Στη σελίδα αυτή γράψτε μόνο τα στοιχεία σας.

Γράψτε τις απαντήσεις σας στις επόμενες σελίδες, κάτω από τις αντίστοιχες ερωτήσεις. Στις απαντήσεις σας μην ξεπερνάτε, για οποιοδήποτε λόγο, τα καθορισμένα όρια αριθμού γραμμών.

Γράψτε τον ΑΜ σας σε όλες τις σελίδες.

Επώνυμο:

Όνομα:

ΑΜ:													

Βαθμοί

1 (2)	2 (2)	3α (0,5)	3β (1,5)	Σύνολο (6)

Καλη Επιτυχια

Θέμα 1α [2 μονάδες].

Έστω $A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n$ και A σύμβολα προτάσεων. Να αποδείξετε με επαγωγή στο n ότι η πρόταση:

$$(A_n \to (A_{n-1} \to (\cdots \to (A_1 \to ((\neg A) \lor A)) \cdots)))$$

είναι ταυτολογία.

Απάντηση: Για $n = 1$ ο τύπος γίνεται

$$(A_1 \to ((\neg A) \lor A)),$$

ο οποίος είναι ταυτολογία διότι ο $((\neg A) \lor A)$ είναι ταυτολογία. Για $n + 1$ έχουμε τον τύπο:

$$(A_{n+1} \to (A_n \to (A_{n-1} \to (\cdots \to (A_1 \to ((\neg A) \lor A)) \cdots))))$$

ο οποίος είναι ταυτολογία επειδή από την ΕΥ, ο

$$(A_n \to (A_{n-1} \to (\cdots \to (A_1 \to ((\neg A) \lor A)) \cdots)))$$

είναι ταυτολογία.

Θέμα 2 [2 μονάδες]. Έστω συνάρτηση $f : X \mapsto Y$. Αν $A \subset X$ (δηλ. A υποσύνολο του X, όχι κατ' ανάγκη γνήσιο), τότε με $f[A]$ συμβολίζουμε την εικόνα του συνόλου A, δηλαδή το σύνολο $\{f(x) \mid x \in A\}$. Αν $A_1, A_2 \subset X$, ποιος ή ποιοι από τους παρακάτω δύο ισχυρισμούς αληθεύουν; Να αποδείξετε προσεκτικά και σύντομα τις απαντήσεις σας, χωρίς τίποτα περιττό που δεν σας ζητείται.

1. $f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$.
2. $f[A_1 \cap A_2] = f[A_1] \cap f[A_2]$.

Απάντηση: Το (1) αληθεύει. Πράγματι:

$y \in f[A_1 \cup A_2] \Leftrightarrow$ **υπάρχει κάποιο** $x : [x \in A_1 \cup A_2$ **και** $y = f(x)] \Leftrightarrow$
$\exists x : [(x \in A_1$ **είτε** $x \in A_2)$ **και** $y = f(x)] \Leftrightarrow$
$[\exists x : (x \in A_1$ **και** $y = f(x))]$ **είτε** $[\exists x : (x \in A_2$ **και** $y = f(x))] \Leftrightarrow$
$y \in f[A_1]$ **είτε** $y \in f[A_2] \Leftrightarrow y \in f[A_1] \cup f[A_2]$.

Το (2) δεν αληθεύει. Πράγματι, θεωρούμε π.χ.

$X = \{1, 2, 3\}$ **και** $Y = \{a, b\}$ **και** $f(1) = a$ **και** $f(2) = f(3) = b$ **και** $A_1 = \{1, 2\}$ **και** $A_2 = \{3\}$.
Τότε $f[A_1] = \{a, b\}$ **και** $f[A_2] = \{b\}$ **επομένως** $f[A_1] \cap f[A_2] = \{b\}$.
Αλλά όμως $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, άρα $f[A_1 \cap A_2] = f[\emptyset] = \emptyset$. Επομένως

$$f[A_1 \cap A_2] \neq f[A_1] \cap f[A_2].$$

Το πίσω μέρος της σελίδας είναι μόνο για πρόχειρο

Έστω R μία διμελής σχέση διάταξης σε σύνολο A (δηλ. σχέση ανακλαστική/αυτοπαθής, μεταβατική και αντισυμμετρική). Ορίζουμε νέα διμελή σχέση S με τον τύπο

$$S = \{(x, y) \mid (x, y) \in R \wedge x \neq y\}$$

Θέμα 3a [1/2 μονάδα]. Να αποδείξετε ότι η S είναι αναυτοπαθής, δηλαδή

$$\forall a \in A \ ((a, a) \notin S).$$

Απάντηση: Από τον ορισμό της S προκύπτει αμέσως ότι αν $(a, a) \in S$ τότε $a \neq a$. Επομένως $(\forall a \in A)[(a, a) \notin S]$.

Θέμα 3a [1,5 μονάδα]. Να αποδείξετε ότι η S είναι μεταβατική.

Απάντηση: Θεωρούμε $a, b, c \in A$ έτσι ώστε $(a.b) \in S$ και $(b, c) \in S$. Με βάση τον ορισμό της S έχουμε ότι $(a, b) \in R$ και $(b, c) \in R$. Οπότε από την μεταβατικότητα της R προκύπτει ότι $(a, c) \in R$. Για να αποδείξουμε τώρα ότι $(a, c) \in S$ μένει να αποδείξουμε ότι $a \neq c$. Έστω προς άτοπο, ότι $a = c$. Τότε από την $(b, c) \in R$ και $a = c$ προκύπτει ότι $(b, a) \in R$. Τότε, από την $(a, b) \in R$ και την αντισυμμετρικότητα της R προκύπτει ότι $a = b$. Το τελευταίο, από τον ορισμό της S, αντίκειται στην υπόθεση $(a, b) \in S$.

Το πίσω μέρος της σελίδας είναι μόνο για πρόχειρο