Στη σελίδα αυτή γράψτε μόνο τα στοιχεία σας.

Γράψτε τις απαντήσεις σας στις επόμενες σελίδες, κάτω από τις αντίστοιχες ερωτήσεις. Στις απαντήσεις σας μην ξεπερνάτε, για οποιοδήποτε λόγο, τα καθορισμένα όρια αριθμού γραμμών.

Γράψτε τον ΑΜ σας σε όλες τις σελίδες.

Επώνυμο:

Όνομα:

AM:												

Βαθμοί

1 (2)	2 (2)	3 (2)	Σύνολο (6)

Καλη Επιτυχια

Το πίσω μέρος της σελίδας είναι μόνο για πρόχειρο

Θέμα 1 [2 μονάδες].

Έστω $\Sigma = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο τύπων της προτασιακής λογικής τέτοιο ώστε δεν υπάρχει απονομή αληθοτιμών που επαληθεύει όλα τα στοιχεία του. Αν ϕ τυχόν τύπος, να αποδείξετε ότι ο τύπος:

$$(\sigma_n \to (\sigma_{n-1} \to (\cdots \to (\sigma_1 \to \phi) \cdots))) \tag{1}$$

είναι ταυτολογία.

Απάντηση: Θα αποδείξουμε με επαγωγή στο n (τον αριθμό των στοιχείων του Σ) τον παρακάτω ισχυρισμό (II):

$$\begin{array}{r}\forall \text{ απονομή αληθοτιμών } a, \text{ αν η } a \text{ διαψεύδει ένα τουλάχιστον} \\ \text{στοιχείο του } \Sigma, \text{ τότε η } a \text{ επαληθεύει τον τύπο (1).}\end{array} \tag{II}$$

Το ζητούμενο τότε έπεται από τον ισχυρισμό (II) και την υπόθεση ότι δεν υπάρχει απονομή που επαληθεύει όλα τα στοιχεία του Σ.

Επαγωγική απόδειξη του ισχυρισμού (II). Θεωρούμε απονομή a.

Επαγωγική βάση: Εάν $n = 1$, τότε έχουμε ότι η απονομή a διαψεύδει αναγκαστικά τον τύπο σ_1. Άρα η a επαληθεύει τον $\sigma_1 \to \phi$, δηλαδή το τύπο (1) για την επαγωγική βάση.
Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι ο ισχυρισμός (II) ισχύει για $n = k$. Θα τον αποδείξουμε για $n = k + 1$. Έχουμε από τη υπόθεση του ισχυρισμού (II) ότι η a διαψεύδει ένα τουλάχιστον στοιχείο του $\Sigma = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_k, \sigma_{k+1}\}$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- $a(\sigma_{k+1}) = 0$. Σε αυτή την περίπτωση η υπόθεση σ_{k+1} του τύπου

  $$(\sigma_{k+1} \to (\sigma_k \to (\sigma_{-1} \to (\cdots \to (\sigma_1 \to \phi) \cdots)))) \tag{3}$$

  διαψεύδεται από την a, επομένως ο τύπος στην (3) επαληθεύεται από την a. Άρα η a επαληθεύει τον τύπο (1) για το επαγωγικό συμπέρασμα.

- $a(\sigma_{k+1}) = 1$. Σε αυτή την περίπτωση αναγκαστικά ένα από τα στοιχεία του $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_k\}$ διαψεύδεται από την a, επομένως από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι η a επαληθεύει τον

  $$(\sigma_k \to (\sigma_{k-1} \to (\cdots \to (\sigma_1 \to \phi) \cdots))).$$

  Επομένως η a επαληθεύει και τον τύπο (3). Άρα η a επαληθεύει τον τύπο (1) για το επαγωγικό συμπέρασμα.

Το πίσω μέρος της σελίδας είναι μόνο για πρόχειρο

Θέμα 2 [2 μονάδες]. Αν $f : X \mapsto Y$ συνάρτηση και $A \subseteq Y$, τότε με $f^{-1}[A]$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{x \in X \mid f(x) \in A\}$. Αν $A_1, A_2 \subseteq Y$ αληθεύει ότι $f^{-1}[A_1 \cap A_2] = f^{-1}[A_1] \cap f^{-1}[A_2]$; Να αποδείξετε την (θετική ή αρνητική) απάντησή σας.

Απάντηση: Απαντάμε καταφατικά. Απόδειξη της απάντησης:
’Εστω $x \in f^{-1}[A_1 \cap A_2]$. Τότε $f(x) \in A_1 \cap A_2$. Άρα $f(x) \in A_1$ και $f(x) \in A_2$. Επομένως $x \in f^{-1}[A_1]$ και $x \in f^{-1}[A_2]$. Επομένως $x \in f^{-1}[A_1] \cap f^{-1}[A_2]$.
Αντιστρόφως, έστω $x \in f^{-1}[A_1] \cap f^{-1}[A_2]$. Τότε $x \in f^{-1}[A_1]$ και $x \in f^{-1}[A_2]$. Άρα $f(x) \in A_1$ και $f(x) \in A_2$. Επομένως $f(x) \in A_1 \cap A_2$, και επομένως $x \in f^{-1}[A_1 \cap A_2]$.

Θέμα 3 [2 μονάδες]. Έστω R μία μεταβατική διμελής σχέση σε ένα σύνολο A. Είναι η σχέση

$$S = \{(x, y) \in A^2 \mid (x, y) \in R \text{ και } (y, x) \in R\}$$

ανακλαστική (αλλιώς, αυτοπαθής); Να αποδείξετε την (θετική ή αρνητική) απάντησή σας.
Υπενθύμιση: Ανακλαστική (ή αυτοπαθής) καλείται μία διμελής σχέση S αν ισχύει ότι: $\forall a \in A((a, a) \in S)$.

Απάντηση: Απαντάμε αρνητικά. Αντιπαράδειγμα: Θεωρούμε $A = \{1, 2\}$ και $R = \{((1, 1), (1, 2)\}$. Είναι εύκολο να δούμε με περιπτώσεις ότι η R είναι μεταβατική, και ότι η σχέση $S = \{(1, 1)\}$, η οποία δεν είναι ανακλαστική διότι $(2, 2) \notin S$.