σημείωση: Παρατηρήστε πρώτα ότι το θεώρημα μέσης τιμής είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος που θέλουμε να δείξουμε: αν $g(x) = x$ τότε $g'(x) = 1$ και η $(*)$ παίρνει τη μορφή

$$[f(b) - f(a)] \cdot 1 = (b - a)\, f'(x).$$

Η ύπαρξη κάποιου $x_0 \in (a,b)$ το οποίο ικανοποιεί αυτήν την ισότητα είναι ακριβώς ο ισχυρισμός του θεωρήματος μέσης τιμής.

Θυμηθείτε τώρα την ιδέα της απόδειξης του θεωρήματος μέσης τιμής. Εφαρμόσαμε το θεώρημα του Rolle για τη συνάρτηση

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Ισοδύναμα (πολλαπλασιάστε την προηγούμενη συνάρτηση με $b-a$) θα μπορούσαμε να έχουμε πάρει την

$$[f(x)-f(a)]\,(b-a)-[f(b)-f(a)]\,(x-a).$$

Θα θεωρήσουμε λοιπόν συνάρτηση αντίστοιχη με αυτήν, «αντικαθιστώντας την x με την $g(x)$».

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ με

$$h(x)=[f(x)-f(a)]\,(g(b)-g(a))-[f(b)-f(a)]\,(g(x)-g(a)).$$

Η h είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b) (γιατί οι f και g έχουν τις ίδιες ιδιότητες). Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$h(a)=0=h(b).$$

Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Rolle: υπάρχει $x_0\in(a,b)$ ώστε $h'(x_0)=0$. Αφού

$$h'(x_0)=f'(x_0)\,(g(b)-g(a))-g'(x_0)\,(f(b)-f(a)),$$

παίρνουμε την $(*)$. □

Παρατήρηση 5.6.6. Το ενδιαφέρον σημείο στην $(*)$ είναι ότι οι παράγωγοι $f'(x_0)$ και $g'(x_0)$ «υπολογίζονται στο ίδιο σημείο» x_0.

Πολύ συχνά, το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy διατυπώνεται ως εξής.

Πόρισμα 5.6.7. *Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, συνεχείς στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμες στο (a,b). Υποθέτουμε επιπλέον ότι*

(α) *οι f' και g' δεν έχουν κοινή ρίζα στο (a,b).*

(β) $g(b)-g(a)\neq 0$.

Τότε υπάρχει $x_0\in(a,b)$ ώστε

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy, υπάρχει $x_0\in(a,b)$ ώστε

$$(f(b)-f(a))g'(x_0)=(g(b)-g(a))f'(x_0).$$

Παρατηρούμε ότι $g'(x_0)\neq 0$: αν είχαμε $g'(x_0)=0$, τότε θα ήταν $(g(b)-g(a))f'(x_0)=0$ και, αφού από την υπόθεσή μας $g(b)-g(a)\neq 0$, θα έπρεπε να έχουμε $f'(x_0)=0$. Δηλαδή οι f' και g' θα είχαν κοινή ρίζα. Μπορούμε λοιπόν να διαιρέσουμε τα δύο μέλη της ισότητας με $(g(b)-g(a))g'(x_0)$ και να πάρουμε το ζητούμενο. □