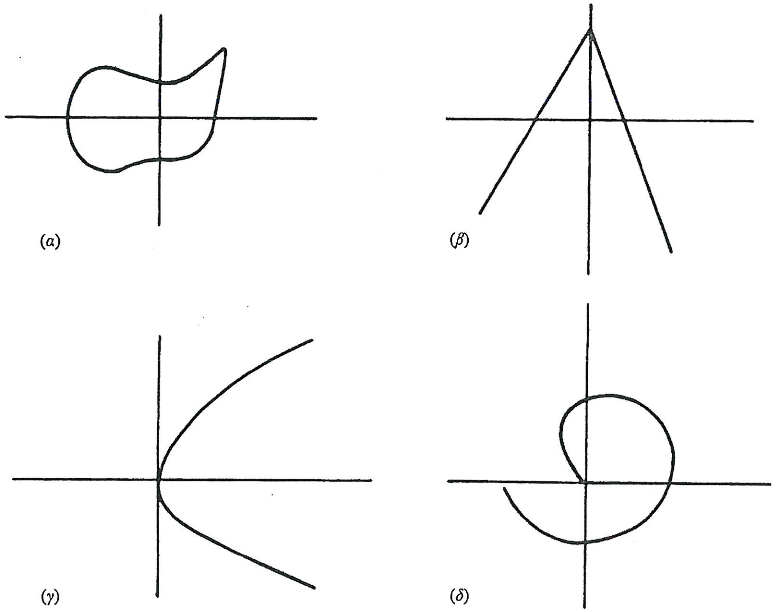


Σχήμα 6–8

Αποσπάσματα από το βιβλίο Schaum's Διαφορικός – Ολοκληρωτικός Λογισμός

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Όρια

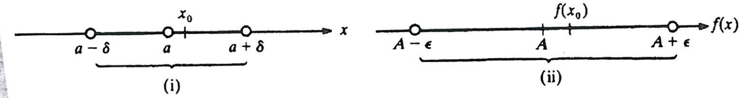
ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ. Αν f είναι μια συνάρτηση, τότε λέμε ότι

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

αν η τιμή της $f(x)$ προσεγγίζει σταδιακά το A καθώς το x προσεγγίζει σταδιακά το α. Για παράδειγμα, $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$, επειδή το x^2 προσεγγίζει σταδιακά το 9 καθώς το x προσεγγίζει το 3.

Ο ορισμός μπορεί να διατυπωθεί με μεγαλύτερη ακρίβεια ως εξής: $\lim_{x\to a} f(x) = A$ αν και μόνο αν, για κάθε επιλεγμένο θετικό αριθμό ϵ, ανεξάρτητα από το πόσο μικρός είναι, υπάρχει ένας θετικός αριθμός δ τέτοιος ώστε, όταν $0 < |x-a| < \delta$, τότε $|f(x) - A| < \epsilon$.

Η σημασία του ορισμού φαίνεται στο Σχήμα 7–1. Μετά την επιλογή του ϵ [δηλαδή, μετά την επιλογή του διαστήματος (ii)], μπορεί να βρεθεί μια τιμή δ [δηλαδή, μπορεί να προσδιοριστεί ένα διάστημα (i)] έτσι ώστε, όταν το $x \neq \alpha$ βρίσκεται στο διάστημα (i), για παράδειγμα στο σημείο x_0, τότε η τιμή $f(x)$ βρίσκεται στο διάστημα (ii), στο σημείο $f(x_0)$. Είναι σημαντικό να προσέξετε ότι το όριο $\lim_{x\to a} f(x) = A$, είτε είναι πραγματικό είτε όχι, δεν εξαρτάται από την τιμή $f(x)$ όταν $x = \alpha$. Μάλιστα, η τιμή $f(x)$ δεν χρειάζεται καν να προσδιοριστεί όταν $x = \alpha$.



Σχήμα 7–1

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Αν και η παράσταση $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ δεν ορίζεται όταν $x = 2$, $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$. Επειδή

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$$

διαπιστώνουμε ότι καθώς το x προσεγγίζει το 2, η παράσταση $\dfrac{x^2-4}{x-2}$ προσεγγίζει το 4.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Ας χρησιμοποιήσουμε τον ακριβή ορισμό για να αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to 2}(4x-5)=3$. Έστω ότι επιλέγουμε $\epsilon > 0$. Πρέπει να βρούμε μια τιμή $\delta > 0$ τέτοια ώστε όταν $0<|x-2|<\delta$, τότε $|(4x-5)-3|<\epsilon$.

Πρώτα παρατηρούμε ότι $|(4x-5)-3|=|4x-8|=4|x-2|$.

Αν θεωρήσουμε ότι $\delta=\epsilon/4$, τότε, όταν $0<|x-2|<\delta$, $|(4x-5)-3|=4|x-2|<4\delta=\epsilon$.

ΔΕΞΙΑ ΚΑΙ ΑΡΙΣΤΕΡΑ ΟΡΙΑ. Με τη διατύπωση $\lim_{x\to a^-} f(x)=A$ εννοούμε ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε ένα διάστημα (γ, a), και η $f(x)$ προσεγγίζει το A καθώς το x προσεγγίζει το a μέσω τιμών μικρότερων του a, δηλαδή *από αριστερά*. Παρόμοια, $\lim_{x\to a^+} f(x)=A$ σημαίνει ότι η f ορίζεται σε ένα διάστημα (a, δ), και η $f(x)$ προσεγγίζει το A καθώς το x προσεγγίζει το a *από δεξιά*. Αν η f ορίζεται σε ένα διάστημα αριστερά του σημείου a και σε ένα διάστημα δεξιά του a, τότε η διατύπωση $\lim_{x\to a} f(x)=A$ ισοδυναμεί με το συνδυασμό των δύο διατυπώσεων $\lim_{x\to a^-} f(x)=A$ και $\lim_{x\to a^+} f(x)=A$. Η ύπαρξη του αριστερού ορίου δεν συνεπάγεται την ύπαρξη του δεξιού ορίου, και το αντίστροφο.

Όταν μια συνάρτηση ορίζεται μόνο στο διάστημα που βρίσκεται στη μία πλευρά ενός σημείου a, τότε το όριο $\lim_{x\to a} f(x)$ είναι ίδιο με το μονόπλευρο όριο — αν υπάρχει. Για παράδειγμα, αν $f(x)=\sqrt{x}$, τότε η f ορίζεται μόνο στο μηδέν και στα δεξιά του. Συνεπώς, $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$. Φυσικά, το όριο $\lim_{x\to 0^-}\sqrt{x}$ δεν υπάρχει καθώς το $\sqrt{x}$ δεν ορίζεται όταν $x<0$. Ως δεύτερο παράδειγμα, ας εξετάσουμε τη συνάρτηση $g(x)=\sqrt{1/x}$, η οποία ορίζεται μόνο για $x>0$. Σε αυτή την περίπτωση, το όριο $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{1/x}$ δεν υπάρχει, επειδή το $1/x$ αυξάνεται συνεχώς χωρίς περιορισμό καθώς το x προσεγγίζει το μηδέν από δεξιά. Άρα, το όριο $\lim_{x\to 0}\sqrt{1/x}$ δεν υπάρχει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3: Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ έχει ως πεδίο ορισμού το διάστημα $-3\le x\le 3$. Αν a είναι οποιοσδήποτε αριθμός στο ανοιχτό διάστημα $(-3, 3)$, τότε το όριο $\lim_{x\to a}\sqrt{9-x^2}$ υπάρχει και ισούται με $\sqrt{9-a^2}$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $a=3$. Έστω ότι το x προσεγγίζει το 3 από τα αριστερά· τότε, $\lim_{x\to 3^-}\sqrt{9-x^2}=0$. Για $x>3$, το $\sqrt{9-x^2}$ δεν ορίζεται. Συνεπώς, $\lim_{x\to 3}\sqrt{9-x^2}=\lim_{x\to 3^-}\sqrt{9-x^2}=0$.

Παρόμοια, $\lim_{x\to -3}\sqrt{9-x^2}=\lim_{x\to -3^+}\sqrt{9-x^2}=0$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΟΡΙΩΝ. Η ισχύς των παρακάτω θεωρημάτων είναι προφανής. Αποδείξεις για μερικά από αυτά δίνονται στο Πρόβλημα 11.

Θεώρημα 7.1: Αν $f(x)=\gamma$ είναι σταθερά, τότε, $\lim_{x\to a} f(x)=\gamma$.

Για τα επόμενα πέντε θεωρήματα, υποθέστε ότι $\lim_{x\to a} f(x)=A$, και $\lim_{x\to a} g(x)=B$.

Θεώρημα 7.2: $\lim_{x\to a}\gamma\cdot f(x)=\gamma\lim_{x\to a} f(x)=\gamma A$.

Θεώρημα 7.3: $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=A\pm B$.

Θεώρημα 7.4: $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)=A\cdot B$.

Θεώρημα 7.5: $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\dfrac{A}{B}$, αν $B\neq 0$.

Θεώρημα 7.6: $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}=\sqrt[n]{A}$, αν ορίζεται το $\sqrt[n]{A}$.

ΑΠΕΙΡΟ. Έστω ότι η διατύπωση

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$$

σημαίνει ότι, καθώς το x προσεγγίζει το a, η $f(x)$ γίνεται (και παραμένει) μεγαλύτερη από κάθε προηγούμενη θετική τιμή που είχε, όσο μεγάλη και αν ήταν αυτή. Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι, καθώς το x προσεγγίζει το a, η $f(x)$ προσεγγίζει το $+\infty$. Για την ακρίβεια, $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ αν και μόνο αν, για κάθε θετικό αριθμό M, υπάρχει ένας θετικός αριθμός δ τέτοιος ώστε, όταν $0<|x-a|<\delta$, τότε $f(x)>M$.

Παρόμοια, έστω ότι

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$$

σημαίνει ότι καθώς το x προσεγγίζει το a, η $f(x)$ γίνεται (και παραμένει) μικρότερη από κάθε προηγούμενη αρνητική τιμή που είχε. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι, καθώς το x προσεγγίζει το a, η $f(x)$ προσεγγίζει το $-\infty$.

Έστω ότι η διατύπωση

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

σημαίνει ότι, καθώς το x προσεγγίζει το a, η $|f(x)|$ γίνεται (και παραμένει) μεγαλύτερη από κάθε προηγούμενη θετική τιμή που είχε. Συνεπώς, $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, αν και μόνο αν $\lim_{x\to a}|f(x)|=+\infty$.

Αυτοί οι ορισμοί μπορούν να επεκταθούν και σε πλευρικά όρια με τον προφανή τρόπο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4: (α) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$, ($\beta$) $\lim_{x\to 1}\dfrac{-1}{(x-1)^2}=-\infty$, ($\gamma$) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

(α) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$. Καθώς το x προσεγγίζει το 0 από δεξιά, (δηλαδή μέσω θετικών αριθμών), το $1/x$ είναι θετικό και τελικά γίνεται μεγαλύτερο από κάθε προηγούμενη τιμή που είχε.

(β) $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$ επειδή καθώς το x προσεγγίζει το 0 από αριστερά (δηλαδή μέσω αρνητικών αριθμών), το $1/x$ είναι αρνητικό και τελικά γίνεται μικρότερο από κάθε προηγούμενη τιμή που είχε.

Οι έννοιες των ορίων που παρουσιάσαμε εδώ μπορούν να επεκταθούν με τον προφανή τρόπο στην περίπτωση κατά την οποία η μεταβλητή προσεγγίζει το $+\infty$, ή το $-\infty$. Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=A$$

σημαίνει ότι καθώς το $x\to+\infty$, η $f(x)$ προσεγγίζει την τιμή A, ή για την ακρίβεια, για κάθε δεδομένο θετικό ϵ, υπάρχει ένας αριθμός N τέτοιος ώστε όποτε $x>N$, τότε $|f(x)-A|<\epsilon$. Παρόμοιοι ορισμοί μπορούν να δοθούν για τις διατυπώσεις, $\lim_{x\to -\infty} f(x)=A$, $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$, και $\lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$.

19. Βρείτε το $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ για τις συναρτήσεις f στα Προβλήματα 11, 12, 13, 15, και 16 ($\alpha, \beta, \delta, \zeta$) του Κεφαλαίου 6.

Απάντ. (11) $2\alpha-4$, (12) $\dfrac{2}{(a+1)^2}$, (13) $2\alpha-1$, (15) $-\dfrac{27}{(4a-5)^2}$, (16) (α) 2α, (β) $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+4}}$, (δ) $\dfrac{3}{(a+3)^2}$, (ζ) $\dfrac{4a}{(a^2+1)^2}$

20. Μελετήστε τη συμπεριφορά της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases} x & x>0 \\ x+1 & x\le 0 \end{cases}$$

καθώς το $x\to 0$. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση και επαληθεύστε τη με αριθμομηχανή γραφημάτων.

Απάντ. $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)=1$, το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

21. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 7.4 και μαθηματική επαγωγή για να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ για όλους τους θετικούς ακεραίους n.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=5x-6$ · βρείτε ένα $\delta>0$ τέτοιο ώστε όταν $0<|x-4|<\delta$, τότε $|f(x)-14|<\epsilon$, όταν (α) $\epsilon=\frac{1}{2}$ και (β) $\epsilon=0.001$.

Απάντ. (α) $\frac{1}{10}$, (β) 0.0002

23. Χρησιμοποιήστε τον ακριβή ορισμό για να αποδείξετε: (α) $\lim_{x\to 3} 5x-15$, (β) $\lim_{x\to 2} x^2=4$, (γ) $\lim_{x\to 2}(x^2-3x+5)=3$.

24. Χρησιμοποιήστε τον ακριβή ορισμό για να αποδείξετε:

(α) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$ (β) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}=\infty$ (γ) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}=1$ (δ) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x+1}=-\infty$

25. Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$, και $h(x)$ είναι τέτοιες ώστε (1) $f(x)\le g(x)\le h(x)$ για όλες τις τιμές σε συγκεκριμένα διαστήματα αριστερά και δεξιά του α, και (2) $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)=A$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to a} g(x)=A$.

(*Συμβουλή*: Για $\epsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε όποτε $0<|x-a|<\delta$, τότε $|f(x)-A|<\epsilon$ και $|h(x)-A|<\epsilon$ και άρα, $A-\epsilon<f(x)\le g(x)\le h(x)<A+\epsilon$.)

26. Αποδείξτε ότι, αν $f(x)<M$ για κάθε x σε ένα ανοιχτό διάστημα που περιλαμβάνει το α και αν $\lim_{x\to a} f(x)=A$, τότε $A\le M$.

(*Συμβουλή*: Υποθέστε ότι $A>M$. Επιλέξτε $\epsilon=\frac{1}{2}(A-M)$ και καταλήξτε σε αντίφαση.)

27. (GC) Χρησιμοποιήστε αριθμομηχανή γραφημάτων για να επιβεβαιώσετε τα όρια που βρήκαμε στα Προβλήματα 1($\delta, \varepsilon, \sigma\tau$), 2($\alpha, \beta, \delta$), 16, και 18.

28. (α) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=0$.

(*Συμβουλή*: Πολλαπλασιάστε και διαιρέστε με $x+\sqrt{x^2-1}$.)

(β) Αποδείξτε ότι η υπερβολή $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ προσεγγίζει την ασύμπτωτη $y=\dfrac{\beta}{a}x$ καθώς το x προσεγγίζει το ∞.

29. (α) Βρείτε το $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$.

(*Συμβουλή*: Πολλαπλασιάστε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με $\sqrt{x+3}+\sqrt{3}$.)

(β) (GC) Χρησιμοποιήστε αριθμομηχανή γραφημάτων για να επαληθεύσετε το αποτέλεσμα του μέρους (α).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Συνέχεια

Μια συνάρτηση ορίζεται ως συνεχής στο x_0 αν ισχύουν οι τρεις παρακάτω συνθήκες:

(i) η συνάρτηση $f(x_0)$ είναι ορισμένη,

(ii) υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$,

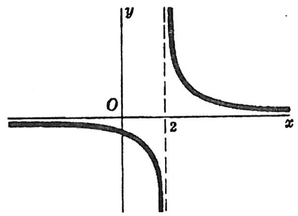
(iii) $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Για παράδειγμα, η $f(x)=x^2+1$ είναι συνεχής στο 2 αφού, $\lim_{x\to 2} f(x)=5=f(2)$. Η συνθήκη (i) υπαγορεύει ότι μια συνάρτηση μπορεί να είναι συνεχής μόνο στα σημεία του πεδίου ορισμού της. Συνεπώς, η $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ δεν είναι συνεχής στο 3 επειδή το $f(3)$ δεν ορίζεται.

Έστω f μια συνάρτηση η οποία ορίζεται στο διάστημα (α, x_0) αριστερά του x_0, ή/και στο διάστημα (x_0, β) δεξιά του x_0. Η f είναι ασυνεχής στο x_0 αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, δηλαδή αν δεν ισχύει μία (ή περισσότερες) από τις συνθήκες (i)–(iii).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

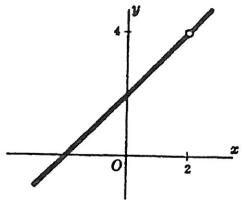
(α) Η $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ είναι ασυνεχής στο 2 επειδή το $f(2)$ δεν ορίζεται και επειδή το όριο $\lim_{x\to 2} f(x)$ δεν υπάρχει (καθώς $\lim_{x\to 2} f(x)=\infty$). Δείτε το Σχήμα 8–1.



Σχήμα 8–1

(β) Η $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ είναι ασυνεχής στο 2 επειδή το $f(2)$ δεν ορίζεται. Όμως, $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x-2)}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$ και η συνθήκη (ii) ισχύει.

Η ασυνέχεια στο 2, στο Παράδειγμα 1(*β*), θεωρείται *αιρούμενη* επειδή, αν επεκτείνουμε τη συνάρτηση f ορίζοντας την τιμή της στο $x = 2$ ως 4, τότε η γενικευμένη συνάρτηση g θα είναι συνεχής στο 2. Προσέξτε ότι $g(x) = x + 2$ για κάθε x. Οι γραφικές παραστάσεις των $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ και $g(x) = x + 2$ είναι πανομοιότυπες, με τη μόνη διαφορά ότι στο σημείο $x = 2$ της πρώτης υπάρχει μια «οπή». (Δείτε το Σχήμα 8–2). Η άρση της ασυνέχειας απαιτεί απλώς την πλήρωση της «οπής».



Σχήμα 8–2

Η ασυνέχεια στο σημείο 2 του Παραδείγματος 1(*α*) δεν είναι αιρούμενη. Ο επαναπροσδιορισμός της τιμής της f στο σημείο 2 δεν αλλάζει το γεγονός ότι το όριο $\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}$ δεν υπάρχει.

Επίσης, η ασυνέχεια μιας συνάρτησης f στο x_0 είναι *αιρούμενη* όταν το $f(x_0)$ ορίζεται και όταν η αλλαγή της τιμής της συνάρτησης στο x_0 δίνει μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής στο x_0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Ας ορίσουμε μια συνάρτηση f ως εξής:

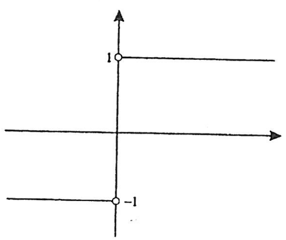
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{αν } x\neq 2 \\ 0 & \text{αν } x=2 \end{cases}$$

Εδώ ισχύει $\lim_{x\to 2} f(x)=4$, αλλά $f(2) = 0$. Συνεπώς, η συνθήκη (iii) δεν ισχύει και άρα η f έχει ασυνέχεια στο 2. Αλλά, αν αλλάξουμε την τιμή της f στο 2 ώστε να είναι 4, θα πάρουμε μια συνάρτηση h για την οποία ισχύει $h(x) = x^2$ για κάθε x, και η h θα είναι συνεχής στο 2. Άρα, η ασυνέχεια της f στο 2 είναι αιρούμενη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3: Έστω f μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ για κάθε $x \neq 0$. Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο Σχήμα 8–3. Η f είναι ασυνεχής στο 0 επειδή το $f(0)$ δεν ορίζεται. Επίσης,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1, \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

Συνεπώς, $\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$. Άρα, η ασυνέχεια της f στο 0 δεν είναι αιρούμενη.



Σχήμα 8–3

Το είδος της ασυνέχειας που παρουσιάζεται στο Παράδειγμα 3 ονομάζεται *ασυνέχεια άλματος*. Γενικά, μια συνάρτηση f έχει ασυνέχεια άλματος στο x_0 αν υπάρχει και το $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ και το $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, και ισχύει $\lim_{x\to x_0^-} f(x)\neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$. Μια τέτοια ασυνέχεια δεν είναι αιρούμενη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4: Η συνάρτηση του Προβλήματος 4 στο Κεφάλαιο 6 έχει ασυνέχεια άλματος σε κάθε θετικό ακέραιο.

Οι ιδιότητες των ορίων οδηγούν σε αντίστοιχες ιδιότητες της συνέχειας.

Θεώρημα 8.1: Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0. Τότε:

(*α*) Η σταθερή συνάρτηση $h(x) = \gamma$ για κάθε x είναι συνεχής σε κάθε x_0.
(*β*) Η γf είναι σταθερή στο x_0, για κάθε σταθερό γ. (Θυμηθείτε ότι η γf έχει τιμή $\gamma\cdot f(x)$ για κάθε όρισμα x.)
(*γ*) Η συνάρτηση $f + g$ είναι συνεχής στο x_0.
(*δ*) Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο x_0.
(*ε*) Η fg είναι συνεχής στο x_0.
(*στ*) Η f/g είναι συνεχής στο x_0 αν $g(x_0) \neq 0$.
(*ζ*) Η $\sqrt[n]{f}$ είναι συνεχής στο x_0 αν ορίζεται το $\sqrt[n]{f(x_0)}$.

Αυτά τα αποτελέσματα προκύπτουν άμεσα από τα Θεωρήματα 7.1–7.6. Για παράδειγμα, το (*γ*) ισχύει επειδή,

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)+g(x_0)$$

Θεώρημα 8.2: Η ταυτοτική συνάρτηση $I(x) = x$ είναι συνεχής σε κάθε x_0.

Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι $\lim_{x\to x_0} x = x_0$.

Μια συνάρτηση f λέμε ότι *είναι συνεχής σε ένα σύνολο A* αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A. Επιπλέον, όταν λέμε ότι η συνάρτηση f *είναι συνεχής*, εννοούμε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε πραγματικό αριθμό.

Σύμφωνα με την αρχική διαισθητική ιδέα που κρύβεται πίσω από την έννοια της συνέχειας, η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης είναι «συνεχής» αν μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί. Μια τέτοια γραφική παράσταση δεν θα περιείχε «οπές» ή «άλματα». Όμως, αποδεικνύεται ότι ο ακριβής ορισμός της συνέχειας επεκτείνεται πέρα από την αρχική διαισθητική έννοια· υπάρχουν πολύ σύνθετες συνεχείς συναρτήσεις τις οποίες σίγουρα δεν μπορούμε να σχεδιάσουμε σε ένα φύλλο χαρτί.

Θεώρημα 8.3: Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$$

είναι συνεχής.

Αυτό είναι συνέπεια του Θεωρήματος 8.2 και του Θεωρήματος 8.1 (*α*–*ε*).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5: Ως παράδειγμα του Θεωρήματος 8.3, θεωρήστε τη συνάρτηση $x^2 - 2x + 3$. Παρατηρήστε ότι, σύμφωνα με το Θεώρημα 8.2, η ταυτοτική συνάρτηση x είναι συνεχής και, επομένως, σύμφωνα με τα Θεωρήματα 8.1(*ε*) και 8.1(*β*), οι x^2 και $-2x$ αντίστοιχα είναι συνεχείς. Από το Θεώρημα 8.1(*α*) προκύπτει ότι, η σταθερή συνάρτηση 3 είναι συνεχής. Τέλος, από το Θεώρημα 8.1(*γ*) προκύπτει ότι, η συνάρτηση $x^2 - 2x + 3$ είναι συνεχής.

Θεώρημα 8.4: Κάθε *ρητή συνάρτηση* $H(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, όπου οι $f(x)$ και $g(x)$ είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις, είναι συνεχείς στο σύνολο όλων των σημείων για τα οποία ισχύει $g(x) \neq 0$.

Αυτό προκύπτει από τα Θεωρήματα 8.3 και 8.1(στ). Για παράδειγμα, η συνάρτηση $H(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ είναι συνεχής σε όλα τα σημεία, εκτός των 1 και -1, και η συνάρτηση $G(x)=\dfrac{x-7}{x^2+1}$ είναι συνεχής σε όλα τα σημεία (αφού το x^2+1 δεν είναι ποτέ μηδέν).

Θα χρησιμοποιήσουμε μια ειδική έννοια της συνέχειας για ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Καταρχήν λέμε ότι, μια συνάρτηση f είναι *συνεχής δεξιά στο σημείο* α, αν το $f(\alpha)$ ορίζεται, υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$, και $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha)$. Λέμε ότι η συνάρτηση f είναι *συνεχής αριστερά στο σημείο* β, αν το $f(\beta)$ ορίζεται, υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$, και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$.

Ορισμός: Η συνάρτηση f είναι *συνεχής* στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του ανοιχτού διαστήματος (α, β), είναι *συνεχής δεξιά* στο α, και *συνεχής αριστερά* στο β.

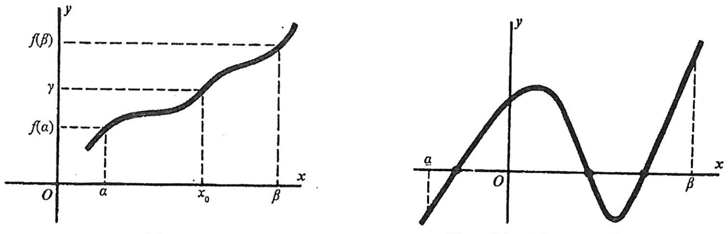
Προσέξτε ότι η συνέχεια της f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ δεν εξαρτάται από τις τιμές της f (αν υπάρχουν) που βρίσκονται έξω από το $[\alpha, \beta]$. Προσέξτε επίσης ότι κάθε συνεχής συνάρτηση (δηλαδή, κάθε συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς) πρέπει να είναι συνεχής σε κάθε κλειστό διάστημα. Πιο συγκεκριμένα, κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε κλειστό διάστημα.

Θα αναλύσουμε τώρα ορισμένες πιο σύνθετες ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε — ωστόσο, οι αποδείξεις τους δεν περιλαμβάνονται στους σκοπούς αυτού του βιβλίου.

Θεώρημα 8.5: (Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής). Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(\alpha)\neq f(\beta)$, τότε, για κάθε αριθμό γ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός x_0 στο ανοιχτό διάστημα (α, β) για τον οποίο ισχύει $f(x_0)=\gamma$.

Στο Σχήμα 8–4(α) απεικονίζεται το Θεώρημα 8.5. Σύμφωνα με το Σχήμα 8–5, η ισχύς του θεωρήματος προϋποθέτει συνέχεια σε όλο το διάστημα. Το παρακάτω αποτέλεσμα είναι μια ειδική περίπτωση του Θεωρήματος της Ενδιάμεσης Τιμής.

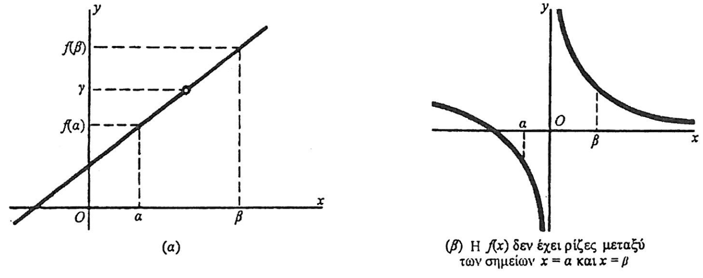
Λήμμα 8.6. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και τα $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ έχουν αντίθετα πρόσημα, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο ανοιχτό διάστημα (α, β) και, επομένως, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα των x τουλάχιστον μία φορά μεταξύ των α και β. (Δείτε το Σχήμα 8–4(β).)



(α)

(β) το $f(x) = 0$ έχει τρεις ρίζες μεταξύ των $x = \alpha$ και $x = \beta$.

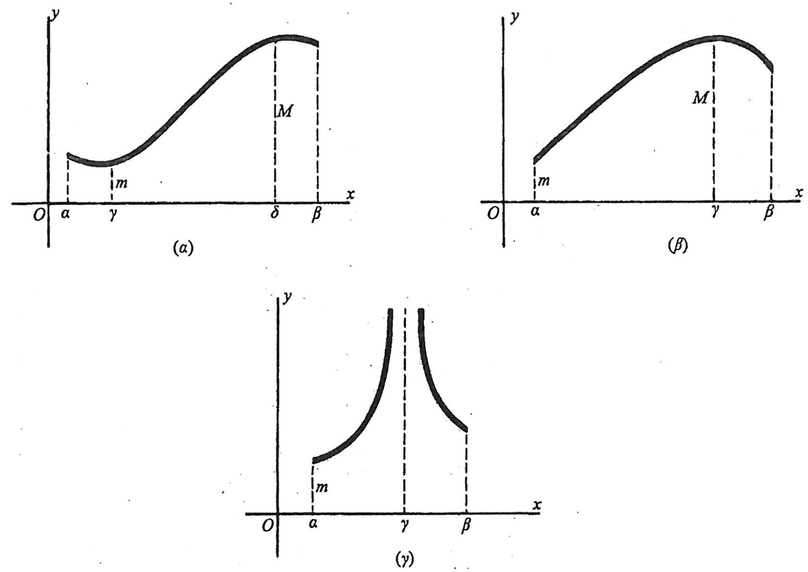
Σχήμα 8–4



Σχήμα 8–5

Θεώρημα 8.7: (Θεώρημα Ακροτάτων). Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε η f έχει μια ελάχιστη τιμή m και μια μέγιστη τιμή M σε αυτό.

Στο Σχήμα 8–6(α) μπορείτε να δείτε μια γραφική απεικόνιση του Θεωρήματος των Ακροτάτων, όπου η ελάχιστη τιμή m εμφανίζεται στο $x = \gamma$, ενώ η μέγιστη τιμή M, εμφανίζεται στο $x = \delta$. Σε αυτή την περίπτωση και το γ και το δ βρίσκονται μέσα στο διάστημα. Από την άλλη, στο Σχήμα 8–6(β), η ελάχιστη τιμή m εμφανίζεται στο ακραίο σημείο $x = \alpha$, ενώ η μέγιστη τιμή M εμφανίζεται μέσα στο διάστημα. Για να αντιληφθείτε το λόγο για τον οποίο η συνέχεια είναι απαραίτητη για να ισχύει το Θεώρημα των Ακροτάτων, εξετάστε τη συνάρτηση με γραφική παράσταση αυτή του Σχήματος 8–6(γ). Υπάρχει μια ασυνέχεια στο διάστημα, στο σημείο γ· η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή στο αριστερό ακραίο σημείο $x = \alpha$, αλλά δεν έχει μέγιστη τιμή.



Σχήμα 8–6

Από το παρακάτω αποτέλεσμα προκύπτει μία ακόμα χρήσιμη ιδιότητα των συνεχών συναρτήσεων.

(στ) Αιρούμενες ασυνέχειες στα $x = 3$, $x = -5$. (Προσέξτε ότι $x^2 + 2x - 5 = (x+5)(x-3)$ και $x^3 + x^2 - 17x + 15 = (x+5)(x-3)(x-1)$.)

(η) Αιρούμενη ασυνέχεια στο $x = 2$ και μη αιρούμενη ασυνέχεια στο $x = 3$.

(θ) Αιρούμενη ασυνέχεια στο $x = -1$ και μη αιρούμενη ασυνέχεια στο $x = -3$.

(ι) Αιρούμενη ασυνέχεια στο $x = 2$ και μη αιρούμενη ασυνέχεια στο $x = -2$.

(ια) Αιρούμενη ασυνέχεια στο $x = 1$ και μη αιρούμενη ασυνέχεια στο $x = -1$.

5. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής.

6. Αν το Σχήμα 8–5(α) είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 21}{x - 7}$, αποδείξτε ότι υπάρχει αιρούμενη ασυνέχεια στο $x = 7$ και ότι εκεί $y = 10$.

7. Αποδείξτε ότι: Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και το γ είναι ένας αριθμός στο (α, β) τέτοιος ώστε $f(\gamma) < 0$, τότε υπάρχει ένας θετικός αριθμός δ τέτοιος ώστε όταν $\gamma - \delta < x < \gamma + \delta$ να ισχύει $f(x) < 0$.

(*Συμβουλή*: Εφαρμόστε το Θεώρημα 8.8 στην $-f$.)

8. Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που ακολουθούν και προσδιορίστε αν είναι συνεχείς στο κλειστό διάστημα [0, 1]:

(α) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{αν } x < 0 \\ 0 & \text{αν } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

(β) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{αν } x > 0 \\ 1 & \text{αν } x \le 0 \end{cases}$

(γ) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{αν } x \le 0 \\ x^2 & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

(δ) $f(x) = 1$ αν $0 < x \le 1$

(ε) $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \le 0 \\ 0 & \text{αν } 0 < x < 1 \\ x & \text{αν } x \ge 1 \end{cases}$

Απάντ. (α) Ναι. (β) Όχι. Δεν είναι συνεχής δεξιά στο 0. (γ) Ναι. (δ) Όχι. Δεν ορίζεται στο 0. (ε) Όχι. Δεν είναι συνεχής αριστερά στο 1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Η παράγωγος

ΣΗΜΕΙΟΓΡΑΦΙΑ ΔΕΛΤΑ. Έστω ότι f είναι μια συνάρτηση. Ας υποθέσουμε, όπως συνηθίζεται, ότι το x αντιπροσωπεύει κάθε όρισμα της f και το y την αντίστοιχη τιμή τής f. Άρα, $y = f(x)$. Ας εξετάσουμε οποιοδήποτε αριθμό x_0 του πεδίου ορισμού τής f. Έστω ότι το Δx (προφέρεται «δέλτα x») αντιπροσωπεύει μια μικρή αλλαγή της τιμής του x, από x_0 σε $x_0 + \Delta x$, και έστω ότι το Δy (προφέρεται «δέλτα y») συμβολίζει την αντίστοιχη αλλαγή στην τιμή του y. Έτσι, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Τότε, ο λόγος,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{αλλαγή του } y}{\text{αλλαγή του } x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ονομάζεται *μέσος ρυθμός μεταβολής* της συνάρτησης f στο διάστημα μεταξύ των x_0 και $x_0 + \Delta x$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Έστω $y = f(x) = x^2 + 2x$. Με τιμή εκκίνησης το $x_0 = 1$, αλλάζουμε την τιμή του x σε 1.5. Τότε, $\Delta x = 0.5$. Η αντίστοιχη αλλαγή του y είναι $\Delta y = f(1.5) - f(1) = 5.25 - 3 = 2.25$. Επομένως, ο μέσος ρυθμός μεταβολής του y στο διάστημα μεταξύ των $x = 1$ και $x = 1.5$ είναι $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2.25}{0.5} = 4.5$.

Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ. Αν $y = f(x)$ και το x_0 βρίσκεται στο πεδίο ορισμού της f, τότε με τον όρο *στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής* της f στο x_0 εννοούμε το όριο του μέσου ρυθμού μεταβολής μεταξύ των x_0 και $x_0 + \Delta x$, καθώς το Δx προσεγγίζει το 0:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

με την προϋπόθεση ότι αυτό το όριο υπάρχει. Αυτό το όριο ονομάζεται επίσης *παράγωγος* της f στο x_0.

ΣΗΜΕΙΟΓΡΑΦΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ. Ας εξετάσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f σε ένα τυχαίο σημείο x του πεδίου ορισμού της:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Η τιμή της παραγώγου είναι συνάρτηση του x και συμβολίζεται με οποιαδήποτε από τις παρακάτω εκφράσεις:

$$D_x y = \frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = \frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Η τιμή $f'(a)$ της παραγώγου της f σε ένα συγκεκριμένο σημείο a μερικές φορές συμβολίζεται ως $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=a}$.

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ. Μια συνάρτηση είναι *παραγωγίσιμη* σε ένα σημείο x_0 αν η παράγωγος της συνάρτησης υπάρχει σε αυτό το σημείο. Το Πρόβλημα 2 του Κεφαλαίου 8 δείχνει ότι η παραγωγισιμότητα υποδηλώνει συνέχεια. Το αντίστροφο δεν ισχύει, κάτι που αποδεικνύεται στο Πρόβλημα 11.

Λυμένα προβλήματα

1. Δίνεται η $y = f(x) = x^2 + 5x - 8$· βρείτε τα Δy και $\Delta y/\Delta x$ καθώς το x μεταβάλλεται: (a) από $x_0 = 1$ σε $x_1 = x_0 + \Delta x = 1.2$ και (β) από $x_0 = 1$ σε $x_1 = 0.8$.

(a) $\Delta x = x_1 - x_0 = 1.2 - 1 = 0.2$ και $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1.2) - f(1) = -0.56 - (-2) = 1.44$.

Έτσι, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1.44}{0.2} = 7.2$.

(β) $\Delta x = 0.8 - 1 = -0.2$ και $\Delta y = f(0.8) - f(1) = -3.36$. Έτσι, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-1.36}{-0.2} = 6.8$.

Γεωμετρικά, το $\Delta y/\Delta x$ στο ερώτημα (a) είναι η κλίση της τέμνουσας που ενώνει τα σημεία $(1, -2)$ και $(1.2, -0.56)$ της παραβολής $y = x^2 + 5x - 8$, ενώ στο ερώτημα (β) είναι η κλίση της τέμνουσας που ενώνει τα σημεία $(0.8, -3.36)$ και $(1, -2)$ της ίδιας παραβολής.

2. Αν ένα σώμα (δηλαδή ένα υλικό αντικείμενο) κατά την πτώση του (ξεκινώντας από κατάσταση ακινησίας) διανύει απόσταση s πόδια σε t δευτερόλεπτα, τότε σύμφωνα με τους νόμους της φυσικής $s = 16t^2$. Βρείτε το $\Delta s/\Delta t$ καθώς ο χρόνος t μεταβάλλεται από t_0 σε $t_0 + \Delta t$. Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα για να βρείτε το $\Delta s/\Delta t$ καθώς ο χρόνος t μεταβάλλεται από (a) 3 σε 3.5, (β) 3 σε 3.2, και (γ) 3 σε 3.1.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{16(t_0 + \Delta t)^2 - 16t_0^2}{\Delta t} = \frac{32t_0\Delta t + 16(\Delta t)^2}{\Delta t} = 32t_0 + 16\Delta t$$

(a) Εδώ $t_0 = 3$, $\Delta t = 0.5$ και $\Delta s/\Delta t = 32(3) + 16(0.5) = 104$ ft/sec.

(β) Εδώ $t_0 = 3$, $\Delta t = 0.2$ και $\Delta s/\Delta t = 32(3) + 16(0.2) = 99.2$ ft/sec.

(γ) Εδώ $t_0 = 3$, $\Delta t = 0.1$ και $\Delta s/\Delta t = 97.6$ ft/sec.

Αφού Δs είναι η μετατόπιση του σώματος από τη χρονική στιγμή $t = t_0$ έως την $t = t_0 + \Delta t$,

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{μετατόπιση}}{\text{χρόνος}} = \text{μέση ταχύτητα του σώματος κατά το χρονικό διάστημα}$$

3. Βρείτε το dy/dx, αν $y = x^3 - x^2 - 4$. Βρείτε επίσης την τιμή του dy/dx όταν (a) $x = 4$, (β) $x = 0$, (γ) $x = -1$.

$$\begin{aligned}
y + \Delta y &= (x+\Delta x)^3 - (x-\Delta x)^2 - 4 \\
&= x^3 + 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^2 - 2x(\Delta x) - (\Delta x)^2 - 4 \\
\Delta y &= (3x^2 - 2x)\Delta x + (3x-1)(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= 3x^2 - 2x + (3x-1)\Delta x + (\Delta x)^2 \\
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0}\left[3x^2 - 2x + (3x-1)\Delta x + (\Delta x)^2\right] = 3x^2 - 2x
\end{aligned}$$

(a) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=4} = 3(4)^2 - 2(4) = 40$, ($\beta$) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 3(0)^2 - 2(0) = 0$, ($\gamma$) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = 3(-1)^2 - 2(-1) = 5$

4. Βρείτε την παράγωγο της $y = f(x) = x^2 + 3x + 5$.

$$\begin{aligned}
\Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) = \left[(x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) + 5\right] - \left[x^2 + 3x + 5\right] \\
&= \left[x^2 + 2x + \Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x + 5\right] - \left[x^2 + 3x + 5\right] = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3\Delta x \\
&= (2x + \Delta x + 3)\Delta x \\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= 2x + \Delta x + 3
\end{aligned}$$

Έτσι,
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x + 3) = 2x + 3$$

5. Βρείτε την παράγωγο της $y = f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ στο $x = 1$ και στο $x = 3$.

$$\begin{aligned}
\Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{(x+\Delta x)-2} - \frac{1}{x-2} = \frac{(x-2)-(x+\Delta x-2)}{(x-2)(x+\Delta x-2)} \\
&= \frac{-\Delta x}{(x-2)(x+\Delta x-2)} \\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{-1}{(x-2)(x+\Delta x-2)}
\end{aligned}$$

Έτσι,
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{-1}{(x-2)(x+\Delta x-2)} = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

Στο $x = 1$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{(1-2)^2} = -1$. Στο $x = 3$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{(3-2)^2} = -1$.

6. Βρείτε την παράγωγο της $f(x) = \dfrac{2x-3}{3x+4}$.

$$\begin{aligned}
f(x+\Delta x) &= \frac{2(x+\Delta x)-3}{3(x+\Delta x)+4} \\
f(x+\Delta x) - f(x) &= \frac{2x+2\Delta x-3}{3x+3\Delta x+4} - \frac{2x-3}{3x+4} \\
&= \frac{(3x+4)\left[(2x-3)+2\Delta x\right] - (2x-3)\left[(3x+4)+3\Delta x\right]}{(3x+4)(3x+3\Delta x+4)} \\
&= \frac{(6x+8-6x+9)\Delta x}{(3x+4)(3x+3\Delta x+4)} = \frac{17\Delta x}{(3x+4)(3x+3\Delta x+4)} \\
\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{17}{(3x+4)(3x+3\Delta x+4)} \\
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{17}{(3x+4)(3x+3\Delta x+4)} = \frac{17}{(3x+4)^2}
\end{aligned}$$

7. Βρείτε την παράγωγο της $y=f(x)=\sqrt{2x+1}$.

$$y+\Delta y=(2x+2\Delta x+1)^{1/2}$$

$$\Delta y=(2x+2\Delta x+1)^{1/2}-(2x+1)^{1/2}$$

$$=\left[(2x+2\Delta x+1)^{1/2}-(2x+1)^{1/2}\right]\frac{(2x+2\Delta x+1)^{1/2}+(2x+1)^{1/2}}{(2x+2\Delta x+1)^{1/2}+(2x+1)^{1/2}}$$

$$=\frac{(2x+2\Delta x+1)-(2x+1)}{(2x+2\Delta x+1)^{1/2}+(2x+1)^{1/2}}=\frac{2\Delta x}{(2x+2\Delta x+1)^{1/2}+(2x+1)^{1/2}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2}{(2x+2\Delta x+1)^{1/2}+(2x+1)^{1/2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2}{(2x+2\Delta x+1)^{1/2}+(2x+1)^{1/2}}=\frac{1}{(2x+1)^{1/2}}$$

8. Βρείτε την παράγωγο της $f(x)=x^{1/3}$. Εξετάστε την $f'(0)$.

$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^{1/3}$$

$$f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^{1/3}-x^{1/3}$$

$$=\frac{\left[(x+\Delta x)^{1/3}-x^{1/3}\right]\left[(x+\Delta x)^{2/9}+x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3}+x^{2/3}\right]}{(x+\Delta x)^{2/3}+x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3}+x^{2/3}}$$

$$=\frac{x+\Delta x-x}{(x+\Delta x)^{2/3}+x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3}+x^{2/3}}$$

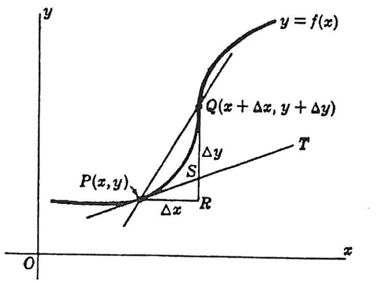
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{1}{(x+\Delta x)^{2/3}+x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3}+x^{2/3}}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(x+\Delta x)^{2/3}+x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3}+x^{2/3}}=\frac{1}{3x^{2/3}}$$

Η παράγωγος δεν υπάρχει στο $x=0$ επειδή εκεί ο παρονομαστής είναι 0. Προσέξτε ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x=0$.

9. Ερμηνεύστε γεωμετρικά την παράγωγο dy/dx.

Από το Σχήμα 9–1 βλέπουμε ότι $\Delta y/\Delta x$ είναι η κλίση της τέμνουσας που ενώνει το τυχαίο, αλλά σταθερό, σημείο $P(x, y)$ και ένα γειτονικό σημείο $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ της καμπύλης. Καθώς $\Delta x \to 0$, το σημείο P παραμένει σταθερό, ενώ το Q μετακινείται κατά μήκος της καμπύλης προς το P, και η ευθεία PQ στρέφεται γύρω από το P προς την οριακή της θέση — την εφαπτόμενη PT της καμπύλης στο P. Άρα η παράγωγος dy/dx είναι η κλίση της εφαπτόμενης της καμπύλης $y=f(x)$ στο σημείο P.



Σχήμα 9–1

Για παράδειγμα, από το Πρόβλημα 3, η κλίση της κυβικής εξίσωσης $y=x^3-x^2-4$ στο σημείο $x=4$ είναι $m=40$, στο σημείο $x=0$ είναι $m=0$, και στο σημείο $x=-1$ είναι $m=5$.

10. Βρείτε την παράγωγο ds/dt της συνάρτησης του Προβλήματος 2, και ερμηνεύστε το αποτέλεσμα.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=32t_0+16\Delta t. \qquad \text{Συνεπώς,} \qquad \frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}(32t_0+16\Delta t)=32t_0$$

Καθώς $\Delta t \to 0$, η παράγωγος $\Delta s/\Delta t$ δίνει τη μέση ταχύτητα του σώματος για ολοένα και πιο μικρά χρονικά διαστήματα Δt. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε το ds/dt ως τη *στιγμιαία ταχύτητα* υ του σώματος τη χρονική στιγμή t_0.

Για παράδειγμα, τη χρονική στιγμή $t=3$, $\upsilon=32(3)=96$ ft/sec. Γενικά, αν ένα αντικείμενο κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στην ευθεία τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη συντεταγμένη s, τότε η στιγμιαία ταχύτητά του τη χρονική στιγμή t είναι ds/dt. (Δείτε το Κεφάλαιο 19.)

11. Βρείτε την παράγωγο $f'(x)$ όταν $f(x)=|x|$.

Η συνάρτηση είναι συνεχής για όλες τις τιμές του x. Για $x<0$, $f(x)=-x$ και

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(x+\Delta x)-(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}-1=-1$$

Παρόμοια, για $x>0$, $f(x)=x$ και

$$f'(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=1$$

Στο $x=0$, $f(x)=0$ και $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$.

Καθώς $\Delta x \to 0^-$, $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=\dfrac{-\Delta x}{\Delta x}=-1\to -1$. Αλλά, καθώς $\Delta x \to 0^+$ $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1\to 1$. Συνεπώς, η παράγωγος δεν υπάρχει στο $x=0$.

Αφού η συνάρτηση είναι συνεχής στο 0, αυτό δείχνει ότι η συνέχεια δεν συνεπάγεται παραγωγισιμότητα.

12. Υπολογίστε το $\epsilon=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-\dfrac{dy}{dx}$ για τη συνάρτηση (α) του Προβλήματος 3 και (β) του Προβλήματος 5. Επαληθεύστε ότι $\epsilon \to 0$ καθώς $\Delta x \to 0$.

(α) $\epsilon=\left[3x^2-2x+(3x+1)\,\Delta x+(\Delta x)^2\right]-(3x^2-2x)=(3x-1+\Delta x)\Delta x$

(β) $\epsilon=\dfrac{-1}{(x-2)(x+\Delta x-2)}-\dfrac{-1}{(x-2)^2}=\dfrac{-(x-2)+(x+\Delta x-2)}{(x-2)^2(x+\Delta x-2)}=\dfrac{1}{(x-2)^2(x+\Delta x-2)}\Delta x$

Είναι προφανές ότι και τα δύο τείνουν προς το μηδέν καθώς $\Delta x \to 0$.

13. Ερμηνεύστε γεωμετρικά το $\Delta y=\dfrac{dy}{dx}\Delta x+\epsilon\Delta x$ του Προβλήματος 12.

Στο Σχήμα 9–1, $\Delta y=RQ$ και $\dfrac{dy}{dx}\Delta x=PR\tan\angle TPR=RS$ · συνεπώς, $\epsilon\Delta x=SQ$. Για μια αλλαγή Δx του x από το $P(x, y)$, το Δy είναι η αντίστοιχη αλλαγή του y *κατά μήκος της καμπύλης*, ενώ $\dfrac{dy}{dx}\Delta x$ είναι η αντίστοιχη αλλαγή στο y *κατά μήκος της εφαπτόμενης PT*. Καθώς η διαφορά τους $\epsilon\Delta x$ είναι πολλαπλάσιο του $(\Delta x)^2$, προσεγγίζει το μηδέν πιο γρήγορα από το Δx και το $\dfrac{dy}{dx}\Delta x$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως προσέγγιση του Δy όταν το $|\Delta x|$ είναι μικρό.

Περισσότερα προβλήματα

14. Βρείτε τα Δy και $\Delta y/\Delta x$, αν δίνεται ότι

(α) $y = 2x - 3$ και ότι το x μεταβάλλεται από 3.3 σε 3.5.

(β) $y = x^2 + 4x$ και ότι το x μεταβάλλεται από 0.7 σε 0.85.

(γ) $y = 2/x$ και ότι το x μεταβάλλεται από 0.75 σε 0.5.

Απάντ. (α) 0.4 και 2, (β) 0.8325 και 5.55, (γ) $\frac{4}{3}$ και $-\frac{16}{3}$

15. Βρείτε το Δy, αν δίνεται ότι $y = x^2 - 3x + 5$, $x = 5$ και $\Delta x = -0.01$. Ποια είναι η τιμή του y όταν $x = 4.99$;

Απάντ. $\Delta y = -0.0699$, $y = 14.9301$

16. Βρείτε τη μέση ταχύτητα (δείτε το Πρόβλημα 2) αν δίνεται ότι (α) $s = (3t^2 + 5)$ πόδια και το t μεταβάλλεται από 2 σε 3 δευτερόλεπτα. (β) $s = (2t^2 + 5t - 3)$ πόδια και το t μεταβάλλεται από 2 σε 5 δευτερόλεπτα.

Απάντ. (α) 15 ft/sec, (β) 19 ft/sec

17. Βρείτε την αύξηση του όγκου ενός σφαιρικού μπαλονιού όταν η ακτίνα του αυξάνεται: (α) Από r σε $r + \Delta r$ ίντσες, (β) Από 2 σε 3 ίντσες. (Θυμηθείτε ότι ο όγκος είναι $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.)

Απάντ. (α) $\frac{4}{3}\pi\left[3r^2 + 3r\Delta r + (\Delta r)^2\right]\Delta r$ in^3, (β) $\frac{76}{3}\pi$ in^3

18. Βρείτε την παράγωγο κάθε εξίσωσης:

(α) $y = 4x - 3$ (β) $y = 4 - 3x$ (γ) $y = x^2 + 2x - 3$

(δ) $y = 1/x^2$ (ε) $y = (2x-1)/(2x+1)$ (στ) $y = (1+2x)/(1-2x)$

(ζ) $y = \sqrt{x}$ (η) $y = 1/\sqrt{x}$ (θ) $y = \sqrt{1+2x}$

(ι) $y = 1/\sqrt{2+x}$

Απάντ. (α) 4, (β) –3, (γ) $2(x+1)$, (δ) $-2/x^3$, (ε) $\dfrac{4}{(2x+1)^2}$, (στ) $\dfrac{4}{(1-2x)^2}$, (ζ) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, (η) $-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$, (θ) $\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$,

(ι) $-\dfrac{1}{2(2+x)^{3/2}}$

19. Βρείτε την κλίση της εφαπτόμενης για τις ακόλουθες καμπύλες στο σημείο $x = 1$ (δείτε το Πρόβλημα 9):

(α) $y = 8 - 5x^2$ (β) $y = \dfrac{4}{x+1}$ (γ) $\dfrac{2}{x+3}$

Απάντ. (α) –10, (β) –1, (γ) $-\frac{1}{8}$

20. (GC) Χρησιμοποιήστε αριθμομηχανή γραφημάτων για να επαληθεύσετε τις απαντήσεις του Προβλήματος 19. (Σχεδιάστε την καμπύλη και την εφαπτομένη που βρήκατε.)

21. Βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής (δηλαδή το σημείο καμπής) της παραβολής $y = x^2 - 4x + 1$ χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι στην κορυφή, η κλίση της εφαπτομένης είναι μηδέν. (Δείτε το Πρόβλημα 9.) (GC) Ελέγξτε την απάντηση με αριθμομηχανή γραφημάτων.

Απάντ. (2, –3)

22. Βρείτε την κλίση των εφαπτομένων της παραβολής $y = -x^2 + 5x - 6$ στα σημεία της τομής τους με τον άξονα των x.

Απαντ. Στο $x = 2$, $m = 1$. Στο $x = 3$, $m = -1$.

23. Ένα αντικείμενο κινείται κατά μήκος μιας ευθείας και τη χρονική στιγμή t η συντεταγμένη του επάνω σε αυτή την ευθεία είναι s (όπου το s μετράται σε πόδια και το t σε δευτερόλεπτα). Βρείτε την ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t = 2$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) $s = t^2 + 3t$, (β) $s = t^3 - 3t^2$, (γ) $s = \sqrt{t+2}$

Απάντ. (α) 7 ft/sec, (β) 0 ft/sec, (γ) $\frac{1}{4}$ ft/sec

24. Αποδείξτε ότι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του όγκου V ενός κύβου ως προς την ακμή του x (μετρημένη σε ίντσες), είναι 12 in^3/in όταν $x = 2$ ίντσες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Κανόνες παραγώγισης συναρτήσεων

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ. Θυμηθείτε ότι μια συνάρτηση f είναι *παραγωγίσιμη* στο x_0 αν υπάρχει η παράγωγος $f'(x_0)$. Μια συνάρτηση θεωρείται παραγωγίσιμη σε ένα σύνολο αν μπορεί να παραγωγιστεί σε κάθε σημείο του συνόλου. Όταν λέμε ότι μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη εννοούμε ότι μπορεί να παραγωγιστεί σε κάθε πραγματικό αριθμό. Η διαδικασία εύρεσης της παραγώγου μιας συνάρτησης ονομάζεται *παραγώγιση*.

Θεώρημα 10.1: (Τύποι Παραγώγισης). Στους παρακάτω τύπους θεωρούμε ότι τα u, v και w είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο x· τα γ, και m θεωρούμε ότι είναι σταθερές.

(1) $\dfrac{d}{dx}(\gamma) = 0$ (Η παράγωγος μιας σταθερής συνάρτησης είναι μηδέν.)

(2) $\dfrac{d}{dx}(x) = 1$ (Η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης είναι 1.)

(3) $\dfrac{d}{dx}(\gamma u) = \gamma\dfrac{d}{dx}(u)$

(4) $\dfrac{d}{dx}(u + v + \cdots) = \dfrac{d}{dx}(u) + \dfrac{d}{dx}(v) + \cdots$ (Κανόνας του Αθροίσματος)

(5) $\dfrac{d}{dx}(u - v) = \dfrac{d}{dx}(u) - \dfrac{d}{dx}(v)$ (Κανόνας της Διαφοράς)

(6) $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{d}{dx}(v) + v\dfrac{d}{dx}(u)$ (Κανόνας του Γινομένου)

(7) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{d}{dx}(u) - u\dfrac{d}{dx}(v)}{v^2}$ με την προϋπόθεση ότι $v \neq 0$ (Κανόνας του Πηλίκου)

(8) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{-1}{x^2}$ με την προϋπόθεση ότι $x \neq 0$

(9) $\dfrac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1}$ (Κανόνας των Δυνάμεων)

Προσέξτε ότι ο τύπος (8) είναι μια ειδική περίπτωση του τύπου (9) όταν $m = -1$. Για τις αποδείξεις δείτε τα Προβλήματα 1–4.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

$$\begin{aligned} D_x(x^3+7x+5) &= D_x(x^3)+D_x(7x)+D_x(5) && \text{(Κανόνας του Αθροίσματος)} \\ &= 3x^2+7D_x(x)+0 && \text{(Κανόνας των Δυνάμεων, τύποι (3) και (1))} \\ &= 3x^2+7 && \text{(τύπος (2))} \end{aligned}$$

Κάθε πολυώνυμο είναι παραγωγίσιμο και μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγό του χρησιμοποιώντας τον Κανόνα του Αθροίσματος, τον Κανόνα των Δυνάμεων, και τους τύπους 1 και 3.

ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ, Ο ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ. Η *σύνθετη συνάρτηση* $f \circ g$ των συναρτήσεων g και f ορίζεται ως εξής: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Εφαρμόζουμε πρώτα τη συνάρτηση g και έπειτα τη συνάρτηση f. Η g ονομάζεται *εσωτερική συνάρτηση*, ενώ η f *εξωτερική*. Η $f \circ g$ ονομάζεται *σύνθεση* των g και f.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Έστω $f(x) = x^2$ και $g(x) = x + 1$. Τότε:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 = x^2+2x+1$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2+1$$

Έτσι, σε αυτή την περίπτωση, $f \circ g \neq g \circ f$.

Όταν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες, τότε είναι παραγωγίσιμη και η σύνθεσή τους $f \circ g$. Υπάρχουν δύο διαδικασίες οι οποίες μας επιτρέπουν να προσδιορίσουμε την παράγωγο της $f \circ g$. Σύμφωνα με την πρώτη μέθοδο, μπορούμε να υπολογίσουμε ένα ρητό τύπο για την $f(g(x))$ και έπειτα να παραγωγίσουμε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3: Αν $f(x) = x^2+3$ και $g(x) = 2x = 1$, τότε

$$y = f(g(x)) = f(2x+1) = (2x+1)^2+3 = 4x^2+4x+4 \qquad \text{και} \qquad \frac{dy}{dx} = 8x = 4$$

Συνεπώς, $D_x(f \circ g) = 8x+4$.

Η δεύτερη μέθοδος υπολογισμού της παραγώγου μιας σύνθετης συνάρτησης βασίζεται στον επόμενο κανόνα.

Κανόνας της Αλυσίδας: $D_x(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Άρα, η παράγωγος της $f \circ g$ είναι το γινόμενο της παραγώγου της εξωτερικής συνάρτησης f υπολογισμένη στο $g(x)$) και της παραγώγου της εσωτερικής συνάρτησης (υπολογισμένη στο x). Θεωρούμε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x και η f στο $g(x)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4: Στο Παράδειγμα 3, $f'(x) = 2x$ και $g'(x) = 2$. Συνεπώς, σύμφωνα με τον Κανόνα της Αλυσίδας,

$$D_x(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 2g(x) \cdot 2 = 4g(x) = 4(2x+1) = 8x+4$$

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΚΑΝΟΝΑ ΤΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ. Έστω $u = g(x)$. Τότε η σύνθετη συνάρτηση των g και f είναι $y = f(u) = f(g(x))$, και έχουμε τον τύπο:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \qquad \text{(Κανόνας Παραγώγισης Σύνθετων Συναρτήσεων ή Κανόνας της Αλυσίδας)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5: Έστω ότι $y = u^3$ και $u = 4x^2 - 2x + 5$. Τότε η σύνθετη συνάρτηση $y = (4x^2 - 2x + 5)^3$ έχει παράγωγο

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 3u^2(8x-2) = 3(4x^2-2x+5)^2(8x-2)$$

Προσοχή: Στην εναλλακτική τυποποίηση του Κανόνα της Αλυσίδας, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$, το y στα αριστερά συμβολίζει τη σύνθετη συνάρτηση του x, ενώ το y στα δεξιά συμβολίζει την αρχική συνάρτηση του u. Παρόμοια, οι δύο παρουσίες του u έχουν διαφορετική σημασία. Αυτή η σύγχυση συμβολισμών δημιουργήθηκε για την απλοποίηση της εναλλακτικής τυποποίησης.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ. Δύο συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύει $g(f(x)) = x$ και $f(g(y)) = y$ ονομάζονται *αντίστροφες συναρτήσεις*. Στις αντίστροφες συναρτήσεις η μία συνάρτηση αντιστρέφει το αποτέλεσμα της άλλης. Έστω μια εξίσωση $y = f(x)$ μπορούμε να βρούμε έναν τύπο για το αντίστροφο της f αν λύσουμε την εξίσωση ως προς x συναρτήσει του y.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

(α) Έστω ότι $f(x) = x+1$. Αν λύσουμε την εξίσωση $y = x+1$ ως προς x, θα πάρουμε $x = y-1$. Τότε η αντίστροφη συνάρτηση g της f δίνεται από τον τύπο $g(y) = y - 1$. Προσέξτε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφει το αποτέλεσμα της f και η f αντιστρέφει το αποτέλεσμα της g.

(β) Έστω ότι $f(x) = -x$. Αν λύσουμε την $y = -x$ ως προς x θα πάρουμε $x = -y$. Συνεπώς, η $g(y) = -y$ είναι η αντίστροφη της f. Σε αυτή την περίπτωση, η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η ίδια η f.

(γ) Έστω $f(x) = \sqrt{x}$. Η f ορίζεται μόνο για μη αρνητικούς αριθμούς, και το πεδίο τιμών της είναι το σύνολο των μη αρνητικών αριθμών. Αν λύσουμε την $y = \sqrt{x}$ ως προς x, θα πάρουμε $x = y^2$, έτσι ώστε $g(y) = y^2$. Προσέξτε ότι αφού η g είναι η αντίστροφη της f, η g ορίζεται μόνο για μη αρνητικούς αριθμούς, καθώς οι τιμές της f είναι μη αρνητικοί αριθμοί. (Καθώς $y = f(g(y))$, αν επιτρέπαμε η g να ορίζεται για αρνητικούς αριθμούς, θα είχαμε, $-1 = f(g(-1)) = f(1) = 1$, το οποίο είναι αντίφαση.)

(δ) Η αντίστροφη της $f(x) = 2x-1$ είναι η $g(y) = \frac{y+1}{2}$.

Σημειογραφία: Η αντίστροφη συνάρτηση της f συμβολίζεται ως f^{-1}

Μη συγχέετε τον παραπάνω συμβολισμό με το συμβολισμό των εκθετών που χρησιμοποιείται για την ύψωση ενός αριθμού στη δύναμη -1. Συνήθως, η σημασία του συμβόλου είναι προφανής από το κείμενο.

Δεν έχουν όλες οι συναρτήσεις την αντίστροφή τους. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^2$ δεν έχει αντίστροφη. Αφού, $f(1) = 1 = f(-1)$, μια αντίστροφη συνάρτηση g θα έπρεπε να ικανοποιεί τις $g(1) = 1$ και $g(1) = -1$, κάτι που είναι αδύνατο. (Ωστόσο, αν περιορίζαμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2$ στο πεδίο ορισμού $x \geq 0$, η συνάρτηση $g(y) = \sqrt{y}$ θα ήταν αντίστροφη της f.)

Η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί μια συνάρτηση f για να έχει αντίστροφη είναι ότι η f πρέπει να είναι *αμφιμονοσήμαντη*, δηλαδή, για κάθε x_1 και x_2, αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$. Παρόμοια, η f είναι αμφιμονοσήμαντη αν και μόνο αν για κάθε x_1 και x_2, όταν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7: Ας αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = 3x + 2$ είναι αμφιμονοσήμαντη. Έστω ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε, $3x_1 + 2 = 3x_2 + 2$, $3x_1 = 3x_2$, $x_1 = x_2$. Άρα, η f είναι αμφιμονοσήμαντη. Για να βρούμε την αντίστροφη, λύνουμε την $y = 3x + 2$ ως προς x και παίρνουμε, $x = \frac{y-2}{3}$. Επομένως, $f^{-1}(y) = \frac{y-2}{3}$. (Γενικά, αν μπορούμε να λύσουμε την $y = f(x)$ ως προς x συναρτήσει του y, τότε η συνάρτηση f είναι αμφιμονοσήμαντη.)

Θεώρημα 10. 2: (Τύπος Παραγώγισης Αντίστροφων Συναρτήσεων). Έστω ότι η συνάρτηση f είναι αμφιμονοσήμαντη και συνεχής στο διάστημα (α, β). Τότε:

(α) Το πεδίο τιμών της f είναι ένα διάστημα I (πιθανόν άπειρο) και η f είτε αυξάνεται είτε μειώνεται. Επιπλέον, η f^{-1} είναι συνεχής στο I.

(β) Αν η $f'(x_0)$ είναι παραγωγίσιμη και $f'(x_0) \neq 0$, τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στα $y_0 = f(x_0)$ και $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

68. Βρείτε έναν τύπο για τη νιοστή (n) παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων: (α) $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$, (β) $f(x)=\sqrt{x}$.

Απάντ. (α) $f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{2n!}{(x+2)^{n+1}}$

(β) $f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2^n}x^{-(2n-1)/2}$

69. Βρείτε τις δεύτερες παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x)=2x-7$ (β) $f(x)=3x^2+5x-10$

(γ) $f(x)=\dfrac{1}{x+4}$ (δ) $f(x)=\sqrt{7-x}$

Απάντ. (α) 0, (β) 6, (γ) $\dfrac{2}{(x+4)^3}$, (δ) $-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(7-x)^{3/2}}$

70. Αποδείξτε το Θεώρημα 10. 2.

Απάντ. *Συμβουλές*: (α) Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής για να αποδείξετε ότι το πεδίο τιμών είναι ένα διάστημα. Το γεγονός ότι η συνάρτηση f αυξάνεται ή μειώνεται, αποδεικνύεται από ένα συλλογισμό που χρησιμοποιεί τα Θεωρήματα των Ακροτάτων και της Ενδιάμεσης Τιμής. Έπειτα, η συνέχεια της f^{-1} αποδεικνύεται εύκολα.

(β) $$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\frac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(y))-f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}}=\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

Από τη συνέχεια της f^{-1} συνεπάγεται ότι καθώς $y\to y_0$, $x\to x_0$, οπότε $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

Πεπλεγμένη παραγώγιση

ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ. Μια εξίσωση $f(x,y)=0$ ορίζει με *πεπλεγμένο* τρόπο το y ως συνάρτηση του x. Το πεδίο ορισμού αυτής της πεπλεγμένα ορισμένης συνάρτησης αποτελείται από τις τιμές του x για κάθε μία από τις οποίες υπάρχει μία μοναδική τιμή του y έτσι ώστε να ισχύει $f(x,y)=0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

(α) Μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $xy+x-2y-1=0$ ως προς y και να πάρουμε $y=\dfrac{1-x}{x-2}$. Αυτή η συνάρτηση ορίζεται για $x\neq 2$.

(β) Η εξίσωση $4x^2+9y^2-36=0$ δεν ορίζει μια μοναδική συνάρτηση του y. Αν λύσουμε την εξίσωση ως προς y, θα πάρουμε $y=\pm\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η εξίσωση ορίζει με πεπλεγμένο τρόπο δύο συναρτήσεις $y=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ και $y=-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$. Κάθε μία από αυτές τις συναρτήσεις ορίζεται για $|x|\leq 3$. Η έλλειψη που ορίζει η αρχική εξίσωση είναι η ένωση των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.

Αν y είναι μια συνάρτηση η οποία ορίζεται πεπλεγμένα από την εξίσωση $f(x,y)=0$, τότε μπορούμε να βρούμε την παράγωγο y' με δύο διαφορετικούς τρόπους:

1. Λύνουμε την εξίσωση ως προς y και υπολογίζουμε την παράγωγο y' άμεσα. Αν εξαιρέσουμε τις πολύ απλές εξισώσεις, αυτή η μέθοδος είναι συνήθως αναποτελεσματική ή μη πρακτική.
2. Θεωρούμε το y ως συνάρτηση του x, παραγωγίζουμε και τα δύο μέρη της αρχικής εξίσωσης $f(x,y)=0$, και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει ως προς y'. Η μέθοδος αυτή παραγώγισης είναι γνωστή ως *πεπλεγμένη παραγώγιση*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

(α) Βρείτε την παράγωγο y' αν δίνεται ότι $xy+x-2y-1=0$. Με πεπλεγμένη παραγώγιση, $xy'+yD_x(x)-2y'-D_x(1)=D_x(0)$. Συνεπώς, $xy'+y-2y'=0$. Λύνουμε ως προς y': $y'=\dfrac{1+y}{2-x}$. Σε αυτή την περίπτωση, το Παράδειγμα 1(α) δείχνει ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε το y με $\dfrac{1-x}{x-2}$ και να βρούμε την παράγωγο y' συναρτήσει μόνο του x. Παρατηρούμε ότι θα μπορούσαμε εξίσου εύκολα να παραγωγίσουμε την $y=\dfrac{1-x}{x-2}$ σύμφωνα με τον Κανόνα του Πηλίκου. Όμως, τις περισσότερες φορές δεν μπορούμε να λύσουμε ως προς y ή y' συναρτήσει μόνο του x.

(β) Δίνεται η $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$· βρείτε την παράγωγο y' όταν $x = \sqrt{5}$. Με πεπλεγμένη παραγώγιση παίρνουμε $4D_x(x^2) + 9D_x(y^2) - D_x(36) = D_x(0)$. Άρα, $4(2x) + 9(2yy') = 0$. (Προσέξτε ότι σύμφωνα με τον Κανόνα Παραγώγισης Σύνθετων Συναρτήσεων με Δυνάμεις, $D_x(y^2) = 2yy'$.) Λύνοντας ως προς y' παίρνουμε $y' = -4x/9y$. Όταν $x = \sqrt{5}$, $y = \pm\frac{4}{3}$. Για τη συνάρτηση y που αντιστοιχεί στο επάνω τόξο της έλλειψης (δείτε το Παράδειγμα 1(β)), $y = \frac{4}{3}$ και $y' = -\sqrt{5}/3$. Για τη συνάρτηση y που αντιστοιχεί στο κάτω τόξο της έλλειψης, $y = -\frac{4}{3}$ και $y' = \sqrt{5}/3$.

ΟΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΥΨΗΛΟΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ είναι δυνατόν να εξαχθούν είτε με πεπλεγμένη παραγώγιση είτε με συνδυασμό άμεσης και πεπλεγμένης παραγώγισης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3: Στο Παράδειγμα 2(α), $y' = \dfrac{1+x}{2-x}$. Τότε,

$$y'' = D_x(y) = D_x\left(\frac{1+y}{2-x}\right) = \frac{(2-x)y' - (1+y)(-1)}{(2-x)^2}$$

$$= \frac{(2-x)y' + 1 + y}{(2-x)^2} = \frac{(2-x)\left(\frac{1+y}{2-x}\right) + 1 + y}{(2-x)^2} = \frac{2+2y}{(2-x)^2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4: Βρείτε την τιμή της παραγώγου y'' στο σημείο $(-1, 1)$ της καμπύλης $x^2y + 3y - 4 = 0$.

Παραγωγίζουμε με πεπλεγμένο τρόπο ως προς x δύο φορές. Αρχικά παίρνουμε $x^2y' + 2xy + 3y' = 0$, και μετά $x^2y'' + 2xy' + 2xy' + 2y + 3y'' = 0$. Μπορούμε να λύσουμε την πρώτη εξίσωση ως προς y' και μετά τη δεύτερη ως προς y''. Όμως, αφού θέλουμε να βρούμε την τιμή του y'' μόνο στο συγκεκριμένο σημείο $(-1, 1)$, αντικαθιστούμε $x = -1, y = 1$ στην πρώτη εξίσωση για να βρούμε $y' = \frac{1}{2}$ και έπειτα αντικαθιστούμε $x = -1, y = 1$, και $y' = \frac{1}{2}$ στη δεύτερη εξίσωση για να πάρουμε $y'' - 1 - 1 + 2 + 3y'' = 0$, από όπου $y'' = 0$. Προσέξτε ότι αυτή η μέθοδος δεν χρησιμοποιεί πολύπλοκους αλγεβρικούς υπολογισμούς.

Λυμένα προβλήματα

1. Βρείτε την παράγωγο y' αν δίνεται ότι $x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$.

$$D_x(x^2y) - D_x(xy^2) + D_x(x^2) + D_x(y^2) = 0$$

$$x^2y' + yD_x(x^2) - xD_x(y^2) - y^2D_x(x) + 2x + 2yy' = 0$$

$$x^2y' + 2xy - x(2yy') - y^2 + 2x + 2yy' = 0$$

$$(x^2 - 2xy + 2y)y' + 2xy - y^2 + 2x = 0$$

$$y' = \frac{y^2 - 2xy - 2x}{x^2 - 2xy + 2y}$$

2. Αν $x^2 - xy + y^2 = 3$, βρείτε τις παραγώγους y' και y''.

$$D_x(x^2) - D_x(xy) + D_x(y^2) = 0$$

$$2x - xy' - y + 2yy' = 0$$

Άρα, $y' = \dfrac{2x-y}{x-2y}$. Τότε,

$$y'' = \frac{(x-2y)D_x(2x-y) - (2x-y)D_x(x-2y)}{(x-2y)^2}$$

$$= \frac{(x-2y)(2-y') - (2x-y)(1-2y')}{(x-2y)^2}$$

$$= \frac{2x - xy' - 4y + 2yy' - 2x + 4xy' + y - 2yy'}{(x-2y)^2} = \frac{3xy' - 3y}{(x-2y)^2}$$

$$= \frac{3x\left(\frac{2x-y}{x-2y}\right) - 3y}{(x-2y)^2} = \frac{3x(2x-y) - 3y(x-2y)}{(x-2y)^3} = \frac{6(x^2 - xy + y^2)}{(x-2y)^3}$$

$$= \frac{18}{(x-2y)^3}$$

3. Δίνεται $x^3y + xy^3 = 2$· βρείτε τα y' και y'' στο σημείο $(1, 1)$.

Εφαρμόζοντας πεπλεγμένη παραγώγιση δύο φορές παίρνουμε

$$x^3y' + 3x^2y + x(3y^2y') + y^3 = 0$$

και

$$x^3y'' + 3x^2y' + 3x^2y' + 6xy + 3xy^2y'' + y'[6xyy' + 3y^2] + 3y^2y' = 0$$

Αν αντικαταστήσουμε $x = 1, y = 1$ στην πρώτη εξίσωση θα πάρουμε $y' = -1$. Έπειτα, αν αντικαταστήσουμε $x = 1, y = 1$, $y' = -1$ στη δεύτερη εξίσωση θα πάρουμε $y'' = 0$.

Περισσότερα προβλήματα

4. Βρείτε την παράγωγο y'' αν δίνεται ότι (α) $x + xy + y = 2$, (β) $x^3 - 3xy + y^3 = 1$.

Απάντ. (α) $y'' = \dfrac{2(1+y)}{(1+x)^2}$, (β) $y'' = -\dfrac{4xy}{(y^2-x)^3}$

5. Βρείτε τα y', y'', και y''' (α) στο σημείο $(2, 1)$ της $x^2 - y^2 - x = 1$, (β) στο σημείο $(1, 1)$ της $x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 2y^3 = 0$.

Απάντ. (α) $\frac{3}{2}$, $\frac{-5}{4}$, $\frac{45}{8}$, (β) 1, 0, 0

6. Βρείτε την κλίση της εφαπτομένης στο σημείο (x_0, y_0) της (α) $\beta^2x^2 + \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$, (β) $\beta^2x^2 - \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$, (γ) $x^3 + y^3 - 6x^2y = 0$.

Απάντ. (α) $-\dfrac{\beta^2x_0}{\alpha^2y_0}$, (β) $\dfrac{\beta^2x_0}{\alpha^2y_0}$, (γ) $\dfrac{4x_0y_0 - x_0^2}{y_0^2 - 2x_0^2}$

7. Αποδείξτε ότι οι ευθείες που εφάπτονται στις καμπύλες $5y - 2x + y^3 - x^2y = 0$ και $2y + 5x + x^4 - x^3y^2 = 0$ τέμνονται κάθετα στην αρχή των αξόνων.

8. (α) Το συνολικό εμβαδόν ενός ορθογώνιου κουτιού, η βάση του οποίου είναι y και το ύψος του x, δίνεται από τη συνάρτηση $S = 2y^2 + 4xy$. Αν το S είναι σταθερό βρείτε την παράγωγο dy/dx χωρίς να λύσετε ως προς y.

(β) Το συνολικό εμβαδόν ενός ορθού κυκλικού κυλίνδρου ακτίνας r και ύψους h δίνεται από τη συνάρτηση $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Αν το S είναι σταθερό βρείτε την παράγωγο dr/dh.

Απάντ. (α) $-\dfrac{y}{x+y}$, (β) $-\dfrac{r}{2r+h}$

9. Για τον κύκλο $x^2 + y^2 = r^2$ αποδείξτε ότι $\left|\dfrac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}\right| = \dfrac{1}{r}$.

10. Δίνεται ότι $S = \pi x(x + 2y)$ και $V = \pi x^2y$· αποδείξτε ότι $dS/dx = 2\pi(x - y)$ όταν το V είναι σταθερό και ότι $dV/dx = -\pi x(x - y)$ όταν το S είναι σταθερό.

26. Αποδείξτε ότι οι καμπύλες $y = x^3 + 2$ και $y = 2x^2 + 2$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $(0, 2)$ και τέμνονται στο σημείο $(2, 10)$ υπό γωνία ϕ τέτοια ώστε $\tan \phi = \frac{4}{97}$.

27. Αποδείξτε ότι η έλλειψη $4x^2 + 9y^2 = 45$ και η υπερβολή $x^2 - 4y^2 = 5$ είναι ορθογώνιες (δηλαδή τέμνονται σε ορθή γωνία).

28. Βρείτε τις εξισώσεις της εφαπτόμενης και της κάθετης ευθείας στην παραβολή $y = 4x^2$ στο σημείο $(-1, 4)$.

Απάντ. $y + 8x + 4 = 0$, $8y - x - 33 = 0$

29. Σε ποια σημεία της καμπύλης $y = 2x^3 + 13x^2 + 5x + 9$ η εφαπτομένη της περνά από την αρχή των αξόνων;

Απάντ. $x = -3, -1, \frac{3}{4}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

Κανόνας της Μέσης Τιμής. Αύξουσες και φθίνουσες συναρτήσεις

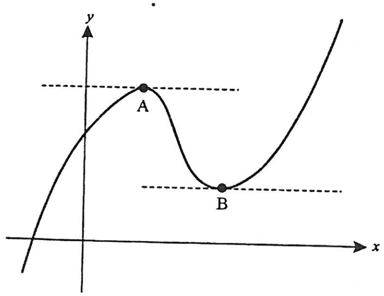
ΤΟΠΙΚΟ ΜΕΓΙΣΤΟ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟ. Μια συνάρτηση f έχει *τοπικό μέγιστο* στο x_0 αν $f(x_0) \geq f(x)$ για κάθε x σε ένα ανοιχτό διάστημα το οποίο περιέχει την τιμή x_0 (και για το οποίο ορίζεται η $f(x)$). Με άλλα λόγια, η τιμή της f στο x_0 είναι μεγαλύτερη από, ή ίση με, όλες τις τιμές της f στα γειτονικά σημεία. Παρόμοια, η f έχει *τοπικό ελάχιστο* στο x_0 αν $f(x_0) \leq f(x)$ για κάθε x σε ένα ανοιχτό διάστημα, το οποίο περιέχει την τιμή x_0 (και για το οποίο ορίζεται η $f(x)$). Με άλλα λόγια, η τιμή της f στο x_0 είναι μικρότερη από, ή ίση με, όλες τις τιμές της f στα γειτονικά σημεία. Με τον όρο *τοπικό ακρότατο* της f εννοούμε είτε ένα τοπικό μέγιστο είτε ένα τοπικό ελάχιστο της f.

Θεώρημα 13.1: Αν η συνάρτηση f έχει ένα τοπικό ακρότατο σε ένα σημείο x_0 στο οποίο ορίζεται η $f'(x_0)$, τότε $f'(x_0) = 0$.

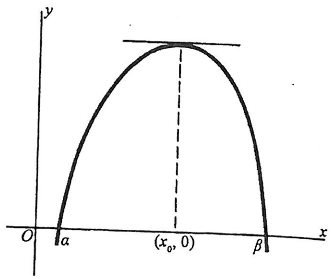
Συνεπώς, αν η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο στο οποίο έχει τοπικό ακρότατο, τότε η γραφική της παράσταση έχει οριζόντια εφαπτομένη σε αυτό το σημείο. Στο Σχήμα 13–1 υπάρχουν οριζόντιες εφαπτομένες στα σημεία A και B όπου η f έχει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο αντίστοιχα. Για την απόδειξη του Θεωρήματος 13.1 δείτε το Πρόβλημα 5.

Θεώρημα 13.2 (Θεώρημα του Rolle): Έστω ότι η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (a, β). Έστω ότι $f(a) = f(\beta) = 0$. Τότε, $f'(x_0) = 0$ για τουλάχιστον ένα σημείο x_0 του διαστήματος (a, β).

Αυτό σημαίνει ότι αν η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης τέμνει τον άξονα των x στα σημεία $x = a$ και $x = \beta$, και η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη μεταξύ των a και β, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της γραφικής παράστασης μεταξύ των a και β όπου η εφαπτομένη είναι οριζόντια. Δείτε το Σχήμα 13–2, όπου φαίνεται ένα τέτοιο σημείο. Για την απόδειξη του Θεωρήματος του Rolle, δείτε το Πρόβλημα 6.



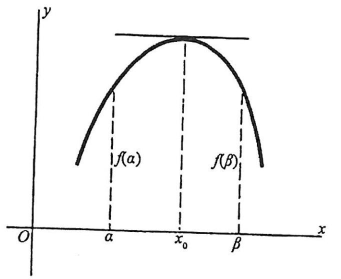
Σχήμα 13–1



Σχήμα 13–2

Λήμμα 13.3 (Γενικευμένο Θεώρημα του Rolle): Έστω ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (a, β). Έστω ότι $g(a) = g(\beta)$. Τότε $g'(x_0) = 0$ για τουλάχιστον ένα σημείο x_0 του διαστήματος (a, β).

Ένα παράδειγμα με ένα τέτοιο ακριβώς σημείο μπορείτε να δείτε στο Σχήμα 13–3. Προσέξτε ότι το Λήμμα 13.3 απορρέει από το Θεώρημα του Rolle αν ορίσουμε $f(x) = g(x) - g(a)$.



Σχήμα 13–3

Θεώρημα 13.4 (Κανόνας της Μέσης Τιμής)†: Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (a, β). Τότε, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x_0 του διαστήματος (a, β) για το οποίο ισχύει,

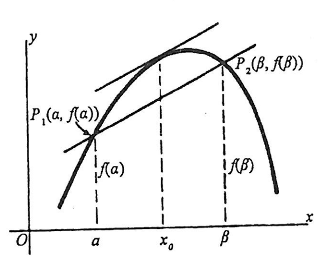
$$\frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} = f'(x_0)$$

Δείτε το Σχήμα 13–4. Για την απόδειξη, δείτε το Πρόβλημα 7. Ερμηνεύοντας το συμπέρασμα γεωμετρικά, μπορούμε να πούμε ότι το διάστημα περιέχει ένα σημείο όπου η κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ισούται με την κλίση $[f(\beta) - f(a)]/(\beta - a)$ της ευθείας P_1P_2 η οποία συνδέει τα ακραία σημεία $(a, f(a))$ και $(\beta, f(\beta))$ της γραφικής παράστασης. Σε ένα τέτοιο σημείο, η εφαπτομένη είναι παράλληλη με την P_1P_2, αφού οι κλίσεις τους είναι ίσες.

Θεώρημα 13.5 (Γενικευμένος Κανόνας της Μέσης Τιμής). Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (a, β). Έστω ακόμα ότι $g'(x) \neq 0$ για κάθε x στο (a, β). Τότε, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x_0 του διαστήματος (a, β) για το οποίο ισχύει

$$\frac{f(\beta) - f(a)}{g(\beta) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

† Ο Κανόνας της Μέσης Τιμής είναι επίσης γνωστός ως Θεώρημα της Μέσης Τιμής των Παραγώγων.



Σχήμα 13–4

Για την απόδειξη, δείτε το Πρόβλημα 13. Προσέξτε ότι ο Κανόνας της Μέσης Τιμής είναι η ειδική περίπτωση κατά την οποία $g(x) = x$.

Θεώρημα 13.6 (Κανόνας της Μέσης Τιμής Παραγώγων Ανώτερης Τάξης): Αν η συνάρτηση f και οι πρώτες $n-1$ παράγωγοί της είναι συνεχείς στο διάστημα $[a, \beta]$ και η $f^{(n)}(x)$ υπάρχει στο διάστημα (a, β), τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x_0 του (a, β) για το οποίο ισχύει,

$$f(\beta) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(\beta - a) + \frac{f''(a)}{2!}(\beta - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(\beta - a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\beta - a)^n \qquad (1)$$

(Για την απόδειξη, δείτε το Πρόβλημα 14.)

Όταν το β αντικατασταθεί από το x, ο τύπος (1) γίνεται,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x - a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - a)^n \qquad (2)$$

για x_0 μεταξύ των a και x.

Στην ειδική περίπτωση κατά την οποία $a = 0$, ο τύπος (2) γίνεται,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n \qquad (3)$$

για x_0 μεταξύ των 0 και x.

ΑΥΞΟΥΣΕΣ ΚΑΙ ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ. Μια συνάρτηση f είναι *αύξουσα* σε ένα διάστημα αν η ανισότητα $u < v$ υποδηλώνει ότι $f(u) < f(v)$ για κάθε u και v του διαστήματος. Παρόμοια, η f θεωρείται *φθίνουσα* σε ένα διάστημα αν η ανισότητα $u < v$ υποδηλώνει ότι $f(u) > f(v)$ για κάθε u και v του διαστήματος.

Θεώρημα 13.7: (*α*) Αν η παράγωγος f' είναι θετική σε ένα διάστημα, τότε η συνάρτηση f είναι αύξουσα σε αυτό το διάστημα. (*β*) Αν η παράγωγος f' είναι αρνητική σε ένα διάστημα, τότε η f είναι φθίνουσα σε αυτό το διάστημα.

Για την απόδειξη δείτε το Πρόβλημα 9.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14

Μέγιστες και ελάχιστες τιμές

ΚΡΙΣΙΜΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ. Ένας αριθμός x_0 του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f για τον οποίο είτε $f'(x_0) = 0$ είτε η παράγωγος $f'(x_0)$ δεν ορίζεται, ονομάζεται *κρίσιμος αριθμός* της f.

Θυμηθείτε ότι (Θεώρημα 13.1) αν η f έχει ένα τοπικό ακρότατο στο σημείο x_0 και η παράγωγος $f'(x_0)$ ορίζεται, τότε $f'(x_0) = 0$· επομένως το x_0 είναι κρίσιμος αριθμός της f. Προσέξτε όμως ότι, η συνθήκη $f'(x_0) = 0$ δεν εγγυάται ότι η f έχει τοπικό ακρότατο στο x_0. Για παράδειγμα, αν $f(x) = x^3$, τότε $f'(x) = 3x^2$ και επομένως το 0 είναι κρίσιμος αριθμός της f· ωστόσο, η f δεν έχει ούτε τοπικό μέγιστο, ούτε τοπικό ελάχιστο στο 0. (Δείτε το Σχήμα 5–5.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

(α) Έστω ότι $f(x) = 7x^2 - 3x + 5$. Τότε $f'(x) = 14x - 3$. Ορίζουμε $f'(x) = 0$ και επιλύουμε. Ο μόνος κρίσιμος αριθμός της συνάρτησης f είναι ο $\frac{3}{14}$.

(β) Έστω ότι $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Τότε $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Επιλύουμε για $f'(x) = 0$ και διαπιστώνουμε ότι οι κρίσιμοι αριθμοί είναι οι 1 και $\frac{1}{3}$.

(γ) Έστω ότι $f(x) = x^{2/3}$. Τότε $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \dfrac{2}{3x^{1/3}}$. Αφού η $f'(0)$ δεν ορίζεται, ο μόνος κρίσιμος αριθμός της f είναι το 0.

Θα βρούμε μερικές συνθήκες με τις οποίες μπορούμε να συμπεράνουμε ότι μια συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο σε ένα δεδομένο κρίσιμο αριθμό.

ΕΛΕΓΧΟΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΓΙΑ ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ. Ας υποθέσουμε ότι $f'(x_0) = 0$ και ότι υπάρχει η δεύτερη παράγωγος $f''(x_0)$. Τότε:

(*i*) Αν $f''(x_0) < 0$, τότε η συνάρτηση f έχει ένα τοπικό μέγιστο στο σημείο x_0·

(*ii*) Αν $f''(x_0) > 0$, τότε η f έχει ένα τοπικό ελάχιστο στο x_0·

(*iii*) Αν $f''(x_0) = 0$, τότε δεν γνωρίζουμε τι συμβαίνει στο σημείο x_0.

Η απόδειξη των παραπάνω δίνεται στο Πρόβλημα 9. Για να δείξουμε ότι το (*iii*) ισχύει, ας εξετάσουμε τρεις συναρτήσεις $f(x) = x^4$, $g(x) = -x^4$, και $h(x) = x^3$. Καθώς $f'(x) = 4x^3$, $g'(x) = -4x^3$, και $h'(x) = 3x^2$, το 0 είναι κρίσιμος αριθμός και των τριών συναρτήσεων. Αφού $f''(x) = 12x^2$, $g''(x) = -12x^2$, και $h''(x) = 6x$, η δεύτερη παρά-

γωγος των τριών συναρτήσεων στο 0 είναι 0. Ωστόσο, η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στο 0, η g έχει τοπικό μέγιστο στο 0, ενώ η h δεν έχει ούτε τοπικό μέγιστο, ούτε τοπικό ελάχιστο στο 0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

(α) Έστω η συνάρτηση $f(x) = 7x^2 - 3x + 5$ του Παραδείγματος 1(α). Ο μόνος κρίσιμος αριθμός είναι το $\frac{3}{14}$. Καθώς $f''(x) = 14$, $f''\left(\frac{3}{14}\right) = 14 > 0$. Άρα ο έλεγχος της δεύτερης παραγώγου μας δείχνει ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $\frac{3}{14}$.

(β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ του Παραδείγματος 1(β). Προσέξτε ότι $f''(x) = 6x - 4$. Στους κρίσιμους αριθμούς 1 και $\frac{1}{3}$, $f''(1) = 2 > 0$ και $f''\left(\frac{1}{3}\right) = -2 < 0$. Άρα η f έχει ένα τοπικό ελάχιστο στο 1 και ένα τοπικό μέγιστο στο $\frac{1}{3}$.

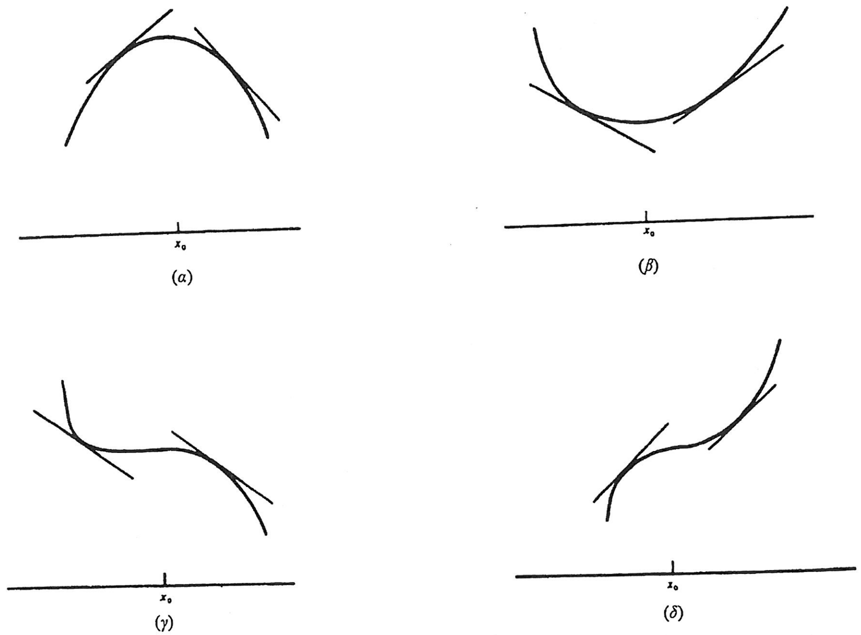
(γ) Στο Παράδειγμα 1(γ), $f(x) = x^{2/3}$ και $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$. Ο μόνος κρίσιμος αριθμός είναι το 0, για τον οποίο η f' δεν ορίζεται. Επομένως η $f''(0)$ δεν ορίζεται και ο έλεγχος της δεύτερης παραγώγου δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

Αν ο έλεγχος της δεύτερης παραγώγου δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ή δεν διευκολύνει — είτε επειδή η δεύτερη παράγωγος είναι 0, είτε επειδή δεν υπάρχει, είτε επειδή είναι δύσκολο να υπολογιστεί — μπορούμε να εφαρμόσουμε τον παρακάτω έλεγχο. Θυμηθείτε ότι η $f'(x)$ είναι η κλίση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο x.

ΕΛΕΓΧΟΣ ΠΡΩΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ. Έστω ότι $f'(x_0) = 0$.

Περίπτωση {+, −}: Αν η f' είναι θετική σε ένα ανοιχτό διάστημα αμέσως αριστερά του x_0 και αρνητική σε ένα ανοιχτό διάστημα αμέσως δεξιά του x_0, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0. (Δείτε το Σχήμα 14–1(α).)

Περίπτωση {−, +}: Αν η f' είναι αρνητική σε ένα ανοιχτό διάστημα αμέσως αριστερά του x_0 και θετική σε ένα ανοιχτό διάστημα αμέσως δεξιά του x_0, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0. (Δείτε το Σχήμα 14–1(β).)



Σχήμα 14–1

Περιπτώσεις {+, +} και {–, –}: Αν η f έχει ίδιο πρόσημο στα ανοιχτά διαστήματα αμέσως αριστερά και αμέσως δεξιά του x_0, τότε η f δεν έχει ούτε τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο στο x_0. (Δείτε το Σχήμα 14–1 (γ, δ).)

Για την απόδειξη του ελέγχου της πρώτης παραγώγου, δείτε το Πρόβλημα 8.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3: Έστω οι τρεις συναρτήσεις $f(x) = x^4$, $g(x) = -x^4$, και $h(x) = x^3$ που εξετάσαμε προηγουμένως. Στον κρίσιμο αριθμό τους 0, δεν μπορέσαμε να εφαρμόσουμε τον έλεγχο της δεύτερης παραγώγου επειδή η δεύτερη παράγωγος ήταν 0. Ας δοκιμάσουμε τον έλεγχο της πρώτης παραγώγου.

(α) $f'(x) = 4x^3$. Στα αριστερά του 0, $x < 0$ και έτσι $f'(x) < 0$. Στα δεξιά του 0, $x > 0$ και έτσι $f'(x) > 0$. Άρα, έχουμε την περίπτωση {–, +} και η f πρέπει να έχει ένα τοπικό ελάχιστο στο 0.

(β) $g'(x) = -4x^3$. Στα αριστερά του 0, $x < 0$ και έτσι $g'(x) > 0$. Στα δεξιά του 0, $x > 0$ και έτσι $g'(x) < 0$. Συνεπώς, έχουμε την περίπτωση {+, –} και η g πρέπει να έχει ένα τοπικό μέγιστο στο 0.

(γ) $h(x) = 3x^2$. $h'(x) > 0$ και στις δύο πλευρές του 0. Άρα, έχουμε την περίπτωση {+, +} και η h δεν έχει ούτε τοπικό μέγιστο, ούτε τοπικό ελάχιστο στο 0. Υπάρχει ένα *σημείο καμπής* στο $x = 0$.

Τα αποτελέσματα μπορούν να επαληθευθούν με έλεγχο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων.

ΟΛΙΚΟ ΜΕΓΙΣΤΟ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟ. Μια συνάρτηση f παρουσιάζει *ολικό μέγιστο* (ή *απόλυτο μέγιστο*) στο σημείο x_0 ενός συνόλου S αν ισχύει $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε x του S. Η συνάρτηση f παρουσιάζει *ολικό ελάχιστο* (ή *απόλυτο ελάχιστο*) στο σημείο x_0 ενός συνόλου S αν ισχύει $f(x) \ge f(x_0)$ για κάθε x του S.

ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΟΛΙΚΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΜΕ ΠΙΝΑΚΟΓΡΑΦΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟ. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Το Θεώρημα των Ακροτάτων μας πληροφορεί ότι η f έχει ολικό μέγιστο και ελάχιστο στο $[\alpha, \beta]$. Παρακάτω παρουσιάζουμε μια πινακογραφική μέθοδο για τον προσδιορισμό της θέσης και της τιμής των ακροτάτων. (Δείτε το Σχήμα 14–2.)

x	$f(x)$
γ_1	$f(\gamma_1)$
γ_2	$f(\gamma_2)$
γ_n	$f(\gamma_n)$
α	$f(\alpha)$
β	$f(\beta)$

Σχήμα 14–2

Καταρχήν πρέπει να βρείτε τους κρίσιμους αριθμούς (αν υπάρχουν) $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ της f στο (α, β). Έπειτα, καταγράψτε αυτούς τους αριθμούς σε πίνακα, συμπεριλαμβάνοντας και τα ακραία σημεία α και β του διαστήματος. Τέλος, υπολογίστε την τιμή της συνάρτησης f για όλους τους αριθμούς του πίνακα.

Τότε:

1. Η μεγαλύτερη από αυτές τις τιμές είναι το ολικό μέγιστο της f στο $[\alpha, \beta]$.
2. Η μικρότερη από αυτές τις τιμές είναι το ολικό ελάχιστο της f στο $[\alpha, \beta]$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4: Ας βρούμε το ολικό μέγιστο και ελάχιστο της $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ στο $[0, 2]$.

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1)$. Συνεπώς, οι κρίσιμοι αριθμοί είναι $x = -\frac{1}{3}$, και $x = 1$. Ο μόνος κρίσιμος αριθμός στο $[0, 2]$ είναι το 1. Από τον πίνακα του Σχήματος 14–3 βλέπουμε ότι η μέγιστη τιμή της f στο $[0, 2]$ είναι 4 και παρουσιάζεται στο δεξιό ακραίο σημείο 2, ενώ η ελάχιστη τιμή είναι 1 και παρουσιάζεται στο 1.

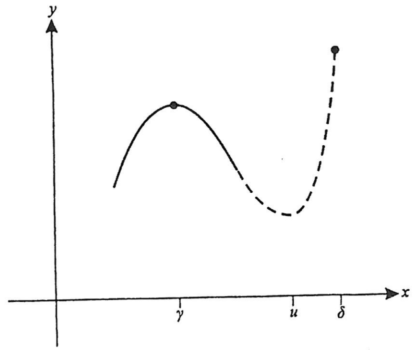
x	$f(x)$
1	1
0	2
2	4

Σχήμα 14–3

Ας εξετάσουμε γιατί είναι αποτελεσματική αυτή η μέθοδος. Σύμφωνα με το Θεώρημα των Ακροτάτων, η f παρουσιάζει τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν κάποια από αυτές τις τιμές εμφανίζεται σε ακραίο σημείο, αυτή η τιμή θα αναφέρεται στον πίνακα και καθώς είναι μέγιστη, ή ελάχιστη, θα εμφανίζεται ως η μεγαλύτερη, ή η μικρότερη, τιμή. Αν υποθέσουμε ότι η μέγιστη, ή ελάχιστη, τιμή βρίσκεται σε ένα σημείο x_0 του διαστήματος, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο, ή ελάχιστο, στο x_0 και επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 13.1, $f'(x_0) = 0$. Συνεπώς, το x_0 θα είναι κρίσιμος αριθμός και θα αναφέρεται στον πίνακα, όπου η αντίστοιχη μέγιστη, ή ελάχιστη, τιμή $f(x_0)$ θα είναι η μεγαλύτερη, ή μικρότερη, τιμή στη δεξιά στήλη.

Θεώρημα 14.1: Έστω ότι η f είναι μια συνεχής συνάρτηση η οποία ορίζεται σε ένα διάστημα Θ. Το διάστημα Θ μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο. Αν η f έχει ένα μοναδικό τοπικό ακρότατο μέσα στο Θ, τότε αυτό το τοπικό ακρότατο θα είναι και ολικό ακρότατο στο Θ.

Για να καταλάβουμε γιατί συμβαίνει αυτό, ας δούμε το Σχήμα 14–4, όπου έχουμε υποθέσει ότι η f έχει ένα μοναδικό ακρότατο — ένα τοπικό μέγιστο στο σημείο γ. Έστω οποιοσδήποτε άλλος αριθμός δ του διαστήματος Θ. Η γραφική παράσταση κατευθύνεται προς τα κάτω και στις δύο πλευρές του γ. Έτσι, αν η τιμή $f(\delta)$ ήταν μεγαλύτερη από την τιμή $f(\gamma)$, τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα των Ακροτάτων για το κλειστό διάστημα με ακραία σημεία τα γ και δ, η f θα είχε ολικό ελάχιστο σε ένα σημείο u μεταξύ των γ και δ. (Το u δεν μπορεί να είναι ίσο με το γ ή το δ.) Τότε η f θα είχε ένα τοπικό ελάχιστο στο u, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι η f έχει τοπικό ακρότατο μόνο στο γ. Μπορούμε να επεκτείνουμε αυτόν το συλλογισμό και στην περίπτωση όπου η f έχει ένα τοπικό ελάχιστο στο γ, εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα που μόλις εξαγάγαμε στην $-f$.



Σχήμα 14–4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 22

Αντιπαράγωγοι

Αν $F'(x) = f(x)$ τότε η F ονομάζεται *αντιπαράγωγος* (ή *παράγουσα*) της f.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Το x^3 είναι αντιπαράγωγος του $3x^2$, καθώς $D_x(x^3) = 3x^2$. Αλλά και το $x^3 + 5$ είναι αντιπαράγωγος του $3x^2$, αφού $D_x(5) = 0$.

(I) Γενικά, αν η $F(x)$ είναι αντιπαράγωγος της $f(x)$, τότε η $F(x) + \Gamma$ είναι επίσης αντιπαράγωγος της $f(x)$, όπου Γ είναι οποιαδήποτε σταθερά.

(II) Αντίθετα, αν η $F(x)$ είναι αντιπαράγωγος της $f(x)$, και η $G(x)$ είναι οποιαδήποτε άλλη αντιπαράγωγος της $f(x)$, τότε $G(x) = F(x) + \Gamma$, για κάποια σταθερά Γ.

Η ιδιότητα (II) προκύπτει από το Πρόβλημα 13 του Κεφαλαίου 18, αφού $F'(x) = f(x) = G'(x)$.

Από τις ιδιότητες (I) και (II) βλέπουμε ότι, αν η $F(x)$ είναι αντιπαράγωγος της $f(x)$, τότε οι αντιπαράγωγοι της $f(x)$ είναι εκείνες οι συναρτήσεις οι οποίες έχουν την μορφή $F(x) + \Gamma$, για μια σταθερά Γ.

Σημειογραφία: Το ολοκλήρωμα $\int f(x)\, dx$ συμβολίζει κάθε αντιπαράγωγο της συνάρτησης $f(x)$. Σε αυτή τη σημειογραφία, η $f(x)$ ονομάζεται *ολοκληρωτέα συνάρτηση*.

Ορολογία: Η αντιπαράγωγος $\int f(x)\, dx$ ονομάζεται και *αόριστο ολοκλήρωμα*.

Εξήγηση του ειδικού συμβόλου $\int f(x)\, dx$ (καθώς και του διαφορικού dx) θα δοθεί αργότερα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: (α) $\int x\, dx = \frac{1}{2}x^2 + \Gamma$, (β) $\int -\sin x\, dx = \cos x + \Gamma$.

ΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ ΤΩΝ ΑΝΤΙΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Κανόνας 1. $\int 0\, dx = \Gamma$.

Κανόνας 2. $\int 1\, dx = x + \Gamma$.

Κανόνας 3. $\int a\, dx = ax + \Gamma$.

Κανόνας 4. $\int x^r\, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + \Gamma$ για κάθε ρητό αριθμό $r \neq -1$.

Ο Κανόνας (4) προκύπτει από το γεγονός ότι $D_x\left(\frac{x^{r+1}}{r+1}\right) = x^r$ για $r \neq -1$.

Κανόνας 5. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$.

Προσέξτε ότι $D_x\left(a\int f(x)\,dx\right) = aD_x\left(\int f(x)\,dx\right) = af(x)$.

Κανόνας 6. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Προσέξτε ότι $D_x\left(\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right) = D_x\left(\int f(x)dx\right) + D_x\left(\int g(x)dx\right) = f(x) + g(x)$.

Κανόνας 7. $\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$.

Προσέξτε ότι $D_x\left(\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx\right) = D_x\left(\int f(x)dx\right) - D_x\left(\int g(x)dx\right) = f(x) - g(x)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3:

(α) $\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{1/3}\, dx = \frac{x^{4/3}}{4/3} + \Gamma = \frac{3}{4}x^{4/3} + \Gamma$ από τον Κανόνα (4).

(β) $\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + \Gamma = -\frac{1}{x} + \Gamma$ από τον Κανόνα (4).

(γ) $\int 7x^3dx = 7\int x^3dx = 7\left(\frac{x^4}{4}\right) + \Gamma = \frac{7}{4}x^4 + \Gamma$ από τους Κανόνες (5), (4).

(δ) $\int (x^2 + 4)dx = \int x^2dx + \int 4dx = \frac{1}{3}x^3 + 4x + C$ από τους Κανόνες (6), (4), και (2).

(ε) $\int (3x^6 - 4x)dx = \int 3x^6\, dx - \int 4x\, dx = 3\int x^6\, dx - 4\int x\, dx = 3\left(\frac{1}{7}x^7\right) - 4\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \Gamma = \frac{3}{7}x^7 - 2x^2 + \Gamma$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4: Οι Κανόνες (3)–(7) επιτρέπουν τον υπολογισμό της αντιπαραγώγου κάθε πολυώνυμου. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}\int (6x^8 - \tfrac{2}{3}x^5 + 7x^4 + \sqrt{3})\, dx &= 6(\tfrac{1}{9}x^9) - \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{6}x^6) + 7(\tfrac{1}{5}x^5) + \sqrt{3}x + C \\ &= \tfrac{2}{3}x^9 - \tfrac{1}{9}x^6 + \tfrac{7}{5}x^5 + \sqrt{3}x + C\end{aligned}$$

Κανόνας 8. Άμεσος Τύπος I

$$\int (g(x))^r g'(x)dx = \frac{1}{r+1}(g(x))^{r+1} + \Gamma \qquad \text{για κάθε ρητό αριθμό για } r \neq -1.$$

Για την επαλήθευση, $D_x\left(\frac{1}{r+1}(g(x))^{r+1}\right) = \frac{1}{r+1}D_x\left[(g(x))^{r+1}\right] = \frac{1}{r+1}(r+1)(g(x))^r g'(x) = (g(x))^r g'(x)$ σύμφωνα με τον Κανόνα Παραγώγισης Σύνθετων Συναρτήσεων με Δυνάμεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5: $\int \left(\frac{1}{3}x^3 + 7\right)^5 x^2dx = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}x^3 + 7\right)^6 + \Gamma$.

Για να το διαπιστώσετε, υποθέστε ότι $g(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 7\right)$ και αντικαταστήστε $r = 5$ στον Άμεσο Τύπο I.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6: $\int (x^2 + 1)^{2/3} x\, dx = \frac{1}{2}\int (x^2 + 1)^{2/3} 2xdx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5/3}\right)(x^2 + 1)^{5/3} + \Gamma = \frac{3}{10}(x^2 + 1)^{5/3} + \Gamma$.

Σε αυτή την περίπτωση, για να χρησιμοποιήσουμε τον Άμεσο Τύπο I, έπρεπε να εισαγάγουμε έναν παράγοντα 2 στην ολοκληρωτέα συνάρτηση.

Κανόνας 9. Η Μέθοδος της Αντικατάστασης

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)\,du$$

όπου το u αντικαθίσταται από το $g(x)$ αφού βρεθεί η τιμή του δεξιού μέρους. Η «αντικατάσταση» γίνεται στο αριστερό μέρος με $u = g(x)$ και $du = g'(x)\,dx$. (Για την αιτιολόγηση δείτε το Πρόβλημα 21.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

(*α*) Βρείτε το $\int x\sin(x^2)dx$.

Έστω ότι $u = x^2$. Τότε $du = 2x\,dx$. Έτσι, $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$. Με αντικατάσταση,

$$\int x\,\sin(x^2)\,dx = \int \sin u \quad (\tfrac{1}{2})\,du = \tfrac{1}{2}(-\cos u) + C = -\tfrac{1}{2}\cos(x^2) + C$$

(*β*) Βρείτε το $\int x\sin(x/2)dx$.

Έστω ότι $u = x/2$. Τότε $du = \frac{1}{2}dx$. Έτσι, $dx = 2\,du$. Με αντικατάσταση,

$$\int \sin\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int(\sin u)\,2\,du = 2\int \sin u\,du = 2(-\cos u) + \Gamma = -2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \Gamma$$

Προσέξτε ότι ο Άμεσος Τύπος Ι είναι απλώς μια ειδική περίπτωση της Μεθόδου Αντικατάστασης, όπου $u = g(x)$. Το πλεονέκτημα του Άμεσου Τύπου Ι είναι ότι δεν χρειάζεται να κάνουμε αντικατάσταση.

Οι γνωστοί τύποι παραγώγων για τις τριγωνομετρικές και τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις δίνουν τους παρακάτω τύπους για τις αντιπαραγώγους:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + \Gamma$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + \Gamma$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + \Gamma$$

$$\int \tan x \sec x\,dx = \sec x + \Gamma$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + \Gamma$$

$$\int \cot x \csc x\,dx = -\csc x + \Gamma$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1} x + \Gamma$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1} x + \Gamma$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \sec^{-1} x + \Gamma$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \Gamma \qquad \text{για } a > 0$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \Gamma \qquad \text{για } a > 0$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \Gamma \qquad \text{για } a > 0$$

Λυμένα προβλήματα

Στα Προβλήματα 1–8, υπολογίστε την αντιπαράγωγο.

1. $\int x^6\,dx = \frac{1}{7}x^7 + \Gamma$ [Κανόνας (4)]

2. $\int \frac{dx}{x^6} = \int x^{-6}dx = \frac{1}{-5}x^{-5} + \Gamma = -\frac{1}{5x^5} + \Gamma$ [Κανόνας (4)]

3. $\int \sqrt[3]{z}\,dz = \int z^{1/3}dz = \frac{1}{4/3}z^{4/3} + \Gamma = \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{z}\right)^4 + \Gamma$ [Κανόνας (4)]

4. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int x^{-2/3}dx = \frac{1}{1/3}x^{1/3} + \Gamma = 3\sqrt[3]{x} + \Gamma$ [Κανόνας (4)]

5. $\int(2x^2 - 5x + 3)dx = 2\int x^2dx - 5\int x\,dx + \int 3dx$

$= 2\left(\frac{1}{3}x^3\right) - 5\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 3x + \Gamma = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x + \Gamma$ [Κανόνες (3)–(7)]

6. $\int(1-x)\sqrt{x}\,dx = \int(1-x)x^{1/2}dx = \int\left(x^{1/2} - x^{3/2}\right)dx$

$= \int x^{1/2}dx - \int x^{3/2}dx = \frac{1}{3/2}x^{3/2} - \frac{1}{5/2}x^{5/2} + \Gamma$

$= \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2} + \Gamma = 2x^{3/2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}x\right) + \Gamma$ [Κανόνες (4)–(7)]

7. $\int(3s+4)^2\,ds = \int(9s^2 + 24s + 16)ds$

$= 9\left(\frac{1}{3}s^3\right) + 24\left(\frac{1}{2}s^2\right) + 16s + \Gamma = 3s^3 + 12s^2 + 16s + \Gamma$ [Κανόνες (3)–(6)]

Παρατηρήστε ότι θα ήταν ευκολότερο να χρησιμοποιήσουμε τον Άμεσο Τύπο Ι:

$$\int(3s+4)^2\,ds = \tfrac{1}{3}\int(3s+4)^2\,3ds = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}(3s+4)^3\right) + \Gamma = \left(\tfrac{1}{9}\right)(3s+4)^3 + \Gamma.$$

8. $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2}dx = \int(x + 5 - 4x^{-2})dx = \frac{1}{2}x^2 + 5x - 4\left(\frac{1}{-1}x^{-1}\right) + \Gamma$

$= \frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{4}{x} + \Gamma$ [Κανόνες (3)–(7)]

Στα Προβλήματα 9–15, χρησιμοποιήστε τον Άμεσο Τύπο Ι.

9. $\int(s^3+2)^2(3s^2)ds = \frac{1}{3}(s^3+2)^3 + \Gamma$

65. Μια πέτρα εκσφενδονίζεται κατακόρυφα προς τα επάνω από τη μαρκίζα ενός κτιρίου, η οποία βρίσκεται σε ύψος 120 ft από το έδαφος, με αρχική ταχύτητα 96 ft/sec. (*α*) Πότε θα φτάσει στο μέγιστο ύψος της; (*β*) Ποιο θα είναι το μέγιστο ύψος της; (*γ*) Πότε θα προσκρούσει στο έδαφος; (*δ*) Με τι ταχύτητα θα προσκρούσει στο έδαφος;

Απάντ. (*α*) $t=3$ sec, (*β*) 264 ft, (*γ*) $\frac{6+\sqrt{66}}{2}\sim 7.06$ sec, (*δ*) ~ 129.98 ft/sec

66. Ένα αντικείμενο κινείται επάνω στον άξονα των x με επιτάχυνση $a=3t-2$ ft/sec^2. Τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και κινείται με ταχύτητα 5 ft/sec προς την αρνητική κατεύθυνση. (*α*) Βρείτε τον τύπο για την ταχύτητά του, υ, (*β*) Βρείτε έναν τύπο για τη θέση του x, (*γ*) Πότε και πού αλλάζει κατεύθυνση; (*δ*) Πότε κινείται προς τα δεξιά;

Απάντ. (*α*) $\upsilon=\frac{3}{2}t^2-2t-5$, (*β*) $x=\frac{1}{2}t^3-t^2-5t$, (*γ*) $\frac{2\pm\sqrt{34}}{3}$, (*δ*) $t>\frac{2+\sqrt{34}}{3}$ ή $t<\frac{2-\sqrt{34}}{3}$

67. Ένας πύραυλος εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος και προσκρούει σε αυτό 8 δευτερόλεπτα αργότερα. (*α*) Ποια ήταν η αρχική του ταχύτητα; (*β*) Ποιο ήταν το μέγιστο ύψος του;

Απάντ. (*α*) 128 ft/sec, (*β*) 256 ft

68. Ένας οδηγός φρενάρει το αυτοκίνητό του που κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα 55 μιλίων την ώρα. Τα φρένα προκαλούν μια σταθερή επιβράδυνση 11 ft/sec^2. (*α*) Πότε θα σταματήσει το αυτοκίνητο; (*β*) Πόση απόσταση διανύει το αυτοκίνητο μετά την εφαρμογή των φρένων;

Απάντ. (*α*) 5 sec, (*β*) 137.5 ft

69. Βρείτε την εξίσωση της καμπύλης που περνά από το σημείο (3, 7) και έχει κλίση $4x^2-3$ στο σημείο (x, y).

Απάντ. $y=\frac{4}{3}x^3-3x-20$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 23

Το ορισμένο ολοκλήρωμα. Εμβαδόν κάτω από μια καμπύλη

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ ΣΙΓΜΑ. Το ελληνικό κεφαλαίο γράμμα $\sum$ συμβολίζει την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:

(*α*) $\sum_{j=1}^{5} j = 1+2+3+4+5=15$

(*β*) $\sum_{i=0}^{3}(2i+1)=1+3+5+7$

(*γ*) $\sum_{i=2}^{10} i^2 = 2^2+3^2+\ldots+(10)^2$

(*δ*) $\sum_{j=1}^{4}\cos j\pi = \cos\pi+\cos 2\pi+\cos 3\pi+\cos 4\pi$

Γενικά αν f είναι μια συνάρτηση που ορίζεται στους ακέραιους και n και k είναι ακέραιοι τέτοιοι ώστε $n\geq k$,:

$$\sum_{j=k}^{n} f(j)=f(k)+f(k+1)+\ldots+f(n)$$

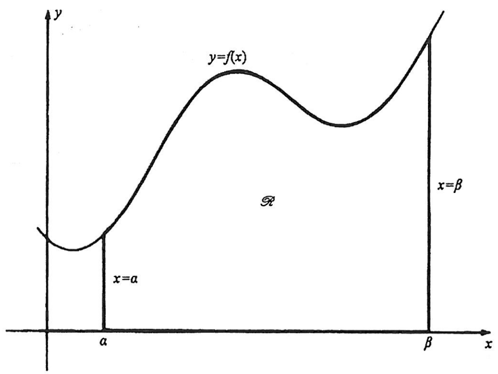
ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΜΙΑ ΚΑΜΠΥΛΗ. Έστω ότι η f είναι μια συνάρτηση τέτοια ώστε $f(x)\geq 0$ για κάθε x σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Η γραφική της παράσταση είναι μια καμπύλη η οποία βρίσκεται επάνω από τον άξονα των x. (Δείτε το Σχήμα 23–1.) Έχουμε ήδη μια διαισθητική αντίληψη του *εμβαδού A του χωρίου* $\mathscr{R}$ το οποίο βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση, επάνω από τον άξονα των x, και μεταξύ των κατακόρυφων ευθειών $x=a$ και $x=\beta$. Θα περιγράψουμε μια μέθοδο για τον υπολογισμό του εμβαδού A.

Επιλέγουμε τα σημεία $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ μεταξύ των a και β. Έστω $x_0=a$ και $x_n=\beta$. Άρα, (δείτε το Σχήμα 23–2),

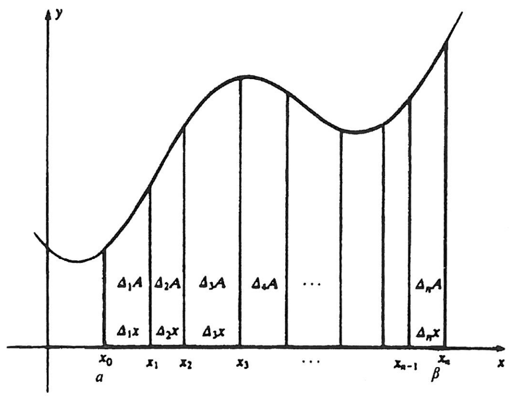
$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=\beta$$

Το διάστημα $[a, \beta]$ διαιρείται σε n υποδιαστήματα $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$….$[x_{n-1}, x_n]$. Συμβολίζουμε το μήκος αυτών των υποδιαστημάτων με $\Delta_1 x$, $\Delta_2 x$, …., $\Delta_n x$. Άρα, αν $1\leq k\leq n$,

$$\Delta_k x = x_k - x_{k-1}$$



Σχήμα 23–1

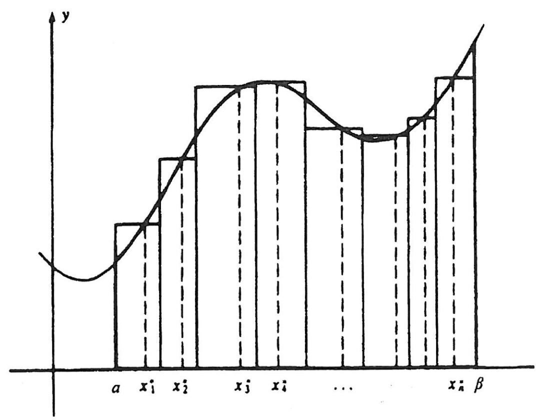


Σχήμα 23–2

Φέρουμε κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα $x = x_k$ από τον άξονα των x μέχρι τη γραφική παράσταση. Με αυτόν τον τρόπο διαιρούμε το χωρίο $\mathscr{R}$ σε n λωρίδες. Έστω ότι το $\Delta_k A$ συμβολίζει το εμβαδόν της k λωρίδας. Τότε

$$A = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k A$$

Μπορούμε να προσεγγίσουμε το εμβαδόν $\Delta_k A$ με τον παρακάτω τρόπο. Επιλέγουμε οποιοδήποτε σημείο x_k^* στο k υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$. Φέρουμε ένα κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο x_k^* του άξονα των x μέχρι τη γραφική παράσταση (δείτε τις διακεκομμένες γραμμές στο Σχήμα 23–3)· το μήκος αυτού του τμήματος είναι $f(x_k^*)$. Το ορθογώνιο με βάση $\Delta_k x$ και ύψος $f(x_k^*)$ έχει εμβαδόν $f(x_k^*)\Delta_k x$, το οποίο είναι κατά προσέγγιση ίσο με το εμβαδόν $\Delta_k A$ της k λωρίδας.



Σχήμα 23–3

Επομένως, το συνολικό εμβαδόν A κάτω από την καμπύλη ισούται κατά προσέγγιση με το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta_k x = f(x_1^*)\Delta_1 x + f(x_2^*)\Delta_2 x + \ldots + f(x_n^*)\Delta_n x \qquad (23.1)$$

Όσο περισσότερα υποδιαστήματα χρησιμοποιήσουμε στο διάστημα $[a, \beta]$ και όσο μικρότερο μήκος έχουν, τόσο πιο ακριβής θα είναι η προσέγγιση. Αν μπορούμε να πραγματοποιήσουμε διαδοχικές προσεγγίσεις, με τον επιθυμητό βαθμό ακριβείας, σε ένα συγκεκριμένο αριθμό, τότε αυτός ο αριθμός συμβολίζεται

$$\int_a^\beta f(x)\,dx$$

και ονομάζεται *ορισμένο ολοκλήρωμα* της f από το a στο β. Ένας τέτοιος αριθμός δεν υπάρχει σε όλες τις περιπτώσεις, αλλά υπάρχει, για παράδειγμα, όταν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$. Όταν το $\int_a^\beta f(x)\,dx$ υπάρχει, η τιμή του ισούται με το εμβαδόν A κάτω από την καμπύλη†.

Στη σημειογραφία $\int_a^\beta f(x)\,dx$, το β ονομάζεται *άνω όριο* και το a *κάτω όριο* του ορισμένου ολοκληρώματος.

Για κάθε συνάρτηση f στο $[a, \beta]$ (όχι απαραίτητα μη αρνητική), μπορούμε να ορίσουμε αθροίσματα της μορφής (*23.1*) χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την έννοια του εμβαδού. Αν υπάρχει κάποιος αριθμός τον οποίο μπορούμε να προσεγγίσουμε χρησιμοποιώντας αυτά τα αθροίσματα με τον επιθυμητό βαθμό ακρίβειας, καθώς το n αυξάνεται και το μέγιστο μήκος $\Delta_k x$ προσεγγίζει το 0, τότε αυτός ο αριθμός συμβολίζεται ως $\int_a^\beta f(x)\,dx$ και ονομάζεται *ορισμένο ολοκλήρωμα* της συνάρτησης f στο διάστημα $[a, \beta]$. Όταν υπάρχει το $\int_a^\beta f(x)\,dx$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι *ολοκληρώσιμη* στο διάστημα $[a, \beta]$.

Θα υποθέσουμε, χωρίς να το αποδείξουμε, ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(x)\,dx$ υπάρχει για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[a, \beta]$. Για να υπολογίσουμε το $\int_a^\beta f(x)\,dx$ αρκεί να βρούμε το όριο μιας αλληλουχίας αθροισμάτων (*23.1*), για τα οποία το πλήθος n των υποδιαστημάτων προσεγγίζει το άπειρο και τα μέγιστα μήκη τους προσεγγίζουν το 0.

† Το ορισμένο ολοκλήρωμα ονομάζεται και *Ολοκλήρωμα Riemann της συνάρτησης f*, ενώ το άθροισμα (23.1) ονομάζεται *Άθροισμα Riemann της f* στο διάστημα $[a, \beta]$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Ας αποδείξουμε ότι

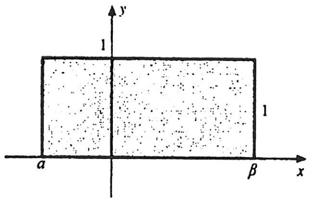
$$\int_a^\beta 1\;dx = \beta - a \tag{23.2}$$

Έστω $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = \beta$ μια υποδιαίρεση του $[a, \beta]$. Τότε ένα αντίστοιχο άθροισμα (*23.1*) είναι

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta_k x &= \sum_{k=1}^{n} \Delta_k x \qquad (\text{επειδή } f(x) = 1 \text{ για κάθε } x)\\ &= \beta - a\end{aligned}$$

Αφού κάθε προσεγγιστικό άθροισμα είναι $\beta - a$, $\int_a^\beta 1\;dx = \beta - a$.

Ένας εναλλακτικός συλλογισμός θα χρησιμοποιούσε το γεγονός ότι το χωρίο κάτω από τη γραφική παράσταση της σταθερής συνάρτησης 1, επάνω από τον άξονα των x, και μεταξύ των $x = a$ και $x = \beta$, είναι ένα ορθογώνιο με βάση $\beta - a$ και ύψος 1 (δείτε το Σχήμα 23–4.) Έτσι, αφού το $\int_a^\beta 1\;dx$ είναι το εμβαδόν αυτού του ορθογωνίου, ισούται με $\beta - a$.



Σχήμα 23–4

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3: Ας υπολογίσουμε το $\int_a^\beta x\;dx$.

Έστω ότι το $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = \beta$ είναι μια υποδιαίρεση του $[a, \beta]$ σε n ίσα υποδιαστήματα. Τότε, κάθε $\Delta_k x = (\beta - a)/n$. Συμβολίζουμε το $(\beta - a)/n$ με Δx. Τότε, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = a + 2\,\Delta x$ και γενικά, $x_k = a + k\,\Delta x$. Στο k υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$, επιλέγουμε το x_k^* ως το δεξιό ακραίο σημείο x_k. Τότε, ένα προσεγγιστικό άθροισμα (*23.1*) έχει τη μορφή,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\;\Delta_k x &= \sum_{k=1}^{n} x_k^*\Delta_k x = \sum_{k=1}^{n}(a + k\;\Delta x)\;\Delta x\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(a\;\Delta x + k\;(\Delta x)^2\right) = \sum_{k=1}^{n} a\;\Delta x + \sum_{k=1}^{n} k(\Delta x)^2\\ &= n(a\;\Delta x) + (\Delta x)^2\sum_{k=1}^{n} k = n\left(a\frac{\beta - a}{n}\right) + \left(\frac{\beta - a}{n}\right)^2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\\ &= a(\beta - a) + \frac{1}{2}(\beta - a)^2\frac{n+1}{n}\end{aligned}$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. (Δείτε το Πρόβλημα 5.)

Τώρα καθώς $n \to \infty$, $(n+1)/n = 1 + 1/n \to 1 + 0 = 1$. Συνεπώς, το όριο των προσεγγιστικών αθροισμάτων μας είναι

$$a(\beta - a) + \tfrac{1}{2}(\beta - a)^2 = (\beta - a)\left(a + \frac{\beta - a}{2}\right) = (\beta - a)\left(\frac{a + \beta}{2}\right) = \tfrac{1}{2}(\beta^2 - a^2)$$

Συνεπώς, $\int_a^\beta x\;dx = \frac{1}{2}(\beta^2 - a^2)$.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα μάθουμε μια μέθοδο για τον υπολογισμό του $\int_a^\beta f(x)\;dx$ η οποία — αντίθετα με το προηγούμενο παράδειγμα — δεν θα απαιτεί πολύπλοκους υπολογισμούς.

ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

$$\int_a^\beta \gamma f(x)\;dx = \gamma\int_a^\beta f(x)\;dx \tag{23.3}$$

Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι ένα προσεγγιστικό άθροισμα $\sum_{k=1}^{n}\gamma f(x_k^*)\Delta_k x$ για $\int_a^\beta \gamma f(x)dx$ ισούται με γ φορές το προσεγγιστικό άθροισμα $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta_k x$ για $\int_a^\beta f(x)\;dx$ και ότι η ίδια σχέση ισχύει για τα αντίστοιχα όρια.

$$\int_a^\beta -f(x)\;dx = -\int_a^\beta f(x)\;dx \tag{23.4}$$

Αυτή είναι η ειδική περίπτωση του (*23.3*) όταν $\gamma = -1$.

$$\int_a^\beta (f(x) + g(x))\;dx = \int_a^\beta f(x)\;dx + \int_a^\beta g(x)dx \tag{23.5}$$

Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι ένα προσεγγιστικό άθροισμα $\sum_{k=1}^{n}(f(x_k^*) + g(x_k^*))\Delta_k x$ για το $\int_a^\beta (f(x) + g(x))\;dx$ ισούται με το άθροισμα $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta_k x + \sum_{k=1}^{n} g(x_k^*)\Delta_k x$ των προσεγγιστικών αθροισμάτων για τα $\int_a^\beta f(x)\;dx$ και $\int_a^\beta g(x)\;dx$.

$$\int_a^\beta (f(x) - g(x))\;dx = \int_a^\beta f(x)\;dx - \int_a^\beta g(x)\;dx \tag{23.6}$$

Καθώς $f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))$, αυτό προκύπτει από τα (*23.5*) και (*23.4*).
Αν $a < \gamma < \beta$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, \beta]$ αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, \gamma]$ και το $[\gamma, \beta]$. Επίσης, αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, \beta]$,

$$\int_a^\beta f(x)\;dx = \int_a^\gamma f(x)\;dx + \int_\gamma^\beta f(x)\;dx \tag{23.7}$$

Αυτό είναι προφανές όταν $f(x) \geq 0$ και ερμηνεύουμε τα ολοκληρώματα ως εμβαδά. Το γενικό αποτέλεσμα προκύπτει από την εξέταση των αντίστοιχων προσεγγιστικών αθροισμάτων — αν και στην περίπτωση κατά την οποία ένα από τα υποδιαστήματα του $[a, \beta]$ περιέχει το γ, απαιτείται περισσότερη μελέτη.

Έχουμε ορίσει το $\int_a^\beta f(x)\;dx$ μόνο όταν $a < \beta$. Μπορούμε να γενικεύσουμε τον ορισμό για όλες τις πιθανές περιπτώσεις ως εξής:

(*i*) $\int_a^a f(x)\;dx = 0$

(*ii*) $\int_\beta^a f(x)\;dx = -\int_a^\beta f(x)\;dx$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 24

Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΓΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Τότε υπάρχει στο $[\alpha, \beta]$ ένας αριθμός γ τέτοιος ώστε,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx = (\beta - \alpha) f(\gamma) \tag{24.1}$$

Για να το διαπιστώσουμε, ας υποθέσουμε ότι m και M είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f αντίστοιχα στο $[\alpha, \beta]$, και ας εφαρμόσουμε το Πρόβλημα 3(γ) του Κεφαλαίου 23 για να πάρουμε,

$$m(\beta-\alpha) \le \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx \le M(\beta-\alpha), \quad \text{και επομένως,} \quad m \le \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx \le M$$

Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής έχουμε $\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx = f(\gamma)$ για κάποιο γ στο $[\alpha, \beta]$.

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΕΝΑ ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ. Έστω ότι η f ορίζεται στο $[\alpha, \beta]$. Αφού η f μπορεί να πάρει άπειρο πλήθος τιμών στο $[\alpha, \beta]$, δεν έχει νόημα να εξετάσουμε τη μέση όλων των τιμών της f. Αντί γι' αυτό, διαιρούμε το $[\alpha, \beta]$ σε n ίσα υποδιαστήματα, κάθε ένα από τα οποία έχει μήκος $\Delta x = \frac{\beta-\alpha}{n}$. Επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο x_k^* στο k υποδιάστημα. Τότε, η μέση τιμή των n τιμών $f(x_1^*)+f(x_2^*)+\ldots+f(x_n^*)$ είναι

$$\frac{f(x_1^*)+f(x_2^*)+\ldots+f(x_n^*)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)$$

Όταν το n είναι μεγάλο, αυτή η τιμή είναι διαισθητικά μια καλή προσέγγιση της «μέσης τιμής της f στο $[\alpha, \beta]$». Όμως, αφού $\frac{1}{n} = \frac{1}{\beta-\alpha}\Delta x$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) = \frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$$

Καθώς $n \to \infty$, το άθροισμα στα δεξιά προσεγγίζει το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx$. Από αυτό συνεπάγεται ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός: Η *μέση τιμή της f* στο $[\alpha, \beta]$ είναι $\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx$.

Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Αν το x βρίσκεται στο $[\alpha, \beta]$ τότε η $\int_{\alpha}^{x} f(t)\, dt$ είναι συνάρτηση του x και:

$$D_x\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)\, dt\right) = f(x) \tag{24.2}$$

Για την απόδειξη δείτε το Πρόβλημα 4.

ΤΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και έστω ότι $F(x) = \int f(x) dx$, δηλαδή, η F είναι αντιπαράγωγος της f. Τότε,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx = F(\beta) - F(\alpha) \tag{24.3}$$

Για να το διαπιστώσετε, προσέξτε ότι σύμφωνα με την (24.2) οι $\int_{\alpha}^{x} f(t)\, dt$ και $F(x)$ έχουν την ίδια παράγωγο $f(x)$. Άρα, από το Πρόβλημα 18 του Κεφαλαίου 13, υπάρχει μια σταθερά K τέτοια ώστε $\int_{\alpha}^{x} f(t)\, dt = F(x) + K$. Όταν $x = \alpha$ έχουμε

$$F(\alpha) + K = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)\, dt = 0. \quad \text{Έτσι,} \quad K = -F(\alpha)$$

Συνεπώς, $\int_{\alpha}^{x} f(t)\, dt = F(x) - F(\alpha)$. Όταν $x = \beta$, αυτό δίνει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\, dt = F(\beta) - F(\alpha)$$

Η εξίσωση (24.3) παρέχει έναν εύκολο τρόπο υπολογισμού του $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx$ όταν μπορούμε να βρούμε μια αντιπαράγωγο F της f. Η έκφραση $F(\beta) - F(\alpha)$, στο δεξιό μέρος της (24.3), συχνά αναφέρεται για συντομία ως $F(x)\big]_{\alpha}^{\beta}$. Τότε, το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx = \int f(x)\, dx\Big]_{\alpha}^{\beta}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

(*i*) Ο πολύπλοκος υπολογισμός του $\int_{\alpha}^{\beta} x\, dx$ στο Παράδειγμα 3 του Κεφαλαίου 23 μπορεί να αντικατασταθεί με τον παρακάτω απλό υπολογισμό:

$$\int_{\alpha}^{\beta} x\, dx = \tfrac{1}{2}x^2\Big]_{\alpha}^{\beta} = \tfrac{1}{2}\beta^2 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 = \tfrac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2)$$

(*ii*) Ο ιδιαίτερα πολύπλοκος υπολογισμός του $\int_0^1 x^2\, dx$ στο Πρόβλημα 4 του Κεφαλαίου 23 μπορεί να αντικατασταθεί από

$$\int_0^1 x^2\, dx = \tfrac{1}{3}x^3\Big]_0^1 = \tfrac{1}{3}1^3 - \tfrac{1}{3}0^3 = \tfrac{1}{3}$$

(*iii*) Γενικά, $\int_{\alpha}^{\beta} x^r dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1}\Big]_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{r+1}(\beta^{r+1} - \alpha^{r+1})$

ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΣΕ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ. Κατά τον υπολογισμό ενός ορισμένου ολοκληρώματος με το Θεμελιώδες Θεώρημα, απαιτείται η αντιπαράγωγος $\int f(x)dx$. Στο Κεφάλαιο 22, είδαμε ότι η αντικατάσταση μιας νέας μεταβλητής u συχνά διευκολύνει τον υπολογισμό του $\int f(x)dx$. Όταν η αντικατάσταση γίνεται και στο ορισμένο ολοκλήρωμα, τα όρια ολοκλήρωσης πρέπει να αντικαθίστανται από τις αντίστοιχες τιμές του u.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Υπολογίστε το $\int_1^9 \sqrt{5x+4}\,dx$.

Έστω ότι $u = 5x + 4$. Τότε $du = 5\,dx$. Όταν $x = 1$, $u = 9$ και όταν $x = 9$, $u = 49$. Άρα,

$$\int_1^9 \sqrt{5x+4}\,dx = \int_9^{49} \sqrt{u}\,\tfrac{1}{5}du = \tfrac{1}{5}\int_9^{49} u^{1/2}\,du$$

$$= \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{2}{3}u^{3/2}\right)\Big]_9^{49} \qquad \text{(από το Θεμελιώδες Θεώρημα)}$$

$$= \tfrac{2}{15}\left(49^{3/2} - 9^{3/2}\right) = \tfrac{2}{15}\left[\left(\sqrt{49}\right)^3 - \left(\sqrt{9}\right)^3\right]$$

$$= \tfrac{2}{15}\left(7^3 - 3^3\right) = \tfrac{2}{15}(316) = \tfrac{632}{15}$$

Για την αιτιολόγηση της μεθόδου δείτε το Πρόβλημα 5.

Λυμένα προβλήματα

1. Υπολογίστε την τιμή του $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\,dx$.

Σύμφωνα με τον Άμεσο Τύπο I, $\int \sin^2 x \cos x\,dx = \tfrac{1}{3}\sin^3 x$. Συνεπώς, από το Θεμελιώδες Θεώρημα,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\,dx = \tfrac{1}{3}\sin^3 x\Big]_0^{\pi/2} = \tfrac{1}{3}\left[\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^3 - (\sin 0)^3\right] = \tfrac{1}{3}\left(1^3 - 0^3\right) = \tfrac{1}{3}$$

2. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου κάτω από τη γραφική παράσταση της $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, επάνω από τον άξονα των x, και μεταξύ του 0 και του 1.

Το εμβαδόν είναι $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\Big]_0^1 = \sin^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) - \sin^{-1}(0) = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$.

3. Βρείτε τη μέση τιμή της $f(x) = 4 - x^2$ στο $[0, 2]$.

Η μέση τιμή είναι

$$\frac{1}{\beta - a}\int_a^\beta f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^2 \left(4 - x^2\right)dx = \tfrac{1}{2}\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^2 = \tfrac{1}{2}\left[\left(8 - \tfrac{8}{3}\right) - (0 - 0)\right] = \tfrac{8}{3}$$

4. Αποδείξτε τον τύπο *(24.2)*: $Dx\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$.

Έστω ότι $h(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Τότε:

$$h(x+\Delta x) - h(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

$$= \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

$$= \Delta x \cdot f(x^*) \qquad \text{για κάποιο } x^* \text{ ανάμεσα στα } x + \Delta x$$

(Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής των Ολοκληρωμάτων)

Συνεπώς, $\dfrac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} = f(x)^*$ και άρα,

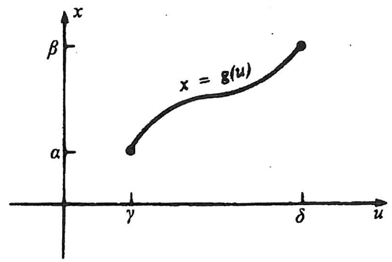
$$D_x\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = D_x\left(h(x)\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(x^*)$$

Όμως, καθώς $\Delta x \to \infty$, $x + \Delta x \to x$, και έτσι $x^* \to x$ (αφού το x^* βρίσκεται μεταξύ των x και $x + \Delta x$). Καθώς η f είναι συνεχής, $\lim_{\Delta x \to 0} f(x^*) = f(x)$.

5. Αιτιολογήστε την αλλαγή μεταβλητής σε ένα ορισμένο ολοκλήρωμα με τον παρακάτω ακριβή τρόπο. Με δεδομένο ότι $\int_a^\beta f(x)\,dx$, έστω ότι $x = g(u)$, όπου, καθώς το x μεταβάλλεται από το a στο β, το u αυξάνεται ή μειώνεται από το γ στο δ. (Δείτε το Σχήμα 24–1 για την περίπτωση όπου το u αυξάνεται.) Αποδείξτε ότι:

$$\int_a^\beta f(x)\,dx = \int_\gamma^\delta f(g(u))g'(u)\,du$$

(Το δεξιό μέρος προκύπτει με αντικατάσταση $x = g(u)$, $dx = g'(u)\,du$, και αλλαγή των ορίων ολοκλήρωσης από a και β σε γ και δ αντίστοιχα.)



Σχήμα 24–1

Έστω ότι $F(x) = \int f(x)\,dx$, δηλαδή, $F'(x) = f(x)$. Από τον Κανόνα Παραγώγισης Σύνθετων Συναρτήσεων,

$$D_u\left(Fg(u)\right) = F'\left(g(u)\right)\cdot g'(u) = f\left(g(u)\right)g'(u) \qquad \text{Επομένως,} \qquad \int f\left(g(u)\right)g'(u)du = F\left(g(u)\right)$$

Έτσι, σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα,

$$\int_\gamma^\delta f\left(g(u)\right)g'(u)\,du = F\left(g(u)\right)\Big]_\gamma^\delta = F\left(g(\delta)\right) - F\left(g(\gamma)\right)$$

$$= F(\beta) - F(a) = \int_a^\beta f(x)\,dx$$

6. (α) Αν η f είναι άρτια συνάρτηση, αποδείξτε ότι για $a > 0$ $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.