ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

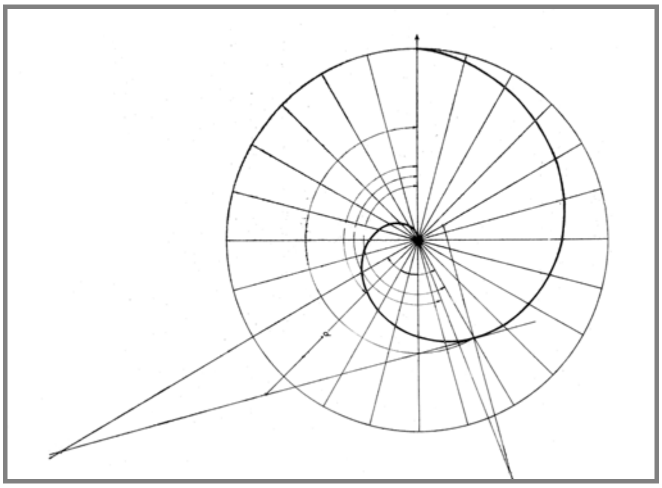
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
“ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ”

Διπλωματική εργασία

“Η ιστορία του π”

Αρώνη Παρασκευή



Επιβλέπων Καθηγητής

Ιωάννης Αραχωβίτης

Αθήνα

Φεβρουάριος 2008

Περιεχόμενα.

Εισαγωγή.

Ἀεὶ ὁ Θεὸς ὁ Μέγας γεωμετρεῖ
Τὸ κύκλου μῆκος ἵνα ὁρίσῃ διαμέτρῳ
Παρήγαγεν ἀριθμὸν ἀπέραντον
καὶ ὅν φεῦ! οὐδέποτε ὅλον θνητοὶ θὰ εὕρωσι.

Χατζηδάκις Νικόλαος. (1872-1942)
Καθηγητής πανεπιστημίου Αθηνών

Το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου είναι ένα από τα σημαντικότερα της ιστορίας των μαθηματικών. Απασχόλησε για 2500 χρόνια όχι μόνο τους μαθηματικούς αλλά και το ευρύ κοινό. Η έκφραση «τετραγωνισμός του κύκλου» στην καθομιλουμένη, έφτασε να σημαίνει μεταφορικά πρόβλημα δυσεπίλυτο έως και άλυτο. Ο όρος «τετραγωνισμός» δημιουργήθηκε στην αρχαία Ελλάδα και σημαίνει την κατασκευή ενός τετραγώνου ισεμβαδικού προς το δοθέν σχήμα, με τη χρήση **κανόνα και διαβήτη**, σε πεπερασμένα το πλήθος βήματα. Με την εξέλιξη της γεωμετρίας επιτεύχθηκε ο τετραγωνισμός όλων των ευθύγραμμων σχημάτων. Ήταν φυσικό επακόλουθο να αρχίσει η προσπάθεια τετραγωνισμού καμπυλόγραμμων σχημάτων, και βέβαια του κύκλου πρωτίστως.

Το πρόβλημα είχε αντιμετωπιστεί εμπειρικά πριν την ακμή του ελληνικού πολιτισμού, και ήταν ήδη γνωστό ότι ο λόγος της περιφέρειας του κύκλου προς τη διάμετρό του είναι σταθερός. Κι όμως αυτή η τιμή που εκφράζεται με το σύμβολο π προβληματίζει τους μαθηματικούς ανά τους αιώνες. Στο σύγχρονο κόσμο, που χρησιμοποιούμε προηγμένα όργανα ακριβείας, είναι δύσκολο να παραδεχτούμε ότι υπάρχει ένας αριθμός που δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε ακριβώς. Το π δοκιμάζει τα όρια της αντίληψής μας και θέτει τη διαχωριστική γραμμή ανάμεσα στο πεπερασμένο και στο άπειρο.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, θα γίνει αρχικά μια ιστορική αναδρομή της ιστορίας του π, ξεκινώντας από τις πρώιμες και μη μαθηματικές αναφορές του π. Τέτοιου είδους αναφορές αποτελούν η σχέση του π με την πυραμίδα της Giza, η εμφάνισή του στη Βίβλο, αλλά και η εμφάνισή του στις Όρνιθες του

Αριστοφάνη. Στη συνέχεια ακολουθεί η προελληνική περίοδος, όπου θα γίνει αναφορά σε ότι αφορά την τιμή του π, στις περιοχές της Μεσοποταμίας και της Αιγύπτου. Από τον 5^{ο} αι. π. Χ. και μετά, ξεκινάει η ανάπτυξη του ελληνικού πολιτισμού, όπου πλέον σταματάει το ενδιαφέρον για μια καλή εμπειρική προσέγγιση του π, και οριοθετείται το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου με κανόνα και διαβήτη. Αποκορύφωμα της ακμής αυτής της περιόδου, αποτελούν οι προσπάθειες του Αρχιμήδη, ο οποίος αφενός προσπάθησε να δώσει λύση στο πρόβλημα με την έλικά του, και αφετέρου χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της εξάντλησης ανακάλυψε έναν τρόπο υπολογισμού του π σε οποιοδήποτε βαθμό ακριβείας. Αξίζει να σημειωθεί ότι η μέθοδος του Αρχιμήδη για τον υπολογισμό του π χρησιμοποιούνταν για 1900 χρόνια.

Μετά την ακμή του ελληνικού πολιτισμού, ακολουθεί η ρωμαϊκή κυριαρχία κατά τη διάρκεια της οποίας παρατηρείται φθίνουσα πορεία των επιστημονικών εξελίξεων. Η Αλεξάνδρεια εξακολουθεί να είναι το κέντρο του πνευματικού κόσμου αλλά η αίγλη της χάνεται με τις επιδρομές των Ρωμαίων, και ο ελληνικός πολιτισμός ουσιαστικά τελειώνει με το θάνατο της Υπατίας το 415 μ. Χ. Η πιο σημαντική εξέλιξη αυτής της περιόδου σε ότι αφορά την ιστορία του π είναι η προσέγγιση του Πτολεμαίου.

Στη συνέχεια της ιστορικής μας αναδρομής θα μεταφερθούμε στην Ασία, καθώς στην Ευρώπη κατά τη διάρκεια της πρώτης χιλιετίας, πολιτικές και θρησκευτικές διαμάχες εμποδίζουν την επιστημονική ανάπτυξη. Από το 2^{ο} μέχρι τον 8^{ο} αιώνα παρατηρείται ενδιαφέρον για την εύρεση μιας καλής προσέγγισης του π, στην Κίνα, στην Ινδία αλλά και στην Αραβία. Καταγράφονται αξιόλογες προσπάθειες ακόμα και μέχρι το 15^{ο} αι. μ. Χ., όλες βασιζόμενες στη μέθοδο του Αρχιμήδη. Το ερώτημα αν η μέθοδος ανακαλύφθηκε ανεξάρτητα ή έφτασε στην Ανατολή από την αρχαία Ελλάδα παραμένει ανοιχτό.

Από το 13^{ο} αι. και μετά, τελειώνει η περίοδος του σκοταδισμού στην Ευρώπη και αρχίζει η επιστημονική ανάπτυξη, δεδομένης και της γνωστοποίησης των αραβικών έργων στη Δύση. Η προσπάθεια τετραγωνισμού του κύκλου με κανόνα και διαβήτη σε πεπερασμένα το πλήθος βήματα εγκαταλείπεται, ενώ παρατηρείται μια τάση υπολογισμού όλο και περισσότερων ψηφίων του π. Για πολλούς μαθηματικούς ο υπολογισμός ψηφίων υπήρξε έργο ζωής, καθώς αφοσιώθηκαν απόλυτα στο σκοπό αυτό. Για το λόγο αυτό θα γίνει μια σύντομη καταγραφή αυτών των προσπαθειών μέχρι την έλευση του Απειροστικού λογισμού, ο οποίος και έθεσε τον υπολογισμό του π σε νέα βάση.

Από το $16^{ο}$ αιώνα και μετά, οι επιστημονικές εξελίξεις ήταν ραγδαίες στην Ευρώπη. Σύντομα, ιδίως μετά το $17^{ο}$ αιώνα, το επίπεδο των επιστημών της Ευρώπης ήταν ανώτερο του επιπέδου των επιστημών της Ασίας αλλά και του υπόλοιπου κόσμου. Σε ότι αφορά την ιστορία του π, ο Viéte για πρώτη φορά χρησιμοποίησε άπειρο γινόμενο για να εκφράσει το π. Από το $17^{ο}$ αιώνα και μετά, αρχίζει η προσπάθεια προσέγγισης του υπολογισμού του π με νέες μεθόδους, με κυριότερους εκπροσώπους αυτής της τάσης τους Snellius, Huygens, Descartes, Kochansky, Gelder και άλλους.

Με την έλευση του Απειροστικού λογισμού, προέκυψαν νέα δεδομένα για το πρόβλημα του υπολογισμού του π, γεγονός που εκμεταλλεύτηκε σε πρώιμο στάδιο ακόμα ο Wallis για την εύρεση ενός τύπου υπολογισμού του. Πολλοί επωφελήθηκαν από τα νέα δεδομένα, όπως ο Brouncker, ο Gregory, ο Liebniz και τέλος ο Newton. Οι νέοι τύποι υπολογισμού του π, οι οποίοι αποτελούνταν κυρίως από άπειρα γινόμενα και τόξα εφαπτομένων, έδωσαν νέο έναυσμα στους ψηφιοθήρες να επιδοθούν στην εύρεση περισσότερων ψηφίων, χωρίς βέβαια να μπορούν να προχωρήσουν περισσότερο από μερικές εκατοντάδες ψηφίων.

Ο $18^{ος}$ αιώνας χαρακτηρίζεται περισσότερο από έναν σπουδαίο μαθηματικό, ο οποίος συνεισέφερε σε μεγάλο βαθμό στην ιστορία του π, τον Leonard Euler. Ανακάλυψε πολλές εκφράσεις για το π, συμπεριλαμβανομένων συνεχών κλασμάτων και άπειρων γινομένων. Ήταν τέτοιο το βάθος στο οποίο προσέγγισε το πρόβλημα του υπολογισμού του π, ώστε κανένας μετά από αυτόν δεν κατάφερε να βρει κάποιον αποτελεσματικότερο τρόπο για να προσεγγίσει την τιμή του. Συνοψίζοντας, σε ότι αφορά την αριθμητική προσέγγιση του π, ο Euler ήταν αυτός που το προσέγγισε με τη γρηγορότερη και αποδοτικότερη μέθοδο. Βέβαια θα γίνει αναφορά και στις προσπάθειες του Laplace, οι οποίες παρουσιάζουν ενδιαφέρον ως προς το διαφορετικό τρόπο υπολογισμού του π. Επιπλέον, το $18^{ο}$ αιώνα αποδείχτηκε η αρρητότητα του π από τους Lambert και Legendre, ενώ το $19^{ο}$ αιώνα αποδείχτηκε η υπερβατικότητα του π από τον Lindemann. Με την απόδειξη αυτή, παγιώθηκε το αδύνατο του τετραγωνισμού του κύκλου με κανόνα και διαβήτη σε πεπερασμένα το πλήθος βήματα.

Ο 20^{ος} αιώνας χαρακτηρίζεται από την έλευση των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Σε ότι αφορά τον υπολογισμό του π, ο αριθμός των ψηφίων του απογειώθηκε. Μέχρι τη δεκαετία του '70 οι υπολογισμοί γίνονταν με βάση τους τύπους τόξων εφαπτομένης. Από τη δεκαετία του '70 και μετά ανακαλύπτονται όλο και αποτελεσματικότεροι αλγόριθμοι, οι οποίοι συγκλίνουν ταχύτερα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τον υπολογισμό περισσότερων ψηφίων σε μικρότερο χρονικό διάστημα. Η ιστορική αναδρομή τελειώνει στη σύγχρονη εποχή, όπου πλέον ο Kanada έχει υπολογίσει 1.241.100.000.000 ψηφία του π.

Μια από τις βασικές πηγές αυτής της ιστορικής αναδρομής είναι το βιβλίο του P. Beckmann, *A History of Pi*, στο οποίο γίνεται μια εκτενής αναφορά σε οτιδήποτε αφορά το π από την αρχαιότητα μέχρι τη δεκαετία του '70. Άλλες σημαντικές πηγές είναι η *Ιστορία των Μαθηματικών* του Loria αλλά και η *Ιστορία των Μαθηματικών* του Boyer. Για τις σύγχρονες εξελίξεις πηγή πληροφοριών αποτέλεσε σωρεία άρθρων, κυρίως των αδελφών Borwein.

Η προ-μαθηματική ιστορία του π.

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρατεθούν κάποιες πρώιμες αναφορές του π στη Βίβλο αλλά και στις Όρνιθες του Αριστοφάνη. Επιπλέον θα γίνει αναφορά στη σχέση μεταξύ του π και της πυραμίδας της Giza.

Το π και η πυραμίδα της Giza.

Η μεγάλη πυραμίδα της Giza είναι ένα από τα πιο πολυσυζητημένα κτίσματα της αρχαιότητας. Αποτελούσε ένα από τα 7 θαύματα της αρχαιότητας και χρονολογείται περίπου από το 3000 π. Χ., αν και υπάρχουν πολλές άλλες απόψεις που την τοποθετούν από το 1800 π.Χ. έως το 4500 π. Χ. [60]. Άγνωστο για ποιο λόγο όλοι οι λαοί αποδίδουν στον όρο πυραμίδα, τη σημασία του φωτός [7]. Στα αρχαία ελληνικά σημαίνει «φωτιά στη μέση», στα εβραϊκά σημαίνει «μέτρα του φωτός», στα αιγυπτιακά σημαίνει «ένδοξο φως», ενώ για τους Μάγια σήμαινε «αποκαλυπτής του φωτός». Οι σύγχρονοι ερευνητές, αν και δε γνωρίζουν τι ακριβώς ήταν αυτό το φως, υποστηρίζουν ότι σχετίζεται με τα μέτρα της πυραμίδας, δηλαδή με τις αναλογίες των μεγεθών της, τόσο σε σχέση με άλλα μεγέθη της πυραμίδας όσο και σε σχέση με άλλα πλανητικά μεγέθη. Πιθανολογείται οι γνώσεις που περιέχονται στο σχέδιο της μεγάλης πυραμίδας να μην είναι δημιούργημα των αρχαίων Αιγυπτίων, αλλά υπόλειμμα κάποιου άγνωστου αρχαίου πολιτισμού που σε πολλά ιστορικά βιβλία ονομάζεται Υξώς.

Εικόνα **1**

Μια από τις εκπληκτικότερες αναλογίες της μεγάλης πυραμίδας είναι ο λόγος του ύψους της προς τη βάση της, ο οποίος είναι ίσος περίπου με τον αριθμό π [7]. Ο αναφερόμενος λόγος δίνει την τιμή 3,1399667, αλλά είναι υπολογισμένος χωρίς να ληφθεί υπ’ όψιν η αφαίρεση του ογκόλιθου από την κορυφή της.

Σύμφωνα με το αρχικό της ύψος, υπολογίζεται ότι ο λόγος είναι 3,1428571, δηλαδή $3\frac{1}{7}$ ακριβώς. Το 1853, ο H. C. Agnew έγραψε ένα γράμμα από την Αλεξάνδρεια για τη σχέση του λόγου αυτού με τον τετραγωνισμό του κύκλου [60]. Η τιμή $3\frac{1}{7}$ προσεγγίζει το π με σχετικό σφάλμα 0,04%, δηλαδή με εκπληκτική ακρίβεια για την εποχή.

Το π και η Βίβλος.

Υπάρχουν κάποιες αναφορές σχετικές με το π στη Βίβλο, η οποία χρονολογείται περίπου από το 950 π. Χ., ή κατά άλλες εκτιμήσεις περίπου από το 932-800 π. Χ. [60], [21]. Οι αναφορές αυτές γίνονται σε δύο σημεία, *Βασιλειών* Γ΄ 7:23 και *Παραλειπομένων* Β΄ 4:2 [29], [20], το ένα εκ των οποίων παρατίθεται στο απόσπασμα (1) πιο κάτω.

23. και εποιησε την θαλασσαν δεκα εν πηχει απο του χειλους αυτης εως του ψειλους αυτης, στρογγυλον κυελω το αυτο. πεντε εν πηχει το υψος αυτης. και συνηγμενη τρεις και τριακοντα εν πιχει.

Παλαιά Διαθήκη. Βασιλειών Γ΄,7:23.

***Απόσπασμα* 1**

Το απόσπασμα αυτό αναφέρεται στο θυσιαστήριο που είχε κατασκευαστεί στο ναό του Σολόμωντα, του οποίου ο λόγος της περιφέρειας προς τη διάμετρο ισούται με τριάντα δια δέκα πήχεις , δηλαδή 3. Το χωρίο αυτό πιθανότατα γράφτηκε γύρω στο 16^o π.Χ. αι. παρότι περιγράφει ναό που χτίστηκε το 10^o αι. π. Χ. Την περίοδο αυτή το π είχε ήδη υπολογιστεί με μεγαλύτερη ακρίβεια, κάτι το οποίο πιθανόν δεν γνώριζαν οι συγγραφείς της Βίβλου. Ένας ραβίνος και μαθηματικός ο ***Nehemiah*** επιχειρεί να γεφυρώσει την απόσταση μεταξύ επιστήμης και θρησκείας. Ο ίδιος έγραψε γύρω στο 150 π.Χ., στα σχόλιά του πάνω σε αυτό το χωρίο της Παλαιάς Διαθήκης, ότι ο κύκλος έχει τρεις διαστάσεις, την περιφέρεια, τη διάμετρο και το εμβαδόν, και προκειμένου να υπολογιστεί η περίμετρος πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τη διάμετρο με το

$3\frac{1}{7}$. Αυτή είναι η αρχιμήδεια τιμή για το π και ο Nehemiah αιτιολογεί τη διαφορά ανάμεσα στις δύο τιμές λέγοντας ότι αυτό το $\frac{1}{7}$ υπολείπεται εξ' αιτίας του πάχους των τοιχωμάτων του σκεύους. Δηλαδή, αφού το σκεύος ήταν σαν «χείλος ποτηριού» (Παραλειπομένων Β΄ 4:5), η αναφερόμενη σε αυτά τα χωρία διάμετρος μετρήθηκε στο επάνω μέρος, ενώ η περιφέρεια στον πάτο του ποτηριού. Βέβαια ο ραβίνος Μοσέ μπεν Μαιμόν (1135-1204) ή πιο γνωστός ως Ραμπάμ ή Μαιμονίδης, γράφει «ο λόγος της διαμέτρου ενός κύκλου προς την περιφέρειά του δεν μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς…είναι όμως δυνατό να τον υπολογίσουμε κατά προσέγγιση …και η προσέγγιση που χρησιμοποίησαν οι επιστήμονες είναι ο λόγος $3\frac{1}{7}$. Αφού όμως είναι αδύνατο να υπολογιστεί με απόλυτη ακρίβεια ο λόγος αυτός υπέθεσαν έναν στρογγυλό αριθμό και σε αυτόν βασίστηκαν για όλες τις απαιτούμενες μετρήσεις.» [22].

Το π στον Αριστοφάνη.

Ο Αριστοφάνης (448 – 385 π. Χ.) στο έργο του Όρνιθες, το οποίο χρονολογείται περίπου στο 414 π.Χ. κάνει μια αναφορά σχετική με τον τετραγωνισμό του κύκλου. Στους στίχους 1001-1009 ο γεωμέτρης Μέτων, περιγράφοντας στον Πισθέταιρο κάποια αρχιτεκτονικά σχέδια, αναφέρει ότι θα τετραγωνίσει τον κύκλο, όπως φαίνεται στο απόσπασμα (2). Είναι χαρακτηριστική η απάντηση του Πισθέταιρου στα όσα λέει ο Μέτων, ο οποίος εντυπωσιασμένος τον συγκρίνει με το Θαλή. Από το απόσπασμα αυτό φαίνεται ότι ακόμα και σε εκείνη την εποχή οι «τετραγωνιστές του κύκλου» αντιμετωπίζονταν ως οι άνθρωποι που προσπαθούσαν να επιτύχουν το αδύνατο [60].

Προσθεὶς οὖν ἐγὼ
τὸν κανόν' ἄνωθεν τουτονὶ τὸν καμπύλον,
ἐνθεὶς διαβήτην–μανθάνεις;

{ΠΙ.} Οὐ μανθάνω.

{ΜΕ.} Ὀρθῷ μετρήσω κανόνι προστιθείς, ἵνα
ὁ κύκλος γένηταί σοι τετράγωνος κἀν μέσῳ
ἀγορά, φέρουσαι δ' ὦσιν εἰς αὐτὴν ὁδοὶ
ὀρθαὶ πρὸς αὐτὸ τὸ μέσον, ὥσπερ δ' ἀστέρος
αὐτοῦ κυκλοτεροῦς ὄντος ὀρθαὶ πανταχῇ
ἀκτῖνες ἀπολάμπωσιν.

{ΠΙ.} Ἄνθρωπος Θαλῆς.

Αριστοφάνους Όρνιθες. στ.1001-1009

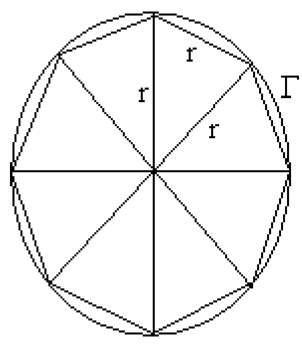
***Απόσπασμα* 2**

Προελληνική περίοδος.

Μεσοποταμία.

Σε ότι αφορά τη γραπτή ιστορία των Μαθηματικών, οι Αιγύπτιοι αναφέρονται ως οι πρώτοι που ενασχολήθηκαν με τα Μαθηματικά. Αυτό όμως συνέβαινε γιατί οι αιγυπτιακοί πάπυροι ήταν τα περισσότερα και τα πιο καλοδιατηρημένα έγγραφα. Οι έρευνες των τελευταίων δεκαετιών έχουν αλλάξει αυτή την άποψη και μάλιστα έχει βρεθεί μια καλύτερη προσέγγιση του π στην Μεσοποταμία, σε σύγκριση με την προσέγγιση των Αιγυπτίων.

Οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν την τιμή $\pi = 3$. Το 1936 όμως, στην περιοχή Σούσα 200 μίλια από τη Βαβυλώνα, η αρχαιολογική σκαπάνη έφερε στο φως μια πινακίδα που έμελλε να αλλάξει την υπάρχουσα αντίληψη. Η πινακίδα αυτή, της οποίας η μετάφρασή της δημοσιεύτηκε σταδιακά μόλις το 1950 [20], αναφέρεται σε διάφορα γεωμετρικά σχήματα. Μέσα σε αυτά αναφέρεται και το ότι ο λόγος της περιμέτρου ενός κανονικού εξαγώνου προς την περιφέρεια του περιγεγραμμένου κύκλου, είναι ίσος με $\frac{57}{60} + \frac{36}{(60)^2}$ (οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν το εξηκονταδικό σύστημα, και έτσι η βάση τους ήταν το 60 αντί για το 10). Προφανώς οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν ότι η περίμετρος ενός κανονικού εξαγώνου είναι ίση με ακριβώς έξι φορές την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου, όπως φαίνεται και στην εικόνα 2.



Εικόνα 2

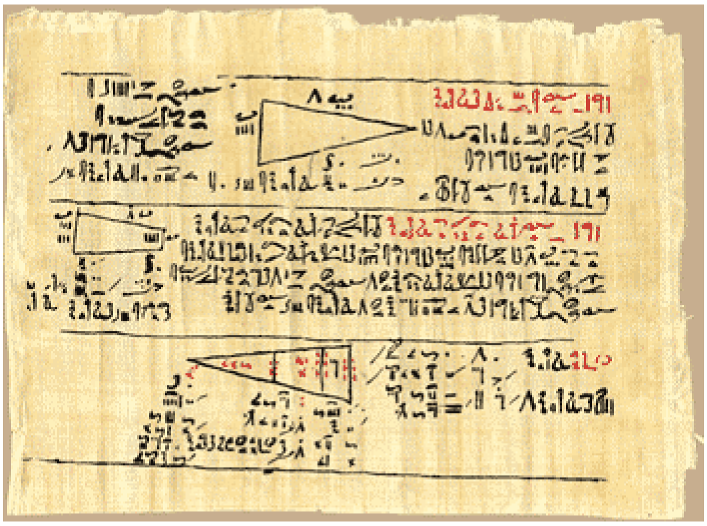
Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω η πινακίδα περιγράφει το λόγο $6r/\Gamma$,όπου το r είναι η ακτίνα, και Γ είναι η περιφέρεια του περιγεγραμμένου κύκλου. Γνωρίζουμε όμως ότι $\Gamma = 2 \cdot \pi \cdot r$, οπότε προκύπτει

$\frac{3}{\pi} = \frac{57}{60} + \frac{36}{(60)^2}$. Κάνοντας τις πράξεις, η τιμή του

π που προκύπτει είναι $\pi = 3\, {}^{1}\!/_{8} = 3.125$, την οποία προφανώς πρέπει να γνώριζαν οι Βαβυλώνιοι για να καταλήξουν στον τύπο της πινακίδας. Βέβαια σε όλα τα άλλα μέχρι σήμερα γνωστά βαβυλωνιακά κείμενα χρησιμοποιείται η τιμή π = 3.

Αίγυπτος.

Για τα αιγυπτιακά μαθηματικά γνωρίζουμε τα περισσότερα πράγματα σε σχέση με άλλους αρχαίους πολιτισμούς της προελληνικής περιόδου. Το παλαιότερο αιγυπτιακό έγγραφο που σχετίζεται με τα μαθηματικά και γι' αυτό το λόγο το αρχαιότερο μαθηματικό κείμενο γενικότερα είναι ένας πάπυρος, ονομαζόμενος πάπυρος Rhind ή πάπυρος Ahmes (εικόνα 3). Πήρε το όνομά του από τον A.H.Rhind, ο οποίος αγόρασε το κείμενο αυτό στο Λούξορ και στη συνέχεια τον κληροδότησε στο Βρετανικό μουσείο.



Εικόνα 3

Ο πάπυρος αυτός περιέχει 84 προβλήματα με τις λύσεις τους αλλά συνήθως κανένα στοιχείο δεν δίνεται για τον τρόπο επίλυσης αυτών των προβλημάτων. Το έγγραφο ξεκινάει με πληροφορίες τις οποίες δίνει ο γραφέας Ahmes, ο οποίος αντέγραψε το κείμενο αυτό. Με τη βοήθεια αυτών των στοιχείων οι αιγυπτιολόγοι χρονολογούν αυτό το έγγραφο περίπου στο 1650 π.Χ., το οποίο όμως σύμφωνα με το γραφέα του είναι αντιγραφή ενός άλλου το οποίο είναι μεταξύ του 2000 και του 1800 π.Χ. [20].

Το πρόβλημα που παρουσιάζει ενδιαφέρον ως προς την προσέγγιση της τιμής του π είναι το πρόβλημα νούμερο 50 το οποίο πραγματεύεται τον υπολογισμό του εμβαδού ενός κυκλικού αγρού και φαίνεται στο απόσπασμα 3.

Ένας κυκλικός αγρός έχει διάμετρο 9 khet. Πόσο είναι το εμβαδόν του;

(Λύση)

Κάνε έτσι

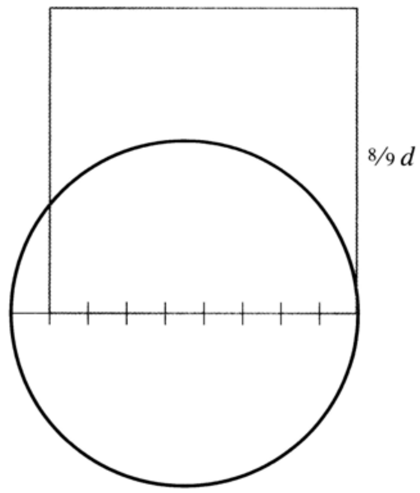
	1	***9***
	$\bar{9}$	***1***
Το υπόλοιπο 8		
	1	***8***
	2	***16***
	4	***32***
	****8***	***64***

Η επιφάνεια του αγρού είναι 64.

Πρόβλημα 50 του πάπυρου Rhind.

***Απόσπασμα* 3**

Στο πρόβλημα αναφέρονται τα εξής: «Πάρε το $1/9$ της διαμέτρου ενός κύκλου και σχημάτισε ένα τετράγωνο με βάση το υπόλοιπο. Το τετράγωνο αυτό έχει το ίδιο εμβαδόν με τον κύκλο» [56], [20]. Ας δούμε όμως το μαθηματικό νόημα αυτής της πρότασης. Έστω ένας κύκλος με διάμετρο d και εμβαδόν Ε, τότε αυτό που περιγράφεται στον πάπυρο είναι ότι το εμβαδόν του κύκλου είναι $E=\left(d-\frac{1}{9}d\right)^2=\left(\frac{8}{9}d\right)^2$. Στην εικόνα 4 απεικονίζεται αυτή η σχέση γεωμετρικά.



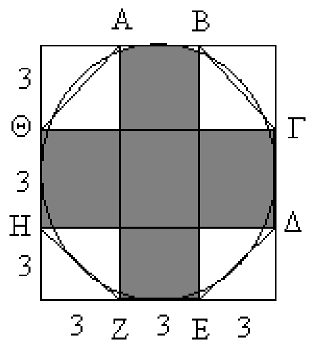
Εικόνα 4

Θεωρώντας διάμετρο ίση με τη μονάδα, το εμβαδόν του κύκλου θα είναι το ένα τέταρτο του π, από τον σύγχρονο τύπο $E = \pi \cdot \rho^2$. Σύμφωνα όμως με τον αιγυπτιακό πάπυρο, το εμβαδόν του θα είναι $\left(8/9\right)^2$. Άρα $\left(8/9\right)^2 = \pi/4 \Leftrightarrow \pi = 4 \cdot \left(8/9\right)^2 \Rightarrow \pi \approx 3{,}16045$. Αυτός ο υπολογισμός περιέχει μόνο $0{,}6\%$ σχετικό σφάλμα, κάτι εκπληκτικό για την εποχή. Η τιμή αυτή είναι λίγο χειρότερη από την τιμή των Βαβυλωνίων $3\,1/8$ και είναι πιο κοντά στο $3\,1/6$ από ότι στο $3\,1/7$, κάτι που υποδηλώνει ότι δεν ελέγχθηκε πειραματικά [20] (η πειραματική μέτρηση δίνει τιμή μεταξύ του $3\,1/7$ και του $3\,1/8$).

Πώς όμως οι Αιγύπτιοι κατέληξαν σε αυτήν την προσέγγιση; Ο γραφέας Ahmes δίνει ένα στοιχείο στο πρόβλημα 48. Το πρόβλημα αυτό φαίνεται στην εικόνα 5 και σύμφωνα με μετάφραση του A. B. Chase [3] λέει «σύγκρινε την επιφάνεια ενός κύκλου με την επιφάνεια του περιγεγραμμένου στον κύκλο τετραγώνου». Όπως φαίνεται και στο σχήμα υπάρχουν πολλές αμφιβολίες για το αν πρόκειται για κύκλο και τετράγωνο ή για τετράγωνο και οκτάγωνο. Η δεύτερη περίπτωση είναι η επικρατέστερη.

.

Το πρόβλημα 48 του πάπυρου Rhind.

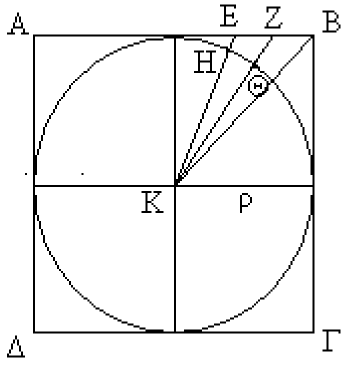


Ανακατασκευή του προβλήματος 48 του πάπυρου Rhind

Εικόνα 5

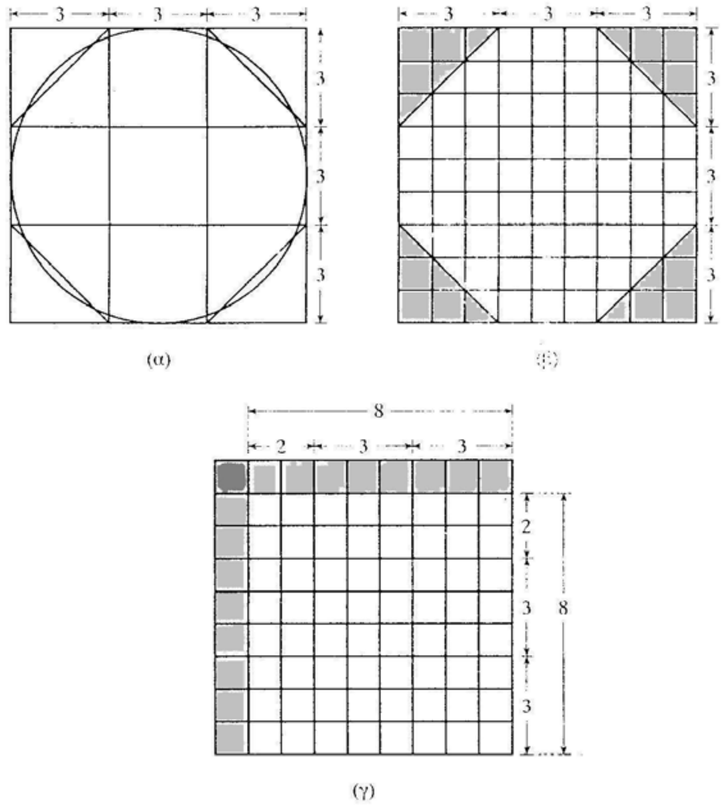
Ο Ahmes, κατά τον Vogel [3], [29], στο έργο του *Vorgriechische Mathematik*, δημιουργεί ένα κανονικό οκτάγωνο τριχοτομώντας τις πλευρές ενός τετραγώνου με πλευρά 9 μονάδες και αφαιρώντας τα γωνιακά τρίγωνα όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Το εμβαδόν του οκταγώνου ΑΒΓΔΕΖΗΘ δεν διαφέρει πολύ από το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου στο τετράγωνο, και είναι ίσο με το εμβαδόν των 5 μικρών γραμμοσκιασμένων τετραγώνων και 4 μισών τετραγώνων ακόμα. Το εμβαδόν ενός ολόκληρου μικρού τετραγώνου είναι ίσο με 9 τετραγωνικές μονάδες και το εμβαδόν του μισού τετραγώνου είναι ίσο με $4\,{}^{1}\!/_{2}$ τετραγωνικές μονάδες. Άρα το συνολικό εμβαδόν του οκταγώνου είναι ίσο με 63 τετραγωνικές μονάδες, ή περίπου 64. Το 64 όμως είναι το τετράγωνο του 8, άρα το εμβαδόν ενός κύκλου με διάμετρο 9 είναι περίπου ίσο με 64 τετραγωνικές μονάδες ή το εμβαδόν ενός τετραγώνου με πλευρά 8, το οποίο όπως και στο πρόβλημα 50 οδηγεί στη σχέση $\pi = 4 \times \left({}^{8}\!/_{9}\right)^2$. Πιθανότατα λοιπόν η επιφάνεια του κύκλου για τους αρχαίους Αιγυπτίους να ήταν ίση με $E = \left(d - \frac{1}{9}d\right)^2$. Βέβαια ο Ahmes έκανε δύο παραδοχές, η μια ότι το εμβαδόν του κύκλου είναι ίσο με το εμβαδόν του οκταγώνου και η άλλη ότι $63 \approx 64$.

Μια άλλη εικασία για το πώς οι Αιγύπτιοι έφτασαν σε αυτήν την προσέγγιση του π διατυπώνεται από τον Struve [8]. Πρώτον, φαίνεται πως οι Αιγύπτιοι διαπίστωσαν με πολυάριθμες δοκιμές ότι ο λόγος π της περιφέρειας προς τη διάμετρο είναι σταθερός. Δεύτερον, θεώρησαν έναν κύκλο και το περιγεγραμμένο σε αυτόν τετράγωνο όπως φαίνεται στην εικόνα 6 .



Εικόνα 6

Το εμβαδόν του τυχαίου μικτόγραμμου τριγώνου ΚΗΘ είναι $\frac{\rho \cdot \tau o\xi \mathrm{H\Theta}}{2}$, και το εμβαδόν του αντίστοιχου τριγώνου ΚΕΖ, όταν η γωνία στο Κ είναι πάρα πολύ μικρή, είναι $\frac{\rho \cdot \mathrm{EZ}}{2}$. Ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο $\frac{\tau o\xi \mathrm{H\Theta}}{\mathrm{EZ}}$. Κατά αναλογία, ο λόγος του εμβαδού του κύκλου ακτίνας ρ προς το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς 2ρ, ισούται με το λόγο των περιμέτρων αυτών των δύο σχημάτων $\frac{2\pi\rho}{8\rho} = \frac{\pi\rho^2}{4\rho^2} = \frac{\pi}{4}$. Δηλαδή μέτρησαν το λόγο των περιμέτρων του κύκλου και του τετραγώνου, και επειδή ο λόγος αυτός ισούται με το λόγο των εμβαδών αυτών, προέκυψε $\pi = 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2$. Ο R. J. Gillings [3] στο έργο του *Mathematics in the times of the Pharaohs*, δίνει μια άλλη εξήγηση για τον τρόπο υπολογισμού του εμβαδού από τους αρχαίους Αιγυπτίους. Όπως φαίνεται και στα παρακάτω σχήματα, ο συγγραφέας θα μπορούσε να θεωρήσει ότι το εμβαδόν του κύκλου είναι ίσο με το εμβαδόν του οκταγώνου, αφού μερικά τμήματα του κύκλου είναι μέσα στο οκτάγωνο και μερικά είναι έξω[1]. Επομένως, προσεγγιστικά θα μπορούσε να ισχυριστεί όπως φαίνεται και στο σχήμα (α) (εικόνα 7) ότι $E_{\mathrm{OKTA\Gamma\Omega NOY}} = E_{\mathrm{KYK\Lambda OY}}$.



Τα διαγράμματα του Gillings για τη μέθοδο υπολογισμού του εμβαδού του κύκλου από τους Αιγυπτίους.

Εικόνα 7

Παίρνουμε από το πάνω μέρος του τετραγώνου 9×9 του σχήματος (β) τα εννιά μικρά σκιασμένα τετράγωνα και τα τοποθετούμε πάνω από το τετράγωνο 8×8 του σχήματος (γ). Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία με τα κάτω εννιά μικρά σκιασμένα τετράγωνα του σχήματος (β), τα οποία τα τοποθετούμε στα αριστερά του τετραγώνου 8×8 του σχήματος (γ). Από τα σχήματα (β) και (γ) καταλαβαίνουμε ότι το εμβαδόν του οκταγώνου του (β) ισούται με το εμβαδόν του τετραγώνου 8×8 του (γ), με προσέγγιση ενός μικρού τετραγώνου 1×1, το οποίο τοποθετήθηκε δύο φορές στην πάνω αριστερή γωνία. Ασφαλώς, όπως λέει ο Gillings, ο συγγραφέας ήξερε καλά ότι η μέθοδός του δεν ήταν ακριβής, αλλά του επέτρεπε να βρει ένα τετράγωνο πολύ κοντά στο εμβαδόν του κύκλου. Προφανώς ο Gillings αναφέρεται στον τύπο που έδινε το εμβαδόν του κύκλου Ε ως $E = \left(d - \frac{1}{9}d \right)^2$.

Οι τύποι που βρέθηκαν στον πάπυρο Rhind είναι η πρώτη καταγεγραμμένη απόπειρα «τετραγωνισμού του κύκλου», δηλαδή η προσπάθεια κατασκευής ενός τετραγώνου που να έχει το ίδιο εμβαδόν με αυτό ενός κύκλου. Επιπλέον, ιστορικοί της μαθηματικής επιστήμης αναφέρουν συχνά ότι οι Αιγύπτιοι θεωρούσαν την τιμή του π ίση με $^{256}\!/_{81}$. Στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν συγκεκριμένα στοιχεία που να δείχνουν ότι οι αρχαίοι Αιγύπτιοι είχαν συλλάβει το π ως μια σταθερά, πόσο μάλλον ότι προσπάθησαν να το υπολογίσουν. Προφανώς τους ενδιέφερε να βρουν μόνο τη σχέση του κύκλου με το τετράγωνο , για να είναι σε θέση να μετρούν με ακρίβεια εκτάσεις και κτίρια.

Ο ελληνικός πολιτισμός.

Οι Έλληνες γεωμέτρες δεν απέβλεπαν σε εμπειρική εκτίμηση του π. Γι' αυτούς η γεωμετρία ήταν επιστήμη «καθαρής γνώσης» και έπρεπε να φτάσουν θεωρητικά στην κατασκευή της πλευράς τετραγώνου ίσου εμβαδού με το δοθέντα κύκλο, με χρήση **κανόνα και διαβήτη,** σύμφωνα με τις επιταγές του Ευκλείδη. Επιπλέον, έπρεπε να αποδειχτεί και η ορθότητα της κατασκευής στην οποία θα κατέληγαν. Το πρόβλημα με την περιοριστική μορφή που τέθηκε αρχικά, δηλαδή τη χρήση κανόνα και διαβήτη δεν επιδέχεται λύση. Το αδύνατο αυτής της κατασκευής αποδείχτηκε 24 αιώνες αργότερα. Εκτός από τη χρήση κανόνα και διαβήτη, το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου προσεγγίστηκε και με άλλους δύο τρόπους. Ο πρώτος ήταν με μηχανικά κατασκευαζόμενες καμπύλες και ο δεύτερος με προσεγγιστικές μεθόδους. Ας δούμε όμως αναλυτικότερα τις προσπάθειες ορισμένων Ελλήνων γεωμετρών ως προς τον τετραγωνισμό του κύκλου, ένα πρόβλημα στενά συνδεδεμένο με τον υπολογισμό του π.

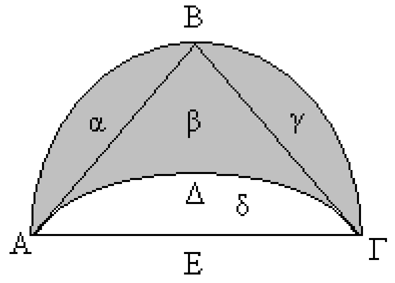
Ο ***Αναξαγόρας ο Κλαζομένιος*** (499-428 π.Χ.) ήταν ο πρώτος Έλληνας που προσπάθησε να βρει μια συγκεκριμένη σχέση ανάμεσα στον κύκλο και στο τετράγωνο. Ο Πλούταρχος στο έργο του *Περί Φυγής* μας πληροφορεί ότι κατά τη διάρκεια της παραμονής του στη φυλακή (περίπου το 434 μ. Χ.) - εξ αιτίας του ότι δίδασκε ότι ο ήλιος δεν είναι θεότητα – ασχολούνταν με μια μέθοδο κατασκευής τετραγώνου με εμβαδόν ίσο με εκείνο ενός κύκλου. Βέβαια ο Πλούταρχος δεν αναφέρει καμία άλλη πληροφορία για το πώς το πέτυχε αυτό. Ο Rudio [34] στο έργο του *Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und Hippokrates* μεταφράζοντας το αρχαιοελληνικό *έγραφε* ως *σχεδίαζε*, υποστηρίζει ότι μάλλον γνώριζε τον αιγυπτιακό τρόπο τετραγωνισμού του κύκλου, και σχεδίαζε στην άμμο ένα τετράγωνο όσο το δυνατόν γίνεται ίσο με έναν κύκλο. Σύμφωνα με τον Heath [34] κάτι τέτοιο μάλλον δεν ισχύει, αφού η λέξη *εγράφησαν* χρησιμοποιείται από τον Εύδημο κατά την περιγραφή του τετραγωνισμού των μηνίσκων από τον Ιπποκράτη, και άρα υποδηλώνεται η θεωρητική επεξεργασία ενός προβλήματος.

Ο ***Ιπποκράτης ο Χίος*** (~470 π.Χ.) ασχολήθηκε εκτεταμένα με τη γεωμετρία και επιπλέον τη δίδαξε στις σχολές της Αθήνας. Ήταν ο πρώτος που έγραψε βιβλίο γεωμετρίας και ο πρώτος που έκανε χρήση γραμμάτων για την ονομασία σημείων, γραμμών και σχημάτων. Η συμβολή του στο πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου ήταν μεγάλη, καθώς προσέγγισε με διαφορετικό τρόπο τη λύση του. Ο Ιπποκράτης ήταν ο πρώτος που κατάφερε να υπολογίσει ακριβώς το εμβαδόν σχημάτων που περιβάλλονται από καμπύλες, και πιο συγκεκριμένα κυκλικά τόξα.

Για το έργο του μας πληροφορεί ο Πρόκλος [53] και λεπτομερέστερα ο Συμπλίκιος [14] (6^{ος} αι. μ. Χ.), ο οποίος υποστηρίζει ότι αντέγραφε λέξη προς λέξη την *Ιστορία των Μαθηματικών* του Εύδημου. Σύμφωνα με τις προαναφερθείσες πηγές, ο Ιπποκράτης κατάφερε να τετραγωνίσει με τη χρήση κανόνα και διαβήτη, κάποιους μηνίσκους. Μηνίσκος ονομάζεται το σχήμα που δημιουργείται από τα τόξα δύο τεμνόμενων κύκλων άνισων ακτινών, των οποίων τα κέντρα βρίσκονται ομοπλεύρως. Ο Εύδημος [65] αποδίδει στον Ιπποκράτη το θεώρημα «*Ο λόγος των όμοιων κυκλικών τμημάτων είναι ίσος με το λόγο των τετραγώνων των βάσεών τους. Στοιχεία* XII.2». Μάλιστα υποστηρίζει ότι το απέδειξε δείχνοντας πρώτα ότι ο λόγος των εμβαδών δύο κύκλων είναι ίσος με το λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους, διότι οι κύκλοι έχουν τον ίδιο λόγο όπως τα όμοια τμήματα, όμοια λέγονται τα τμήματα που σχηματίζουν το ίδιο μέρος του κύκλου. Φαίνεται ότι το θεώρημα του Ιπποκράτη γα τα εμβαδά των κύκλων είναι η πρώτη ακριβής πρόταση για την μέτρηση καμπυλόγραμμων σχημάτων στην Ελλάδα. Αν και ο Εύδημος πίστευε ότι ο Ιπποκράτης απέδειξε το παραπάνω θεώρημα, κάτι τέτοιο είναι μάλλον απίθανο.

Η έννοια της αναλογίας που χρησιμοποίησε ο Ιπποκράτης είναι ίδια με εκείνη που αποτελεί τη βάση της πυθαγόρειας θεωρίας αριθμών: τέσσερα μεγέθη είναι ανάλογα εάν το πρώτο είναι το ίδιο μέρος ή το ίδιο πολλαπλάσιο του δεύτερου, όπως το τρίτο είναι του τέταρτου. Αυτός ο ορισμός εφαρμόζεται μόνο στην περίπτωση των ρητών λόγων και ο Ιπποκράτης δεν είχε φτάσει ακόμα σε μια αυστηρή πραγμάτευση των άρρητων λόγων [65]. Αν όντως ο Ιπποκράτης απέδειξε το θεώρημα για τα εμβαδά των κύκλων, ίσως να το έκανε με μια έμμεση απόδειξη χρησιμοποιώντας απαγωγή σε άτοπο. Ουσιαστικά όμως, βασιζόμενος σε αυτό το θεώρημα, βρήκε τον πρώτο αυστηρό τετραγωνισμό μιας καμπυλόγραμμης επιφάνειας στην ιστορία των μαθηματικών [26].

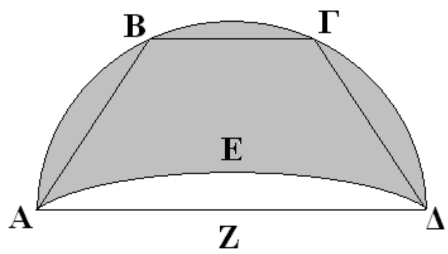
Ξεκίνησε περιγράφοντας ένα ημικύκλιο γύρω από ένα ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο και κατασκεύασε στη βάση του ένα κυκλικό τμήμα όμοιο προς τα τμήματα που αντιστοιχούν στις κάθετες πλευρές του, δηλαδή τεταρτοκύκλιο, όπως φαίνεται στην εικόνα 8 [26]. Το σκιασμένο κομμάτι του σχήματος είναι ένας μηνίσκος του οποίου το εξωτερικό τόξο είναι ένα ημικύκλιο. Στο σχήμα το τόξο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ημικύκλιο, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και τα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΑΔΓ είναι όμοια. Το εμβαδόν του μηνίσκου αυτού είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.



Εικόνα 8

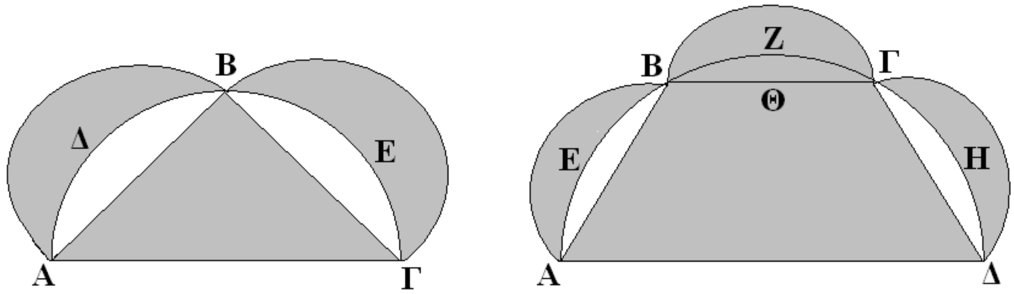
Η απόδειξη έχει ως εξής. Αφού τα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΑΔΓ είναι όμοια, και τα τετράγωνα των βάσεών τους συνδέονται με την ίδια σχέση. Όμως τα τετράγωνα των βάσεων από το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι ίσα με $\mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{B\Gamma}^2$, άρα και τα εμβαδά συνδέονται με τη σχέση α + γ = δ, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Οπότε το εμβαδόν του μηνίσκου είναι ίσο με $E_{\mu\eta\nu\iota\sigma\kappa o\upsilon} = \alpha + \beta + \gamma = \beta + \delta = E_{\mathrm{AB\Gamma}}$, δηλαδή ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Ο Εύδημος περιγράφει επίσης τον τετραγωνισμό ενός άλλου μηνίσκου του Ιπποκράτη, που αφορά ένα ισοσκελές τραπέζιο εγγεγραμμένο σε έναν κύκλο. Έστω το ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ της εικόνας 9, το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, ώστε το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του ΑΔ να ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των τριών υπόλοιπων μικρότερων πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ, οι οποίες είναι ίσες μεταξύ τους. Αν στην πλευρά ΑΔ



Εικόνα 9

σχεδιάσουμε ένα κυκλικό τμήμα ΑΕΔΖ όμοιο με αυτά των τριών ίσων πλευρών, το εμβαδόν του μηνίσκου ΑΒΓΔΕΑ είναι ίσο με το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ. Ακόμα ένας συγγραφέας στον οποίο βασίστηκε ο Συμπλίκιος, εκτός του Εύδημου (~320 π. Χ.), ήταν ο δάσκαλός του Αλέξανδρος ο Αφροδισιέας (~200 μ. Χ.), ένας από τους κυριότερους σχολιαστές του Αριστοτέλη. Ο Αλέξανδρος περιγράφει δύο επιπλέον τετραγωνισμούς μηνίσκων διαφορετικούς από τους προηγούμενους.



Εικόνες 10 (α) και (β)

Στον πρώτο τετραγωνισμό, όπως φαίνεται στην εικόνα 10 (α), ο Ιπποκράτης ξεκίνησε με ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο, έφτιαξε το περιγεγραμμένο στο τρίγωνο ημικύκλιο και τα ημικύκλια που αντιστοιχούν στις κάθετες πλευρές του. Στη συνέχεια απέδειξε ότι το άθροισμα των εμβαδών των μηνίσκων ΑΒΔΑ και ΒΓΕΒ θα είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Στο δεύτερο τετραγωνισμό (εικόνα 10 (β)) πήρε ένα ισοσκελές τραπέζιο, το οποίο σχηματίζεται από τη διάμετρο ενός κύκλου και τις τρεις διαδοχικές πλευρές ενός εγγεγραμμένου κανονικού εξαγώνου. Στη συνέχεια κατασκεύασε το περιγεγραμμένο ημικύκλιο στο τραπέζιο και τα ημικύκλια που αντιστοιχούν στις τρεις ίσες πλευρές. Σε αυτήν την περίπτωση απέδειξε ότι το άθροισμα των εμβαδών των μηνίσκων ΑΒΕΑ, ΒΓΖΒ, ΓΔΗΓ και ενός εκ των ημικυκλίων που αντιστοιχούν στις τρεις ίσες πλευρές του τραπεζίου, π. χ. το ΒΓΘΗ, είναι ίσο με το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

Βέβαια, τα *Στοιχεία της Γεωμετρίας* του Ιπποκράτη δυστυχώς δεν διασώζονται, και έτσι δεν μπορούμε να ξέρουμε κατά πόσο ο Ιπποκράτης υπολόγισε το εμβαδόν κάποιων μηνίσκων με τρόπο αυστηρό. Απώτερος στόχος του

Ιπποκράτη ήταν να βρει ένα μηνίσκο που να μπορεί να τετραγωνιστεί και ταυτόχρονα να είναι ρητό τμήμα του κύκλου. Αν έβρισκε τέτοιο μηνίσκο θα είχε αυτόματα λυθεί το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου. Όπως είναι γνωστό σήμερα δεν είναι όλοι οι μηνίσκοι τετραγωνίσιμοι, πόσο μάλλον ο κύκλος, πάντα με χρήση κανόνα και διαβήτη. Από το έργο του πάντως δεν μπορούμε να εξάγουμε κάποια τιμή για το π [16].

Ο ***Αντιφών*** (430 π.Χ.), ήταν άλλος ένας Έλληνας σοφιστής και φιλόσοφος της ίδιας περιόδου που ασχολήθηκε με τον τετραγωνισμό του κύκλου και υπολόγισε το εμβαδόν του κύκλου με τη «μέθοδο της εξάντλησης». Ο όρος αυτός καθιερώθηκε το 17^{ο} αι. από μελετητές των έργων του Αρχιμήδη [50]. Η μέθοδος αυτή είχε πολύ σημαντική επίδραση στην αναζήτηση της τιμής του π μέχρι το 17^{ο} αι. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι εγγραφή διαδοχικών πολυγώνων μέσα σε έναν κύκλο, διπλασιάζοντας τις πλευρές του κάθε πολυγώνου σε κάθε βήμα. Έτσι ξεκινώντας από ένα εγγεγραμμένο τετράγωνο, διπλασιάζοντας τις πλευρές του δημιουργείται 8-γωνο, 16-γωνο, κ.ο.κ. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται έως ότου δημιουργηθεί ένα πολύγωνο του οποίου οι πλευρές προσεγγίζουν την περιφέρεια του κύκλου, και άρα μπορεί να προσεγγιστεί το εμβαδόν του αφού τα πολύγωνα είναι τετραγωνίσιμα.

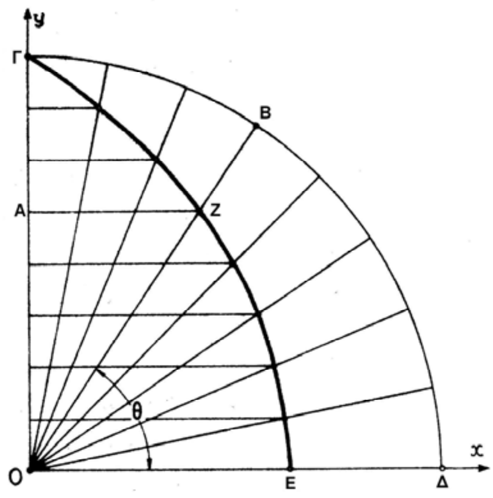
Για τη μέθοδο του Αντιφώντα μας πληροφορεί ο Θεμίστιος [34] και ο Συμπλίκιος [14], στα σχόλιά τους στα *Φυσικά* του Αριστοτέλη. Ο Θεμίστιος αναφέρει ότι ο Αντιφώντας ξεκίνησε εγγράφοντας ένα ισόπλευρο τρίγωνο, το οποίο πιθανολογείται να είναι αληθές. Ο Συμπλίκιος αναφέρει ότι ενέγραψε κάποιο κανονικό πολύγωνο και στη συνέχεια δημιούργησε ισοσκελή τρίγωνα τοποθετώντας τις κορυφές τους στην περιφέρεια του κύκλου και παίρνοντας ως βάσεις τις πλευρές του. Έτσι διπλασίασε τις πλευρές του κανονικού πολυγώνου και συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία κάποια στιγμή οι πλευρές του θα ταυτίζονταν με την περιφέρεια του κύκλου εξαιτίας του πολύ μικρού τους μεγέθους [14]. Βέβαια στην αρχαία Ελλάδα η έννοια του ορίου ήταν άγνωστη και έτσι δεν ήξερε πώς να ισχυροποιήσει το επιχείρημά του.

Σύμφωνα με το λήμμα Αρχιμήδους - Ευδόξου, γνωστό και ως αξίωμα της συνέχειας, *«δεδομένων δύο μεγεθών που έχουν λόγο (δηλαδή κανένα από τα δύο δεν είναι μηδέν), μπορούμε να βρούμε ένα πολλαπλάσιο οποιουδήποτε από* *τα δύο το οποίο να είναι μεγαλύτερο του άλλου»*. Το αξίωμα αυτό ήταν η βάση της μεθόδου της εξάντλησης, δηλαδή ουσιαστικά του ελληνικού ολοκληρωτικού λογισμού [26]. Βέβαια υπήρχαν και αντιρρήσεις σε ότι αφορά την ορθότητα της μεθόδου. Κατά τον Εύδημο, αφού τα μεγέθη μπορούν να διαιρούνται έπ' άπειρον, η διαδικασία που περιγράφεται από τον Αντιφώντα δεν τελειώνει ποτέ και άρα η μέθοδός του ήταν λανθασμένη. Η ίδια μέθοδος πάντως χρησιμοποιείται από τον Ευκλείδη στα *Στοιχεία*, στην απόδειξη της πρότασης XII.2. Η απόδειξη αυτή είναι του Ευδόξου μόνο που το συμπέρασμα παρουσιάζεται διαφορετικά, υποστηρίζοντας ότι η διαφορά μεταξύ του εμβαδού που απομένει ανάμεσα στο πολύγωνο και στο εμβαδόν του κύκλου, μπορεί να γίνει μικρότερη από οποιονδήποτε αριθμό.

Ο ***Βρύσων*** (~430 π.Χ.), μόλις μια γενιά μεταγενέστερος του Αντιφώντα, ασχολήθηκε με τον τετραγωνισμό του κύκλου και προχώρησε ένα βήμα πιο κάτω. Ο σχολιαστής του Αλέξανδρος [34] αναφέρει ότι υπολόγισε τα εμβαδά δύο τετραγώνων, ενός εγγεγραμμένου και ενός περιγεγραμμένου σε κύκλο, και κατασκεύασε ένα ενδιάμεσο τετράγωνο. Το πώς κατασκευάστηκε αυτό το ενδιάμεσο τετράγωνο δεν αναφέρεται. Ο Θεμίστιος και ο Φιλόπονος στα σχόλιά τους δεν προσδιορίζουν το είδος των πολυγώνων. Στη συνέχεια, όπως περιγράφει ο σχολιαστής του Αλέξανδρος, υποστήριξε ότι «*τα πράγματα που είναι μικρότερα και μεγαλύτερα από τα ίδια πράγματα με αντίστοιχο τρόπο είναι ίσα μεταξύ τους»*, καταλήγοντας έτσι στο συμπέρασμα ότι ο κύκλος είναι ίσος με το ενδιάμεσο τετράγωνο. Ίσως αυτή να είναι και η πρώτη φορά που το εμβαδόν ορίζεται μέσω ανώτατων και κατώτατων ορίων (σήμερα άνω και κάτω ολοκλήρωμα). Πολλοί έχουν ερμηνεύσει αυτό το ενδιάμεσο τετράγωνο ως τον αριθμητικό ή γεωμετρικό μέσο των δύο άλλων τετραγώνων. Δεν υπάρχουν όμως αρκετά στοιχεία για την εξαγωγή ενός τέτοιου συμπεράσματος [34]. Αυτές οι προσπάθειες του Αντιφώντα και του Βρύσωνα δεν έτυχαν της δέουσας προσοχής. Μάλιστα χαρακτηρίστηκαν από τον Αριστοτέλη ανάξιες συζήτησης ως αντίθετες στις αρχές της γεωμετρίας. Βέβαια, αργότερα χρησίμευσαν σαν αφετηρία στις προσπάθειες του Αρχιμήδη για τον τετραγωνισμό του κύκλου.

Ο ιδρυτής της Αλεξανδρινής σχολής Ευκλείδης, φαίνεται να γνώριζε ότι το π βρίσκεται κάπου ανάμεσα στο 3 και το 4, απλά δεν το έγραψε κάπου ρητά. Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να αντληθεί από τις ακόλουθες προτάσεις των Στοιχείων: προταση 15 βιβλίο IV, πρόταση 8 βιβλίο IV και πρόταση 16 βιβλίο XII [16].

Οι Έλληνες γεωμέτρες μετά από πολλές αποτυχημένες προσπάθειες για τον τετραγωνισμό του κύκλου με τη χρήση κανόνα και διαβήτη κατέφυγαν στη χρήση καμπύλων πιο πολύπλοκων από τον κύκλο. Πληροφορίες για αυτές τις καμπύλες αντλούμε από τον Ιάμβλιχο [34], ο οποίος αναφέρει ότι ο Αρχιμήδης τετραγώνισε τον κύκλο με μια σπειροειδή καμπύλη, ο Νικομήδης με μια καμπύλη γνωστή ως τετραγωνίζουσα, ο Απολλώνιος με μια καμπύλη παρόμοια με κοχλία, η οποία όμως είναι ίδια με την τετραγωνίζουσα του Νικομήδη, και τέλος ο Κάρπος με μια καμπύλη που προκύπτει από μια διπλή κίνηση. Επίσης και ο Πάππος αναφέρει [10] ότι για τον τετραγωνισμό του κύκλου ο Δεινόστρατος, ο Νικομήδης και πολλοί άλλοι γεωμέτρες χρησιμοποίησαν μια καμπύλη που ονομάστηκε **τετραγωνίζουσα**.



Η τετραγωνίζουσα του Δεινόστρατου. ***Εικόνα 11***

Ο Δεινόστρατος χρησιμοποίησε μια καμπύλη που επινόησε ο ***Ιππίας ο Ήλειος*** **(~425 π.Χ.)**, και εφόσον εφαρμόστηκε στον τετραγωνισμό του κύκλου χαρακτηρίστηκε τετραγωνίζουσα. Ο Ιππίας τη χρησιμοποίησε για την επίλυση ενός άλλου άλυτου προβλήματος της αρχαιότητας, της τριχοτόμησης της γωνίας. Σύμφωνα με τις υπάρχουσες πηγές μάλλον ο Ιππίας δεν αποπειράθηκε να τετραγωνίσει τον κύκλο με αυτήν, κάτι που σκέφτηκε να κάνει ο ***Δεινόστρατος* (~335 π.Χ.)** και για αυτό ονομάστηκε τετραγωνίζουσα του Δεινόστρατου (εικόνα 11).

Η καμπύλη αυτή περιγράφεται από τον Πάππο [10] ως εξής:

Θεωρούμε δύο κινητά Α και Β. Το Α κινείται στον άξονα y΄y με σταθερή ταχύτητα και το Β επί του τόξου ΓΔ του τεταρτοκυκλίου, επίσης με σταθερή ταχύτητα. Ξεκινούν ταυτοχρόνως από τα σημεία Ο και Δ αντίστοιχα, και φτάνουν ταυτοχρόνως στο σημείο Γ. Ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Ζ, το οποίο είναι το σημείο τομής της παράλληλης στον άξονα x΄x από το σημείο Α και της ακτίνας ΟΒ, αποτελεί την τετραγωνίζουσα.

Η εξίσωση της τετραγωνίζουσας προκύπτει με τη βοήθεια πολικών συντεταγμένων, με πόλο το Ο [8]. Έστω ένα τυχαίο σημείο Ζ της τετραγωνίζουσας. Έχουμε τη συνθήκη $\frac{\tau o\xi \Delta \mathrm{B}}{\mathrm{OA}} = \frac{\tau o\xi \Delta \mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{O}\Gamma}$ ή $\frac{\alpha\theta}{\rho \sin\theta} = \frac{\alpha \frac{\pi}{2}}{\alpha}$ (1) , όπου α = ΟΓ και ρ = ΟΖ και θ η γωνία σε ακτίνια. Άρα η εξίσωση της τετραγωνίζουσας σε πολικές συντεταγμένες είναι $\rho = \frac{2\alpha}{\pi}\frac{\theta}{\sin\theta}$. Για να μετατρέψουμε την εξίσωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες, χρειαζόμαστε τις σχέσεις $\frac{\alpha\theta}{y} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}\frac{y}{a}$ (2) που προκύπτει αντικαθιστώντας στην (1) $OA = y$, και $\tan\theta = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = x\tan\theta$ (3). Από τις (2) και (3) προκύπτει η εξίσωση της τετραγωνίζουσας σε καρτεσιανές συντεταγμένες $y = x\tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{a}\right)$. Βέβαια η εξίσωση της τετραγωνίζουσας με τις πολικές συντεταγμένες είναι πιο εύχρηστη γιατί μας δίνει αμέσως την απόσταση ΟΕ. Έτσι $OE = \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{2a}{\pi}\frac{\theta}{\sin\theta}\right) = \frac{2a}{\pi}$, αφού $\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right) = 1$. Οπότε $\rho_o = OE = \frac{2a}{\pi}$. Επιπλέον χρειαζόμαστε και την πρόταση του Πάππου $\frac{\tau o\xi \Gamma \mathrm{B}\Delta}{\mathrm{O}\Gamma} = \frac{\mathrm{O}\Gamma}{\mathrm{OE}}$, η οποία αποδεικνύεται με απαγωγή σε άτοπο. Όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς εάν έχουμε σχεδιασμένη την τετραγωνίζουσα μπορούμε να βρούμε αμέσως και το μήκος του τόξου ΓΒΔ από την τελευταία σχέση. Δηλαδή $\tau o\xi \Gamma B \Delta = \dfrac{O\Gamma^2}{OE} = \dfrac{\alpha^2}{2\alpha/\pi} = \dfrac{\pi\alpha}{2}$. Απαραίτητη προϋπόθεση βέβαια είναι να γνωρίζουμε το σημείο Ε στο οποίο η τετραγωνίζουσα τέμνει το ΟΔ. Για τον τετραγωνισμό του κύκλου πρέπει, κατά τον Πάππο, να χρησιμοποιηθεί μια πρόταση του Αρχιμήδη από το έργο του *Κύκλου Μέτρησις* [2], [13]. Σύμφωνα με την πρόταση αυτή «*το εμβαδόν κάθε κύκλου είναι ίσο με το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου που η μια κάθετη πλευρά του είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου και η άλλη κάθετη πλευρά είναι ίση με την περιφέρεια του κύκλου*». Η απόδειξη της πρότασης αυτής γίνεται με τη μέθοδο της εξάντλησης [6] και πιθανότατα να ήταν γνωστή στο Δεινόστρατο.

Έτσι για το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου έχουμε $E_{O\Gamma B\Delta O} = \dfrac{1}{2}\dfrac{O\Gamma^3}{OE} = \dfrac{\pi\alpha^2}{4}$.

Ο Πάππος [10], [8] αναφέρει ότι ο Σπόρος από τη Νίκαια κατέκρινε την τετραγωνίζουσα του Δεινόστρατου, τονίζοντας την αδυναμία να ρυθμιστούν οι σταθερές ταχύτητες των δύο κινητών, εφ' όσον δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων τον λόγο αυτών. Ο λόγος τους είναι ο λόγος του ΟΓ προς το τόξο ΓΒΔ, εφ' όσον οι ταχύτητες είναι σταθερές και ο χρόνος ίδιος, δηλαδή πρέπει να είναι γνωστός εκ των προτέρων ο αριθμός π. Γιατί αν οι ταχύτητες δεν συνδέονται με κάποια αναλογία δεν είναι δυνατόν να συναντηθούν τα κινητά στο σημείο Γ, παρά μόνο τυχαία.

Στο ίδιο έργο, ο Πάππος αναφέρει ακόμα ένα αντεπιχείρημα του Σπόρου σύμφωνα με το οποίο η τετραγωνίζουσα μπορεί να σχεδιαστεί μόνο σημείο προς σημείο ασυνεχώς και όχι για συνεχή κίνηση. Επιπλέον το σημείο Ε δεν είναι δυνατό να προσδιοριστεί, γιατί για θ = 0, η ΟΒ συμπίπτει με την ΟΔ και δεν υπάρχει σημείο τομής. Βέβαια δεδομένου του ότι η καμπύλη μπορεί να επεκταθεί επ' άπειρον μπορεί να προσδιοριστεί το σημείο τομής, όχι όμως σύμφωνα με τις προϋποθέσεις κατασκευής της καμπύλης. Ο μόνος τρόπος για να προσδιοριστεί το σημείο Ε εξ' αρχής είναι να είναι γνωστός ο λόγος της περιφέρειας προς την ακτίνα.

Σύμφωνα με το οικοδόμημα του Ευκλείδη ο παραπάνω τετραγωνισμός του κύκλου δεν ήταν αποδεκτός κατά τους αρχαίους Έλληνες. Πρώτον γιατί στις προϋποθέσεις του προβλήματος διευκρινίζεται ότι πρέπει να γίνει μόνο με τη χρήση κανόνα και διαβήτη και η διαδικασία πρέπει να πραγματοποιείται σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Αν και ο Δεινόστρατος απέδειξε ότι η τετραγωνίζουσα μπορούσε να τετραγωνίσει τον κύκλο, η μέθοδός του, εφόσον για την κατασκευή της απαιτείται η εύρεση άπειρου αριθμού σημείων με τον κανόνα και το διαβήτη, δεν είναι αποδεκτή. Θα έπρεπε δηλαδή να κατασκευάζεται σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Η Αλεξανδρινή περίοδος. (300 π.Χ. – 415 μ.Χ.)

Η Αλεξανδρινή περίοδος των Μαθηματικών ξεκινά με την ακμή του Ευκλείδη (300 π. Χ.) και τελειώνει με το θάνατο της Υπατίας (415 π. Χ.). Χαρακτηριστικό αυτής της περιόδου δεν είναι οι φιλοσοφικές αναζητήσεις πάνω στη φύση των Μαθηματικών, όπως συνέβη προγενέστερα, αλλά στο πώς και πού μπορεί να μας χρησιμεύσουν. Αυτή την περίοδο έχουμε μια πληθώρα λαμπρών μαθηματικών-μηχανικών, μαθηματικών-γεωγράφων, μαθηματικών-αστρονόμων.

Αρχιμήδης ο Συρακούσιος. (287-212π.Χ.)

Ο Αρχιμήδης ήταν εξαιρετικός εφευρέτης, μαθηματικός και φυσικός. Μεταξύ άλλων ανακάλυψε τα μυστικά της τροχαλίας και του μοχλού, και διεκδικεί τον τίτλο ενός εκ των μεγαλύτερων στοχαστών της ιστορίας. Όταν έστρεψε το ενδιαφέρον του στον κύκλο, χρησιμοποίησε τη μέθοδο του Αντιφώντα και του Βρύσωνα, ωστόσο ο Αρχιμήδης επικέντρωσε το ενδιαφέρον του στις περιμέτρους των δύο πολυγώνων αντί στα εμβαδά τους, κι έτσι βρήκε κατά προσέγγιση την περιφέρεια του κύκλου.

Δεν είναι γνωστό πόσα από τα βιβλία του Αρχιμήδη έχουν χαθεί. Από τα βιβλία του που διασώθηκαν όμως, τα έργα του *Κύκλου Μέτρησις, Περί ελίκων,* *Τετραγωνισμός της παραβολής, Περί σφαίρας και κυλίνδρου, Λήμματα* και άλλα, δεν συγκρίνονται με οτιδήποτε άλλο δημιουργήθηκε στην αρχαιότητα. Η αξία των έργων του έγκειται, όχι μόνο στα αποτελέσματα που προκύπτουν από αυτά, αλλά και στην μεθοδικότητά του. Ο Αρχιμήδης ήταν εκείνος που προχώρησε την έννοια του «ίσο με» στην έννοια του «τείνει σε», την οποία και ο Ευκλείδης την ανέφερε αλλά δεν την χρησιμοποίησε επί της ουσίας. Εν ολίγοις, ο Αρχιμήδης θεωρείται ο πατέρας του ολοκληρωτικού λογισμού.

Το έργο του *Κύκλου Μέτρησις* είναι η πρώτη ολοκληρωμένη μελέτη για τη μέτρηση του κύκλου, η οποία έχει διασωθεί μέχρι σήμερα. Στην πραγματεία αυτή περιέχονται οι αποδείξεις των εξής θεωρημάτων [6], [13]:

1) Κάθε κύκλος είναι ίσος προς ένα ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου η μία κάθετη πλευρά ισούται με την ακτίνα και η άλλη με την περίμετρο του κύκλου.
2) Ο λόγος ενός κύκλου προς το τετράγωνο που έχει πλευρά τη διάμετρο είναι ίδιος με το λόγο του 11 προς το 14.
3) Η περίμετρος κάθε κύκλου είναι μικρότερη από το τριπλάσιο και ένα έβδομο της διαμέτρου και μεγαλύτερη από το τριπλάσιο και δέκα εβδομηκοστά πρώτα αυτής.

Εισάγοντας τους συμβολισμούς E, L, R για το εμβαδόν την περίμετρο και την ακτίνα του κύκλου καθώς και το π για το λόγο της περιμέτρου προς τη διάμετρο, προκύπτουν οι σχέσεις [6]:

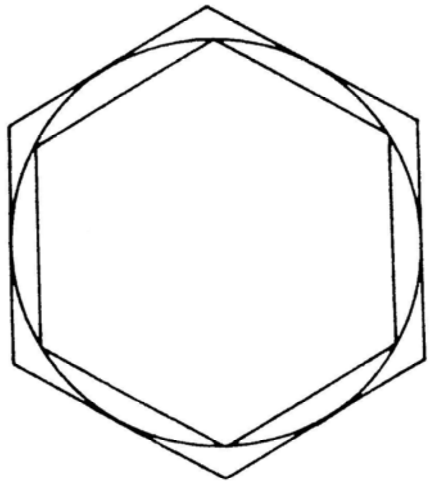
1) $E = \frac{1}{2} R \cdot L \Leftrightarrow E = \pi R^2$, για $L = 2\pi R$

2) $\frac{E}{(2R)^2} = \frac{11}{14} \Leftrightarrow E = \frac{11}{14}(2R)^2 \Leftrightarrow E = \frac{\pi}{4}(2R)^2$, για $\pi = 3\frac{1}{7}$

3) $3\frac{10}{71} 2R < L < 3\frac{1}{7} 2R \Leftrightarrow 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$

Σύμφωνα με τα σχόλια του Γ.Χ. Θωμαΐδη [6] στα θεωρήματα αυτά, οι διαφορές τους δεν έχουν να κάνουν μόνο με τη μορφή τους. Για παράδειγμα, ενώ ο Αρχιμήδης αρχικά διατυπώνει και αποδεικνύει μια γενική σχέση ανάμεσα στο εμβαδόν του κύκλου και τη διάμετρό του (θεώρημα 1) , στη συνέχεια θεωρεί αναγκαίο να διατυπώσει και να αποδείξει μια αριθμητική σχέση ανάμεσα στο εμβαδόν του κύκλου και τη διάμετρό του (θεώρημα 2). Αυτό υποδηλώνει ουσιαστική διαφορά ανάμεσα στον αρχαίο γεωμετρικό τρόπο σκέψης και στο σύγχρονο αλγεβρικό, αφού τα θεωρήματα 1 και 2 δεν έχουν αλγεβρική διαφορά. Επίσης γίνεται φανερό ότι ο Αρχιμήδης δεν ενδιαφέρεται για την αφηρημένη, αριθμητική φύση του π, αλλά για μια σχέση ανάμεσα σε συγκεκριμένα γεωμετρικά μεγέθη.

Ο Αρχιμήδης ήταν ο πρώτος που έδωσε μια μέθοδο υπολογισμού του π σε οποιοδήποτε βαθμό ακρίβειας. Η μέθοδός του έγκειται στο ότι η περίμετρος ενός κανονικού πολυγώνου n πλευρών εγγεγραμμένου σε κύκλο, είναι μικρότερη της περιφέρειας του κύκλου, και άρα και της περιμέτρου του περιγεγραμμένου πολυγώνου, όπως φαίνεται στην εικόνα 12.



Η μέθοδος του Αρχιμήδη για τον υπολογισμό του π.

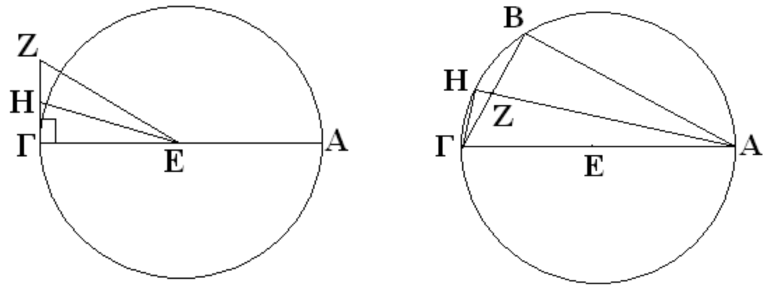
Εικόνα 12

Θεώρησε τις ακολουθίες των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων πολυγώνων πλευρών 6, 12, 24, 48 και 96 αντίστοιχα. Ξεκινώντας δηλαδή από ένα κανονικό εξάγωνο και διπλασιάζοντας τις πλευρές του, έφτασε σε ένα κανονικό πολύγωνο 96 πλευρών. Αυξάνοντας αρκετά τον αριθμό των πλευρών, οι δύο περίμετροι προσεγγίζουν εξωτερικά και εσωτερικά την περιφέρεια του κύκλου. Έτσι φτάνοντας σε πολύγωνο 96 πλευρών ο Αρχιμήδης περιόρισε την τιμή του π στο διάστημα

$$3\tfrac{10}{71} < \pi < 3\tfrac{1}{7},$$

ή χρησιμοποιώντας δεκαδικά ψηφία $3{,}14084... < \pi < 3{,}14285...$ [2], [13]. Αξίζει να σημειωθεί το ότι ο Αρχιμήδης έφτασε σε αυτήν την προσέγγιση χωρίς τη γνώση τριγωνομετρίας ή δεκαδικών ψηφίων.

Ας δούμε όμως τη μέθοδό του αναλυτικότερα, σε απόδοση όσο πιο πιστή γίνεται στο αρχαίο κείμενο [2], [6], [13]. Η διαδικασία χωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος αφορά τα περιγεγραμμένα πολύγωνα και το δεύτερο τα εγγεγραμμένα.



Εικόνα 13 (α) και (β)

Περιγεγραμμένα πολύγωνα. Έστω Ε το κέντρο του κύκλου και ΓΑ μια διάμετρός του (εικόνα 13 (α)). Αν ΓΖ είναι το μισό της πλευράς του περιγεγραμμένου κανονικού εξαγώνου, τότε η γωνία ΓΕΖ είναι 30^o και στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΖ θα ισχύει $\frac{\mathrm{EZ}}{\Gamma \mathrm{Z}} = 2$. Από τη σχέση αυτή και το Πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι $\frac{\mathrm{E}\Gamma^2}{\Gamma \mathrm{Z}^2} = 3$. Ο Αρχιμήδης στο σημείο αυτό θέτει $\frac{\mathrm{E}\Gamma}{\Gamma \mathrm{Z}} = \frac{265}{153}$, δηλαδή χρησιμοποιεί για τη $\sqrt{3}$ την προσέγγιση με έλλειψη $\frac{265}{153} = 1{,}732026...$, η οποία συμπίπτει κατά τέσσερα δεκαδικά ψηφία με την αληθινή τιμή της ρίζας. Αν ΕΗ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΓΕΖ, τότε το ΓΗ είναι το μισό της πλευράς του περιγεγραμμένου κανονικού δωδεκαγώνου. Σύμφωνα με το θεώρημα της διχοτόμου ισχύει

$$\frac{ΕΓ}{ΕΖ}=\frac{ΓΗ}{ΖΗ} \Leftrightarrow \frac{ΕΓ}{ΕΓ+ΕΖ}=\frac{ΓΗ}{ΓΗ+ΖΗ} \Leftrightarrow \frac{ΕΓ}{ΓΗ}=\frac{ΕΓ+ΕΖ}{ΓΖ} \Leftrightarrow$$
$$\frac{ΕΓ}{ΓΗ}=\frac{ΕΓ}{ΓΖ}+\frac{ΕΖ}{ΓΖ} \Leftrightarrow \frac{ΕΓ}{ΓΗ}=\frac{265}{153}+2 \Leftrightarrow \frac{ΕΓ}{ΓΗ}=\frac{571}{153}.$$

Έτσι κατέληξε σε μια ρητή προσέγγιση του λόγου της ακτίνας του κύκλου προς τη μισή πλευρά του περιγεγραμμένου δωδεκαγώνου, που είναι ίδιος με το λόγο της διαμέτρου προς την πλευρά. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο και κάνοντας τρεις ακόμα διχοτομήσεις, ο Αρχιμήδης βρίσκει τα εξής:

$\dfrac{4673\frac{1}{2}}{153}$ ο λόγος της διαμέτρου του κύκλου προς την πλευρά του περιγεγραμμένου κανονικού 96-γώνου,

$\dfrac{4673\frac{1}{2}}{96\cdot 153}=\dfrac{4673\frac{1}{2}}{14688}$ ο λόγος της διαμέτρου του κύκλου προς την περίμετρο του περιγεγραμμένου κανονικού 96-γώνου,

$\dfrac{14688}{4673\frac{1}{2}}=3\dfrac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}$ ο λόγος της περιμέτρου του 96-γώνου προς τη διάμετρο.

Όμως, όπως γράφει ο Αρχιμήδης, ο λόγος $\dfrac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}$ είναι μικρότερος του $\dfrac{1}{7}$, άρα και η περίμετρος του περιγεγραμμένου στον κύκλο κανονικού 96-γώνου είναι μικρότερη από το $3\frac{1}{7}$ της διαμέτρου. Άρα και η περίμετρος του κύκλου θα είναι μικρότερη από το $3\frac{1}{7}$ της διαμέτρου.

Εγγεγραμμένα πολύγωνα. Έστω Ε το κέντρο του κύκλου και ΓΑ μια διάμετρός του (εικόνα 13 (β)). Αν ΓΒ είναι η πλευρά του εγγεγραμμένου κανονικού εξαγώνου τότε η γωνία ΓΑΒ θα είναι 30^o , και για το ορθογώνιο ΑΒΓ θα ισχύει $\dfrac{ΑΓ}{ΓΒ}=2$. Ανάλογα με πριν προκύπτει από το Πυθαγόρειο θεώρημα $\dfrac{ΑΒ^2}{ΓΒ^2}=3$. Ο

Αρχιμήδης στο σημείο αυτό θέτει $\frac{AB}{\Gamma B}=\frac{1351}{780}$, δηλαδή χρησιμοποιεί για τη $\sqrt{3}$ την προσέγγιση με υπεροχή $\frac{1351}{780}=1{,}732051...$, η οποία συμπίπτει κατά πέντε δεκαδικά ψηφία με την αληθινή τιμή της ρίζας. Αν τώρα η διχοτόμος της γωνίας ΓΑΒ τέμνει την ΓΒ στο Ζ και τον κύκλο στο Η, τότε το ΓΗ είναι η πλευρά του εγγεγραμμένου κανονικού δωδεκαγώνου και σύμφωνα με το θεώρημα της διχοτόμου έχουμε:

$$\frac{A\Gamma}{AB}=\frac{\Gamma Z}{BZ}\Leftrightarrow\frac{A\Gamma}{A\Gamma+AB}=\frac{\Gamma Z}{\Gamma Z+BZ}\Leftrightarrow\frac{A\Gamma}{\Gamma Z}=\frac{A\Gamma+\Gamma B}{\Gamma B}\Leftrightarrow$$
$$\frac{A\Gamma}{\Gamma Z}=\frac{A\Gamma}{\Gamma B}+\frac{AB}{\Gamma B}\Leftrightarrow\frac{A\Gamma}{\Gamma Z}=2+\frac{1351}{780}\Leftrightarrow\frac{A\Gamma}{\Gamma Z}=\frac{2911}{780}.$$

Από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΓ και ΓΗΖ προκύπτει ότι $\frac{AH}{H\Gamma}=\frac{A\Gamma}{\Gamma Z}$, άρα $\frac{AH}{H\Gamma}=\frac{2911}{780}$. Στη συνέχεια από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΓ και το Πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει $\frac{A\Gamma^2}{H\Gamma^2}=\frac{AH^2+H\Gamma^2}{H\Gamma^2}=\frac{AH^2}{H\Gamma^2}+1=\left(\frac{2911}{780}\right)^2+1=\frac{9082321}{608400}$. Ο Αρχιμήδης στο σημείο αυτό θέτει $\frac{A\Gamma}{H\Gamma}=\frac{3013(3/4)}{780}$. Δηλαδή χρησιμοποιεί για την $\sqrt{9082321}$, την προσέγγιση με υπεροχή $3013\frac{3}{4}=3013{,}75$ ενώ η αληθινή τιμή της ρίζας είναι 3013,6889…

Έτσι κατέληξε σε μια ρητή προσέγγιση του λόγου της διαμέτρου του κύκλου προς την πλευρά του εγγεγραμμένου κανονικού δωδεκαγώνου. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, ο Αρχιμήδης βρίσκει τα εξής:

$\frac{2017(1/4)}{66}$, ο λόγος της διαμέτρου προς την πλευρά του εγγεγραμμένου κανονικού 96-γώνου,

$\frac{2017(1/4)}{66\cdot 96}=\frac{2017(1/4)}{6336}$, ο λόγος της διαμέτρου προ της περίμετρο του 96-γώνου,

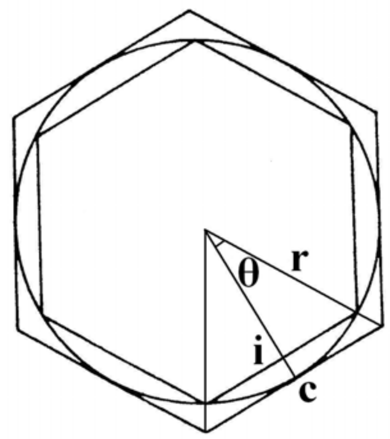
$\frac{6336}{2017(1/4)}$, ο λόγος της περιμέτρου του 96-γώνου προς τη διάμετρο.

Ο τελευταίος λόγος είναι μεγαλύτερος του $3\frac{10}{71}$, και άρα συμπεραίνουμε ότι η περίμετρος του εγγεγραμμένου κανονικού 96-γώνου θα είναι μεγαλύτερη από τα $3\frac{10}{71}$ της διαμέτρου. Με σύγχρονο συμβολισμό από όλη την παραπάνω διαδικασία περιγεγραμμένων και εγγεγραμμένων πολυγώνων καταλήγουμε στη διπλή ανισότητα

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Ας δούμε ξανά από την αρχή τη διαδικασία που ακολούθησε ο Αρχιμήδης, αυτή τη φορά με τη χρήση σύγχρονων εργαλείων [61] (εικόνα 14).

Έστω ότι $\theta = \pi/n$ είναι το μισό της επίκεντρης γωνίας με αντίστοιχη χορδή την πλευρά του εγγεγραμμένου κανονικού n-γώνου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε η πλευρά του εγγεγραμένου n-γώνου είναι $i = 2r\sin\vartheta$ όπου r είναι η ακτίνα του κύκλου, και η πλευρά του περιγεγραμμένου n-γώνου είναι $c = 2r\tan\vartheta$. Η περιφέρεια του κύκλου θα ανήκει στο διάστημα $n \cdot i < C < n \cdot c$ και κατά συνέπεια διαιρώντας με 2r προκύπτει $n\sin\vartheta < \pi < n\tan\vartheta$. Αν ο αρχικός αριθμός των n πλευρών του διπλασιαστεί k φορές, το π προσεγγίζεται ως εξής $2^k n\sin\left(\theta/2^k\right) < \pi < 2^k n\sin\left(\theta/2^k\right)$ (6), και όταν το k τείνει στο άπειρο τα άνω και κάτω όρια πλησιάζουν το π πολύ κοντά.



c : η πλευρά του περιγεγραμμένου πολυγώνου
i : η πλευρά του εγγεγραμμένου πολυγώνου

Εικόνα 14

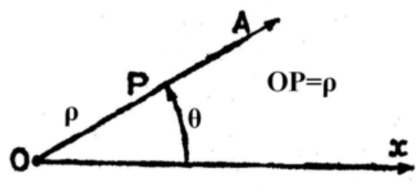
Ο Αρχιμήδης δεν χρησιμοποίησε τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Γνώριζε όμως ότι για $n = 6$, $\sin\theta = 1/2, \tan\theta = \sqrt{1/3}$ από το Πυθαγόρειο θεώρημα, και για τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της (6) χρησιμοποιούσε τύπους υποδιπλασιασμού της γωνίας, δηλαδή έβρισκε αναλογίες σε κατάλληλα ορθογώνια τρίγωνα. Για $k = 4$ τα δύο πολύγωνα έχουν από 96 πλευρές και αυτό οδηγεί στην τιμή του π, $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, αν οι τετραγωνικές ρίζες που προκύπτουν από τους τύπους υποδιπλασιασμού των γωνιών προσεγγιστούν από έναν λίγο μικρότερο ρητό για το κατώτερο όριο και έναν λίγο μεγαλύτερο ρητό για το ανώτερο όριο.

Χρησιμοποιώντας μοντέρνα ορολογία οι τύποι για τον υποδιπλασιασμό της γωνίας που χρησιμοποίησε ο Αρχιμήδης χωρίς τη χρήση τριγωνομετρίας ή δεκαδικού συστήματος είναι $\cot(\theta/2) = \cot\theta + \operatorname{cosec}\theta$ και $\operatorname{cosec}^2(\theta/2) = 1 + \cot^2(\theta/2)$, οι οποίοι του επέτρεψαν να υπολογίσει τα $\cot(\theta/2)$ και $\operatorname{cosec}(\theta/2)$ από τα $\cot\theta$ και $\operatorname{cosec}\theta$. Για το εξάγωνο ο Αρχιμήδης προσέγγισε τη $\sqrt{3}$ με την πολύ κοντινή τιμή $265/153$, για το 12-γωνο αναγκάστηκε να υπολογίσει το λόγο $\sqrt{349450} \div 153$ τον οποίο τον προσέγγισε από την τιμή $591\frac{1}{8} \div 153$. Ο τελικός λόγος για το 96 – γωνο απαιτούσε την εύρεση της τετραγωνικής ρίζας ενός αριθμού που στο δεκαδικό σύστημα έχει 10 ψηφία. Το πώς ο Αρχιμήδης κατάφερε να υπολογίσει αυτές τις τετραγωνικές ρίζες με τόση ακρίβεια, αποτελεί ένα από τα μυστήρια που άφησε πίσω του.

Επιπλέον, ο ***Ήρων ο Αλεξανδρεύς*** [5] αναφέρει στα *Μετρικά* (60 μ.Χ.) ότι ο Αρχιμήδης σε ένα έργο του το οποίο δεν διασώζεται, πιθανότατα ένα ογκωδέστερο και μεταγενέστερο του *Κύκλου Μέτρησις* έγραφε τα ακόλουθα «*ὅτι παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος πρὸς τὴν διάμετρον μείζονα μὲν λόγον ἔχει <ἢ ὃν ἔχει> μκα αωοε πρὸς μς ζυμα, ἐλάσσονα δὲ ἢ ὃν ἔχει[ν] μιθ ζωπη πρὸς μς βτνα· ἀλλ' ἐπεὶ οὗτοι οἱ ἀριθμοὶ πρὸς τὰς μετρήσεις οὐκ εὐθετοῦσι, καταβιβάζονται εἰς ἐλαχίστους ἀριθμούς, ὡς τὸν κβ πρὸς τὰ ζ*». Δηλαδή δίνει τα ακόλουθα όρια για το π, $211875 : 67441 < \pi < 197888 : 62351$ ή αλλιώς $3{,}14163... < \pi < 3{,}1738...$, σύμφωνα με αντίγραφο του έργου του Ήρωνα που βρέθηκε στην Κωνσταντινούπολη το 1896. Βέβαια μάλλον πρόκειται για λάθος που προέκυψε από την αντιγραφή του κειμένου, γιατί είναι κατά πολύ μεγαλύτερο από το άνω όριο $3\frac{1}{7}$ που είχε βρεθεί από τον Αρχιμήδη νωρίτερα. Μάλιστα στο σημείο αυτό ο Ήρων προσθέτει, «αφού αυτοί οι αριθμοί είναι δύσχρηστοι στις μετρήσεις, μειώνονται στο λόγο των μικρότερων αριθμών $22/7$ ». Ο Tannery υποστηρίζει ότι με πολύ μικρές διορθώσεις στο κείμενο προκύπτουν τα εξής όρια $195882 : 62351 > \pi > 211872 : 67441$ ή $3{,}1416016 > \pi > 3{,}1415904$. Εάν κάτι τέτοιο ισχύει, προκύπτει η προσέγγιση $\pi = 3{,}141596$.

Συνοψίζοντας λοιπόν ο Αρχιμήδης [2] στο έργο του *Κύκλου Μέτρησις* αναφέρει χαρακτηριστικά στην πρόταση 3, «*Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις.*», δηλαδή ότι το άνω και κάτω όριο του π είναι $3\,{}^{10}\!/_{71} < \pi < 3\,{}^{1}\!/_{7}$, ή στο δεκαδικό σύστημα $3{,}140845... < \pi < 3{,}142857...$ Η τιμή του π που προκύπτει από το μέσο όρο των άκρων είναι περίπου 3,1419.

Ο Αρχιμήδης σύμφωνα με προαναφερθείσες πηγές είχε χρησιμοποιήσει και μια καμπύλη ανώτερης τάξης προκειμένου να τετραγωνίσει τον κύκλο. Η ενασχόληση του Αρχιμήδη με αυτήν την σπειροειδή καμπύλη είχε απώτερο σκοπό την επίλυση των τριών περίφημων άλυτων προβλημάτων της αρχαιότητας. Στην πραγματικότητα έδειξε το πώς ευθειοποιείται ο κύκλος με τη χρήση μιας πολικής υφαπτομένης της καμπύλης αυτής. Η καμπύλη αυτή, η οποία είχε ανακαλυφθεί από τον Κόνωνα το Σάμιο και η οποία επικράτησε να ονομάζεται *έλικα* του Αρχιμήδη, μπορεί να εφαρμοστεί στον τετραγωνισμό του κύκλου. Ο τετραγωνισμός του κύκλου από τον Αρχιμήδη είναι από τους ισχυρότερους που έχουν δοθεί και πρόκειται για μια γεωμετρική διαδικασία που επιτυγχάνεται με τη χρήση δύο θεωρημάτων από τα έργα του *Κύκλου Μέτρησις* και *Περί Ελίκων*. Ο Αρχιμήδης [13] ορίζει την έλικα ως εξής «*Ἔστιν δὲ τάδε· εἴ κα εὐθεῖα γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ἀποκατασταθῇ πάλιν ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ περιφερομένᾳ φέρηταί τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τᾶς εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σαμεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ*». Δηλαδή πρόκειται με σύγχρονους όρους για την καμπύλη που «γράφει» ένα σημείο το οποίο κινείται ομοιόμορφα πάνω σε μια ακτίνα, η οποία



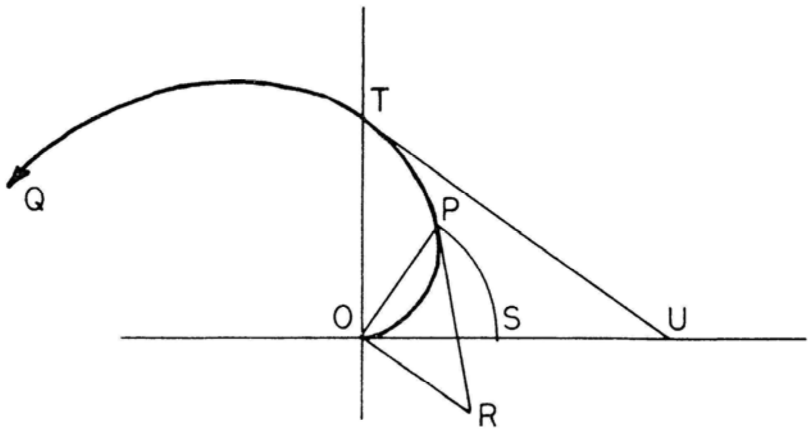
Εικόνα 15

περιστρέφεται με την ίδια ταχύτητα γύρω από το σταθερό άκρο της.

Πιο αναλυτικά, έστω ότι έχουμε την ημιευθεία OA, η οποία φαίνεται στην εικόνα 15, και η οποία μπορεί να περιστραφεί με σταθερή ταχύτητα γύρω από το σταθερό της άκρο O. Πάνω στην OA κινείται με την ίδια σταθερή ταχύτητα ένα κινητό P. Σε μηδενικό χρόνο η OA θα συμπίπτει με την Ox, ενώ το P θα βρίσκεται στο σημείο O. Ο γεωμετρικός τόπος του κινούμενου σημείου P, ονομάζεται έλικα ή σπείρα του Αρχιμήδη. Η πολική εξίσωση της καμπύλης αυτής, ως προς πόλο το σημείο O και πολικό άξονα τη θέση Ox, αποδεικνύεται ότι είναι $\rho = a\vartheta$, όπου α είναι μια σταθερά ίση με το λόγο της γωνιακής προς τη γραμμική ταχύτητα.

Όπως φαίνεται στην εικόνα 15 [20], έστω ότι το P είναι τυχαίο σημείο της έλικας, και έστω ότι η εφαπτομένη στο P τέμνει την κάθετη της διανυσματικής ακτίνας OP από το O, στο σημείο R. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OR}$ ονομάζεται πολική υφαπτομένη της καμπύλης Q στο σημείο P. Ο Αρχιμήδης στο έργο του *Περί Ελίκων* [13] απέδειξε ότι «*το ευθύγραμμο τμήμα OR είναι ίσο με το μήκος του κυκλικού τόξου PS που δημιουργείται με ακτίνα το OP, και S είναι το σημείο τομής με την αρχική ακτίνα OU* » (πρόταση 20). Το θεώρημα αυτό το απέδειξε με μια τυπική διπλή απαγωγή σε άτοπο, και μπορούμε να το επαληθεύσουμε χρησιμοποιώντας απειροστικό λογισμό. Έστω ότι το OP = ρ και η γωνία SOP = θ. Η πολική εξίσωση της αρχιμήδειας σπείρας είναι όπως προαναφέρθηκε, $\rho = a\theta$ όπου κ είναι μια σταθερά ίση με το λόγο της γωνιακής και της γραμμικής ταχύτητας. Όπως είναι γνωστό από τον απειροστικό λογισμό, το μήκος της πολικής υφαπτομένης είναι $OR = -\rho^2(\vartheta)/\rho'(\vartheta)$. Εφ' όσον $\rho'(\vartheta) = a$, από τις δύο προηγούμενες σχέσεις και το σχήμα της εικόνας 16 προκύπτει $OR = a\vartheta^2 = p\vartheta = arcPS$.

Συγκεκριμένα για $\vartheta = \pi/2$, προκύπτει $OU = \frac{1}{2}\pi \cdot OT$. Συνεπώς παίρνοντας αντί για το OP το OT, το OU θα ισούται με το $1/4$ της περιφέρειας του κύκλου που έχει ακτίνα το OT. Αυτό σημαίνει ότι $OU = \frac{1}{4}2\pi \cdot OT \Leftrightarrow 2OU/OT = \pi$. Επιπλέον το εμβαδόν του τριγώνου OUT είναι ίσο με $\frac{1}{2} OU \cdot OT = \frac{1}{2} OT \cdot \frac{1}{2} \pi \cdot OT = \frac{1}{4} \pi \cdot OT^2$.

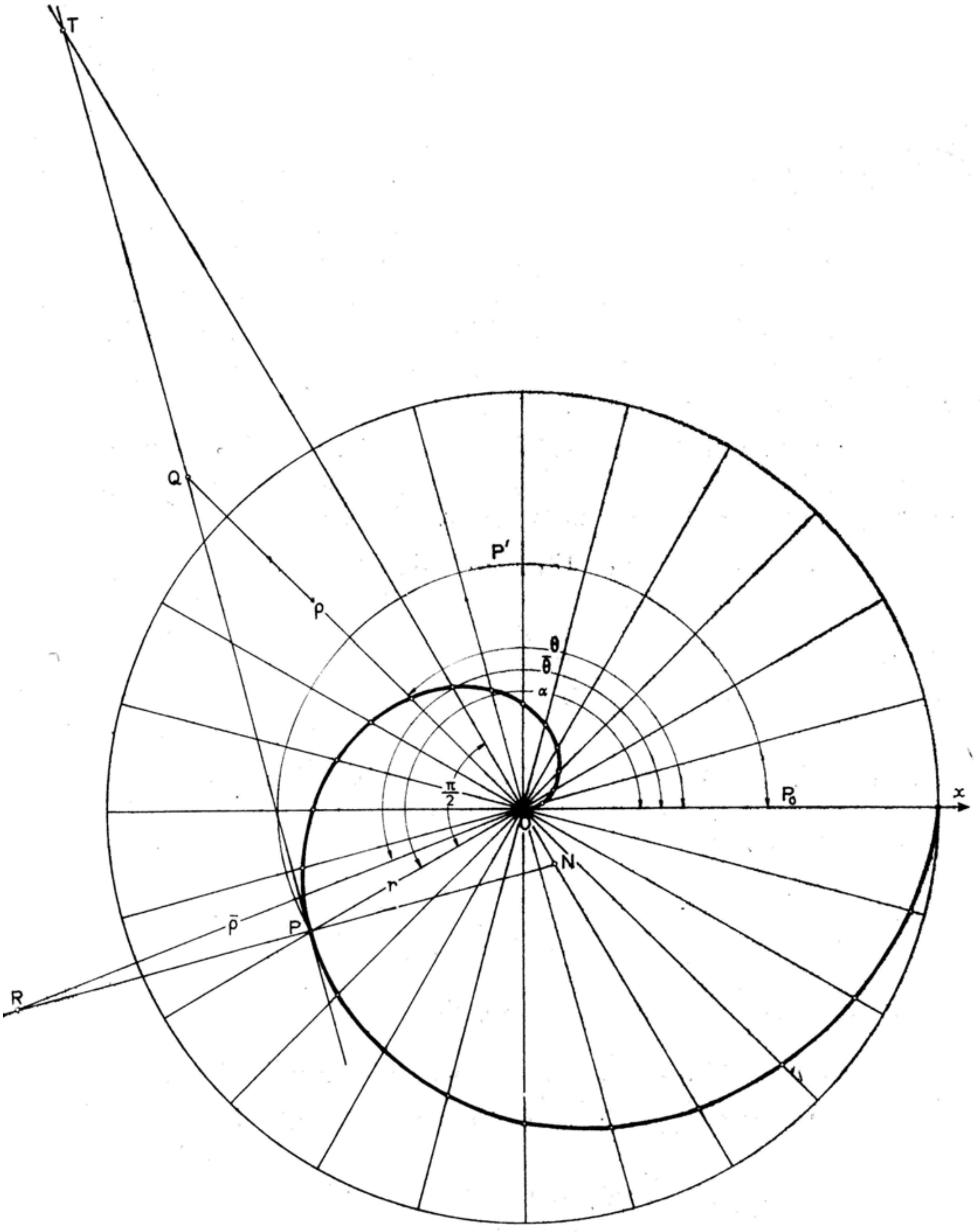


Τετραγωνισμός του κύκλου με την έλικα του Αρχιμήδη. ***Εικόνα 16***

Όπως φαίνεται από την τελευταία σχέση το εμβαδόν του κύκλου με ακτίνα το OT είναι τετραπλάσιο του ορθογώνιου τριγώνου με πλευρές τα OT και OU. Έτσι ο κύκλος τετραγωνίζεται, εφόσον έχουμε ήδη σχεδιασμένη την τετραγωνίζουσα, και βέβαια όχι σύμφωνα με τις απαιτήσεις των Ελλήνων γεωμετρών. Επιπλέον ισχύουν οι ίδιες ενστάσεις όπως και στην τετραγωνίζουσα του Ιππία.

Εδώ τελειώνει και αυτή η μικρή αναφορά σε αυτόν τον ιδιοφυή μαθηματικό και στη συνεισφορά του στον τετραγωνισμό του κύκλου και στον υπολογισμό του π. Υπάρχει βέβαια μια διαμάχη στην ιστορία των μαθηματικών για το αν ο ίδιος ο Αρχιμήδης ή ο Απολλώνιος ο Περγαίος (30 χρόνια νεώτερος του Αρχιμήδη), βασίστηκε στο έργο *Κύκλου Μέτρησις* για να υπολογίσει το κατώτατο όριο του λόγου του π. Και ο Απολλώνιος χρησιμοποιούσε την τιμή $\pi = 3\frac{177}{1250} = 3{,}1416$. Ο Paul Tannery στο έργο του *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne* αποδεικνύει ότι εκείνος ήταν που είχε υπολογίσει την τιμή $\pi = 3{,}1416$. Ανεξάρτητα με το ποιος έκανε τους υπολογισμούς αυτή είναι η τελευταία καταγραφή τιμής του π μέχρι το διάσημο αστρονόμο Κλαύδιο τον Πτολεμαίο από την Αλεξάνδρεια (87-165 π.Χ.) που χρησιμοποίησε το $3\frac{17}{120}$(περίπου

3,1417), πάνω από διακόσια χρόνια μετά. Η μέθοδός του με τα πολύγωνα εξακολούθησε να χρησιμοποιείται για 19 αιώνες ακόμα, μέχρι που βρέθηκε στην Αγγλία ένα άπειρο γινόμενο και ένα άπειρο συνεχές κλάσμα για το π. Αμέσως μετά, με την ανακάλυψη του Απειροστικού Λογισμού προωθήθηκε μια εντελώς καινούργια προσέγγιση στο πρόβλημα.



Ο τετραγωνισμός του κύκλου από τη σπείρα του Αρχιμήδη.

Εικόνα 17

Οι Ρωμαϊκοί χρόνοι.

Στη διάρκεια της ρωμαϊκής κυριαρχίας η Αλεξάνδρεια με τη βιβλιοθήκη της εξακολουθούσε να παραμένει το πνευματικό κέντρο του αρχαίου κόσμου, παρά το ότι είχε καταστραφεί από τις επιδρομές των Ρωμαίων. Η φθίνουσα πορεία που είχε ξεκινήσει τελειώνει με την καταδίκη σε θάνατο της αστρονόμου και μαθηματικού Υπατίας το 415 μ. Χ. Μέχρι τότε αρκετοί ικανοί Έλληνες μαθηματικοί εργάστηκαν υπό ρωμαϊκή κυριαρχία.

Σχετικά με το π, οι ρωμαίοι φαίνεται να χρησιμοποιούσαν την τιμή 3, ενώ για δύσκολους υπολογισμούς χρησιμοποιούσαν την τιμή 4. Για υπολογισμούς ακριβείας χρησιμοποιούσαν την προσέγγιση $3\frac{1}{8}$ αντί της προσέγγισης $3\frac{1}{7}$ [16]. Ο ρωμαίος αρχιτέκτονας ***Βιτρούβιος*** ($1^{ος}$ αι. π.Χ.) αναφερόμενος σε ένα πηγάδι κυκλικής διατομής αναφέρει ότι «έχει διάμετρο 4 ποδών και περίμετρο $12\,{}^{1}\!/_{2}$ ποδών», δηλαδή υπονοεί την τιμή $\pi = 3{,}12 = {}^{25}\!/_{8}$ [22], [60], [8]. Άλλος σημαντικός σταθμός στην ιστορία του π είναι ο ***Πτολεμαίος ο Κλαύδιος*** (91-161 μ.Χ.). Ο Πτολεμαίος υπήρξε διάσημος αστρονόμος που έζησε και εργάστηκε στην Αλεξάνδρεια. Στην αστρονομική πραγματεία Μαθηματική Σύνταξις [12], [8], αναφέρει ότι ο λόγος της περιφέρειας προς τη διάμετρο είναι 3 μοίρες 8 πρώτα και 30 δεύτερα σε εξηκονταδική μορφή. Δηλαδή $3 + {}^{8}\!/_{60} + {}^{30}\!/_{3600}$ το οποίο ισούται με $3{,}141\overline{6}$ ή περίπου με 3,1417 [20], [8]. Ο Πτολεμαίος παρατηρεί ότι η τιμή αυτή είναι πολύ κοντά στη μέση τιμή των ορίων του Αρχιμήδη. Η διαφορά έγκειται στο ότι η τιμή του Πτολεμαίου προσεγγίζει κατά 0,003 τοις εκατό τη σωστή τιμή, και άρα όντας ακριβέστερη είναι πολύ πιθανό να υπολογίστηκε ανεξάρτητα από την τιμή του Αρχιμήδη. Βέβαια πολλοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι έγραψε την τιμή του Αρχιμήδη στο εξηκονταδικό σύστημα. Επιπλέον αν υπολογιστεί η περιφέρεια ενός κύκλου με διάμετρο 1000 ποδών, η τιμή του Πτολεμαίου προσεγγίζει με απόκλιση μιας ίντσας τη σωστή μέτρηση. Ίσως αυτήν την τιμή του π να την πήρε από τον Απολλώνιο τον Περγαίο. Ο Ευτόκιος αναφέρει τον $5^{ο}$ αι. μ.Χ. ότι ο Απολλώνιος βελτίωσε τη μέθοδο του Αρχιμήδη και έφτασε στην τιμή $\pi \cong 3{,}1416$, αλλά το βιβλίο στο οποίο αναφέρεται έχει χαθεί.

Υπήρξαν και άλλοι σπουδαίοι Έλληνες μαθηματικοί αυτήν την περίοδο όπως ο Ήρων ($1^{ος}$ αι. μ. Χ.), ο Διόφαντος ($3^{ος}$ αι. μ. Χ.), ο Πάππος (τέλος του $3^{ου}$ αι. π.Χ.) και η Υπατία με την οποία και τελείωσε η λαμπρή περίοδος της άνθησης των ελληνικών μαθηματικών. Κανένας όμως από αυτούς του μαθηματικούς δεν συνεισέφερε στην ιστορία του π, και εδώ τελειώνει η προσφορά των Ελλήνων με αποκορύφωμα τον «χρυσή εποχή» του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη κ.α. Στα χρόνια που ακολούθησαν η βιαιότητα των Ρωμαίων έδωσε τη θέση της στην παρακμή και υπερίσχυσαν ο μυστικισμός και οι προκαταλήψεις.

Κίνα, Ινδία και Αραβία ***2^{ος} – 8^{ος} μ. Χ. αι.***

Ενώ στην Ευρώπη κατά τη διάρκεια της πρώτης χιλιετίας, πολιτικές και θρησκευτικές διαμάχες φιμώνουν την παιδεία, την έρευνα και την ελεύθερη διακίνηση ιδεών, σπουδαία επιστημονική πρόοδος πραγματοποιείται στην Κίνα και στην Ινδία, δύο από τα σπουδαιότερα κέντρα μαθηματικών σπουδών από το 2^{ο} μέχρι τον 8^{ο} μ. Χ. αι.

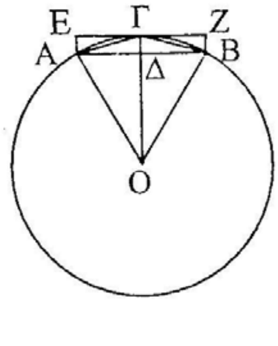
Κίνα.

Στην Κίνα αναπτύχθηκαν από τα αρχαία χρόνια οι επιστήμες και τα μαθηματικά. Από το 12^{ο} π.Χ. αι. χρησιμοποιούσαν στους υπολογισμούς τους την τιμή $\pi = 3$, την οποία θεωρούσαν ικανοποιητική μέχρι τον 1^{ο} μ. Χ. αι.. Οι πληροφορίες για το επίπεδο των κινέζικων μαθηματικών, προέρχονται από το σύγγραμμα *«Ιερόν βιβλίον της Αριθμητικής».* Το έργο αυτό πιστεύεται ότι γράφτηκε στο διάστημα από το 1122 π. Χ. μέχρι 255 π.Χ., σχολιάστηκε όμως την περίοδο από 200 π. Χ. μέχρι 200 μ. Χ. και αναδημοσιεύτηκε το 600 μ. Χ.. Οι προτάσεις του είναι στη μορφή συμπερασμάτων, δηλαδή δεν παρατίθεται αιτιολόγηση για το πώς προέκυψαν και έτσι πολλοί υποστηρίζουν ότι κάποιες προστέθηκαν κατά τις περιόδους σχολιασμού ή αναδημοσίευσης. Οι πρώτοι κινέζοι που ασχολήθηκαν σοβαρά με το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου έζησαν στη μετά Χριστό εποχή.

Από τις αρχές του 1^{ου} μ. Χ. αι. ο ***Liu Hsiao*** χρησιμοποίησε την τιμή $\pi = 3{,}1547$. Δυστυχώς δεν υπάρχουν στοιχεία για τη μέθοδο που χρησιμοποίησε για να φτάσει στο αποτέλεσμα αυτό [60]. Ο ***Ch'ang Höng*** (78 – 139 μ. Χ.) ήταν υπουργός και αστρολόγος του αυτοκράτορα Αν-τι στις αρχές του 2^{ου} μ. Χ.. αι. Γύρω στο 130 μ.Χ. έγραψε ένα αστρονομικό έργο με τίτλο Ling Hsin και στο οποίο αναπτύσσει μια θεωρία για τη δημιουργία του σύμπαντος. Το έργο αυτό έχει χαθεί, αλλά σε σχόλια που υπάρχουν για αυτό στο έργο *Η αριθμητική σε εννιά μέρη*, αναφέρεται ότι είχε αποδείξει την πρόταση «το τετράγωνο του λόγου της περιφέρειας κύκλου προς την περίμετρο του τετραγώνου που είναι περιγεγραμμένο στον κύκλο είναι όπως το 5 προς το 8». Θεωρώντας έναν κύκλο με διάμετρο 1, ο Ch’ang Höng ουσιαστικά έγραψε ότι $\pi^2/16 = 5/8 \Leftrightarrow \pi = \sqrt{10}$. Δηλαδή $\pi \approx 3{,}162$ [22]. Η τιμή αυτή παρέμεινε αρκετά διαδεδομένη στην Ασία για πολλά χρόνια ακόμα, αν και ήταν αρκετά ανακριβής. Το επόμενο βήμα για την καλύτερη προσέγγιση του π έγινε από τον κινέζο αστρονόμο ***Wang Fan*** (219 – 257 μ.Χ.). Από τα αρχεία των δυναστειών *Chin* και *Sung* καθώς και από τα αρχεία των Τριών Βασιλείων [52], πληροφορούμαστε ότι ο Wang Fan ήταν ένας καλός αστρονόμος και ότι μετρώντας τον κύκλο κατέληξε στο συμπέρασμα «όταν μια περιφέρεια κύκλου έχει μήκος 142, τότε η διάμετρός του είναι 45». Αν και δεν είναι απολύτως σαφές το πώς κατέληξε σε αυτήν την τιμή η διαίρεση μας δίνει την τιμή $\pi = 3{,}156$.

Κατά τον 3^o αι. μ. Χ. έζησε ο μαθηματικός ***Liu Hui***, ο οποίος ήταν ο πρώτος κινέζος μαθηματικός που ασχολήθηκε συστηματικά με τον υπολογισμό της τιμής του π. Το 263 μ. Χ. έγραψε σχόλια στο έργο *Η αριθμητική σε εννιά μέρη*, τα οποία σώζονται μέχρι σήμερα. Στα σχόλιά του πάνω στα προβλήματα 31 και 32 του πρώτου κεφαλαίου δίνει τις δύο βελτιωμένες τιμές για το π, $\pi = \frac{157}{50} = 3{,}14$ και $\pi = \frac{3927}{1250} = 3{,}1416$. Η μέθοδος που ακολούθησε για να υπολογίσει αυτές τις τιμές παρουσιάζεται αναλυτικά από τον B.L.Van der Waerden [66]. Στο πρόβλημα 31 ζητείται να υπολογιστεί η επιφάνεια ενός κυκλικού αγρού ο οποίος έχει περιφέρεια 30 pu και διάμετρο 10 pu. Στο πρόβλημα 32, το οποίο αναφέρεται επίσης στη μέτρηση κύκλου, διατυπώνεται ο κανόνας «η επιφάνεια κύκλου ισούται με το μισό της περιφέρειας του κύκλου πολλαπλασιασμένο με το μισό της διαμέτρου του». Ο κανόνας αυτός αποδίδεται από τη σχέση $E = \frac{1}{2}\Gamma \cdot \frac{1}{2}\delta$ (1), όπου Ε είναι το εμβαδόν κύκλου, δ η διάμετρός του και Γ η περιφέρειά του. Η απάντηση στο πρόβλημα 31 σύμφωνα με αυτόν τον κανόνα είναι $E = \frac{1}{2}30 \cdot \frac{1}{2}10 = 75$ τετραγωνικά pu. O Liu Hui όμως στα σχόλια που έκανε πάνω στο πρόβλημα λέει ότι η επιφάνεια του κύκλου αυτού είναι $71\frac{103}{157}$ τετραγωνικά ρu. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι αντί για τη σχέση (1) χρησιμοποίησε τη σχέση $E = \frac{1}{4\pi}\Gamma^2$, γιατί μόνο από αυτή προκύπτει θέτοντας Γ = 30 ρu και $\pi = \frac{157}{50}$ η τιμή του εμβαδού που υπολόγισε ο Liu Hui. Συμπεραίνουμε ότι πιθανότατα γνώριζε εκ των προτέρων την τιμή $\pi = \frac{157}{50} = 3{,}14$.

Πώς όμως κατέληξε σε αυτήν την τιμή; Η διαδικασία που ακολούθησε σύμφωνα με τους διάφορους ερευνητές είναι η μέθοδος του Βρύσωνα και του Αντιφώντα, με τη διαφορά ότι ίσως να την επινόησε ο ίδιος 650 χρόνια μετά. Ξεκινώντας από έναν κύκλο ακτίνας 1, όπως φαίνεται στην εικόνα 17, ενέγραψε σε αυτόν ένα κανονικό εξάγωνο. Ισχύει ότι $AB = \lambda_6 = R$, εικόνα 18. Διπλασιάζοντας τις πλευρές του κατά τη μέθοδο της εξάντλησης ενέγραψε το κανονικό12-γωνο,24-γωνο,48-γωνο, 96-γωνο και 192-γωνο. Έστω ότι ΑΒ και ΑΓ είναι οι πλευρές των κανονικών πολυγώνων με 2ν και 4ν πλευρές αντίστοιχα τα οποία είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο. Το εμβαδόν $E_{4\nu}$ του πολυγώνου με 4ν πλευρές ισούται με το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΟΑΓΒ πολλαπλασιασμένο επί 2ν. Ισχύει όμως ότι,



Εικόνα 18

$$(\mathrm{OA\Gamma B}) = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{O\Gamma} = \frac{1}{2}\lambda_{2\nu}\cdot R, \text{ άρα και } E_{4\nu} = 2\nu\cdot\frac{1}{2}\lambda_{2\nu}\cdot R \text{ (2).}$$

Θέλοντας να βγάλει και έναν τύπο για το $\lambda_{4\nu}$ συναρτήσει του R, υπολόγισε το ΟΔ από το τρίγωνο ΟΑΔ, $(\mathrm{O\Delta})^2 = R^2 - \left(\frac{\lambda_{2\nu}}{2}\right)^2$, και άρα

$$(\mathrm{A\Gamma})^2 = (\mathrm{A\Delta})^2 + (\Delta\Gamma)^2 = \left(\frac{\lambda_{2\nu}}{2}\right)^2 + \left(R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{\lambda_{2\nu}}{2}\right)^2}\right)^2.$$

Κάνοντας τις πράξεις προκύπτει ότι $(\mathrm{A\Gamma}) = \lambda_{4\nu} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_{2\nu}^2}}$ (3). Για $R = 1$ και $\lambda_6 = 1$ προκύπτουν από τη σχέση (3) οι εξής τιμές για το λ,

$\lambda_{12} = 0{,}517638$, $\lambda_{24} = 0{,}261052$, $\lambda_{48} = 0{,}130806$, $\lambda_{96} = 0{,}065438$. Έτσι η περίμετρος Π_{96} του κανονικού πολυγώνου με 96 πλευρές που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα $R = 1$ θα είναι $\Pi_{96} = 96 \cdot \lambda_{96} = 96 \cdot 0{,}065438 = 6{,}282048$. Αν υποθέσουμε ότι η περίμετρος Π_{96} είναι ίση με την περιφέρεια Γ του κύκλου θα ισχύει ότι $\pi = \frac{\Gamma}{\delta} = \frac{6{,}282048}{2} = 3{,}141024$. Στη συνέχεια από τη σχέση (2) υπολογίζει το εμβαδόν του κανονικού πολυγώνου με 192 πλευρές το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα $R = 1$ και βρίσκει $E_{192} = 96 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}065438 \cdot 1 = 3{,}141024$. Φαίνεται ότι βασίστηκε στη σχέση (1) γιατί από αυτήν προκύπτει $E = \frac{1}{2} \cdot \Gamma \cdot \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2} 2\pi R \frac{1}{2} 2R = \pi R^2 = \pi$ αφού $R = 1$. Έτσι συμπεραίνει ότι ο λόγος της περιφέρειας του κύκλου προς τη διάμετρο είναι 3,14.

Στις πρακτικές εφαρμογές χρησιμοποιούσε την τιμή $\pi = 3{,}14 = \frac{157}{50}$. Αναγνώριζε ότι το E_{192} απλώς προσέγγιζε το εμβαδόν του κύκλου και συνειδητοποιούσε ότι η διαδικασία μπορούσε να συνεχιστεί. Μάλιστα, στα σχόλιά του πάνω στο πρόβλημα 32 του κεφαλαίου 1 αναφέρει «όσο περισσότερο διαιρείς τόσο μικρότερη είναι η απώλεια. Διαίρεση μετά από διαίρεση μέχρι να μην υπάρχει άλλη διαίρεση, τότε φτάνει το εμβαδόν του κύκλου. Έτσι δεν υπάρχει απώλεια.». Ουσιαστικά λέει ότι όσο πιο πολλές πλευρές έχει το εγγεγραμμένο στον κύκλο κανονικό πολύγωνο, τόσο περισσότερο το εμβαδόν του προσεγγίζει το εμβαδόν του κύκλου.

Στη συνέχεια εφαρμόζει τη σχέση (3) και υπολογίζει το $\lambda_{48} = 0{,}130806$, υπολογίζοντας με τη βοήθειά του και το $E_{96} = 48 \cdot \frac{1}{2} \lambda_{48} \cdot R = 3{,}139344$. Βρίσκει τη διαφορά $\Delta = \mathrm{E}_{192} - \mathrm{E}_{96} = 3{,}141024 - 3{,}139344 = 0{,}001680$. Η επιφάνεια 2Δ είναι η επιφάνεια που αποτελείται από τα 96 ορθογώνια ΑΒΖΕ της εικόνας 18. Στη συνέχεια προσθέτει το 2Δ στο εμβαδόν E_{96} και δηλώνει ότι το άθροισμα υπερβαίνει το εμβαδόν του κύκλου. Άρα, εφ’ όσον

$2\Delta + E_{96} = 0{,}003360 + 3{,}139344 = 3{,}142704$ θα ισχύει ότι $\pi = E < 3{,}142704$. Έτσι, τα όρια του π που υπολόγισε κυμαίνονται μεταξύ 3,141024 και 3,142704. Μετά δηλώνει ότι από τη διαφορά $\Delta = 0{,}00168 = \frac{105}{62500}$ είναι ανάγκη να πάρει 36 από τα 105 και να τα προσθέσει στο E_{192}. Έτσι θα βρεθεί η επιφάνεια του κύκλου που θα είναι $E = E_{192} + \frac{36}{62500} = 3{,}141024 + 0{,}000577$. Άρα $\pi = 3{,}1416 = \frac{3927}{1250}$. Ο Liu Hui αναφέρει ότι και η παραπάνω τιμή είναι προσεγγιστική. Αν κάποιος υπολόγιζε την πλευρά ενός πολυγώνου με 1536 πλευρές, τότε από τη σχέση (2) θα έβρισκε το εμβαδόν ενός πολυγώνου με 3072 πλευρές και έτσι η προσέγγιση του π θα ήταν καλύτερη. Βέβαια ο ίδιος δεν αναφέρει ποιο θα ήταν αυτό το αποτέλεσμα. Αν γίνουν υπολογισμοί καταλήγουμε στην τιμή $\pi = 3{,}14159$, η οποία είναι η καλύτερη προσεγγιστική τιμή του π με πέντε δεκαδικά ψηφία.

Επεξήγηση της μεθόδου υπολογισμού του π, του Liu Hui(264 μ.Χ.) από έγγραφο του 18^{ου} αιώνα.

Εικόνα 19

Η μέθοδος του Liu Hui σε αντίθεση με τη μέθοδο του Αρχιμήδη περιλάμβανε μόνο εγγεγραμμένα πολύγωνα, και καθόλου περιγεγραμμένα. Βέβαια και οι δύο μέθοδοι βασίζονται στη μέθοδο της εξάντλησης, δηλαδή στο ότι αυξάνοντας σταδιακά τον αριθμό των πλευρών στα πολύγωνα, αυτά τείνουν να προσεγγίσουν τον κύκλο. Όπως μας πληροφορεί ο Heath [34], πρώτος ο Έλληνας φιλόσοφος Αντιφών εισήγαγε αυτή την αρχή τον 5^{ο} αι. π. Χ., ξεκινώντας από ένα τετράγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο. Ο Tannery αποδεικνύει ότι ο Απολλώνιος ο Περγαίος είχε υπολογίσει την τιμή $\pi = 3{,}1416$. Υποστηρίζει επιπλέον ότι την τιμή αυτή τη γνώριζε ο Liu Hui τον 3^{ο} μ. Χ. αι., ο Aryabhata τον 6^{ο} μ. Χ. και ο Bhaskara το 12^{ο} μ. Χ. αι., και όλοι αυτοί είχαν πάρει την τιμή από τον Απολλώνιο [3]. Βέβαια για το αν γνώριζε ο Liu Hui και τη μέθοδο του Αρχιμήδη δεν υπάρχουν στοιχεία που να αποδεικνύουν κάτι τέτοιο [58], [61]. Άλλες διαφορές μεταξύ των δύο μεθόδων είναι το ότι η απόδειξη του Αρχιμήδη είναι άψογη μαθηματικά ενώ του Liu Hui δεν είναι μαθηματικά θεμελιωμένη. Από την άλλη μεριά η απόδειξη του Liu Hui είναι πιο απλή εξ' αιτίας του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης και εξάγει συμπεράσματα για τη σχέση του εμβαδού του κύκλου με το π [48]. Επιπλέον ο Αρχιμήδης σταμάτησε στο εγγεγραμμένο 96-γωνο συνειδητά ενώ ο Liu Hui προχώρησε στην εγγραφή του 192-γώνου και έτσι η προσέγγισή του ήταν καλύτερη. Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ακόμα μια παρατήρηση του Heath [33], ότι ο Αρχιμήδης και ο Liu Hui είναι οι μόνοι άντρες της αρχαιότητας, των οποίων οι προσπάθειες για τον υπολογισμό του λόγου της περιφέρειας προς τη διάμετρο είναι γνωστές μέχρι σήμερα.

Τον 5^{ο} αι. μ. Χ. ο αστρονόμος ***Tsu Ch'ung Chih*** (430-501 μ.Χ.) και ο γιος του ***Tsu Cheng-Chih,*** προσέγγισαν το π με τα όρια $3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$ [20], [16], [61]. Προφανώς έφτασαν στην τιμή αυτή χρησιμοποιώντας εγγεγραμμένα πολύγωνα με 24.576 πλευρές, πιθανότατα ξεκινώντας με ένα εξάγωνο και διπλασιάζοντας τον αριθμό των πλευρών 12 φορές. Η τιμή αυτή αποκλίνει μόνο 8 εκατομμυριοστά από την αποδεκτή πλέον τιμή του π = 3,14159265…Πατέρας και γιος πέτυχαν τον ακριβέστερο υπολογισμό του π στον κόσμο και έμελλε να περάσουν περισσότερα από χίλια χρόνια για να υπολογιστεί το π με μεγαλύτερη ακρίβεια. Στην Ευρώπη μόλις το 16^{ο} αι. μ. Χ. προσεγγίστηκε το π με μεγαλύτερη ακρίβεια. Βέβαια, από την εποχή του Αρχιμήδη και μετά, ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων που μπορούσαν να υπολογιστούν ήταν μόνο θέμα υπολογιστικής ικανότητας και υπομονής, αφού η μέθοδος που χρησιμοποιούνταν επιτρέπει προσέγγιση σε οποιοδήποτε βαθμό ακρίβειας. Ας δούμε όμως αναλυτικότερα τη μέθοδο των Tsu Ch'ung Chih και Tsu Cheng-Chih.

Ο Tsu Ch'ung Chih υπήρξε ένας διακεκριμένος μαθηματικός, αστρονόμος και μηχανικός της εποχής του [60]. Έδωσε δύο τιμές για το π. Η πρώτη ήταν η $\pi = \frac{22}{7}$, η οποία είναι η τιμή που είχε δοθεί από τον Αρχιμήδη τον 3^{ο} αι. π. Χ. Ο ίδιος υποστήριζε ότι η τιμή αυτή δεν ήταν ικανοποιητική. Η δεύτερη τιμή ήταν η $\pi = \frac{355}{113} = 3{,}1415929203$, η οποία ήταν περισσότερο ακριβής και δεν είχε ξεπεραστεί μέχρι και τον 16^{o} μ. Χ. αιώνα. Στην προσπάθειά του για μια καλύτερη προσέγγιση του π, κατάφερε να περιορίσει την τιμή του στα όρια $3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$, την οποία υπολόγισε ανεξάρτητα και ο Viéte το 1593 [3]. Δεν είναι γνωστό όμως ποια μέθοδο ακολούθησε προκειμένου να καταλήξει σε αυτήν την τιμή. Υπάρχουν αναφορές για το ότι πατέρας και γιος είχαν γράψει το έργο *Chui Shu*, το οποίο πιθανότατα να περιείχε τη μέθοδο υπολογισμού του π. Δυστυχώς όμως το έργο αυτό δεν έχει διασωθεί.

Ας δούμε την εικασία του Mikami [3] για τη μέθοδο που ακολούθησε ο Tsu Ch'ung Chih, η οποία βασίζεται στα αρχεία της δυναστείας των *Sui*. Πήρε έναν κύκλο διαμέτρου δ = 100.000 chang. Βρήκε ότι η περιφέρεια Γ του κύκλου στον οποίο ανήκει, περιέχεται στις ακόλουθες τιμές $31.415.926 < \Gamma < 31.415.927$. Κατά συνέπεια το π περιέχεται στις τιμές $3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$. Άλλη εικασία για τη μέθοδο του Tsu Ch'ung Chih δίνεται από τον Li Yen στο έργο του *Chun-Suan Shih Lung-Ts'nang*, το οποίο έγραψε το 1933. Εκεί ισχυρίζεται ότι ο Tsu Ch'ung Chih ξεκίνησε από τη σχέση $3 < \pi < \frac{22}{7}$ (4) και συνέχισε με τη σχέση $\pi = \frac{22x+3y}{7x+y} = 3{,}1415265$ από όπου προκύπτει ότι $x = 15{,}99y \Leftrightarrow x \cong 16y$. Επομένως $\pi = \frac{22\cdot 16y+3y}{7\cdot 16y+y} = \frac{22\cdot 16+3}{7\cdot 16+1} = \frac{355}{113}$. Για το συμπέρασμα αυτό μάλλον χρησιμοποίησε την ακόλουθη ιδιότητα «αν για τους θετικούς αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει $\frac{\gamma}{\delta} \le \frac{\alpha}{\beta}$, τότε θα ισχύει και $\frac{\gamma}{\delta} \le \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} \le \frac{\alpha}{\beta}$». Έτσι από την σχέση (4) προκύπτει $\frac{3}{1} \le \frac{22x+3y}{7x+y} \le \frac{3}{1}$ και στη συνέχεια $\pi = \frac{22x+3y}{7x+y} = \frac{355}{113}$. Ακόμα μια εικασία για τη μέθοδο του Tsu Ch'ung Chih δόθηκε από τον Ch'ien Pao-Tsung στο έργο του *Chung-Kuo Shuhsüeh-Shih*, το οποίο το έγραψε το 1964 και πραγματεύεται την ιστορία των κινέζικων μαθηματικών. Εκεί αναφέρει ότι ο Tsu Ch'ung Chih χρησιμοποίησε τις ανισότητες $S_{2\nu} < S < S_{2\nu} + (S_{2\nu} - S_{\nu})$, όπου S_x

είναι η περίμετρος κανονικού πολυγώνου x πλευρών εγγεγραμμένου σε κύκλο με μήκος περιφέρειας S. Με τη διαδικασία αυτή, διπλασιάζοντας συνεχώς τις πλευρές των εγγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων, βρήκε ότι $S_{12288} = 3{,}1415925$ και $S_{24576} = 3{,}14159261$ τα οποία διαιρώντας την προηγούμενη ανισότητα με 2ρ δίνουν $3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$.

Βέβαια, οι κινέζοι ήταν ευνοημένοι ως προς το υπολογιστικό μέρος σε σύγκριση με τους σύγχρονούς τους ευρωπαίους, καθότι χρησιμοποιούσαν το δεκαδικό σύστημα από πολύ νωρίς και επιπλέον είχαν ανακαλύψει το αντίστοιχο του ψηφίου 0. Ο κύκλος ως σύμβολο για το μηδέν εισήχθηκε από τους Ινδούς, ενώ οι κινέζοι άφηναν κενό στη θέση του.

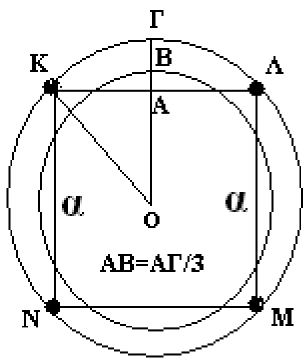
Ινδία.

Σε ότι αφορά την Ινδία, αν και ο πολιτισμός της άνθησε περίπου την ίδια περίοδο με των Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων, δεν γνωρίζουμε πολλά πράγματα καθότι δεν έχουν διασωθεί πολλά στοιχεία για την πρώιμη ινδική ιστορία. Από έμμεσες πηγές γνωρίζουμε ότι τους ήταν γνωστό το πυθαγόρειο θεώρημα όπως και στους Βαβυλώνιους ή τους Αιγυπτίους, και υπάρχουν αρκετά στοιχεία ότι η Αστρονομία τους πρέπει να ήταν σε πολύ εξελιγμένο επίπεδο.

Μια από τις άμεσες πηγές που έχουμε είναι το αρχαιότερο έργο των Ινδών, με θέμα την κατασκευή βωμών για θυσίες, το Sulva Sutra. Το έργο αυτό είναι έμμετρο και η ακριβής χρονολογία συγγραφής του καθώς και ο συγγραφέας του είναι άγνωστα. Ο Loria [50] θεωρεί ότι το πιθανότερο είναι να γράφτηκε στη μεταχριστιανική περίοδο μεταξύ 200 - 400 μ. Χ . Ο Kaye [46] υποστηρίζει ότι το έργο έχει γραφτεί μετά το 200 μ. Χ. Οι περισσότεροι μελετητές πάντως συμφωνούν στο ότι δεν μπορεί να έχει γραφτεί πριν το 200 μ. Χ. Σύμφωνα με πρόσφατα στοιχεία [3] το έργο πρέπει να είναι του 3^{ου} ή 4^{ου} αι. μ. Χ., περιέχει στοιχεία από αρχαιότερο κείμενο αλλά έχει και αρκετά νεότερα. Εκτός από μια συλλογή κανόνων που εξυπηρετεί κυρίως θρησκευτικές ανάγκες, περιέχει πολλές για την εποχή μαθηματικές γνώσεις, καθώς και στοιχεία Αστρονομίας. Σύμφωνα με τον Thibaut [64] οι Ινδοί μαθηματικοί μέχρι και το 19^{ο} αι. δεν αναφέρονται σε καμιά προσπάθεια τετραγωνισμού του κύκλου. Μέσα στο Sulva Sutra περιέχεται ένας κανόνας που αναφέρεται στον τρόπο κατασκευής κύκλου ισοδύναμου με ένα δοσμένο τετράγωνο. Αυτή η ενδιαφέρουσα μαθηματική πρόταση που περιγράφεται στην εικόνα 20, ήταν η εξής: «*Πρόσθεσε στο* $1/2$ *της πλευράς του τετραγώνου το* $1/3$ *της διαφοράς μεταξύ του* $1/2$ *της διαγωνίου και του* $1/2$ *της πλευράς και θα έχεις την ακτίνα του κύκλου ίσου εμβαδού*». Δηλαδή θεωρεί σαν ακτίνα του ισοδύναμου κύκλου την ποσότητα $R = a/2 + 1/3\left(a\sqrt{2}/2 - a/2\right) = a/3\left(1 + \sqrt{2}/2\right)$ (1), όπου α είναι η πλευρά του τετραγώνου (εικόνα 20). Από αυτήν προκύπτει η τιμή για το π, $\pi = 3{,}0884$ η οποία απέχει αρκετά από άλλες προσεγγίσεις, και δεν συναντάται σε άλλο μεταγενέστερο ινδικό κείμενο. Ακόμα δύο κανόνες σχετικοί με τον τετραγωνισμό του κύκλου περιγράφονται από τις σχέσεις

$$R = 2a + \frac{2}{15}R \text{ (2) και}$$

$$a = \frac{R}{2}\left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8\cdot 29} - \frac{1}{8\cdot 29\cdot 6} + \frac{1}{8\cdot 29\cdot 6\cdot 8}\right) \text{(3).}$$



Εικόνα 20

Πρέπει να αναφερθεί βέβαια το ότι πουθενά δε δίνεται κάποια εξήγηση για την προέλευση αυτών των σχέσεων. Μάλιστα οι σχέσεις (1) και (2) υπάρχουν στις εκδόσεις Apastamba και Baudhâyana, ενώ η σχέση (3) μόνο στην Baudhâyana. Η σχέση (3) μπορεί να προκύψει από τη σχέση (1) με ανάλυση του κλάσματος $\frac{2a}{R}$ σε άθροισμα ή διαφορά μοναδιαίων κλασμάτων. Βέβαια δεν υπάρχουν στοιχεία που να δείχνουν ότι οι συνθέτες των Salvasutras είχαν τέτοιες γνώσεις [3]. Η σχέση (2) οδηγεί στην τιμή του π, $\pi = 3{,}0044$.

Υπάρχουν ακόμα τρεις κανόνες που οδηγούν σε διαφορετικές τιμές του π. Ο ένας είναι «*Η διάμετρος d του κύκλου του ισοδύναμου προς το τετράγωνο πλευράς α είναι τα* $8/10$ *της διαγωνίου του τετραγώνου*», δηλαδή

$10d = 8a\sqrt{2}$,κάτι το οποίο υποδηλώνει την τιμή $\pi = 3{,}125$. Επιπλέον οι κανόνες «*η πλευρά α του τετραγώνου του ισοδύναμου προς τον κύκλο διαμέτρου d είναι τα* $^{7}\!/_{8}$ *του d* » και «*η πλευρά α του τετραγώνου του ισοδύναμου προς τον κύκλο διαμέτρου d είναι τα* $^{13}\!/_{15}$ *του d*», υποδηλώνουν τις τιμές $\pi = 3{,}125$ και $\pi = 3{,}0044$. Παρατηρούμε ότι προκύπτουν τέσσερις διαφορετικές τιμές για το π [3]. Τα μαθηματικά των Salvasutras αγνοήθηκαν από τους μεταγενέστερους ινδούς μαθηματικούς ίσως επειδή ο σκοπός της δημιουργίας τους ήταν καθαρά θρησκευτικός.

Άλλες άμεσες πηγές που έχουμε σε ότι αφορά τα ινδικά μαθηματικά είναι το έργο Siddhanta ή σε ελληνική μετάφραση οι Σιδχάντα. Πρόκειται για βιβλίο αστρονομίας που η σύνθεσή του ανάγεται στις αρχές του 5^{ου} αι. μ. Χ. Υπάρχουν πέντε πολύ παλιές εκδόσεις του έργου αυτού. Η παλαιότερη έκδοση είναι η Paulisha Siddhanta και ως χρονολογία έκδοσής του αναφέρεται το 380 μ.Χ. Σε αυτήν την έκδοση δίνεται για το π η τιμή $\pi = \sqrt{10}$ την οποία χρησιμοποιούσαν συστηματικά οι Αιγύπτιοι. Στην έκδοση Surya Siddhanta, η οποία είναι έργο έμμετρο, διασώζεται κατά το μεγαλύτερο μέρος της και χρονολογείται τον 5^{ο} αι., χρησιμοποιείται η τιμή $\pi = \dfrac{600}{191} \approx 3{,}14136$. Σε άλλα σημεία της χρησιμοποιείται η τιμή $\pi = 3\dfrac{177}{1250} \approx 3{,}1416$. η οποία διαφέρει πολύ λίγο από την τιμή την οποία χρησιμοποιούσε ο Πτολεμαίος στην *Αλμαγέστη,* $\pi = 3 + {}^{8}\!/_{60} + {}^{30}\!/_{(60)^2}$ [3].

Άλλο ινδικό έργο μαθηματικού περιεχομένου είναι του μαθηματικού και αστρονόμου ***Aryabhata*** (5^{ος} – 6^{ος} αι. μ. Χ.). Το έργο αυτό φέρει τον τίτλο *Aryabhatiya* και γράφτηκε το 499 μ.Χ. Περιέχει λύσεις σε πολλά προβλήματα αλλά συνήθως χωρίς στοιχεία για το πώς προκύπτουν. Θεωρείται από τους Ινδούς ως το έργο που περιέχει συγκεντρωμένη την ύλη όλων των ινδικών αστρονομικών και μαθηματικών έργων που είχαν προηγηθεί. Πρόκειται δηλαδή για έργο ανάλογο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Το έργο αυτό είναι το πρώτο στο οποίο παρατίθεται το σημερινό αριθμητικό μας σύστημα και ο τρόπος εύρεσης των θετικών και ακέραιων ριζών μιας πρωτοβάθμιας εξίσωσης με δύο αγνώστους. Επίσης εμφανίζονται και οι συναρτήσεις ημίτονο, συνημίτονο και παρημίτονο, καθώς και πίνακας ημίτονων.

Στο έργο αυτό, ο όγκος της σφαίρας δίνεται από τη σχέση $V = \pi R^2 \sqrt{\pi R^2}$. Η σχέση αυτή σε συνδυασμό με το γνωστό μας τύπο $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ δίνει την τιμή για το π, $\pi = \frac{16}{9}$. Πιθανόν ο συγγραφέας να οδηγήθηκε στη σχέση αυτή από την τιμή $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$ την οποία χρησιμοποιούσαν πολύ συχνά οι αρχαίοι Αιγύπτιοι, όπως προκύπτει από τα προβλήματα του πάπυρου Rhind [3]. Στη συνέχεια του κειμένου του *Aryabhatiya* προκύπτει άλλη τιμή για το π από την εξής πρόταση: *«πρόσθεσε 4 στο 100, πολλαπλασίασε επί 8, και πρόσθεσε ακόμα 62.000. Το αποτέλεσμα είναι περίπου η περιφέρεια ενός κύκλου με διάμετρο 20.000.»* Αυτό δίνει σαν αποτέλεσμα $\pi = 62{,}832 \div 20{,}000 = 3{,}1416$ [16], όπως και στην Siddhanta. Η τιμή αυτή που αναφέρεται από τον Aryabhata χωρίς αιτιολόγηση, και είναι ίδια με αυτή του Πτολεμαίου και του Ήρωνα, δηλαδή την προσέγγιση του Αρχιμήδη. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Aryabhata χρησιμοποιεί στους υπολογισμούς του την τιμή $\pi = \sqrt{10} = 3{,}1623$.

Μεταγενέστερος του Aryabhata, είναι ο μαθηματικός και αστρονόμος ***Brahmagupta*** (γεννήθηκε το 598 μ.Χ.). Στα έργα του χρησιμοποιεί τις τιμές $\pi = 22/7$, $\pi = 3{,}1416$ και $\pi = \sqrt{10} = 3{,}1623$. Μια εκδοχή για το πώς έφτασαν στην τιμή $\pi = \sqrt{10}$, είναι το να βασίστηκαν στα Αρχιμήδεια πολύγωνα. Πιθανόν να παρατήρησαν ότι οι περίμετροι των πολυγώνων με 12, 24, 48 και 96 πλευρές, εγγεγραμμένων σε κύκλο διαμέτρου 10 δίνονται αντίστοιχα από τους αριθμούς $\sqrt{965}, \sqrt{981}, \sqrt{986}, \sqrt{987}$. Έτσι μπορεί λανθασμένα να υπέθεσαν ότι αυξάνοντας τον αριθμό των πλευρών, η περίμετρος τείνει στον αριθμό $\sqrt{1000}$, έτσι ώστε $\pi = \sqrt{1000}/10 = \sqrt{10}$ [20], [16]. Ο Brahmagupta συγκεκριμένα έγραψε ότι η «πρακτική» τιμή του π είναι 3 και η «καθαρή» τιμή του είναι $\sqrt{10}$. Πιθανότατα η διάδοση αυτής της τιμής του π στην Ινδία αλλά και στην Ευρώπη, στη διάρκεια του μεσαίωνα, αντί της ακριβέστερης του Aryabhata να οφείλεται στο ότι είναι

εύκολο να τη μάθει κανείς αλλά και να την απομνημονεύσει. Ακόμα ένας ινδός μαθηματικός, ο ***Mahavira*** χρησιμοποιούσε τις τιμές $\pi = 3$ και $\pi = \sqrt{10}$ [60].
Πολύ αργότερα ο μαθηματικός ***Bhaskara*** (1114 – 1185 μ.Χ.) αναφέρει σαν «πρακτικώς ικανοποιητική» την τιμή $\pi = {}^{22}\!/_{7} = 3{,}142857$, η οποία είναι η οριακή τιμή που είχε δώσει ο Αρχιμήδης και την οποία χρησιμοποιούσε ο Ήρωνας στα *Μετρικά*. Ακόμα εμφανίζεται στα έργα του η τιμή $\pi = 3\frac{17}{120} = 3{,}14166$, την οποία είχε εισαγάγει και χρησιμοποιούσε ο Πτολεμαίος [60], [16]. Τέλος, σαν ακριβή τιμή του π θεωρούσε την $\pi = {}^{3927}\!/_{1250} = 3{,}1416$, την οποία την είχε αποδείξει ο Απολλώνιος.
Από τα παραπάνω φαίνεται ότι ο τετραγωνισμός του κύκλου δεν είχε απασχολήσει τους Ινδούς, απλώς για την επίλυση προβλημάτων χρησιμοποιούσαν τιμές του π που χρησιμοποιούνταν σε αρχαιότερους χρόνους.

Αραβία.

Οι Άραβες προσέφεραν με δύο τρόπους στον πολιτισμό αλλά και στη μαθηματική επιστήμη. Από τη μία συγκέντρωσαν, διαφύλαξαν και παρέδωσαν στους μεταγενέστερους πολύ σημαντικά έργα της αρχαιότητας, κυρίως των αρχαίων Ελλήνων, και από την άλλη καλλιέργησαν τα μαθηματικά στη σκοτεινή περίοδο του μεσαίωνα, παραδίδοντας στους ευρωπαίους τις γνώσεις τους και το ινδικό σύστημα αρίθμησης.
Από τους πιο σημαντικούς άραβες μαθηματικούς είναι ο ***Muhammed ibn Musa*** ή πιο γνωστός ως ***Al Khowarizmi***(~ $9^{ος}$ αι. μ. Χ.). Ήταν προστατευόμενος του χαλίφη Al Mamun (813 – 833 μ. Χ.) και έγραψε το σημαντικότατο έργο *Algebr ve Almocabelah*. Από τον τίτλο αυτού του βιβλίου προέκυψε ο όρος «Άλγεβρα» και από το όνομά του Al Khowarizmi, ο όρος «Αλγόριθμος» [20]. Δεν είναι ξεκάθαρο αν όντως προσπάθησε να υπολογίσει το λόγο της περιφέρειας προς τη διάμετρο, αλλά είναι πολύ πιθανό να το έκανε. Στα έργα του χρησιμοποιεί για

το π τις τιμές $3\,{}^{1}\!/_{7}, \sqrt{10}$ και ${}^{62.832}\!/_{20.000}$, αποδίδοντας την πρώτη τιμή στους Έλληνες και τις άλλες δύο σε Ινδούς μαθηματικούς. Άλλη σημαντική παρατήρηση για το έργο του είναι ότι έγραψε χρησιμοποιώντας αραβικούς αριθμούς, συμπεριλαμβανομένου του μηδέν και της υποδιαστολής. Τις ίδιες τιμές για το π πρέπει να χρησιμοποιούσαν και οι μαθηματικοί ***Tabit ibn Qurra*** (826 – 901 μ. Χ.), γνωστός από τη διάσωση της πραγματείας του Αρχιμήδη *Περί του επταγώνου*, και ο Πέρσης μαθηματικός ***Al Birouni*** (973 – 1048 μ. Χ.) [3].

Ο αστρονόμος ***Al Kashi*** (~ 1430 μ. Χ.), του αστεροσκοπείου της Σαμαρκάνδης, σε ειδική μελέτη για την περιφέρεια του κύκλου, δίνει για το π την τιμή $\pi = 3{,}141592653589\underline{8}\underline{7}32$, η οποία έχει λάθος στο 13^{o} και 14^{o} ψηφίο, το οποίο πιθανώς να οφείλεται σε λάθος κατά την αντιγραφή [16]. Ο Al Kashi έφτασε σε αυτήν την τιμή εφαρμόζοντας τη μέθοδο του Αρχιμήδη για πολύγωνο 2^{30} πλευρών.

Στο τέλος της πρώτης χιλιετίας η επιστήμη των Αράβων, η οποία ενσωμάτωσε το έργο των αρχαίων Ελλήνων, των Εβραίων και των Ινδών, είχε διαδοθεί δυτικά κατά μήκος της βορειοαφρικανικής ακτής ως τα εδάφη των Μαυριτανών, που μέχρι τότε είχαν κατακτήσει το μεγαλύτερο μέρος της Ισπανίας.

Οι κυνηγοί των ψηφίων.

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει μια ιδιαίτερη αναφορά στην εμμονή που κατέλαβε πολλούς μαθηματικούς για τον υπολογισμό όλο και περισσότερων ψηφίων του π. Θα γίνει μια σύντομη ιστορική αναδρομή του χρονικού του υπολογισμού των ψηφίων, ενώ λεπτομερέστερα θα εξεταστούν σε άλλα κεφάλαια οι επιμέρους προσπάθειες των σημαντικότερων-ως προς την ιστορία του π-από τους μαθηματικούς που θα αναφερθούν. Όπως προαναφέρθηκε η τριγωνομετρία και οι λογάριθμοι διευκόλυναν κατά πολύ τις αριθμητικές πράξεις από το 15^{o} αι. και μετά. Έτσι ξεκίνησε μια ατέρμονη προσπάθεια από πολλούς φιλόδοξους μαθηματικούς για τον υπολογισμό όλο και περισσότερων δεκαδικών ψηφίων με τη βοήθεια των αρχιμήδειων πολυγώνων. Έτσι, μέχρι το τέλος του 16^{ου} αι. είχαν υπολογιστεί 30 δεκαδικά ψηφία του π, με το τέλος του 18^{ου} αι. 140 δεκαδικά ψηφία και με το τέλος του 19^{ου} αι. 707 δεκαδικά ψηφία, αν και μόνο τα 526 αποδείχτηκε ότι ήταν σωστά.

Η προσπάθεια αυτή για πολλούς δεν είχε κάποιο πρακτικό ενδιαφέρον, αφού δέκα δεκαδικά ψηφία είναι αρκετά για να δώσουν την περιφέρεια της γης σε κλάσματα ίντσας. Ακόμα, 39 ψηφία του π είναι αρκετά για να υπολογιστεί η περιφέρεια του μέχρι σήμερα γνωστού μας σύμπαντος με τη βοήθεια της ακτίνας του, έως ακόμα και η διάμετρος του ατόμου του υδρογόνου [61]. Παρ' όλ' αυτά υπήρξαν άνθρωποι που αφιέρωσαν τη ζωή τους σε αυτό το σκοπό. Πιθανότατα να έλπιζαν ότι θα βρουν κάποια περιοδικότητα στην μακροσκελή ακολουθία των δεκαδικών ψηφίων του π. Εάν το κατάφερναν αυτό, θα μπορούσαν να εκφράσουν το π ως το πηλίκο δύο ακεραίων, αφού εάν επαναλαμβάνεται μια ακολουθία κ ψηφίων, τότε το δεκαδικό μέρος δίνεται από το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς

$$S = n_0\left(m + m^2 + m^3 + \ldots\right),$$

όπου $m = 10^{-\kappa}$ και n_0 είναι ο αριθμός που προκύπτει από την ακολουθία των κ επαναλαμβανόμενων ψηφίων [20]. Βρίσκοντας το άθροισμα του S το π γράφεται σαν ρητός αριθμός, ως εξής

$$\pi = 3 + \frac{n_0}{1 - 10^{-\kappa}}.$$

Ο Lambert όμως απέδειξε το 1767 ότι το π δεν είναι ρητός αριθμός, και άρα χάθηκαν οι ελπίδες για την ανακάλυψη κάποιας περιοδικότητας.

Ίσως άλλος λόγος αναζήτησης όλο και περισσότερων ψηφίων του π να είναι η βελτίωση των αριθμητικών πράξεων και άρα η εύρεση μεθόδων χειρισμού μεγάλων και πολύπλοκων αριθμών. Το βασικότερο έναυσμα αποτελεί η ανθρώπινη φιλοδοξία, αφού δεν υπάρχει επιστημονικό ή πρακτικό ενδιαφέρον όπως υποστήριξε και ο Hermann Schubert το 1889 [20].

Ωθούμενος από τα κίνητρα που περιγράφηκαν πιο πάνω ο Ολλανδός μαθηματικός ***Andriaan Anthoniszoon*** (1527-1607 μ. Χ.), το 1585 χρησιμοποίησε εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα πολύγωνα για να αποδείξει ότι $377/120 > \pi > 333/106$ [20]. Έτσι από τους μέσους όρους αριθμητών και παρονομαστών προκύπτει η τιμή που είχε υπολογιστεί και από τους κινέζους, $\pi = 355/113$, η οποία έχει σωστά 6 δεκαδικά ψηφία. Μόλις 8 χρόνια αργότερα, το 1593 ο ***François Viéte*** όπως θα αναφερθεί και σε επόμενο κεφάλαιο, υπολόγισε την τιμή $3{,}1415926535 < \pi < 3{,}1415926537$, η οποία έχει σωστά 9 δεκαδικά ψηφία [20]. Την ίδια χρονιά ο ***Andriaen van Rooman*** (1561-1615 μ.Χ.), χρησιμοποιώντας ένα εγγεγραμμένο πολύγωνο που είχε 2^{30} πλευρές, δηλαδή πάνω από εκατό εκατομμύρια πλευρές, υπολόγισε 15 δεκαδικά ψηφία [60].

Τρία χρόνια αργότερα ο Ολλανδός καθηγητής μαθηματικών στο πανεπιστήμιο του Λέιντεν, ***Ludolph van Ceulen*** (1539-1610 μ.Χ.), κατάφερε να ξεπεράσει τον Andriaen van Rooman. Στο έργο του *Van den Circkel*, το 1596, αναφέρει ότι χρησιμοποίησε τις περιμέτρους εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων με $60 \cdot 2^{33}$ πλευρές, και κατάφερε να υπολογίσει 20 δεκαδικά ψηφία. Η μέθοδός του βασίζεται στην επαναλαμβανόμενη χρήση ενός δικού του θεωρήματος, το οποίο αντιστοιχεί στον αλγόριθμο $1 - \cos A = 2\sin^2 \frac{1}{2} A$ [16], [60]. Μάλιστα στο τέλος προσθέτει τη φράση «όποιος θέλει μπορεί να το προσεγγίσει περισσότερο», και έμελλε ο ίδιος ο van Ceulen να είναι αυτός που θα το πραγματοποιήσει. Το 1615 μετά το θάνατό του, η γυναίκα του εξέδωσε το έργο του *De Arithmetische en Geoetrische fondamenten* στο οποίο υπολογίζει το π μέχρι 32 δεκαδικά ψηφία, χρησιμοποιώντας περιμέτρους πολυγώνων με 2^{62} πλευρές. Κατά τον Snell αυξήθηκαν αργότερα κατά τρία [20]. Λέγεται ότι σύμφωνα με επιθυμία του van Ceulen τα 35 αυτά ψηφία ήταν χαραγμένα στην ταφόπλακά του στον Άγιο Πέτρο του Λέιντεν της Ολλανδίας [16], [21]. Όποια και αν ήταν η αλήθεια δεν μπορεί να εξακριβωθεί αφού η ταφόπλακα έχει χαθεί. Αξίζει να σημειωθεί, ότι οι Γερμανοί ακόμα και σήμερα αποκαλούν το π *die Ludolphsche Zahl*, δηλαδή το λουντολφικό νούμερο [20], [60]. Το 1630 ο ***Grienberger*** [16], [60], [58] υπολόγισε 39 ψηφία του π, και ήταν από τους τελευταίους που χρησιμοποίησαν την αρχιμήδεια μέθοδο.

Στη συνέχεια η πρόοδος σε ότι αφορά τον υπολογισμό του π ήταν αλματώδης εξαιτίας της ανακάλυψης του Απειροστικού λογισμού, το 17^{ο} αι. μ. Χ. Έτσι οι σειρές και τα συνεχή κλάσματα τέθηκαν στη διάθεση των μαθηματικών διευκολύνοντας κατά πολύ τους υπολογισμούς. Ο αστρονόμος ***Abraham Sharp*** (1651- 1742 μ. Χ.) χρησιμοποίησε σειρά τόξου ημίτονου και υπολόγισε 72 δεκαδικά ψηφία [20]. Λίγο αργότερα, το 1706, ο ***John Machin*** (1680-1752 μ. Χ) χρησιμοποίησε τη διαφορά μεταξύ δύο τόξων εφαπτομένης και υπολόγισε 100 δεκαδικά ψηφία [20], [58]. Το 1717, ο Γάλλος μαθηματικός ***De Lagny*** (1660-1734 μ. Χ.) κατάφερε να υπολογίσει 127 δεκαδικά ψηφία. Χρειάστηκε να περάσουν σχεδόν 80 χρόνια, έως ότου το 1794 ο ***Vega*** (1754-1802 μ.Χ.) υπολόγισε με τη χρήση μιας καινούργιας σειράς τόξου εφαπτομένης, η οποία είχε ανακαλυφθεί από τον Euler, 140 δεκαδικά ψηφία [20]. Μάλιστα από τα ψηφία του Vega αποκαλύφθηκε ότι το αποτέλεσμα του De Lagny, στην 113^{η} θέση είχε λανθασμένα το ψηφίο 7 αντί για το ψηφίο 8. Τα παραπάνω αποτελέσματα συνοψίζονται στον πίνακα 1.

Κατά τη διάρκεια του 18^{ου} αι. μ. Χ. οι Κινέζοι και οι Ιάπωνες ασχολούνταν επίσης με την αναζήτηση όλο και περισσότερων ψηφίων του π, αν και υστερούσαν ως προς το πλήθος τους σε σχέση με τους Ευρωπαίους συναδέλφους τους. Ο Ιάπωνας μαθηματικός ***Takebe Kenkō*** (1664-1739 μ. Χ.) χρησιμοποιώντας ένα κανονικό πολύγωνο 1024 πλευρών υπολόγισε το 1690, 41 δεκαδικά ψηφία του π [60]. Ο ***Matsanuga*** χρησιμοποιώντας μια σειρά υπολόγισε το 1739, 50 δεκαδικά ψηφία. Από αυτό το σημείο και μετά οι Ιάπωνες, αν και συνέχισαν να μελετούν σειρές που συνέκλιναν στο π, δεν αφιέρωσαν άλλο χρόνο στην αναζήτηση δεκαδικών ψηφίων του π [20].

Χρονολογία	Όνομα	Αριθμός ψηφίων
1700	*Sharp*	72
1706	*Machin*	100
1717	*De Lagny*	127
1794	*Vega*	140
1824	*Rutherford*	208
1844	*Strassnitzky και Dase*	200
1847	*Clausen*	248
1853	*Rutherford*	440
1855	*Richter*	500
1873	*Shanks*	707
1945	*Ferguson*	620

Πίνακας 1

Πίσω στην Ευρώπη, ο ***William Rutherford*** το 1841 υπολόγισε 208 δεκαδικά ψηφία, που όμως από την $153^{η}$ θέση και μετά αποδείχτηκε το 1847 ότι ήταν λανθασμένα [16], [58]. Ο Βιεννέζος μαθηματικός ***L.K.Schulz von Strassnitzky*** (1803-1852 μ. Χ.) χρησιμοποίησε έναν τύπο τόξου εφαπτομένης για να «προγραμματίσει» έναν άνθρωπο με εκπληκτικές αριθμητικές ικανότητες, τον Johann Martin Zacharias Dase. Ο ***Johann Martin Zacharias Dase*** (1824-1861 μ. Χ.) μπορεί να παραλληλιστεί με έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή, και κατάφερε το 1844 να υπολογίσει 200 σωστά ψηφία του π σε λιγότερο από δύο μήνες [16], [20], [58]. Τα ψηφία του ήταν όλα σωστά όπως αποδείχτηκε με την έκδοση το 1847 από τον ***Thomas Clausen*** (1801-1885 μ. Χ.) 248 σωστών δεκαδικών ψηφίων [16], [20]. Ο Clausen χρησιμοποιούσε τους τύπους $\frac{\pi}{4} = 2\varepsilon\phi^{-1}\frac{1}{3} + \varepsilon\phi^{-1}\frac{1}{7}$

και $\frac{\pi}{4} = 4\varepsilon\phi^{-1}\frac{1}{5} - \varepsilon\phi^{-1}\frac{1}{239}$. Ο Rutherford όμως δεν παραιτήθηκε από την προσπάθεια και το 1853 υπολόγισε 440 δεκαδικά ψηφία, ενώ το 1855 ο ***Richter*** υπολόγισε 500 δεκαδικά ψηφία. Το 1873-74 ο ***William Shanks*** υπολόγισε 707 δεκαδικά ψηφία τα οποία τα εξέδωσε στο έργο του *Proceedings of the Royal Society* [16], [20].

Το 1945 ο ***Ferguson*** βρήκε ένα λάθος στους υπολογισμούς του Shanks από την 527^{η} θέση και μετά. Έτσι, το 1946 χρησιμοποιώντας έναν απλό υπολογιστή υπολόγισε 620 ψηφία, τον Ιανουάριο του 1947 υπολόγισε 710 ψηφία και το Σεπτέμβριο του 1947 υπολόγισε 808 ψηφία [58], [20]. Από αυτό το σημείο και μετά οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές ήταν στη διάθεση των ανθρώπων και οι υπολογισμοί απλουστεύθηκαν κατά πολύ εκτινάσσοντας τα ψηφία του π σε πολύ υψηλά επίπεδα. Αξίζει να σημειωθεί πάντως ότι οι προσπάθειες για υπολογισμό των δεκαδικών ψηφίων του π χωρίς τη χρήση των υπολογιστών απαιτούν πάρα πολλές επίπονες πράξεις που χρειάζονταν μήνες και χρόνια για να πραγματοποιηθούν. Εξαίρεση αποτέλεσε μόνο το φαινόμενο του Dase, ο οποίος υπολόγισε 200 ψηφία του π σε δύο μόνο μήνες, αφού είχε κάποιες ιδιαίτερες υπολογιστικές ικανότητες. Συνήθιζε να κάνει επίδειξη των ικανοτήτων του αυτών, και έτσι σε ηλικία 16 ετών γνώρισε σε μια τέτοια επίδειξη τον Strassnitzky, ο οποίος τον ώθησε να χρησιμοποιήσει αυτές του τις ικανότητες για τον υπολογισμό μαθηματικών πινάκων. Σε ηλικία 20 ετών ο Strassnitzky του έμαθε να χρησιμοποιεί τον τύπο

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$$ (*τύπος του Strassnitzky*)

ο οποίος έχει μια σειρά για κάθε τόξο ημίτονου, και έτσι υπολόγισε το π μέχρι 205 δεκαδικά ψηφία από τα οποία τα πρώτα 200 ήταν σωστά [16], [20], [58].

Τα αξιοπερίεργο στην ιστορία των μαθηματικών είναι ότι κανείς δεν προσπάθησε να υπολογίσει τις εκατοντάδες των ψηφίων άλλων αριθμών όπως το $\sqrt{2}$, ή το $\log 2$. Ο λόγος σίγουρα δεν μπορεί να είναι μαθηματικής φύσεως, αλλά μάλλον ψυχολογικής φύσεως. Για παράδειγμα, το $\sqrt{2}$ δεν έχει ιδιαίτερη διαφορά από το $\sqrt{3}$, και το $\log 2$ από το $\log 3$, ενώ το π είναι μοναδικό. Άλλος λόγος μπορεί να ήταν το ότι το π εισήχθηκε πολύ νωρίς στην ιστορία των ανθρώπων σε αντίθεση με τους άλλους αριθμούς.

Ευρώπη 13^{ος} αι. –15^{ος} αι. μ. Χ.

Μεσαίωνας.

Στην Ευρώπη η πρώτη χιλιετία μετά Χριστό αποτέλεσε εποχή σκοταδισμού. Επρόκειτο για μια περίοδο γεμάτη πολέμους και διαμάχες που ακολούθησαν μετά την κατάρρευση της Ρωμαϊκής αυτοκρατορίας και την επικράτηση του Χριστιανισμού. Η θρησκευτική μισαλλοδοξία και το πολεμικό κλίμα κατέπνιξαν οποιαδήποτε επιστημονική ανάπτυξη. Στις αρχές της δεύτερης χιλιετίας, ευρωπαϊκά κείμενα που είχαν διασωθεί στα αραβικά, άρχισαν να επιστρέφουν στην Ευρώπη από τη Μέση Ανατολή. Αυτή η τάση ενισχύθηκε αφενός χάρη στο πρωτοεμφανιζόμενο ενδιαφέρον της Ευρώπης για τα μαθηματικά και αφ’ ετέρου χάρη σε κάποιες πλατιά διαδεδομένες αντιλήψεις βασισμένες στη αστρολογία που προκάλεσαν δίψα για μάθηση στο χώρο της αστρονομίας. Το ενδιαφέρον ώθησε στρατιώτες, κληρικούς και εμπόρους να συλλέξουν γνώσεις από τη Μέση Ανατολή και να τις μεταφέρουν στη Δύση. Το βασικότερο έναυσμα όμως αποτέλεσε το ότι οι Ευρωπαίοι συνειδητοποίησαν ότι η επιστημονική γνώση θα απέφερε γνώση και δύναμη σε αυτούς που την κατείχαν.

Το 1085, ο ισπανός βασιλιάς Αλφόνσος ΣΤ΄ της Καστίλης κατέλαβε το Τολέδο το οποίο ήταν υπό την κατοχή των Μαυριτανών και μαζί με αυτό μια τεράστια βιβλιοθήκη. Φρόντισε να μεταφραστούν στα λατινικά επιστημονικά έργα από τα αραβικά, ελληνικά και εβραϊκά, ανοίγοντας το δρόμο για την επιστροφή στην Ευρώπη σπουδαίων έργων των αρχαίων Ελλήνων. Επιπλέον και οι στρατιώτες που επέστρεψαν από τις σταυροφορίες του 11^{ου} και του 13^{ου} αι. έφεραν μαζί τους βιβλία και θεωρίες. Ακόμα με την γνωστοποίηση των αραβικών έργων στην Ευρώπη εισήχθηκε το αραβικό σύστημα αρίθμησης και ο αραβικός συμβολισμός. Σε ότι αφορά το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, όλες οι προσπάθειες από εδώ και στο εξής γίνονται προς την κατεύθυνση που χάραξε ο Αρχιμήδης. Δηλαδή εγκαταλείπεται η προσπάθεια τετραγωνισμού με κανόνα και διαβήτη και στρέφονται προς τον υπολογισμό του π με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια.

Ο ***Leonardo Pisano*** ή πιο γνωστός ως ***Fibonacci*** (1175 – 1230 μ. Χ.) είναι ο πρώτος μαθηματικός έργα του οποίου εμφανίζονται στην Ευρώπη. Ήταν γιος του Ιταλού διπλωμάτη Bonacci, σπούδασε σε νεαρή ηλικία τις αραβικές επιστήμες και ασχολήθηκε με το εμπόριο αλλά και με τα μαθηματικά. Σε ηλικία 32 ετών έγραψε το έργο *Liber Abaci*, με το οποίο συνέβαλλε στην καθιέρωση των αραβικών αριθμών στην Ευρώπη και επιπλέον παρουσίασε και ένα νέο πρόβλημα, το οποίο τον οδήγησε στην ακολουθία για την οποία είναι τόσο γνωστός μέχρι σήμερα [20]. Σε ότι αφορά τη συνεισφορά του στον υπολογισμό του π, χρησιμοποίησε ένα κανονικό 96 – γωνο κατά αναλογία με τον Αρχιμήδη, με τη διαφορά ότι ο Leonardo μπορούσε να υπολογίσει τις τετραγωνικές ρίζες με το νέο αριθμητικό σύστημα. Στο έργο του *Practica geometriae* που εκδόθηκε το 1220 δεν είναι τόσο αυστηρός στους υπολογισμούς του όσο ο Αρχιμήδης, του οποίου οι προσεγγίσεις των τετραγωνικών ριζών τείνουν στο κατώτερο όριο της πλευράς του περιγεγραμμένου πολυγώνου και στο ανώτερο όριο της πλευράς του εγγεγραμμένου πολυγώνου, και άρα εφόσον ήταν στον παρονομαστή οδηγούσαν στα σωστά όρια. Ο Leonardo δεν έλαβε υπ' όψιν του αυτές τις λεπτομέρειες, παρ' όλ' αυτά στάθηκε τυχερός και τα όρια που πήρε ήταν πιο ακριβή από αυτά του Αρχιμήδη. Έτσι η τιμή του π που προέκυπτε είχε όρια $1440 / 458\tfrac{4}{9} < \pi < 1440 / 458\tfrac{1}{5}$ με μέση τιμή $\pi = 864 \div 275 = 3{,}141818$, η οποία έχει τρία δεκαδικά ψηφία σωστά. Η τιμή αυτή είναι μόνο κατά 0,0001 ακριβέστερη από εκείνη του Αρχιμήδη [20], [16].

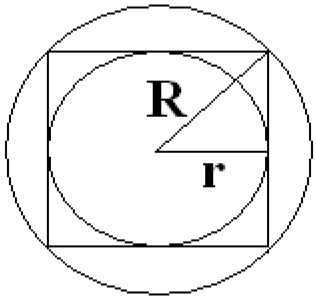
Εκτός από τις προσπάθειες του Leonardo δεν υπάρχουν πολλές άλλες αξιόλογες προσπάθειες αυτήν την πρώιμη περίοδο της αφύπνισης της επιστήμης στην Ευρώπη. Ο ***Gerbert*** ή πιο γνωστός ως πάπας Συλβέστρος, χρησιμοποιούσε την Αρχιμήδεια τιμή $\pi = 22/7$ [20]. Για τα επόμενα 400 χρόνια όμως συναντούμε εκτός αυτής της τιμής, τη βαβυλωνιακή $3\tfrac{1}{8}$ και την αιγυπτιακή $\pi = \left(16/9\right)^2$. Κατά τη διάρκεια του μεσαίωνα δεν υπήρξαν σημαντικές τροποποιήσεις σε ότι αφορά το π, αλλά και τα μαθηματικά γενικότερα είχαν πολύ χαμηλό επίπεδο. Για παράδειγμα , ο ***Franco von Lutich*** έγραψε μια πραγματεία για τον τετραγωνισμό του κύκλου (~1040 μ. Χ.) στην οποία έκανε λάθος στη σελίδα 51, στον τετραγωνισμό του ορθογωνίου [20]. Ο ***Albert von Sachsen*** (1316-1390 μ.Χ.), επίσκοπος στο Χάλμπερσταt, στο έργο του *De quadratura circuli* ασχολείται κατά βάση με φιλοσοφικές αναζητήσεις. Για το λόγο της περιφέρειας του κύκλου προς τη διάμετρο, αναφέρει ότι είναι ακριβώς $22/7$ και ότι υπάρχει απόδειξη γι' αυτό αλλά είναι εξαιρετικά δύσκολη [20]. Ο ***Dominicus Parisiensis*** (~1346μ.Χ.) συγγραφέας του *Practica Geometriae*, διαφοροποιείται από τους προηγούμενούς του, αφού αναφέρει ότι η τιμή $\pi = 22/7$ είναι προσεγγιστική και όχι η ακριβής τιμή [20]. Το ίδιο ισχύει και για τον Βιεννέζο ***Georg Peurbach*** (1423-1461 μ. Χ.), ο οποίος γνώριζε την ελληνική αλλά και αρκετή από την υπόλοιπη ιστορία του π, διέκρινε ότι για την αρχιμήδεια προσέγγιση ισχύει $\pi > 22/7$, και γνώριζε την τιμή του Πτολεμαίου $\pi = 377:120$ καθώς και την ινδική $\pi = \sqrt{10}$ [20].

Nicolaus Cusanus.

Εικόνα 21

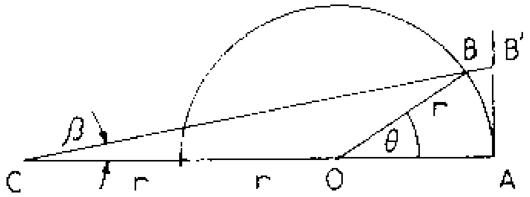
Ίσως η πιο αξιόλογη προσπάθεια αυτής της περιόδου, είναι αυτή του καρδινάλιου ***Nicolaus Cusanus*** (1401-1464 μ. Χ.) (εικ.21), ενός γερμανού που έζησε στη Ρώμη από το 1448 μέχρι το θάνατό του. Αν και η συνεισφορά του σε ότι αφορά το π δεν ήταν και πολύ επιτυχημένη και προσπαθούσε να ερμηνεύει θεολογικά τα επιστημονικά ζητήματα, κατάφερε να ανακαλύψει μια καλή προσέγγιση για τον υπολογισμό του μήκους κυκλικού τόξου.
Η μέθοδός του μπορεί να χαρακτηριστεί «αντίστροφη» της μεθόδου του Αρχιμήδη. Θεώρησε μια ακολουθία κανονικών πολυγώνων με πλευρές 2^n, τα οποία σε κάθε περίπτωση είχαν σταθερή περίμετρο 2 (με την επιλογή κατάλληλων πλευρών), στα οποία ενέγραφε και περιέγραφε έναν κύκλο. Π. χ. για $n = 2$ (εικόνα 22) προκύπτει τετράγωνο με τον εγγεγραμμένο και τον περιγεγραμμένο κύκλο, για το οποίο ισχύει $2\pi \cdot r < 2 < 2\pi \cdot R \Leftrightarrow \frac{1}{R} < \pi < \frac{1}{r}$, όπου r, R είναι οι αντίστοιχες ακτίνες των κύκλων, οι οποίες είναι υπολογίσιμες [58], [26]. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα

προκύπτει $R = \sqrt{2}/4$ και $r = 1/4$, οπότε $\pi_1 = 3{,}313708$ με λάθος $\pi - \pi_1 = 0{,}172116$. Για τον υπολογισμό των επόμενων ακτινών χρησιμοποίησε τους τύπους $R_{n+1} = \sqrt{R_n r_{n+1}}$, $r_{n+1} = \dfrac{R_n + r_n}{2}$ οι οποίοι ήταν γνωστοί από την αρχαιότητα. Η απόκλιση από την πραγματική τιμή μειώνεται περίπου τέσσερις φορές σε κάθε βήμα, και για $n = 18$ υπολογίζονται σωστά δεκαδικά ψηφία του π. Βέβαια ο Cusanus ισχυρίστηκε ότι τετραγώνισε τον κύκλο με ακρίβεια και έδωσε για το π την τιμή $\pi = 3{,}1423$ [20]. Αργότερα ο ***Regiomontanus*** ή αλλιώς γνωστός ως ***Johann Miller*** (1436-1476 μ. Χ.) απέδειξε στα γράμματά του προς τον Cusanus, τα οποία δημοσιεύτηκαν το 1533, ότι η μέθοδός του ήταν λανθασμένη [22], [26].



Εικόνα 22

Παραβλέποντας λίγο τη χρονολογική σειρά θα αναφέρουμε στη συνεισφορά του Δανού φυσικού ***Christiaan Huygens*** (1629-1693 μ. Χ.), αφού η μέθοδός του έχει σχέση με τη μέθοδο του Cusanus [20], [21]. Στο έργο του *De circuli magnitude inventa* αναφέρει ένα θεώρημα σύμφωνα με το οποίο ευθειοποιεί ένα κυκλικό τόξο, όπως φαίνεται στην εικόνα 23.



Προσεγγιστική μέτρηση τόξου σύμφωνα με θεώρημα του Haugens, ανάλογη με αυτήν του καρδινάλιου Cusanus ώστε AB να είναι περίπου ίσο με AB΄.

Εικόνα 23

Αυτή η κατασκευή συναντάται πρώτα στον Snelius και ανάλογα με τον Cusanus, ισχύει ότι $AB' = 3r\tan\beta$ (1). Ακόμα από το τρίγωνο OCB έχουμε $\sin\beta = \dfrac{\sin\vartheta}{\sqrt{5 + 2\cos\vartheta}}$ (2). Έτσι από την σχέση (2) μπορούμε να υπολογίσουμε το

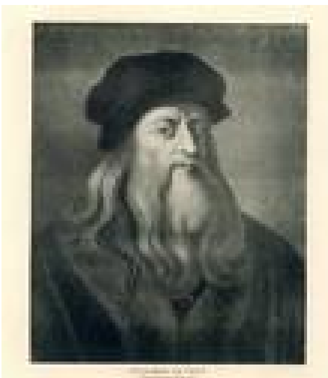
$\tan\beta$, να το αντικαταστήσουμε στη σχέση (1) και μετά από κάποιους υπολογισμούς προκύπτει $AB' = \dfrac{3r\sin\vartheta}{2+\cos\vartheta}$. Αν αυτό τεθεί ίσο με το τόξο $arcAB = r\vartheta$, τότε προκύπτει η ίδια σχέση με αυτήν του Cusanus. Βέβαια δεν είναι γνωστό αν ο Huygens γνώριζε αυτήν την προσέγγιση του προγενέστερού του, δύο αιώνες νωρίτερα. Έτσι χρησιμοποιώντας κανονικά εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα πολύγωνα έδωσε τη σχέση $P_{n'} + 2P_n < 6\pi R < 4P_{2n} - P_n$ όπου $P_{n'}$ και P_n είναι οι περίμετροι των κανονικών περιγεγραμμένων και εγγεγραμμένων πολυγώνων αντίστοιχα. Για $n = 6$ έχουμε τη σχέση 3,1411< π <3,1423.

*Ευρώπη. **16^{ος} – 17^{ος} αιώνας***

Αναγέννηση.

Όπως έχει ήδη προαναφερθεί τα ευρωπαϊκά μαθηματικά ήταν πολύ πίσω σε σχέση με τα μαθηματικά του μουσουλμανικού κόσμου. Με το τέλος των μεσαιωνικών χρόνων η Ευρώπη άρχιζε να κερδίζει το χαμένο έδαφος σε τέτοιο βαθμό, ώστε ήδη από το 17^{ο} αι. μ. Χ. οι επιστημονικές εξελίξεις άφησαν πολύ πίσω τον υπόλοιπο κόσμο. Σε ότι αφορά την ιστορία του π κατά την περίοδο της αναγέννησης, η πρόοδος που υπήρξε ήταν κυρίως σε ότι αφορά την ακρίβεια των δεκαδικών ψηφίων. Η μέθοδος που χρησιμοποιούνταν για τον υπολογισμό του π, βασιζόταν στα Αρχιμήδεια κανονικά πολύγωνα. Αυτό που είχε αλλάξει, ήταν ότι πλέον στη διάθεση των τετραγωνιστών του κύκλου εκτός από το αραβικό αριθμητικό σύστημα και τα δεκαδικά κλάσματα τέθηκαν και οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι λογάριθμοι [20].

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις χρησιμοποιούνταν ήδη στην Αλεξάνδρεια από την εποχή του Πτολεμαίου. Στην περίοδο της αναγέννησης όμως, υπήρχαν πίνακες τριγωνομετρικών συναρτήσεων κυρίως χάρη στα έργα διάσημων αστρονόμων, όπως ο Nicolas Copernicus (1473- 1543 μ. Χ.) και ο Johann Kepler (1571-1630 μ. Χ.), διευκολύνοντας έτσι τη χρήση τους. Οι λογάριθμοι ανακαλύφθηκαν στις αρχές του 17^{ου} αι. από τον Jobst Bürgi, έναν Ελβετό ωρολογοποιό που εργαζόταν στην Πράγα, και την ίδια χρονική περίοδο ανακαλύφθηκαν και από τον John Napier, έναν σκωτσέζο ευγενή και ερασιτέχνη μαθηματικό [20]. Οι εξελίξεις αυτές διευκόλυναν κατά πολύ τον υπολογισμό του π με τα Αρχιμήδεια πολύγωνα και τις όποιες παραλλαγές αυτής της μεθόδου. Η ακρίβεια των υπολογισμών με



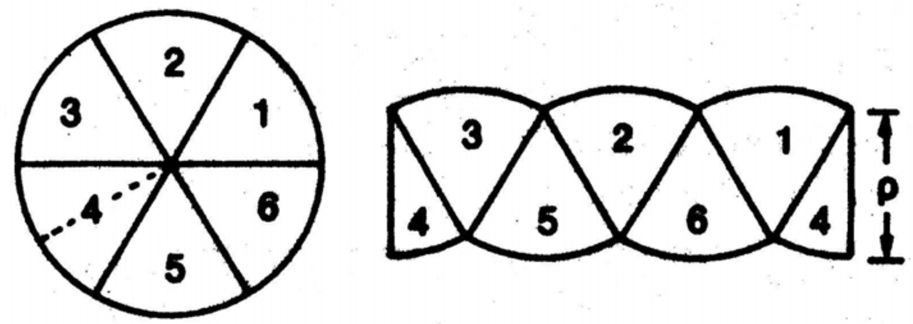
Leonardo da Vinci.

Εικόνα 24

τα εργαλεία αυτά ξεπέρασε κάθε προηγούμενο αλλά και οποιαδήποτε πρακτική αξία για εκείνη την εποχή.

Στα χρόνια της αναγέννησης έζησε ο γνωστός για την ιδιοφυΐα του αλλά και για την τεράστια συμβολή του σε πάρα πολλούς τομείς, ***Leonardo da Vinci*** (1452-1519) (εικόνα 24). Ο Leonardo ήταν πολυγραφότατος και στο τεράστιο έργο του κάνει τουλάχιστον δύο φορές αναφορά στον τετραγωνισμό του κύκλου. Σε ότι αφορά όμως τον υπολογισμό του π, η συνεισφορά του δεν ήταν ιδιαίτερα σημαντική.

Η μια αναφορά που κάνει στον τετραγωνισμό του κύκλου έχει να κάνει με την αναδιάταξη κυκλικών τομέων ώστε να προσεγγιστεί το εμβαδόν του [20] (εικόνα 25). Ο τρόπος αυτός πιθανότατα να είχε χρησιμοποιηθεί και στην αρχαιότητα, καθώς αποτελεί μυστήριο το πώς είχε υπολογιστεί το εμβαδόν του κύκλου. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα χωρίζοντας έναν κύκλο σε κυκλικούς



Εικόνα 25

τομείς και αναδιατάσσοντάς τους, το εμβαδόν του κύκλου προσεγγίζει αυτό ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου και άρα $E = \frac{1}{2}\Gamma \cdot \rho = \pi \cdot \rho^2$. Ο άλλος τρόπος που πρότεινε ο Leonardo έχει ως εξής : «πάρε έναν τροχό σε σχήμα κυλίνδρου του οποίου το ύψος να είναι ίσο με το μισό της ακτίνας της βάσης του. Κάνε μια πλήρη περιστροφή και το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου που αφήνει πίσω του θα είναι ίσο με το εμβαδόν του κύκλου της βάσης του». Βέβαια τα λόγια του Leonardo ακριβώς είναι *«la intera revolutione della rotta qualla la grossezza sia equale al suo semidiamitro lasscia di se vesstigio equalle alla* *quadratura del suo cierchio»*, δηλαδή κάνει λόγο για την ημιδιάμετρο, το οποίο είναι προφανώς λάθος [20].

Ένας ακόμα ερασιτέχνης μαθηματικός της Αναγέννησης, ο οποίος ασχολήθηκε με τον τετραγωνισμό του κύκλου, αν και δεν συνέβαλε στον υπολογισμό του π είναι ο ***Albrecht Dürer*** (1471-1528 μ. Χ.). Σήμερα είναι περισσότερο γνωστός από τους πίνακες ζωγραφικής του, γι' αυτό και ασχολήθηκε ερασιτεχνικά με τη γεωμετρία, καθώς τον ενδιέφερε η προοπτική και οι αναλογίες στους πίνακές του. Στο έργο του *Underweysung der messung mit dem zirckel und rictsheyt* (Οδηγίες για τη μέτρηση με κανόνα και διαβήτη), το 1925, χρησιμοποιεί την βαβυλώνια τιμή για το π, $\pi = 3\,{}^{1}\!/_{8}$ [20].

Η σημαντικότερη πρόοδος σε ότι αφορά τον υπολογισμό του π, επήλθε από έναν ερασιτέχνη μαθηματικό, καθώς το επάγγελμά του ήταν δικηγόρος, τον ***François Viéte*** (1540 – 1603 μ.Χ.) (εικόνα 26). Ο Viéte συνεισέφερε σημαντικά σε πολλούς τομείς των μαθηματικών όπως η Άλγεβρα, η Γεωμετρία, η Αριθμητική και η Τριγωνομετρία. Επίσης εμπλούτισε αρκετά τη μαθηματική ορολογία με όρους που χρησιμοποιούνται ακόμα και σήμερα όπως «αρνητικός» ή «συντελεστής» [20]. Για τον υπολογισμό του π βασίστηκε στην Αρχιμήδεια μέθοδο, κάνοντας κάποιες αλλαγές, και κατέληξε στην ακριβέστερη μέχρι τότε τιμή του π. Το πραγματικό του επίτευγμα όμως είναι ότι για πρώτη φορά περιέγραψε το π ως άπειρο γινόμενο.

François Viéte.

Εικόνα 26

Στην διαδικασία την οποία ακολούθησε, ξεκίνησε με ένα τετράγωνο και όχι με κανονικό εξάγωνο όπως ο Αρχιμήδης, και βασίστηκε στη συσχέτιση του εμβαδού ενός κανονικού ν-γώνου και ενός κανονικού 2ν-γώνου. Το 1593 στο βιβλίο του *Variorum de Rebus Mathematicis Responsorum, Liber VIII* (Διάφορα Μαθηματικά Προβλήματα, τόμος 8) αναφέρει στην πρόταση 1 ότι ο λόγος των εμβαδών δύο κανονικών πολυγώνων, το πρώτο με ν πλευρές και το δεύτερο με 2ν πλευρές, και εγγεγραμμένων στον ίδιο κύκλο είναι ίσος με το λόγο της πλευράς του δεύτερου προς την διάμετρο του κύκλου. Ας δούμε αναλυτικότερα πώς καταλήγει σε αυτό το συμπέρασμα . Στην εικόνα 27(β) είναι εγγεγραμμένα σε έναν κύκλο ένα ν-γωνο και ένα 2ν-γωνο. Για το εμβαδόν του ν-γώνου ισχύει $E(n) = n \cdot E_{OAB} = \frac{1}{2} nr^2 \sin 2\beta = nr^2 \cos\beta \sin\beta$ (1). Ανάλογα για το εμβαδόν του 2ν-γώνου ισχύει $E(2n) = 2n \cdot E_{OCB} = nr^2 \sin\beta$ (2). Έτσι από τις (1) και (2) προκύπτει $E(n)/E(2n) = \cos\beta$. Διπλασιάζοντας τις πλευρές του 2ν-γώνου κατά αναλογία προκύπτει ότι $E(2n)/E(4n) = \cos\beta/2$. Έτσι μπορεί να υπολογιστεί ο λόγος $E(n)/E(4n)$, ως εξής $E(n)/E(4n) = E(n)/E(2n) \times E(2n)/E(2^2 n) = \cos\beta \cdot \cos\beta/2$. Διπλασιάζοντας κ φορές τις γωνίες του αρχικού ν-γώνου και σε αναλογία με τον προηγούμενο τρόπο μπορεί να υπολογιστεί ο λόγος $E(n)/E(2^k n)$, ως εξής $E(n)/E(2^k n) = E(n)/E(2n) \times E(2n)/E(4n) \times ..... \times E(2^{k-1} n)/E(2^k n) = \cos\beta \cdot \cos\frac{\beta}{2} .... \cos\frac{\beta}{2^k}$ (3).

Όταν το κ τείνει στο άπειρο, το εμβαδόν του κανονικού $2^k n$-γώνου τείνει στο εμβαδόν ενός κύκλου. Δηλαδή $\lim_{k\to\infty} E(2^k n) = \pi \cdot r^2$ (4). Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1) και (4) στη σχέση (3) προκύπτει το εξής

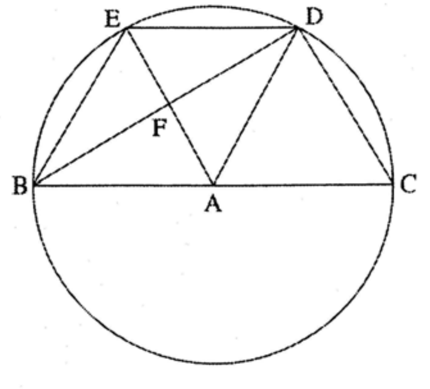
$$\pi = \frac{\frac{1}{2} n \sin 2\beta}{\cos\beta \cdot \cos\beta/2 \cdot \cos\beta/2^2 \cos\beta/2^3 .... \cos\beta/2^k}$$ (5) [20], [21].

Ο Viéte ξεκίνησε με ένα τετράγωνο, άρα έχουμε $n = 4, \beta = 45^0, \cos\beta = \sin\beta = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Αντικαθιστώντας τα προηγούμενα στη σχέση (5), και τροποποιώντας τα συνημίτονα από τη σχέση των διπλασίων τόξων $\cos\vartheta/2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\vartheta}$ προκύπτει η σχέση

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{1/2} \cdot \sqrt{\left(1/2 + 1/2 \cdot \sqrt{1/2}\right)} \cdot \sqrt{\left[1/2 + 1/2\sqrt{\left(1/2 + 1/2 \cdot \sqrt{1/2}\right)}\right]} \cdot ....}.$$

PROPOSITIO I.

Si eidem circulo inſcribantur duo ordinata polygona, numerus autem laterum vel angulorum primi, ſit ſubduplus ad numerum laterum vel angulorum ſecundi: erit polygonum primum ad ſecundum, ſicut apotome lateris primi ad diametrum.

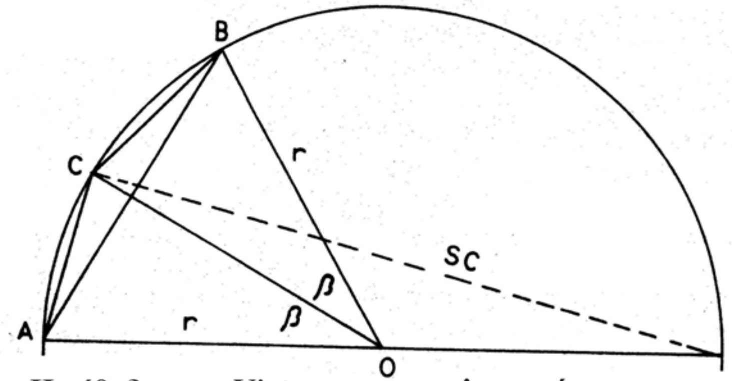


Apotomen lateris voco ſubtenſam peripheriæ, quam relinquit è ſemicirculo ea cui latus ſubtenditur.

In circulo igitur cujus A centrum, diameter BC, inſcribatur polygonum quodcunque ordinatum, cujus latus ſit BD. Secta vero circumferentia BD bifariam in E, ſubtendatur BE. Itaque inſcribatur aliud polygonum ordinatum cujus latus ſit BE. Numerus igitur laterum vel angulorum polygoni primi, erit ſubduplus ad numerum laterum vel angulorum ſecundi. Connectatur autem DC. Dico polygonum primum cujus latus BD ad polygonum ſecun-

Απόσπασμα από το έργο του Viete *Διάφορα Μαθηματικά Προβλήματα.* Τόμος VIII, πρόταση 1.

Εικόνα 27(α)



Η μέθοδος του Viete για τον υπολογισμό του π.

Εικόνα 27(β)

.

Αυτή είναι προσέγγιση του Viéte για το π, ακριβώς όπως την έγραψε στο έργο του *Διάφορα Μαθηματικά Προβλήματα, τόμος 8* [20], [21]. Η μέθοδος που χρησιμοποίησε διαφέρει λίγο από αυτήν που παρουσιάστηκε παραπάνω, ως προς το ότι χρησιμοποίησε τη συμπληρωματική χορδή SC όπως φαίνεται στην εικόνα 27(β). Απέδειξε ότι ο λόγος της συμπληρωματικής χορδής ενός κανονικού ν-γώνου (όχι του 2ν-γώνου που φαίνεται στο σχήμα) προς τη διάμετρο, είναι ίσος με το λόγο του εμβαδού του ν-γώνου προς το εμβαδόν του 2ν-γώνου. Ο λόγος αυτός είναι ίσος με $\cos\beta$,και η διαδικασία που ακολούθησε είναι ανάλογη με την παραπάνω.

Η συμβολή του Viéte, στον υπολογισμό του π είναι μια από τις σημαντικότερες της ιστορίας του π, αλλά είναι και εξέχουσας σημασίας καθώς συνδέεται με την αφύπνιση της μαθηματικής επιστήμης στα χρόνια της αναγέννησης. Κατ' αρχήν ανήκει στο μακρύ κατάλογο αυτών που προσπάθησαν να υπολογίσουν το π με βάση τα αρχιμήδεια πολύγωνα. Η αλήθεια είναι βέβαια ότι αν και βασίστηκε σε αυτά εξέλιξε τη γνωστή μέθοδο αφήνοντας το προσωπικό του στίγμα. Η σημαντικότερη επιτυχία του Viéte όμως, ήταν το ότι για πρώτη φορά κάποιος χρησιμοποίησε το άπειρο γινόμενο για να περιγράψει κάτι, είτε αυτό έχει να κάνει με το π, είτε όχι. Ήταν ο πρώτος που παρουσίασε τη θεωρητικά ακριβή τιμή του π [26]. Τα πρώτα βήματα βέβαια προς την γένεση του απειροστικού λογισμού, όπως έχει προαναφερθεί, τα έκανε ο Αρχιμήδης, και μάλιστα πριν από αυτόν ο Αντιφών, ο οποίος για πρώτη φορά διατύπωσε την έννοια της εξάντλησης. Ο Viéte ήταν γνώστης των αρχαίων ελληνικών έργων, και μάλιστα αναφέρει τον Αντιφώντα στο έργο του, του οποίου την έμπνευση ουσιαστικά έκανε μαθηματική πράξη[20].

Ακόμα, ο Viéte όπως και πολλοί άλλοι σύγχρονοί του χρησιμοποιούσε τη γνώση της αρχαίας Ελλάδας σε συνδυασμό με την αραβική Άλγεβρα και την Τριγωνομετρία. Έτσι και η μέθοδός του αν και βασίζεται σε ελληνικές βάσεις χρησιμοποιεί αλγεβρικές αντικαταστάσεις, τριγωνομετρία και τετραγωνικές ρίζες, δίνοντας νέα πνοή στη γνωστή αρχιμήδεια μέθοδο. Αυτό που αξίζει να ειπωθεί σε αυτό το σημείο, είναι ότι εάν ο Viéte είχε εκφράσει τριγωνομετρικά το λόγο της συμπληρωματικής χορδής προς τη διάμετρο θα διαπίστωνε ότι είναι ίσος με $\cos\beta$, το οποίο είναι μια ποσότητα πολύ πιο εύκολη στο χειρισμό.

Επιπλέον αν στη σχέση (5) εκφράσουμε το β σε ακτίνια και θέσουμε $\vartheta = 2\pi/n$ προκύπτει η εξής σχέση

$$\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{\cos\left(\vartheta/2\right)\cdot\cos\left(\vartheta/2^2\right)\cdot\left(\cos\vartheta/2^3\right)\ldots} \quad (\theta < \pi) \ (6).$$

Η σχέση αυτή όμως είναι αυτή που ο Leonard Euler ανακάλυψε σχεδόν 200 χρόνια μετά από τον Viéte, με διαφορετικό τρόπο βέβαια, και αν παρατηρήσουμε τις σχέσεις (5) και (6), θα δούμε ότι η (5) αποτελεί ειδική περίπτωση της (6) για $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

Επιπλέον, ο Viéte δεν γνώριζε την έννοια της σύγκλισης και έτσι δεν τον απασχόλησε αν η άπειρη ακολουθία του συγκλίνει ή όχι[2]. Βέβαια σε ότι αφορά τον τύπο υπολογισμού του π αρκεί να πάρουμε το k αρκετά μεγάλο αλλά πάντα πεπερασμένο. Μεταγενέστερα ο F.Rudio [20], το 1891, απέδειξε ότι η σχέση του Viéte συγκλίνει. Το αξιοσημείωτο είναι ότι ο Viéte θεώρησε ότι ο τύπος του είναι περιορισμένης χρησιμότητας, καθώς ο υπολογισμός των τετραγωνικών ριζών είναι εξαιρετικά πολύπλοκος και η σύγκλιση είναι πολύ αργή. Έτσι για να βρεθεί έστω και ένας μικρός αριθμός δεκαδικών ψηφίων, απαιτείται μια επίπονη διαδικασία, κάτι που ώθησε ακόμα και τον ίδιο τον Viéte να μην τον χρησιμοποιεί και να επιμένει στη μέθοδο με τα αρχιμήδεια πολύγωνα. Με 16 επάλληλους διπλασιασμούς των πλευρών ενός κανονικού εξαγώνου κατάφερε να δημιουργήσει ένα πολύγωνο 393.216 πλευρών, και να ελαττώσει τα όρια του Αρχιμήδη για το π ως εξής

$$3{,}1415926535 < \pi < 3{,}1415926537,$$

με ακρίβεια 9 δεκαδικών ψηφίων [26].

Ακόμα, ο τύπος του Viéte μπορεί να μας πληροφορήσει και για άλλες ιδιότητες που έχουν τα ψηφία του π, κάτι το οποίο δεν μπορεί να γίνει από οποιοδήποτε αριθμό δεκαδικών ψηφίων. Τέλος η συμβολή του Viéte σε ότι αφορά την ορολογία και τη χρήση συμβόλων ήταν καθοριστική καθώς άνοιξε ο δρόμος για τη χρήση του συμβόλου π, το οποίο είναι πολύ πιο εύκολο στο χειρισμό από τη φράση *quantitas, in quam cum multiplicetur diameter, proveniet circumferential* .

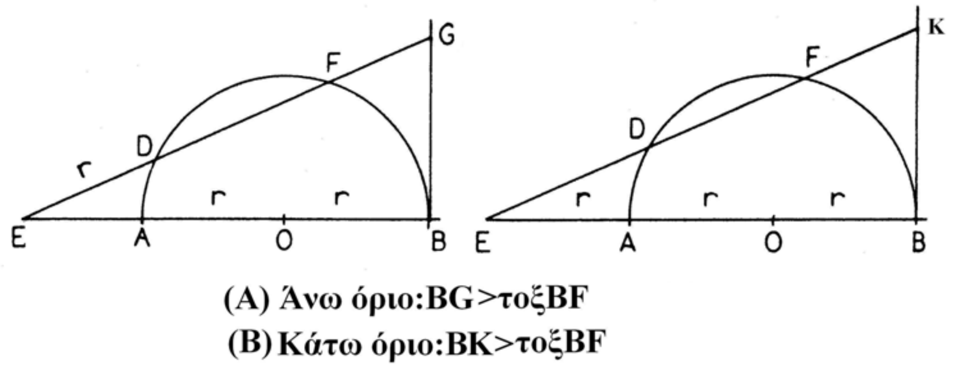
Έτσι έγινε η αρχή για τη χρήση συμβολικής γλώσσας και άρα για την ευκολότερη εξέλιξη των μαθηματικών [20].

Το επίτευγμα του Viéte να υπολογίσει το π με ακρίβεια 9 δεκαδικών ψηφίων, ακολούθησε η εμμονή πολλών μεταγενέστερων για όλο και μεγαλύτερες προσεγγίσεις του π. Οι προσπάθειες αυτές βασίζονταν στα Αρχιμήδεια πολύγωνα, δεν έχουν κάποια πρακτική αξία και δεν προσέφεραν κάτι ουσιαστικά καινοτόμο στην ιστορία του π, πέρα από ακόμα ακριβέστερες δεκαδικές προσεγγίσεις. Σε προηγούμενο κεφάλαιο έγινε εκτενής αναφορά σε αυτές τις προσπάθειες.

Ένα από τα αξιοσημείωτα γεγονότα της εποχής εκείνης είναι ότι γεννιέται το ενδιαφέρον για την ιστορία του π. Το 1559 εμφανίζεται το βιβλίο *De quadratura circuli*, του ***Johannes Buteo*** (1492-1572 μ. Χ.) [20]. Το βιβλίο αυτό είναι το πρώτο που αφορά την ιστορία του π και πραγματεύεται προβλήματα σχετικά με τον τετραγωνισμό του κύκλου, καθώς και τις προσπάθειες που έγιναν στην αρχαιότητα και στο μεσαίωνα. Ακόμα ένας που ασχολήθηκε με την ιστορία του π είναι ο φιλόλογος ***Joseph Scaliger*** (1540-1609 μ. Χ.) [20], ο οποίος εξέδωσε το 1594 το βιβλίο *Cyclometria elementa*. Το βιβλίο αυτό περιέχει τον εσφαλμένο ισχυρισμό του Scaliger, ότι εφ' όσον η περίμετρος ενός κανονικού 12-γώνου υπερβαίνει την περίμετρο του κύκλου, τότε δεν υπάρχει λόγος να διπλασιάσουμε τις πλευρές και να προχωρήσουμε περαιτέρω.

Η αναζήτηση καινούργιων τρόπων προσέγγισης του π.

Περίπου 1900 χρόνια μετά από το έργο του Αρχιμήδη *Κύκλου Μέτρησις*, οι άνθρωποι άρχισαν να διερωτώνται αν υπάρχει συντομότερος δρόμος από τα Αρχιμήδεια πολύγωνα για την προσέγγιση του π. Δύο Ολλανδοί μαθηματικοί κατάφεραν να βρουν έναν τέτοιο δρόμο, στηριζόμενοι σε απλά μαθηματικά, χωρίς τη βοήθεια του Απειροστικού και του Διαφορικού Λογισμού. Ο ένας από αυτούς είναι ο φυσικομαθηματικός ***Willebrord Snellius*** (1580-1626 μ. Χ.), καθηγητής του πανεπιστημίου του Leyden και γνωστός περισσότερο από τους νόμους της ανάκλασης και της διάθλασης. Το 1621 στο βιβλίο του *Cyclometricus*, υποστήριξε ότι τα άνω και κάτω όρια του π, όπως προκύπτουν από τα Αρχιμήδεια πολύγωνα, απέχουν κατά πολύ εξαιτίας των ενδιάμεσων τόξων. Έτσι, έψαξε για όρια που θα προσέγγιζαν καλύτερα το μήκος ενός τόξου, και τα βρήκε. Όπως φαίνεται στην εικόνα 28(Α) και



Εικόνα 28

περιγράφεται από τον Snellius επιλέγουμε ένα σημείο D στην περιφέρεια ενός δοσμένου κύκλου έτσι ώστε το DE να είναι ίσο με την ακτίνα OA και το σημείο E να βρίσκεται στην προέκταση της διαμέτρου AB προς το μέρος του A. Το ED προεκτεινόμενο τέμνει την εφαπτομένη στο B, στο σημείο K, και άρα $BG > arcBF$, οπότε αποτελεί το άνω όριο. Το κατώτατο όριο βρίσκεται προεκτείνοντας τη διάμετρο AB προς το μέρος του A κατά EA ίσο με την ακτίνα OA. Επιλέγουμε τυχαίο σημείο F στην περιφέρεια του κύκλου, και ενώνοντας το E με το F βρίσκουμε το σημείο τομής του με την εφαπτομένη στο B, το K. Ανάλογα θα ισχύει ότι $BK < arcBF$ [20], [60].

Τα όρια αυτά προσεγγίζουν πολύ καλύτερα το π από ότι τα αρχιμήδεια όρια. Για παράδειγμα από ένα εξάγωνο η τιμή που προκύπτει για το π με την Αρχιμήδεια μέθοδο είναι $3 < \pi < 3{,}464$. Αντίθετα με τη μέθοδο του Snellius προκύπτει για ένα εξάγωνο η τιμή $3{,}14022 < \pi < 3{,}14160$, η οποία είναι πιο ακριβής ακόμα και από την τιμή που προκύπτει από 96-γωνο με την Αρχιμήδεια μέθοδο. Με τη χρήση 96-γώνου ο Snelius καταλήγει στην τιμή $3{,}1415926272 < \pi < 3{,}1415928320$ [16], [20]. Έτσι επιβεβαίωσε τα 35 δεκαδικά ψηφία που είχαν βρεθεί από τον σύγχρονό του Ludolph van Ceulen, με τη διαφορά ότι ο τρόπος του ήταν πολύ πιο εύκολος. Βέβαια το επίτευγμα του Snellius δεν ήταν απλώς μερικά ψηφία του π, αλλά η εύρεση μιας εντελώς καινούργιας μεθόδου για τον υπολογισμό του, μετά από 1900 χρόνια, την οποία και επιβεβαίωσε για την ορθότητά της εξετάζοντας τα ψηφία του π. Δυστυχώς όμως ο Snellius δεν κατάφερε να δώσει μια αυστηρή απόδειξη για αυτούς τους ισχυρισμούς του, κάτι το οποίο είναι πολύ σημαντικό για τη μαθηματική επιστήμη [20].

Τα θεωρήματα του Snellius αποδείχτηκαν από έναν άλλο Ολλανδό φυσικομαθηματικό, τον ***Christiaan Huygens*** (1629-1695 μ. Χ.) (εικόνα 29), ο οποίος γεννήθηκε τρία χρόνια μετά το θάνατό του. Το 1654 στο αξιόλογο έργο του *De circuli magnitude inventa* [21], [20] ο Huygens απέδειξε εκτός από τα δύο θεωρήματα του Snellius και άλλα 14 θεωρήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας, στα πλαίσια της αυστηρής ευκλείδειας λογικής.

Christiaan Huygens.
Εικόνα 29

Ας συμβολίσουμε με Ε και Ρ το εμβαδόν ενός κύκλου. Έστω ακόμα ότι E_1 και P_1 είναι το εμβαδόν και η περίμετρος αντίστοιχα ενός περιγεγραμμένου πολυγώνου σε κύκλο, ενώ ε_1 και ρ_1 το εμβαδόν και η περίμετρος αντίστοιχα ενός εγγεγραμμένου πολυγώνου σε κύκλο. Αναλογικά με E_2 και P_2 συμβολίζουμε το εμβαδόν και την περίμετρο αντίστοιχα ενός περιγεγραμμένου πολυγώνου σε κύκλο με διπλάσιο αριθμό πλευρών και με ε_2 , ρ_2 το εμβαδόν και την περίμετρο αντίστοιχα ενός εγγεγραμμένου πολυγώνου σε κύκλο με διπλάσιο αριθμό πλευρών.

René Descartes.
Εικόνα 30

Με αυτούς τους συμβολισμούς αναφέρονται παρακάτω μερικά από τα πιο σημαντικά εκ των 16 θεωρημάτων που απέδειξε ο Huygens, με τους λατινικούς αριθμούς που βρίσκονται στο πρωτότυπο κείμενο [20].

(V) $E > \varepsilon_2 + \frac{1}{3}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$

(VI) $E < \frac{2}{3}E_1 + \frac{1}{3}\varepsilon_1$

(VII) $P > p_2 + \frac{1}{3}(p_2 - p_1)$

(IX) $P < \frac{2}{3}p_1 + \frac{1}{3}P_1$

(XIII) $p_2 = \sqrt{(P_2 \cdot p_1)}$

(XIV) $P^3 < p_1^2 \cdot P_1$

(XVI) πόρισμα $P > p_2 + (4p_2 + p_1)/(2p_2 + 3p_1)$

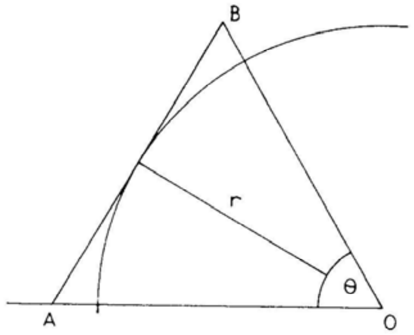
Οι αποδείξεις των θεωρημάτων είναι αρκετά μακροσκελείς. Ο Huygens με τη βοήθεια των θεωρημάτων αυτών κατάφερε να βρει τα εξής όρια για το π,

$$3{,}1415926533 < \pi < 3{,}1415926538 .$$

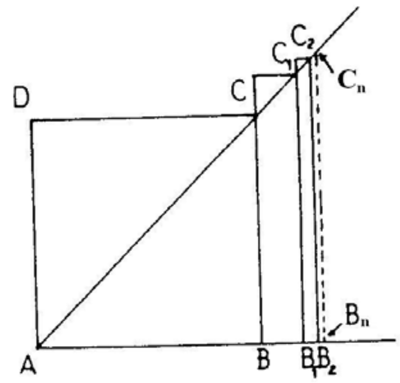
Το βασικότερο επίτευγμά του όμως ήταν ότι θεμελίωσε τη μέθοδο του Snellius και υπολόγισε με βάση αυτήν κάποια ψηφία του π, για τα οποία θα απαιτούνταν πολύγωνα 400.000 πλευρών για να υπολογιστούν

Ένας μαθηματικός σύγχρονος του Huygens και του Snellius, είναι ο René Descartes (1596 – 1650 μ.Χ.) (εικόνα 30). Θεωρείται ο θεμελιωτής της αναλυτικής γεωμετρίας και λόγω της λατινοποίησης του ονόματός του σε Renatus Cartesius, η αναλυτική γεωμετρία συχνά αποκαλείται καρτεσιανή. Μέσα στις φιλοσοφικές, αλλά και άλλες πάσης φύσεως ανησυχίες του, ήταν και ο προσδιορισμός του π. Ο τρόπος προσέγγισής του μοιάζει αρκετά με αυτόν του Viéte, με τη διαφορά ότι αντί να δουλέψει με τα εμβαδά κανονικών πολυγώνων, διατήρησε την περίμετρό τους σταθερή και διπλασίαζε τον αριθμό των πλευρών έως ότου προσεγγιστεί ο κύκλος. Ας εξετάσουμε όμως αναλυτικότερα τη μέθοδό του [20].

Έστω ο κύκλος που φαίνεται στην εικόνα 31(α), και έστω ότι η περίμετρος του περιγεγραμμένου πολυγώνου είναι ίση με L.



Η μέθοδος του Descartes για τον υπολογισμό του π.



Η κατασκευή του Descartes

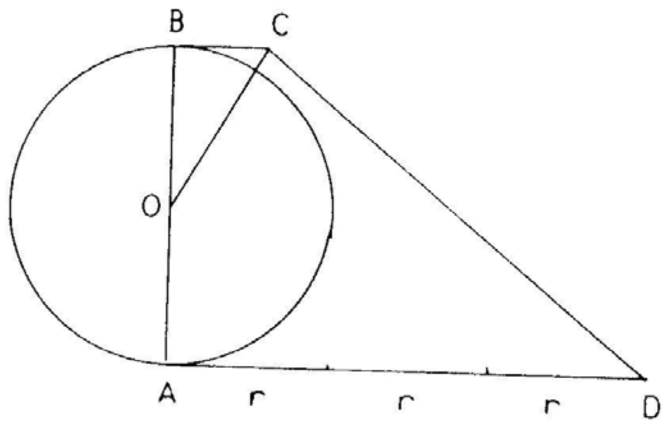
Εικόνα 31. (α)(β)

Προφανώς θα ισχύει $L = 2nr \cdot \varepsilon\phi\left(\theta/2\right)$ (1). Έτσι μετά από κ διπλασιασμούς πλευρών, η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου θα είναι ίση με $r_k = \dfrac{L \cdot \sigma\phi\left(\theta/2\right)}{2^k n}$ (2).

Ο Descartes ξεκινώντας από ένα τετράγωνο, όπου $n = 4$ και $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, υπολόγισε το π από τη σχέση (1) ως εξής $\dfrac{L}{2r} = \pi = \lim_{k \longrightarrow \infty} 2^k \varepsilon\phi\left(\dfrac{\pi}{2^k}\right)$. Έτσι χρησιμοποιώντας τους τύπους των διπλασίων τόξων και με μια άπειρη ακολουθία πράξεων θα μπορούσε να προσδιορίσει το π. Επέλεξε όμως έναν διαφορετικό τρόπο προσέγγισης που βασίζεται σε ανάλογη διαδικασία. Όπως φαίνεται στην εικόνα 31(β), επιλέγουμε ένα τετράγωνο ABCD, με δοσμένη περίμετρο L, έτσι ώστε $AB = \dfrac{L}{4}$. Προεκτείνουμε τη διαγώνιο AC έτσι ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου BCC_1B_1 να είναι ίσο με το $1/4$ του εμβαδού του προηγούμενου τετραγώνου. Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία η οποία πραγματοποιείται μόνο με κανόνα και διαβήτη, βρίσκουμε τα σημεία $C_2, C_3 \ldots C_n$, έτσι ώστε κάθε καινούργιο ορθογώνιο να είναι ίσο με το $1/4$ του προηγούμενού του.

Θέτουμε $AB_k = x_k$, οπότε $AB = x_0$. Σύμφωνα με την παραπάνω κατασκευή προκύπτει ότι $x_k(x_k - x_{k-1}) = x_0^2 / 4^k$, η οποία ικανοποιείται από τη σχέση $x_k = \frac{4x_0}{2^k} \sigma\phi \frac{\pi}{2^k}$. Γνωρίζουμε όμως ότι $4x_0 = L$ και άρα είναι ισοδύναμη της (2) για $n = 4$. Έτσι το AB_n που θα προκύψει θα είναι διάμετρος κύκλου με περιφέρεια L.

Ακόμα μια απόπειρα για την ευθειοποίηση της περιφέρειας του κύκλου έχουμε από τον ***A.A.Kochansky*** το 1685 [20]. Στην εικόνα 32, η γωνία BOC είναι 30^o και το BC είναι

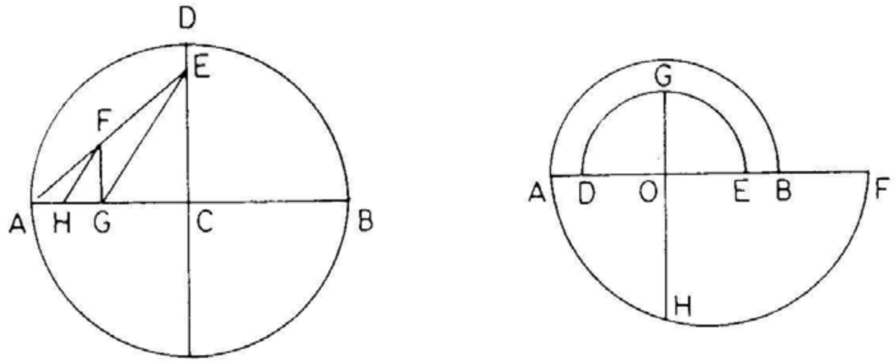


Η κατασκευή του Kochansky για τον τετραγωνισμό του κύκλου.

Εικόνα 32

παράλληλο με το AD και με r συμβολίζεται η ακτίνα του κύκλου. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος CD είναι ίσο με το μισό της περιφέρειας του κύκλου. Έτσι προκύπτει ότι $BC = r \cdot \varepsilon\phi 30^0 = r/\sqrt{3}$. Ακόμα από το πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει $CD^2 = AB^2 + (AD - BC)^2 = 4r^2 + \left(3r - r/\sqrt{3}\right)^2 = \left(40/3 - 6\sqrt{3}\right) \cdot r^2$. Από τη σχέση αυτή όμως προκύπτει $CD/r = \pi = 3{,}141533...$, το οποίο διαφέρει από το π λιγότερο από 6×10^{-5}.

Τέλος ο ***Jacob de Gelder***, δυόμισι αιώνες αργότερα, το 1849, ανακάλυψε μια κατασκευή η οποία αναφέρεται σε αυτό το σημείο γιατί βασίζεται στο ίδιο θεωρητικό υπόβαθρο με την κατασκευή του Kochansky. Η κατασκευή αυτή προσδιορίζει το π έως 6 δεκαδικά ψηφία και βασίζεται στην έκφραση του π ως συνεχές κλάσμα, ξεκινώντας από το $\pi = {}^{355}\!/_{113}$. Εφόσον $\pi = {}^{355}\!/_{113} = 3 + {}^{4^2}\!/_{\left(7^2+8^2\right)}$ και το τελευταίο κλάσμα είναι κατασκευάσιμο γεωμετρικά ο Gelder επινόησε την παρακάτω κατασκευή [20].



Η κατασκευή του Gelder **Η κατασκευή του Hobson**

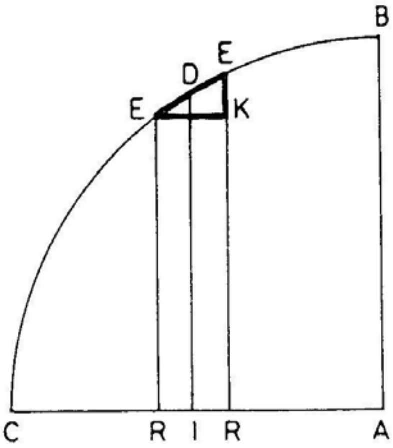
Εικόνα 33(α)(β)

Έστω ότι $CD = 1, CE = {}^{7}\!/_{8}, AF = {}^{1}\!/_{2}$ και το FG παράλληλο στο CD, καθώς και το FH παράλληλο στο EG (εικόνα 33α). Με αυτά τα δεδομένα θα ισχύει ότι $AH = {}^{4^2}\!/_{\left(7^2+8^2\right)}$ και το δεκαδικό μέρος του π προσεγγίζεται με λάθος μικρότερο του ενός εκατοστού. Ανάλογη είναι και η κατασκευή του ***Hobson*** το 1913, η οποία είναι κατά πολύ μεταγενέστερη των δύο προηγούμενων, αλλά είναι επίσης ανάλογη ως προς το θεωρητικό υπόβαθρο [20]. Όπως φαίνεται στην εικόνα 33β, έστω $OA = 1, OD = {}^{3}\!/_{5}, OF = {}^{3}\!/_{2}, OE = {}^{1}\!/_{2}$, και τα ημικύκλια DGE, AHF με τις διαμέτρους DE και AF αντίστοιχα. Φέρνουμε την κάθετη στην AF από το O η οποία τέμνει τα δύο προηγούμενα ημικύκλια στα σημεία G και H αντίστοιχα. Υπολογίζοντας το GH προκύπτει ότι είναι ίσο με $GH = 1{,}77246...$, το οποίο διαφέρει από το $\sqrt{\pi} = 1{,}77245...$ λιγότερο από 2×10^{-5}. Έτσι το GH^2 προσεγγίζει το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο ΑΒ.

$17^{ος}$ - $18^{ος}$ αιώνας

Τα τριακόσια χρόνια από το τέλος της Αναγέννησης μέχρι τη Βικτοριανή εποχή ήταν μια εξαιρετική περίοδος για τα μαθηματικά. Την εποχή αυτή εμφανίστηκαν κάποιοι από τους πιο χαρισματικούς μαθηματικούς της δεύτερης χιλιετίας, ο καθένας προετοιμάζοντας το έδαφος για τον επόμενο, ώστε να επέλθει η επανάσταση στα μαθηματικά και στην επιστημονική σκέψη γενικότερα. Η εξέλιξη των μαθηματικών όπως είναι φυσικό έμελλε να επηρεάσει και την έρευνα και τη μελέτη του π. Ήδη μετά τις επίπονες προσπάθειες του van Ceulen στις αρχές του $17^{ου}$ αιώνα, μαθηματικοί όπως ο Viéte, ο Snellius και ο Huygens έστρεψαν τις προσπάθειές τους στην εύρεση μιας πιο αποτελεσματικής μεθόδου για τον υπολογισμό του π, ενώ το ενδιαφέρον για τον υπολογισμό όλο και περισσότερων ψηφίων του π μειώνεται. Ο Snellius και ο Huygens ήταν ουσιαστικά οι δύο τελευταίοι μαθηματικοί που εστίασαν την προσοχή τους στη μέθοδο του Αρχιμήδη χρησιμοποιώντας πολύγωνα, ενώ προετοίμασαν το έδαφος για μια νέα αναλυτική προσέγγιση του τετραγωνισμού του κύκλου.

Ένας από τους σπουδαίους μαθηματικούς του $17^{ου}$ αιώνα ήταν ο ***Blaise Pascal*** (1623-1662 μ. Χ.). Αν και δεν ασχολήθηκε με τον τετραγωνισμό του κύκλου ή τον υπολογισμό του π, προετοίμασε το έδαφος για μια εντελώς νέα προσέγγιση [20]. Ο Liebniz αναφέρει αργότερα ότι διαβάζοντας το έργο του Pascal, *Traité des sinus du quart de cercle* (Πραγματεία των ημίτονων των τεταρτοκυκλίων του κύκλου), το οποίο χρονολογείται το 1658, του ήρθε μια σημαντική ιδέα. Στο έργο του αυτό ο Pascal χρησιμοποιεί το ιστορικό τρίγωνο EEK που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ο Pascal το χρησιμοποίησε για να διερευνήσει τις συναρτήσεις $\eta\mu^n\phi$, και κατάφερε να υπολογίσει το εμβαδόν πού βρίσκεται κάτω από την καμπύλη αυτής της συνάρτησης αποδεικνύοντας ότι $DI \cdot EE = RR \cdot AB$. Αυτό ήταν και η βάση της γένεσης του Απειροστικού Λογισμού, καθώς ο Liebniz έγραψε ότι βλέποντας αυτό το τρίγωνο συνειδητοποίησε ότι τα θεωρήματα του Pascal για το τεταρτοκύκλιο μπορούν να εφαρμοστούν σε οποιαδήποτε καμπύλη. Το μόνο που δεν έκανε ο Pascal ήταν να θεωρήσει το τρίγωνο αυτό απείρως μικρό [20].



Το "ιστορικό" τρίγωνο του Pascal

Εικόνα 34

Εφαρμόζοντας τη θεωρία αριθμών στο τρίγωνό του (εικόνα 34), ο Pascal ανακάλυψε έναν τύπο ο οποίος είναι ισοδύναμος με την αλγεβρική έκφραση $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ για $n \geq 0$. Ο τύπος αυτός ανακαλύφθηκε από πολλούς άλλους την ίδια εποχή και έμελλε να παίξει έναν πολύ σημαντικό ρόλο στην ιστορία του π [20].

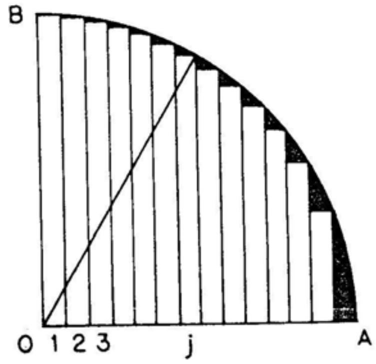
Βέβαια ο Pascal δεν ήταν ο μόνος που προετοίμασε το έδαφος για τον Απειροστικό Λογισμό [20]. Ο Johann Kepler υπολόγισε το εμβαδόν των κυκλικών τομέων και της έλλειψης, χωρίζοντάς τα σε λεπτές λωρίδες. Υπήρξαν και πολλοί άλλοι που έφτασαν κοντά στο να ανακαλύψουν τον Απειροστικό Λογισμό, όπως ο Evangelista Toricelli (1608-1647 μ. Χ.), ο Gilles Persone de Roberval (1602-1675 μ. Χ.) και ο Girard Desargues (1591-1661 μ.Χ.). Ο Pierre Fermat (1601-1665 μ. Χ.) μπορούσε ακόμα να παραγωγίζει απλές αλγεβρικές συναρτήσεις και να βρίσκει τα μέγιστα και τα ελάχιστα τους. Τέλος ο καθηγητής γεωμετρίας του Newton στο πανεπιστήμιο του Cambridge, ο Isaac Barrow (1630-1677 μ. Χ.), ουσιαστικά χρησιμοποιούσε τον διαφορικό λογισμό θεωρώντας ένα απείρως μικρό τόξο μιας καμπύλης και υπολογίζοντας την εφαπτομένη της.

Ασία

Εν τω μεταξύ στα χίλια χρόνια που πέρασαν από το 600 μέχρι το 1600 μ. Χ. ούτε η Ιαπωνία, ούτε η Κίνα σημείωσαν κάποια σημαντική πρόοδο σχετικά με το π. Μέχρι και τις αρχές του 17^{ου} αιώνα χρησιμοποιούσαν για το π την τιμή $\sqrt{10}$ και στις δύο χώρες, η οποία πιθανότατα να ήταν περισσότερο ιδεατή παρά ρεαλιστική. Άλλωστε, όπως προαναφέρθηκε, ο Tsu Chung Chih και ο γιος του Tsu Keng-Chih είχαν υπολογίσει την ακριβέστερη τιμή για το π, $355/113$ από τον 5^{ο} αιώνα μ. Χ.

Ωστόσο το 1663 μ. Χ. ο ***Μουραμάτσου Σιγκεκίγιο*** δημοσίευσε στην Ιαπωνία το έργο του *Σάνσο* [22], όπου περιέγραφε το πώς υπολογίζεται κατά προσέγγιση η περιφέρεια του κύκλου χρησιμοποιώντας ένα εγγεγραμμένο πολύγωνο. Το ότι εξηγούσε τον τρόπο που έκανε τους υπολογισμούς του ήταν κάτι εξαιρετικά ασυνήθιστο για την Ιαπωνία, σε αντίθεση με την Ευρώπη. Επιπλέον, αν και είχε υπολογίσει με ακρίβεια 7 δεκαδικά ψηφία του π, δεν ήταν εντελώς σίγουρος για τα αποτελέσματά του και ανέφερε ότι το π ήταν περίπου 3,14. Όμως η μέθοδός του με τα πολύγωνα διαδόθηκε πάρα πολύ γρήγορα στην Ιαπωνία και συνέχισε να χρησιμοποιείται για τα επόμενα εκατό χρόνια. Το 1712 ο ***Σέκι Κόουα*** υπολόγισε με ακρίβεια 16 ψηφία και το 1722 ο ***Takebe Hikojirō Kenkō*** (1664 – 1739 μ.Χ.) [20], [22] υπολόγισε 41 ψηφία, καθώς επίσης σειρές και συνεχή κλάσματα για το π αλλά και το π^2. Αν και το πώς έκαναν τους υπολογισμούς τους δεν είναι απόλυτα ξεκάθαρο, πιθανότατα να είχαν βρει κάποια σειρά για το π [19] με τον τρόπο που περιγράφεται στην εικόνα 35 (α) και (β).

Από το βιβλίο του Sawaguchi Kazayuki (1670 μ.Χ.).



Η ιαπωνική μέθοδος υπολογισμού του π που υποδεικνύεται στο διπλανό σχήμα.

Εικόνα 35(α),(β)

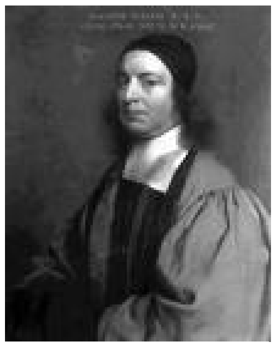
Θέτοντας την ακτίνα ΟΑ ίση με τη μονάδα στην εικόνα 35(β) , το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου ΑΟΒ θα είναι $\frac{\pi}{4}$. Χωρίζοντας το ΟΑ σε n διαστήματα, το εμβαδόν της j-οστής λωρίδας σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα θα είναι $\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\left(\frac{j}{n}\right)^2}$. Συνεπώς το συνολικό εμβαδόν των λωρίδων θα τείνει στο εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου ΟΑΒ, όταν το n τείνει στο ∞. Έτσι $\pi = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}\sum_{j=0}^{n}\sqrt{n^2-j^2}$. Με αυτόν τον τρόπο οι Ιάπωνες μπορούσαν να υπολογίσουν το π σε έναν πολύ μεγάλο βαθμό ακριβείας, απλώς επιλέγοντας το n αρκετά μεγάλο. Βέβαια στην πράξη η σειρά αυτή συγκλίνει πολύ αργά και κατά αναλογία με τον τύπο του Viéte, παρουσιάζει το πρόβλημα του υπολογισμού πολύπλοκων τετραγωνικών ριζών.

Επίσης το 1722 ο ***Καμάτα Τοσικίγιο*** ανακάλυψε και παρουσίασε μια άλλη απόδειξη για το π χρησιμοποιώντας εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα πολύγωνα [22], η οποία ονομάστηκε από μερικούς Ιάπωνες συγγραφείς «η συμπίεση του αριθμού π από μέσα και από έξω», υπολογίζοντας με αυτήν 24 δεκαδικά ψηφία. Αν και η απόδειξη ότι το π ήταν λίγο μεγαλύτερο από το 3,14 ήταν ξεκάθαρη, οι Ιάπωνες διανοούμενοι αρνήθηκαν να ασπαστούν τις αντιλήψεις λιγότερο γνωστών μαθηματικών οι οποίες έρχονταν σε αντίθεση με την αντίληψη ότι η τιμή του είναι $\sqrt{10}$. Έτσι, συνέχιζαν να χρησιμοποιούν την τιμή $\sqrt{10}$ μέχρι το 19^{ο} αιώνα μ.Χ. και το τέλος της δυναστείας των Σογκούν.

Στην Κίνα τα πράγματα είχαν διαφορετική εξέλιξη, αφού ύστερα από τις ακριβείς μετρήσεις του Tsu Chung Chih ακολούθησε πλήθος από ανακριβείς τιμές. Στα μέσα του 17^{ου} αιώνα ο ***Τσ'εν Τσιν Μο*** έγραψε ότι το π ήταν ακριβώς 3,15025 χωρίς να εξηγεί το πώς το υπολόγισε [22]. Διακόσια χρόνια μετά ο ***Κ'ου Τσ'ανγκ Φα*** έγραψε το έργο *Πραγματική Μελέτη της Μέτρησης Κύκλου* στο οποίο υποστήριξε ότι η ακριβής τιμή του π είναι 3,125 [22]. Όμως κοντά στις αρχές του 18^{ου} αιώνα Ιησουίτες ιεραπόστολοι άρχισαν να παρουσιάζουν στους Κινέζους τη δυτική επιστημονική και μαθηματική σκέψη. Το 1713 κυκλοφόρησε με αυτοκρατορική εντολή ένα βιβλίο με τίτλο *Σου-λι Τσινγκ-γιουν*, το οποίο περιείχε ένα κεφάλαιο για το λόγο της περιφέρειας προς τη διάμετρο με βάση εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα πολύγωνα. Το αποτέλεσμα των υπολογισμών ήταν 19 ακριβή ψηφία του π.

Ευρώπη, 17ος αιώνας

Ανάμεσα σε όλους αυτούς που προετοίμασαν το έδαφος για την έλευση του Απειροστικού Λογισμού, υπήρξαν και δύο που χρησιμοποίησαν την υπάρχουσα ευρωπαϊκή γνώση για τον υπολογισμό του π. Ο ***John Wallis*** (1616-1703 μ.Χ.) (εικ.36) ήταν ο ένας από αυτούς και εισήγαγε μια νέα μέθοδο για τον υπολογισμό του εμβαδού του κύκλου [20], [60]. Η μέθοδός του μοιάζει με την πιθανολογούμενη ιαπωνική μέθοδο (προηγούμενη σελίδα), αφού επιχείρησε να υπολογίσει το εμβαδόν ενός τεταρτοκυκλίου χωρίζοντας το σε λωρίδες. Γνωρίζοντας τον τύπο για το μήκος του κυκλικού τόξου ΑΒ από την καρτεσιανή γεωμετρία, ξεκίνησε με σύγχρονο συμβολισμό από την εξίσωση $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi/4$. Δυστυχώς όμως αφού δεν είχε ανακαλυφθεί ο Απειροστικός Λογισμός ακόμα, δεν μπορούσε να υπολογίσει το



John Wallis.
Εικόνα 36

ολοκλήρωμα. Επιπλέον, αφού το διωνυμικό θεώρημα χρησιμοποιούνταν μόνο για ακέραιες δυνάμεις εκείνη την εποχή, δε μπορούσε να αναπτύξει το $\sqrt{1-x^2}$ και να υπολογίσει ένα ένα τα ζητούμενα εμβαδά. Τελικά με μια επίπονη, και ογκώδη επαγωγική διαδικασία, κατάφερε το 1655 στο έργο του *Arithmetica infinitorum* να εξαγάγει τον τύπο

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\times2\times4\times4\times6\times6\times...}{1\times3\times3\times5\times5\times7\times...}.(\textit{τύπος του Wallis})$$

Ο τύπος αυτός φέρει το όνομά του και αποτελεί πολύ σημαντική συμβολή στην ιστορία του π. Συνοψίζοντας τη διαδικασία και χρησιμοποιώντας σύγχρονο συμβολισμό ο Wallis χρησιμοποίησε τα εξής ολοκληρώματα:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2m}xdx=\frac{1\cdot3\cdot5...(2m-1)}{2\cdot4\cdot6...2m}\cdot\frac{\pi}{2} \quad , \quad \int_0^{\pi/2}\sin^{2m+1}xdx=\frac{2\cdot4\cdot6...2m}{1\cdot3\cdot5...(2m+1)}.$$

Επειδή για m τείνει στο ∞, τα δύο ολοκληρώματα θα είναι ίσα, προκύπτει ο τύπος του Wallis.

Ο τύπος αυτός, όπως και ο τύπος του Viéte, είναι ένα άπειρο γινόμενο, αλλά ταυτόχρονα διαφέρει στο ότι περιλαμβάνει πράξεις μόνο με ρητούς αριθμούς χωρίς πολύπλοκες τετραγωνικές ρίζες. Επιπλέον, ο τύπος του Wallis είναι ενδιαφέρων επειδή συγκλίνει αργά προς το π, δηλαδή ο πρώτος όρος είναι μεγαλύτερος, ο δεύτερος μικρότερος και ο τρίτος πάλι μεγαλύτερος.

Viscount Brouncker.

Εικόνα 37

Ο ***Viscount Brouncker*** (1620-1684 μ. Χ.) (εικ.37) υπολόγισε μια τιμή για το π με τη βοήθεια συνεχών κλασμάτων. Ο τύπος του είναι ισοδύναμος με τον τύπο του Wallis [60], [20], [42], και ήταν ο ακόλουθος,

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+...}}}}} \quad \text{(τύπος του Brouncker)}$$

Αυτό το συνεχές κλάσμα συγκλίνει στις τιμές $1, 3/2, 15/13, 105/76, 945/789, ...$ Για το πώς ο Brouncker κατέληξε σε αυτόν τον τύπο μπορούν να γίνουν διάφορες εικασίες. Ο Wallis απέδειξε ότι είναι ισοδύναμο με τον δικό του τύπο αλλά η απόδειξή του ήταν πολύ πολύπλοκη, και άρα μάλλον δεν ήταν αυτός ο τρόπος που κατέληξε στον τύπο αυτό ο Brouncker. Τον τύπο αυτό τον απέδειξε και ο Euler το 1775. Η απόδειξή του ήταν η ακόλουθη [20]. Έστω η συγκλίνουσα σειρά

$$S = a_0 + a_1 + a_1 a_2 + a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_3 a_4 + ...$$

η οποία μετασχηματίζεται στο συνεχές κλάσμα

$$S = a_0 + \cfrac{a_1}{1 - \cfrac{a_2}{1 + a_2 - \cfrac{a_3}{1 + a_3 - ...}}}$$

Έστω τώρα η σειρά $\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + ...$ και έστω ότι θέτουμε $a_0 = 0$, $a_1 = x$, $a_2 = -x^2/3$, $a_3 = -3x^2/5, ...$ Η σειρά μετατρέπεται ως εξής

$$\arctan x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 - x^2 + \cfrac{9x^2}{5 - 3x^2 + \cfrac{25x^2}{7 - 5x^2 + ...}}}}$$

Θέτοντας στον τύπο αυτό x = 1, προκύπτει $\arctan 1 = \pi/4$, και κατά συνέπεια ο τύπος του Brouncker.

Ακόμα ένας μαθηματικός που συνεισέφερε σημαντικά στην ιστορία του π, αλλά και στην εξέλιξη του ολοκληρωτικού και του διαφορικού λογισμού, είναι ο ***James Gregory*** (1638-1675) (εικ.38) [20], [58]. Σε ότι αφορά την ιστορία του π, η σημαντικότερη προσφορά του είναι η σειρά του τόξου της εφαπτομένης, η οποία και φέρει το όνομά του. Ανακάλυψε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη $1/(1+x^2)$, στο διάστημα (0,x) ήταν ίσο με $\arctan x$. Με σύγχρονο συμβολισμό, και χρήση ολοκληρώματος ανακάλυψε ότι $\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$. Με τη χρήση του τύπου του Cavalieri κατέληξε στη σειρά του τόξου της εφαπτομένης,

James Gregory.

Εικόνα 38

$$\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + ... $$ (*σειρά του Gregory*).

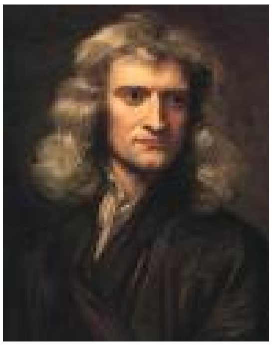
Όμως $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, και έτσι αντικαθιστώντας προκύπτει η εξής άπειρη σειρά

$$\pi = 4\left(1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + ...\right),$$

η οποία είναι και η πρώτη άπειρη σειρά[3] που βρέθηκε ποτέ για το π.

Ο Gregory αναφέρει την ανακάλυψη της περίφημης σειράς του σε ένα γράμμα του το 1671, χωρίς επεξήγηση. Η εφαρμογή της για $x = 1$ έγινε από τον ***Liebniz*** το 1674, και δημοσιεύτηκε το 1682. Αυτός είναι και ο λόγος που αποκαλείται σειρά του Liebniz [20]. Βέβαια είναι μάλλον απίθανο να μην είχε παρατηρήσει και ο Gregory την εφαρμογή της σειράς του, από τη στιγμή μάλιστα που είχε ασχοληθεί με την υπερβατικότητα του π. Εικάζεται ότι εφόσον ο ίδιος εισήγαγε την έννοια της σύγκλισης, θα ήξερε ότι η σειρά αυτή συγκλίνει πολύ αργά, και άρα δεν θεώρησε σημαντικό να το αναφέρει [20], [58]. Αξίζει να σημειωθεί ότι για τον υπολογισμό 2 δεκαδικών ψηφίων του π απαιτούνται 300 όροι της σειράς, και δύο δεκαδικά ψηφία είναι μικρότερης ακρίβειας ακόμα και από την Αρχιμήδεια τιμή $3\,1/7$. Ο De Lagny που υπολόγισε 117 δεκαδικά ψηφία του π ανέφερε ότι για τον υπολογισμό 100 δεκαδικών ψηφίων απαιτούνταν περισσότεροι από 10^{50} όροι της σειράς.

Ο Liebniz μαζί με τον ***Isaac Newton*** (1642-1727) (εικ.39) υπήρξαν οι πατέρες του απειροστικού λογισμού. Ο Newton είναι φημισμένος για την ευφυΐα του και για τα σπουδαία επιτεύγματά του. Το μεγαλείο αυτού του επιστήμονα δεν θα μπορούσε να αφήσει ανέπαφο και τον υπολογισμό του π, ο οποίος ήταν πολύ απλό έργο για εκείνον. Ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε παραγώγους και κατ' επέκταση ολοκληρώματα για την εύρεση εμβαδών. Η μέθοδός του για τον υπολογισμό του π, όπως αναφέρεται στα περισσότερα ιστορικά βιβλία, περιγράφεται παρακάτω [20].



Isaac Newton.

Εικόνα 39

Ο Newton ανακάλυψε, χρησιμοποιώντας μοντέρνο συμβολισμό, το εξής

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \quad (1) .$$

Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό θεώρημα[4], η σχέση (1) μετασχηματίζεται ως εξής

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots \right) dx . \quad (2)$$

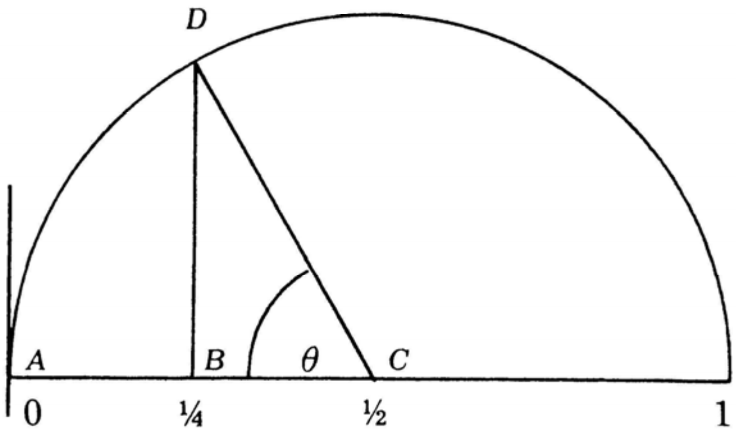
Έτσι, ολοκληρώνοντας τη (2) προκύπτει η σχέση (3),

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots (3).$$

Αντικαθιστώντας στην (3), $x = \frac{1}{2}$, οπότε $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, προκύπτει η παρακάτω άπειρη σειρά για το π, η οποία συγκλίνει πολύ πιο γρήγορα από τη σειρά των Gregory - Liebniz.

$$\pi = 6\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 2^3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5}+....\right)$$ *(η σειρά του Newton)*

Βέβαια στο πρωτότυπο έργο του [20], ο Newton φαίνεται να χρησιμοποιεί, μια κάπως διαφορετική μέθοδο.



Η μέθοδος του Newton για τον υπολογισμό του π.

Εικόνα 40

Θεώρησε έναν κύκλο (εικ.40) με εξίσωση $y=\sqrt{x-x^2}$, όπως αυτόν του παραπάνω σχήματος. Ο κύκλος αυτός είχε ακτίνα $1/2$ και οι συντεταγμένες του κέντρου του ήταν $\left(1/2,0\right)$. Έτσι το κυκλικό τμήμα ADB θα έχει εμβαδόν

$$(ADB)=\int_0^{1/4}\sqrt{x-x^2}\,dx=\int_0^{1/4}\sqrt{x}\sqrt{1-x}dx=$$
$$=(2/3)x^{3/2}-(1/5)x^{5/2}-(1/28)x^{7/2}-(1/72)x^{9/2}\Big|_0^{1/4}=$$
$$=2/\left(3.2^3\right)-1/\left(5.2^5\right)-1/\left(28.2^7\right)-1/\left(72.2^9\right)-....$$

για τον υπολογισμό του οποίου ο Newton χρησιμοποίησε το διωνυμικό θεώρημα. Όμως το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος ADB είναι ίσο με το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ACD αφαιρώντας το τρίγωνο BCD. Υπολογίζοντας το BD προκύπτει ότι είναι ίσο με $\sqrt{3}/4$, και άρα η γωνία θ είναι 60 μοιρών. Έτσι το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ACD είναι $\pi/24$ και του τριγώνου BCD είναι $\sqrt{3}/32$. Άρα το κυκλικό τμήμα ADB θα έχει εμβαδόν $\pi/24-\sqrt{3}/32$. Εξισώνοντας όμως τους δύο τύπους για το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος ADB προκύπτει το εξής άπειρο άθροισμα για το π

$$\pi=\frac{3\sqrt{3}}{4}+24\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{28\cdot 2^7}-\frac{1}{72\cdot 2^9}-\dots\right).$$

Ο Newton ήταν σε θέση να υπολογίσει 16 δεκαδικά ψηφία του π απλά και μόνο με 22 όρους αυτού του αθροίσματος (το τελευταίο ψηφίο ήταν λάθος εξαιτίας της στρογγυλοποίησης), σε αντίθεση με τις επίπονες τετραγωνικές ρίζες της Αρχιμήδειας μεθόδου. Βέβαια ο Newton μάλλον τυχαία κατέληξε σε αυτόν τον τύπο για το π, ενώ υπολόγιζε κάτι άλλο. Ο ίδιος ομολογεί ότι υπολόγισε αρκετά ψηφία κατά τα χρόνια της πανούκλας 1665-6, στο Woolsthorpe, μην έχοντας άλλη ενασχόληση για να γεμίσει το χρόνο του [20].

Οι κυνηγοί των ψηφίων

Στην εποχή του Newton οι κυνηγοί των ψηφίων του π, χρησιμοποιούσαν τη σειρά του Gregory η οποία όπως προαναφέρθηκε, συγκλίνει πολύ γρήγορα. Μάλιστα της έκαναν διάφορες τροποποιήσεις για να συγκλίνει ακόμα γρηγορότερα. Μια από αυτές έγινε από τον αστρονόμο ***Abraham Sharp*** (1651-1742 μ.Χ.) [20], ο οποίος έθεσε $x=\sqrt{(1/3)}$, και η σειρά πήρε τη μορφή

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{3^2\cdot 5}-\frac{1}{3^3\cdot 7}+\dots\right)$$ (*η σειρά του Abraham Sharp*)

με τη βοήθεια της οποίας υπολόγισε 72 δεκαδικά ψηφία [16].

Το 1706 ο καθηγητής αστρονομίας ***John Machin*** (1680-1752 μ. Χ.) (εικ.41) [20], [58] παρατήρησε ότι για $\tan\beta=1/5$, έχουμε $\tan 2\beta=\dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\dfrac{5}{12}$ και

$\tan 4\beta = \frac{2\tan 2\beta}{1-\tan^2\beta} = \frac{120}{119}$, όπου η εφαπτομένη του τετραπλάσιου τόξου διαφέρει μόνο κατά $\frac{1}{119}$ από την ακέραια μονάδα. Όμως $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, και έτσι προκύπτουν τα εξής

$$\tan\left(4\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\beta - 1}{1+\tan 4\beta} = \frac{120/119 - 1}{1+120/119} = -\frac{1}{239},$$

$$\arctan(-1/239) = 4\beta - \pi/4 = 4\cdot\arctan 1/5 - \pi/4.$$

Αντικαθιστώντας τα δύο τόξα εφαπτόμενων με τη βοήθεια της σειράς του Gregory, προκύπτει

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - ....\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - ....\right),$$

ή πιο σύντομα $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$, (*η σειρά του Machin*).

John Machin.

Εικόνα 41

Η σειρά αυτή συγκλίνει πάρα πολύ γρήγορα, γεγονός που επέτρεψε στον John Machin να υπολογίσει 100 δεκαδικά ψηφία του π [16]. Με την ανακάλυψη του Διαφορικού λογισμού το 17^{o} αιώνα, άνοιξε ένας νέος δρόμος υπολογισμού του π, με πρωτοπόρο τον John Machin. Ανακαλύφθηκαν πολλοί ανάλογοι τύποι οι οποίοι βασίζονταν σε τόξα εφαπτομένης και ημίτονου. Η σειρά του Machin παρ όλ' αυτά είναι η πιο εύχρηστη για υπολογισμούς. Λίγο αργότερα, το 1719, ο γάλλος μαθηματικός ***De Lagny*** (1660-1734 μ.Χ.) [20], [58], χρησιμοποιώντας τη σειρά του Sharp χωρίς τροποποιήσεις υπολόγισε 127 δεκαδικά ψηφία, απλά θέτοντας $x = \frac{\pi}{6}$ [16], [58]. Ωστόσο, εβδομήντα πέντε χρόνια μετά, το 1794, ο Αυστριακός μαθηματικός ***Georg Vega*** (1754-1802 μ.Χ.) [20], [16], [58], υπολόγισε 140 ψηφία του π και βρήκε σωστά μόνο τα 112 από τα 127 ψηφία του De Lagny. Βέβαια και από τα δικά του ψηφία τα 136 ήταν σωστά.

Ευρώπη 18^{ος} αιώνας

Leonhard Euler.

Εικόνα 42

Λίγο αργότερα στα μέσα του 18^{ου} αιώνα, ένας από τους σπουδαιότερους μαθηματικούς όλων των εποχών αποφάσισε να στρέψει το ενδιαφέρον του στον υπολογισμό του π. Ο ***Leonhard Euler*** (1707-1783 μ. Χ.) (εικ.42) [20] γεννήθηκε στην Ελβετία, αλλά εργάστηκε σχεδόν σε όλη την Ευρώπη. Υπήρξε πολυγραφότατος μαθηματικός παρά το ότι στα τριάντα του έμεινε τυφλός από το ένα μάτι και στα εξήντα πέντε του έχασε εντελώς την όρασή του. Αξίζει να αναφερθεί το ότι το συγγραφικό του έργο απαρτίζεται από 886 βιβλία και κατά μέσο όρο έγραφε 800 σελίδες το χρόνο. Ο Euler διατύπωσε πολλούς τύπους με τόξα εφαπτομένης και άπειρες σειρές για τον υπολογισμό του π. Μάλιστα όπως αναφέρεται σε άλλο κεφάλαιο αναλυτικότερα, ήταν αυτός που καθιέρωσε τη χρήση του συμβόλου π, καθώς και πολλών άλλων συμβόλων όπως τα $e, i, \Sigma, \int$ και f(x) [20].

Τα αποτελέσματα που θα παρατεθούν παρακάτω, βρίσκονται στο έργο του Euler, *Introductio in Analysin infinitorum*, το οποίο γράφτηκε το 1748 και τυποποίησε τη μαθηματική σκέψη σχεδόν όπως τη χρησιμοποιούμε σήμερα. Ας δούμε όμως αναλυτικότερα το πώς κατέληξε στον τύπο υπολογισμού του τετραγώνου του π. Ο Liebniz, αλλά και πολλοί άλλοι μαθηματικοί, είχαν προβληματιστεί επί χρόνια με την σειρά των αντίστροφων τετραγώνων, καθώς αδυνατούσαν να υπολογίσουν το άθροισμά της. Ο Jacques Bernoulli κατάφερε απλά να αποδείξει ότι συγκλίνει.

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+......$ (*η σειρά των αντίστροφων τετραγώνων*) (1)

Ο Euler το 1736 χρησιμοποίησε για τη λύση του προβλήματος [20] την παρακάτω σειρά του ημίτονου που ήταν ήδη γνωστή από την εποχή του Newton

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.. \text{ (2)}$$

Αυτή τη σειρά τη μετέτρεψε στην εξίσωση $\sin x = 0$ και αντικατέστησε όπου $x^2 = y$. Έτσι προέκυψε η παρακάτω εξίσωση άπειρου βαθμού, για $y \neq 0$.

$$1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} - \frac{y^3}{7!} + \ldots. = 0 \text{ .(3)}$$

Οι ρίζες αυτής της εξίσωσης είναι $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots.$ Άρα οι ρίζες της εξίσωσης $\sin x = 0$, θα είναι $\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, \ldots.$ αφού το 0 έχει εξαιρεθεί. Ο Euler γνώριζε από τη θεωρία εξισώσεων, με την οποία είχε ασχοληθεί, ότι η απόλυτη τιμή του αρνητικού συντελεστή $-\frac{1}{3!}$ της εξίσωσης (3), είναι ίση με το άθροισμα των αντίστροφων των ριζών της εξίσωσης, δηλαδή ισχύει

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \ldots = \frac{1}{3!} \Leftrightarrow \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} \text{. (4)}$$

Η τελευταία σχέση όχι μόνο αποτελεί τη λύση του αθροίσματος της σειράς (1), αλλά δίνει και μια σειρά για τον υπολογισμό του π^2. Ο Euler όμως δε σταμάτησε εδώ. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για τη σειρά του συνημίτονου, κατέληξε στην επόμενη σειρά.

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots. \text{(5)}$$

Από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει το εξής

$$\frac{\pi^2}{6}-2\cdot\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+.....-2\cdot\frac{1}{1^2}-2\cdot\frac{1}{3^2}-2\cdot\frac{1}{5^2}-....\Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi^2}{12}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+....\text{(6)}$$

O Euler, με τη βοήθεια της σειράς με όρους της μορφής $1/j$ όπου $j=1,2,3,...$ και των αριθμών Bernoulli, βρήκε ένα γενικό τύπο για τη σειρά (6), με τον οποίο μπορούσε να υπολογίσει το άθροισμα σε οποιαδήποτε άρτια δύναμη αντίστροφων. Μάλιστα υπολόγισε και τις ειδικές περιπτώσεις, από την 4^η δύναμη,

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+....=\frac{2^2}{5!\cdot 3}\cdot\pi^4$$

μέχρι την 26^η ,

$$\frac{1}{1^{26}}+\frac{1}{2^{26}}+\frac{1}{3^{26}}+....=\frac{2^{24}\cdot 76977927}{27!}\pi^{26}.$$

O Euler ήθελε ακόμα να υπολογίσει και το λογάριθμο του π, και για αυτό το σκοπό, ανακάλυψε άπειρα γινόμενα για τις άρτιες δυνάμεις του π, όπως για παράδειγμα το παρακάτω.

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot....$$

Ακόμα και η μέθοδος του John Machin που προαναφέρθηκε σε αυτό το κεφάλαιο, αποτέλεσε πηγή έμπνευσης για τον Euler, ως προς την ανακάλυψη πολλών άλλων τύπων [20]. Χρησιμοποιώντας τους παρακάτω τύπους, τους οποίους ο ίδιος είχε ανακαλύψει,

$$\arctan\frac{1}{p}=\arctan\frac{1}{p+q}+\arctan\frac{q}{p^2+pq+1}$$

και

$$\arctan\frac{x}{y}=\arctan\frac{ax-y}{ay-x}+\arctan\frac{b-a}{ab+1}+\arctan\frac{c-b}{cb+1}+.....,$$

ήταν σε θέση να βρει πλήθος τύπων για το π. Για παράδειγμα αντικαθιστώντας τους περιττούς αριθμούς με α,b,c,…, προκύπτει η παρακάτω σχέση για το π,

$$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{8}+\arctan\frac{1}{18}+....$$

Όλοι αυτοί οι τύποι βασίζονται σε μια σειρά τόξου εφαπτομένης, και ο Euler ανακάλυψε την ακόλουθη σειρά που συγκλίνει γρηγορότερα από οποιαδήποτε άλλη,

$$\arctan x=\left(\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{2}{3}y+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}y^2+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}y^3+....\right)(7),$$

όπου $y=\dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)}$.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Machin στη μορφή $\pi=20\arctan\left(\frac{1}{7}\right)+8\arctan\left(\frac{3}{79}\right)$ και τη σχέση (7) για να υπολογίσει τους όρους του αθροίσματος, ο Euler κατάφερε να υπολογίσει 20 δεκαδικά ψηφία του π, στη διάρκεια μιας ώρας.

Αυτές είναι μόνο ένα δείγμα από τις πολλές εκφράσεις που ο Euler ανακάλυψε για το π, συμπεριλαμβανομένων συνεχών κλασμάτων και άπειρων γινομένων. Ήταν τέτοιο το βάθος στο οποίο προσέγγισε το πρόβλημα του υπολογισμού του π, ώστε κανένας μετά από αυτόν δεν κατάφερε να βρει κάποιον

αποτελεσματικότερο τρόπο για να προσεγγίσει την τιμή του. Συνοψίζοντας σε ότι αφορά την αριθμητική προσέγγιση του π, ο Euler ήταν αυτός που το προσέγγισε με την γρηγορότερη και την αποδοτικότερη μέθοδο [20].
Όμως από την καλύτερη προσέγγιση του π ξεπηδάει ένα άλλο εύλογο ερώτημα. Τι είδους αριθμός είναι ο π, ρητός ή άρρητος; Με κάθε καινούργιο δεκαδικό ψηφίο οι μαθηματικοί ήλπιζαν ότι θα διακρίνουν κάποια περιοδικότητα, ώστε να τον κατατάξουν στους ρητούς. Όμως κάτι τέτοιο δεν έγινε ποτέ και έτσι τον κατέτασσαν στους άρρητους. Ο Euler έθεσε ένα καινούργιο ερώτημα. Μπορεί να είναι το π λύση αλγεβρικής εξίσωσης πεπερασμένου βαθμού με ρητούς συντελεστές; Θέλοντας να διερευνήσει περαιτέρω το τι συνέβαινε, κατέληξε στο πολύ σημαντικό θεώρημά του, το οποίο αποτελεί το συνδετικό κρίκο μεταξύ εκθετικών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (\textit{θεώρημα του Euler}).$$

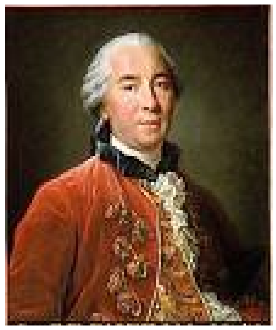
Επιπλέον με τα παρακάτω συνεχή κλάσματα έθεσε τις βάσεις για τη διερεύνηση της αρρητότητας του π, και αργότερα της υπερβατικότητάς του.
Τα συνεχή αυτά κλάσματα ήταν τα εξής [20]

$$\frac{1}{2}(e-1) = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\dots}}}}} \quad , \quad \tanh x = \cfrac{1}{1/x+\cfrac{1}{3/x+\cfrac{1}{5/x+\cfrac{1}{7/x+\cfrac{1}{9/x+\dots}}}}},$$

$$\tanh(x/2) = \cfrac{1}{2/x+\cfrac{1}{6/x+\cfrac{1}{10/x+\cfrac{1}{14/x+\dots.}}}},$$

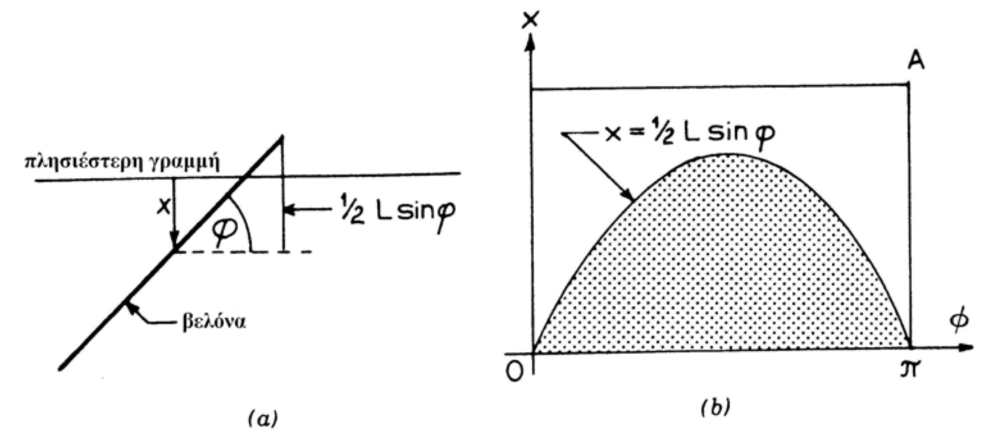
τα οποία και αποτέλεσαν έναυσμα για τις έρευνες των Lambert, Legendre. Το 1755 στο έργο του *De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda*, ανέφερε ότι το π συγκαταλέγεται στην κατηγορία των υπερβατικών αριθμών, αλλά δεν μπορεί να συγκριθεί με άλλους αριθμούς είτε αυτοί είναι ρίζες είτε είναι υπερβατικοί αριθμοί. Και αυτή η εικασία του Euler αποδείχτηκε σωστή αλλά χρειάστηκαν 107 χρόνια για να αποδειχθεί.

Ο επόμενος μαθηματικός του οποίου το ενδιαφέρον κέντρισε ο αριθμός π, ήταν ο ***Pierre Simon Laplace*** (1749-1827 μ.Χ.). Πριν όμως εξετάσουμε τη συμβολή του αναλυτικά, πρέπει να πάμε πίσω στο χρόνο και να μελετήσουμε ένα πολύ διάσημο πρόβλημα. Η θεωρία πιθανοτήτων είναι κυρίως δημιούργημα του 20^{ου} αιώνα, αν και φαίνεται να ξεκινάει το 16^{ο} αιώνα. Ο αριθμός π εμφανίζεται πολύ συχνά στη θεωρία πιθανοτήτων, όπως και την περίπτωση του προβλήματος που έθεσε και επίλυσε ο ***George Louis Leclerc***, ή πιο γνωστός ως ***Comte de Buffon*** (1707-1788) (εικ. 43). Το πρόβλημα που τέθηκε το 1777 έχει ως εξής: Αν πετάξουμε μια βελόνα μήκους L τυχαία πάνω σε ένα τραπέζι όπου είναι χαραγμένες ομοιόμορφα παράλληλες γραμμές με απόσταση d μεταξύ τους, ποια είναι η πιθανότητα η βελόνα να τμήσει κάποια από αυτές τις γραμμές; ($d > L$) [20], [29].



Comte de Buffon.
Εικόνα 43

Για την επίλυση του προβλήματος δεχόμαστε ότι «τυχαία» σημαίνει πως όλες οι θέσεις (ως προς το κέντρο της βελόνας) και όλοι οι προσανατολισμοί της βελόνας έχουν την ίδια πιθανότητα να συμβούν, καθώς και ότι οι δύο αυτές μεταβλητές είναι ανεξάρτητες. Όπως περιγράφεται στο παρακάτω σχήμα, έστω η απόσταση του κέντρου της βελόνας από την πλησιέστερη γραμμή x και η γωνία που σχηματίζει με τις παράλληλες γραμμές φ.



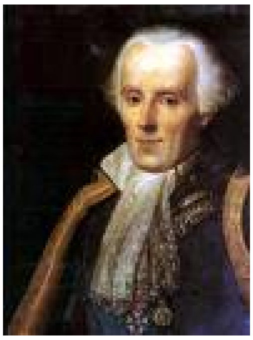
Το πρόβλημα του Comte de Buffon.

Εικόνα 44

Προφανώς το πρόβλημα είναι το ίδιο και για οποιαδήποτε άλλη γραμμή αφού αυτές είναι παράλληλες. Όπως φαίνεται και από το σχήμα της εικόνας 44(α), μια βελόνα θα τέμνει μια γραμμή αν και μόνο αν $x < \frac{1}{2} L \sin\varphi$. Έτσι η πιθανότητα που ψάχνουμε για τη λύση του προβλήματος είναι $P\left(x < \frac{1}{2} L \sin\varphi \right)$. Για τον υπολογισμό αυτής της πιθανότητας, χρησιμοποιούμε ένα σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο τοποθετούμε στον x΄x τη γωνία φ και στον y΄y την απόσταση x, όπως φαίνεται στο σχήμα της εικόνας 44(b). Για τα x,φ ισχύουν οι σχέσεις $0 < x < \frac{d}{2}$ και $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$. Έτσι, όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί των (φ,x) βρίσκονται εντός του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Σχεδιάζοντας τη γραφική παράσταση της $f(\varphi) = \frac{1}{2} L \sin\varphi$, συμπεραίνουμε ότι οι συνδυασμοί των (φ,x) που οδηγούν σε τομή της βελόνας με τη γραμμή βρίσκονται στο γραμμοσκιασμένο εμβαδόν, που βρίσκεται κάτω από την καμπύλη. Έτσι η πιθανότητα που κατάφερε να υπολογίσει ο Buffon ήταν

$$P = \frac{\int_0^{\pi} \frac{1}{2} L \sin\varphi d\varphi}{\pi \cdot \frac{d}{2}} = \frac{\frac{1}{2} L \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi}{\pi \cdot \frac{d}{2}} = \frac{2L}{\pi \cdot d}$$. (*η λύση του Buffon*) (8)

Δεν σταμάτησε όμως σε αυτό το σημείο, αλλά συνέχισε προσπαθώντας να εκτιμήσει την πιθανότητα αυτή πειραματικά. Δηλαδή, ρίχνοντας πάρα πολλές φορές την βελόνα σε ένα χαρτί με παράλληλες γραμμές, κατάφερε να προσεγγίσει το αποτέλεσμα από το μέσο όρο των μετρήσεων. Δεν είναι γνωστό αν εξίσωσε την τιμή της πιθανότητας με την πειραματική μέτρηση για να υπολογίσει το π, κάτι το οποίο έκαναν άλλοι μαθηματικοί αργότερα.



Pierre Simon Laplace.

Εικόνα 45

Το πρόβλημα αυτό ξεχάστηκε για τα επόμενα 35 χρόνια, έως ότου ο Pierre Simon Laplace το επανέφερε στο προσκήνιο. Το έργο του *Théorie analytique des probabilities* το οποίο συνέγραψε το 1812, αποτελεί το θεμέλιο λίθο της μοντέρνας θεωρίας πιθανοτήτων. Στο έργο αυτό αναφέρει το πρόβλημα του Buffon και παρατηρεί ότι από τη σχέση (8) προκύπτει η σχέση

$$\pi = \frac{2L}{dP}$$, (9)

η οποία ανοίγει έναν εντελώς καινούργιο δρόμο για τον υπολογισμό του π. Τα μήκη L και d είναι γνωστά και συχνά για λόγους απλοποίησης των πράξεων καθιστούμε L = d. Το P είναι υπολογίσιμο ρίχνοντας μια βελόνα σε ένα χαρτί με παράλληλες γραμμές πάρα πολλές φορές, εκτιμώντας έτσι την πιθανότητα τομής με τις παράλληλες γραμμές πειραματικά.

Τη μέθοδο αυτή, την οποία γενίκευσε ο Laplace, χρησιμοποίησαν και πολλοί άλλοι προκειμένου να υπολογίσουν τα πρώτα δεκαδικά ψηφία του π, κάτι το οποίο απαιτούσε χιλιάδες ρίψεις. Το 1855 ο ***Mr. A. Smith of Aberdeen*** χρησιμοποιώντας την παραπάνω μέθοδο και πραγματοποιώντας 3204 δοκιμές, κατέληξε στην τιμή $\pi = 3{,}1553$ [16]. Ένας μαθητής του καθηγητή De Morgan, πραγματοποιώντας 600 δοκιμές κατέληξε στην τιμή $\pi = 3{,}137$. Το 1864 ο ***Captain Fox*** πραγματοποιώντας 1120 δοκιμές και με επιπλέον περιορισμούς κατέληξε στην τιμή $\pi = 3,1419$ [16], [20]. Εκτός από την αργή εξέλιξη του πειράματος, η εύρεση k δεκαδικών ψηφίων σε N ρίψεις, δεν παρουσιάζει άλλες δυσκολίες. Βέβαια σε ότι αφορά την ακρίβεια των k δεκαδικών ψηφίων, η μέθοδος θεωρείται ανεπαρκής. Για παράδειγμα η πιθανότητα να βρεθούν σωστά 5 δεκαδικά ψηφία του π, πραγματοποιώντας 3.400 ρίψεις της βελόνας, είναι μικρότερη από 1.5%. Έτσι, η μέθοδος του Laplace άρχισε να εφαρμόζεται αποτελεσματικά με την άφιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής μπορεί να πραγματοποιήσει 500 «ρίψεις» της βελόνας σε ένα δευτερόλεπτο, και κατ' επέκταση 1,8 εκατομμύρια «ρίψεις» σε μια ώρα [20]. Ως «ρίψη» εννοείται η επιλογή ενός τυχαίου ζευγαριού (x,φ) από μια λίστα με όλες τις δυνατές τιμές τους. Επιπλέον προγραμματίζεται να αναγνωρίζει αν η βελόνα τέμνει τις γραμμές, δηλαδή αν ικανοποιείται η ανισότητα $x < \frac{1}{2} L \sin\varphi$. Τέλος προγραμματίζεται να υπολογίζει το λόγο της πιθανότητας P, το π από τον τύπο (9) και να εκτυπώνει τα αποτελέσματα.

Ένα πρόγραμμα τέτοιου τύπου στη γλώσσα BASIC είναι και το παρακάτω,

```
 10 LET N = 0
 20 PRINT ‘NO. OF THROWS’, ‘PI’
 30 FOR J = 1 TO 24
 40 FOR K = 1 TO 500
 50 LET X = RND(X)
 60 LET U = SIN (3.1415927*RND(F))
 70 IF X GT U THEN 90
 80 LET N = N + 1
 90 NEXT K
100 LET T = 500*J
110 LET P = 2*T/N
120 PRINT T, P
130 NEXT J
140 END
```

Το πρόγραμμα αυτό στις 12.000 ρίψεις δίνει την τιμή 3,1417725 για το π, μόλις σε 53 δευτερόλεπτα. Στη γραμμή 60 του παραπάνω προγράμματος αναγκαζόμαστε να εισάγουμε μια προσέγγιση της τιμής του π, ώστε η γωνία φ να παίρνει τιμές από 0^o έως 180^o με τυχαίο τρόπο. Ακόμα όμως και αν βελτιωθούν οι ατέλειες του προγράμματος, στον ίδιο χρόνο μπορούν να προσεγγιστούν περισσότερα και ακριβέστερα δεκαδικά ψηφία του π, με τη μέθοδο του Euler [20].

Το σύμβολο π.

Το π είναι το δέκατο έκτο γράμμα της ελληνικής αλφαβήτου, και πρόκειται για το ευρύτερα αναγνωρισμένο και χρησιμοποιημένο ελληνικό γράμμα εκτός πανεπιστημιακής κοινότητας. Κάνει την εμφάνισή του ακόμα και στους υπολογιστές τσέπης ενώ είναι οικείο σε μια ευρεία γκάμα ανθρώπων, από μαθητές δημοτικού μέχρι καθηγητές πανεπιστημίου. Ακόμα και αν κάποιοι άνθρωποι δεν ξέρουν ακριβώς τι συμβολίζει, το αναγνωρίζουν σαν σύμβολο. Η παρουσία του είναι έντονη όχι μόνο στη μαθηματική επιστήμη αλλά και σε πληθώρα άλλων επιστημών, όπως η στατιστική, η φυσική και η αστρονομία. Παρ' όλ' αυτά η χρήση αυτού του συμβόλου με τη σημερινή σημασία του αριθμεί περίπου 250 χρόνια.

Πρέπει να διευκρινιστεί ότι από την αρχαία Ελλάδα μέχρι την εποχή των Ρωμαίων δεν υπήρχε κάποιο σύμβολο για το λόγο της περιφέρειας του κύκλου προς τη διάμετρο. Το ίδιο συνέβη και με τους Άραβες και τους Κινέζους. Στα μεσαιωνικά λατινικά περιγράφεται ως εξής: *quantitas, in quam cum multiplicetur diameter, proveniet circumferential*, [20] δηλαδή η ποσότητα με την οποία όταν πολλαπλασιαστεί η διάμετρος, προκύπτει η περιφέρεια. Αυτή η πρόταση ήταν μόνο ένα μέρος των μακροσκελών προτάσεων που αναγκάζονταν να χρησιμοποιούν στη θέση των τύπων που χρησιμοποιούμε σήμερα. Για παράδειγμα το εμβαδόν του κύκλου δινόταν από την πρόταση *multiplicatio medietatis diametric in se ejus, quod proveniet, in quantitatem, in quam cum multiplicatus diameter provenit circumferential, aequalis superficies circuli*. Δηλαδή, ο πολλαπλασιασμός της μισής διαμέτρου με τον εαυτό της και μετά αυτού που θα προκύψει με την ποσότητα, με την οποία όταν πολλαπλασιαστεί η διάμετρος δίνει την περιφέρεια , ισοδυναμεί με το εμβαδόν του κύκλου ή αλλιώς $E = \pi \cdot p^2$. Ίσως ένας από τους λόγους που συντέλεσαν στην ακμή των Ελλήνων στα μαθηματικά να είναι το ότι η γεωμετρία τους δεν χρησιμοποιούσε τέτοιες πολύπλοκες προτάσεις και πολλές από αυτές χρησιμοποιούνται αυτούσιες μέχρι και σήμερα.

Ένας από τους πρώτους που χρησιμοποίησαν το π στα μαθηματικά ήταν ο ***William Oughtred*** (1574-1660 μ. Χ.) το 1647 [16], [60]. Προσδιόρισε το λόγο της περιφέρειας προς τη διάμετρο ως $\frac{\pi}{\delta}$ όπου το π αντιπροσωπεύει την περιφέρεια και το δ τη διάμετρο του κύκλου. Λίγα χρόνια αργότερα ο ***John Wallis*** χρησιμοποίησε για το λόγο που σήμερα συμβολίζουμε με $\frac{4}{\pi}$, το σύμβολο ך ή το εβραϊκό γράμμα μεμ [22], [60]. Ο ίδιος το 1685, χρησιμοποίησε το π για να συμβολίσει την περιφέρεια που διαγράφει το κέντρο βάρους ενός σώματος όταν κάνει μια περιστροφή. Την πρώτη φορά που κάποιος χρησιμοποίησε ξεχωριστό γράμμα για το λόγο της περιφέρειας του κύκλου προς τη διάμετρο ήταν το 1689, όταν ο καθηγητής ***Ζ. Κριστόφ Στουρμ***, καθηγητής στο πανεπιστήμιο του Άλντορφ της Βαυαρίας, χρησιμοποίησε το γράμμα e. Προφανώς ο συμβολισμός αυτός δεν καθιερώθηκε [22]. Το 1697 ο ***David Gregory*** χρησιμοποίησε το συμβολισμό $\frac{\pi}{\rho}$ για το λόγο της περιφέρειας προς την ακτίνα [16]. Για τα επόμενα περίπου 100 χρόνια οι μαθηματικοί χρησιμοποιούν λόγο δύο συμβόλων για το π, όπως $\frac{\pi}{p}$ ή $\frac{c}{r}$, όπου π,c συμβολίζουν την περιφέρεια του κύκλου και ρ,r την ακτίνα του κύκλου.

Την εποχή του Newton πρωτοεμφανίζεται το σύμβολο π για το λόγο της περιφέρειας του κύκλου προς τη διάμετρο. Χρησιμοποιήθηκε από τον μάλλον αυτοδημιούργητο μαθηματικό ***William Jones*** (1675-1749 μ.Χ.) ο οποίος έγραψε βιβλία γενικών μαθηματικών και συχνά μετέφραζε τα έργα του Newton από τα λατινικά. Το 1706 εξέδωσε στα αγγλικά το έργο *Synopsis Palmariorum Matheseos*, που σημαίνει Μια Νέα Εισαγωγή στα Μαθηματικά [21]. Το έργο του αυτό προοριζόταν, σύμφωνα με τον ίδιο, «για χρήση από φίλους που είχαν την ευκαιρία, την άνεση ή καλύτερα την υπομονή να ψάξουν ανάμεσα σε τόσο διαφορετικούς συγγραφείς και να ξεφυλλίσουν τόσους πληκτικούς τόμους, όπως είναι αναπόφευκτο προκειμένου να σημειώσουν σημαντική πρόοδο στα Μαθηματικά». Πρόκειται για μια μεγαλοφυή σύνοψη των μέχρι τότε γνωστών μαθηματικών.

Το σύμβολο π πρωτοεμφανίζεται στη σελίδα 243 και μετά στη σελίδα 263. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι δε χρησιμοποιεί το π συνέχεια με τον ίδιο τρόπο. Στη σελίδα 243, η οποία απεικονίζεται στο απόσπασμα 4, το α θεωρείται ένα τόξο 30^{o}, και t μια εφαπτομένη σε δοσμένο σχήμα. Ο Jones υπονοεί ότι χρησιμοποιεί το σύμβολο π ως συντομογραφία της αγγλικής λέξης για την περιφέρεια κύκλου, *periphery,*ο οποίος έχει διάμετρο ίση με 1. Επίσης παραθέτει και τα 100 δεκαδικά ψηφία του π, «όπως αυτά υπολογίστηκαν από την ακριβή και ικανή πένα του πραγματικά μεγαλοφυούς John Machin», όπως ο ίδιος αναφέρει χαρακτηριστικά. Στη σελίδα 263, η οποία απεικονίζεται στο απόσπασμα 5, το π χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει το γνωστό λόγο 3,14159…. Σε άλλο σημείο του βιβλίου του το π ήταν σημείο σε γεωμετρικό σχήμα. Η αστάθεια των συμβόλων ήταν συνηθισμένο φαινόμενο για την εποχή και εμφανιζόταν στα έργα πολλών αξιόλογων μαθηματικών.

$$6a, \text{ or } 6 \times t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5, \text{ \&c.} = \frac{1}{2} \text{ Periphery } (\pi)\ldots$$

Let

$$\alpha = 2\sqrt{3},\ \beta = \frac{1}{3}\alpha,\ \gamma = \frac{1}{3}\beta,\ \delta = \frac{1}{3}\gamma, \text{ \&c.}$$

Then

$$\alpha - \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{5}\gamma - \frac{1}{7}\delta + \frac{1}{9}\epsilon, \text{ \&c.} = \frac{1}{2}\pi,$$

or

$$\alpha - \frac{1}{3}\frac{3\alpha}{9} + \frac{1}{5}\frac{\alpha}{9} - \frac{1}{7}\frac{3\alpha}{9^2} + \frac{1}{9}\frac{\alpha}{9^2} - \frac{1}{11}\frac{3\alpha}{9^3} + \frac{1}{13}\frac{\alpha}{9^3}, \text{ \&c.}$$

Theref. the (Radius is to ½ Periphery, or) Diameter is to the Periphery, as 1,000, &c to 3.141592653 . 5897932384 . 6264338327 . 9502884197 . 1693993751 . 0582097494 . 4592307816 . 4062862089 . 9862803482 . 5342117067. 9+ True to above a 100 Places; as Computed by the accurate and Ready Pen of the Truly Ingenious Mr. *John Machin.*

Απόσπασμα από το βιβλίο του William Jones , ***Synopsis Palmariorum Matheseos.*** **σελ.243**

Απόσπασμα 4

There are various other ways of finding the *Lengths*, or *Areas* of particular *Curve Lines*, or *Planes*, which may very much facilitate the Practice; as for Instance, in the *Circle*, the *Diameter* is to *Circumference* as 1 to

$$\frac{16}{3} - \frac{4}{239} - \frac{1}{3}\frac{16}{5^3} - \frac{4}{239^3} + \frac{1}{5}\frac{16}{5^5} - \frac{4}{239^5} -, \text{\&c.} = 3.14159, \text{\&c.} = \pi \ldots$$

Whence in the *Circle*, any one of these three, α, c, d, being given, the other two are found, as, $d = c \div \pi = \overline{\alpha \div \frac{1}{4}\pi}\big|^{\frac{1}{2}}$, $c = d \times \pi = \overline{\alpha \times 4\pi}\big|^{\frac{1}{2}}$, $\alpha = \frac{1}{4}\pi d^2 = c^2 \div 4\pi$.

Απόσπασμα από το βιβλίο του William Jones, *Synopsis Palmariorum Matheseos.* σελ.263

Απόσπασμα 5

Βέβαια η αλήθεια είναι ότι αν και ο Jones χρησιμοποιεί το π για πρώτη φορά, δεν είχε το ανάλογο κύρος για να το μετατρέψει σε ευρύτερα αποδεκτό σύμβολο. Αυτός που καθιέρωσε αυτό το συμβολισμό ήταν ο ***Leonhard Euler*** (1707-1783 μ. Χ.). Το 1734 χρησιμοποιούσε ακόμα το γράμμα p αντί για το π και το γράμμα g αντί για το λόγο $\frac{\pi}{2}$. Για πρώτη φορά το χρησιμοποίησε το 1737 στο έργο του *Variae Observationes circa series infinitas.* Δεν είναι γνωστό αν ο Euler γνώριζε τη χρήση του συμβόλου π από τον Jones. Από τη στιγμή που άρχισε να το χρησιμοποιεί ο Euler έγινε ευρέως αποδεκτό. Ο ***Johan Bernoulli*** σε γράμμα του προς τον Euler το 1739 χρησιμοποίησε το γράμμα c, αλλά τον επόμενο χρόνο χρησιμοποιούσε το π [16]. Ο Nicolaus Bernoulli άρχισε να χρησιμοποιεί το π στην αλληλογραφία του με τον Euler λίγο αργότερα. Στη συνέχεια όταν ο Euler χρησιμοποίησε το συμβολισμό π στο έργο του *Introductio in Analysin Infinitorum*, το οποίο δημοσιεύτηκε το 1748, η χρήση του συμβόλου γενικεύτηκε [22], [16].

Σε αυτό το σημείο πρέπει να διευκρινιστεί ότι με το σύμβολο π συμβολίζονταν και άλλες έννοιες κατά το 18^{o} αι. [22]. Ο Πιερ Εριγκόν χρησιμοποίησε το π για να υποδηλώσει την αναλογία ή το λόγο δύο αριθμών, π.χ. 2π3 αντί για 2:3. Ο Α. Γκ. Κέστνερ χρησιμοποίησε το 1:P για να δηλώσει το λόγο της διαμέτρου προς την περιφέρεια, ενώ χρησιμοποίησε το π για την ίδια την περιφέρεια. Αργότερα χρησιμοποίησε το π για να συμβολίσει τα ημυ και συνυ ενώ στη συνέχεια έγινε ο συντελεστής του n+1 όρου κάποιας εξίσωσης. Από το 1771 και μετά ο Κέστνερ χρησιμοποιούσε το π με τη σύγχρονη σημασία.

Το 1794 ο Legendre δημοσίευσε το έργο του *Éléments de Géométrie.* Από τότε και μετά σχεδόν όλοι οι μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν το σύμβολο π με τον ίδιο τρόπο που το χρησιμοποιούμε και εμείς σήμερα. Βέβαια το 1799 ο Πάολο Ρουφίνι χρησιμοποίησε το σύμβολο π για να δηλώσει παραγοντικά. Στα χρόνια που ακολούθησαν ωστόσο ο συμβολισμός τροποποιήθηκε με τη χρήση του κεφαλαίου Π. Ακόμα και σήμερα το π χρησιμοποιείται για να συμβολίσει τη συνάρτηση $\pi(n)$, η οποία αντιπροσωπεύει το πλήθος των πρώτων αριθμών που είναι μικρότεροι ή ίσοι του n [22].

Η φύση του αριθμού π και ο τετραγωνισμός του κύκλου.

Όπως προαναφέρθηκε σε άλλο κεφάλαιο, ο Euler ήταν αυτός που πρώτος έθεσε το ερώτημα, για το τι είδους αριθμός είναι ο π. Δηλαδή, κατατάσσεται στους ρητούς ή στους άρρητους; Στους αλγεβρικούς ή στους υπερβατικούς; Οι αρχαίοι Έλληνες πριν από την εποχή του Ευκλείδη είχαν αντιληφθεί και αποδείξει την ύπαρξη αριθμών, που δεν μπορούν να γραφούν ως λόγος δύο ακεραίων. Είχαν ανακαλύψει δηλαδή τους άρρητους αριθμούς. Επιπλέον, οι άρρητοι αριθμοί αποτελούν λύσεις αλγεβρικών εξισώσεων με ακέραιους συντελεστές[5]. Για παράδειγμα οι λύσεις της $x^2 - 2 = 0$, είναι οι $x = \pm\sqrt{2}$. Ήδη από την εποχή του Euler οι άνθρωποι άρχισαν να υποπτεύονται ότι υπήρχαν πιο «περίεργοι» αριθμοί από τους άρρητους. Δηλαδή αριθμοί που δεν μπορούν να γραφτούν ως λόγος δύο ακεραίων και επιπλέον δεν αποτελούν λύση αλγεβρικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές. Οι αριθμοί αυτοί ονομάστηκαν υπερβατικοί.

Πριν ακόμα ο Liouville αποδείξει την ύπαρξη των υπερβατικών αριθμών το 1840, η αρρητότητα του π αποδείχτηκε από τους ***Johann Heinrich Lambert*** (1728- 1777 μ. Χ.) και ***Andrien-Marie Legendre*** (1752-1833 μ. Χ.). Ο Lambert απέδειξε την αρρητότητα του π το 1767, ενώ ο Legendre παρέθεσε μια πιο αυστηρή απόδειξη για ένα βοηθητικό θεώρημα σχετικό με τα συνεχή κλάσματα που είχε χρησιμοποιήσει ο Lambert, θεμελιώνοντας έτσι την απόδειξή του. Ας δούμε όμως αναλυτικότερα πως έχουν τα πράγματα.

Η αρρητότητα του π.

Ο Lambert, το 1766, στο έργο του *Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen* (Βασικές γνώσεις για όσους ενδιαφέρονται για τον τετραγωνισμό και την ευθειοποίηση του κύκλου), και το 1767 στο έργο του *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantities transcendentes circulaires et logarithmiques* [8], [21], δημοσίευσε την αποδειξή του για την αρρητότητα του π. Ξεκινώντας από τα αναπτύγματα του

Euler υπό μορφή σειρών των αριθμών e και $\varepsilon\phi$ x, τα μετασχημάτισε στα εξής συνεχή κλάσματα,

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\cfrac{1}{\cfrac{2}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{6}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{10}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{14}{x}+....}}}} (1) \qquad \varepsilon\phi x=\cfrac{1}{\cfrac{1}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{3}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{5}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{7}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{9}{x}-.....}}}}} (2).$$

Με τη βοήθεια αυτών των κλασμάτων απέδειξε τις εξής προτάσεις:

1. Αν ο x είναι ρητός αριθμός διάφορος του 0, τότε τα αριστερά μέλη των (1) και (2) δεν είναι δυνατό να είναι ρητοί αριθμοί.
2. Αν τα αριστερά μέλη των (1) και (2) είναι ρητοί αριθμοί, τότε τα αντίστοιχα x δεν μπορεί να είναι ρητοί αριθμοί.

Εφαρμόζοντας στο (1) $x=1$, προκύπτει ο αριθμός e, ο οποίος κατά την πρόταση 1 δεν πρέπει να είναι ρητός. Αντίστοιχα εφαρμόζοντας στο (2) $x=\frac{\pi}{4}$, προκύπτει ότι $\varepsilon\phi\frac{\pi}{4}=1$, και άρα ο π από την πρόταση 2 δεν πρέπει να είναι ρητός.■

Κατά αυτό τον τρόπο αποδείχτηκε η αρρητότητα του π από τον Lambert, μόνο που οι αποδείξεις του δεν ήταν πλήρεις. Ο Legendre [20], το 1794, στο έργο του *Elements de Géometrie* (Στοιχεία Γεωμετρίας), απέδειξε πιο αυστηρά την αρρητότητα του π. Επιπλέον απέδειξε ότι το π^2 είναι άρρητος αριθμός καταρρίπτοντας τις ελπίδες ότι το π μπορεί να είναι το τετράγωνο κάποιου ρητού. Μάλιστα προς το τέλος της πραγματείας του προσθέτει « Είναι πολύ πιθανό ο αριθμός π να μη συμπεριλαμβάνεται ούτε στους αλγεβρικούς άρρητους, δηλαδή να μην είναι ρίζα αλγεβρικής εξίσωσης με ρητούς συντελεστές και πεπερασμένο αριθμό όρων. Φαίνεται όμως πως αυτό είναι πολύ δύσκολο να αποδειχθεί αυστηρά.» Πράγματι, ο π δεν είναι αλγεβρικός αριθμός και η απόδειξη ήταν τόσο δύσκολη που χρειάστηκε να περάσουν 88 χρόνια για να αποδειχθεί. Μόλις εφτά χρόνια μετά το θάνατο του Legendre, ο

Liouville απέδειξε την ύπαρξη των αριθμών αυτού του τύπου, οι οποίοι ονομάστηκαν υπερβατικοί.

Παραθέτουμε ακόμα μια απόδειξη της αρρητότητας του π, του Ivan Niven [1].

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^n(1-x)^n/n!$.

Αποδεικνύεται ότι:

Α) $0<f(x)<1/n!$ εάν $0<x<1$.

Β) Για κάθε παράγωγο k τάξεως οι αριθμοί $f^{(k)}(0)$ και $f^{(k)}(1)$ είναι ακέραιοι.

Υποθέτουμε ότι ο π^2 είναι ρητός, δηλαδή αληθεύει η σχέση $\pi^2=a/b$, όπου α,b είναι θετικοί ακέραιοι. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x)=b^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(2k)}(x)\pi^{2n-2k}\ .$$

Αποδεικνύεται ότι:

Γ) $F(0)$ και $F(1)$ είναι ακέραιοι.

Δ) $\pi^2 a^n f(x)\sin\pi x=\dfrac{d}{dx}\{F'(x)\sin\pi x-\pi F(x)\cos\pi x\}$

Ε) $F(1)+F(0)=\pi^n a^n\int_0^1 f(x)\sin\pi x dx$

στ) Από τις σχέσεις (α) και (ε) προκύπτει η ανισότητα $0<F(1)+F(0)<1$ όταν το n είναι αρκούντως μεγάλο.

Όμως η ανισότητα στ) έρχεται σε αντίφαση με τη γ). Άρα ο π είναι άρρητος αριθμός.■

Ο Lambert έδωσε επίσης το εξής συνεχές κλάσμα για το π,

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\dots}}}}}}}}$$

το οποίο συγκλίνει στα αντίστροφα των παρακάτω κλασμάτων όπως τα υπολόγισε ο Lambert.

1:3

7:22

106:333

313:355

33102:103993

33215:104348

66317:208341

99532:312689

265381:833719

364913:1146408

1360120:4272943

1725033:5419351

25510582:80143857 κ.τ.λ.

Τα αντίστροφα των τεσσάρων πρώτων κλασμάτων ήταν ήδη γνωστά [20]. Το 3 είναι η τιμή που παρατίθεται στην Παλαιά Διαθήκη στο Βασιλειών Γ΄ 7:23. Το $22/7$ ήταν το άνω όριο της τιμής που έδωσε ο Αρχιμήδης για το π τον 3$^{\text{ο}}$ π. Χ. αι. Το $333/106$ ήταν το κάτω όριο της τιμής που έδωσε ο Andriaan Anthoniszoon, το 1583. Το $355/113$ ήταν η τιμή που βρέθηκε από τον Valentine Otho το 1573 [60], αλλά και από τους Anthoniszoon, Metius και Viéte το 16$^{\text{ο}}$ αι.
Η απόδειξη της ύπαρξης αυτών των αριθμών δεν ήταν απλή υπόθεση. Ας δούμε το παρακάτω παράδειγμα. Έστω για παράδειγμα η εξίσωση $\sin x = 0$. Το ανάπτυγμα του ημίτονου την καθιστά ισοδύναμη με την παρακάτω εξίσωση,

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = 0$$

η οποία όμως δεν είναι αλγεβρική γιατί ο βαθμός n του x δεν είναι πεπερασμένος. Έτσι, η εξίσωση αυτή κατατάσσεται στις υπερβατικές, εφ’ όσον δεν είναι αλγεβρική. Στις λύσεις της συγκαταλέγονται η $x = 0$ και η $x = \pi$. Προφανώς δεν είναι απαραίτητο οι υπερβατικές εξισώσεις να έχουν υπερβατικές λύσεις. Έτσι η απόδειξη της ύπαρξης των υπερβατικών αριθμών παρέμενε δύσκολη υπόθεση.

Η απόδειξη της ύπαρξης των υπερβατικών αριθμών.

Η απόδειξη της ύπαρξης των υπερβατικών αριθμών έγινε το 1840 από τον ***Joseph Liouville*** (1809 – 1882 μ. Χ.). Σύμφωνα με τον Liouville, υπάρχουν δύο κατηγορίες αριθμών, οι αλγεβρικοί και οι υπερβατικοί αριθμοί. Στους αλγεβρικούς αριθμούς ανήκουν όλοι οι αριθμοί οι οποίοι μπορούν να αποτελέσουν ρίζες αλγεβρικών εξισώσεων με ακέραιους συντελεστές. Επιπλέον απέδειξε ότι οι ρίζες αλγεβρικών εξισώσεων με αλγεβρικούς συντελεστές είναι επίσης αλγεβρικοί αριθμοί. Στους υπερβατικούς αριθμούς ανήκουν οι αριθμοί οι οποίοι δεν μπορούν να γραφτούν ως ρίζες αλγεβρικών εξισώσεων με ακέραιους συντελεστές.

Για την απόδειξη της ύπαρξης των υπερβατικών αριθμών εργάστηκε ως εξής [8]:

Έστω ξ ένας αλγεβρικός αριθμός βαθμού n, και $F(\xi)=0$ η εξίσωση την οποία ικανοποιεί. Έστω ακόμα $\frac{p}{q}$ μια κατά προσέγγιση τιμή του ξ η οποία ανήκει στο διάστημα (α,β), το οποίο περιέχει και το ξ. Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το $\frac{p}{q}$ είναι ανάγωγο κλάσμα. Τοποθετώντας την τιμή αυτή στην εξίσωση, προκύπτει ότι $F\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{A}{q^n}$, όπου Α είναι ακέραιος και $A \geq 1$, αφού η $\frac{p}{q}$ δεν είναι ρίζα. Προφανώς θα ισχύει ότι $\left|F\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq \frac{1}{q^n}$ (3).

Θέτουμε $\xi-\frac{p}{q}=h$ (4) . Από τον τύπο του Taylor και από το ότι $F(\xi)=0$, προκύπτει $F\left(\frac{p}{q}\right)=hF'(\xi+\theta \cdot h)$, 0<θ<1 (5). Αφού όμως η F΄ όπως και η F είναι πολυώνυμο ως προς ξ, θα υπάρχει πάντα ένας αριθμός Μ τέτοιος ώστε, στο διάστημα (α, β) να έχουμε $|F'(x)| < M$ (6). Από τις σχέσεις (3), (4), (5), (6), προκύπτει ότι $\left|\frac{p}{q} - \xi\right| > \frac{1}{q^{n+1}}$ (7), αφού πάντα υπάρχει Μ τέτοιο ώστε $q > M$. Η σχέση (7) αποτελεί μια συνθήκη την οποία ικανοποιούν όλοι οι αλγεβρικοί αριθμοί βαθμού n, εφ' όσον $q > M$.

Εάν ο Liouville κατάφερνε να αποδείξει ότι υπάρχουν αριθμοί ζ, για τους οποίους ισχύει η σχέση $\left|\frac{p}{q} - \zeta\right| < \frac{1}{q^{n+1}}$ (8), για q και n απεριορίστως μεγάλα, τότε θα σήμαινε αυτομάτως ότι αυτοί οι αριθμοί ζ δεν είναι αλγεβρικοί. Για το σκοπό αυτό ο Liouville θεώρησε τους αριθμούς $\zeta = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^{1\cdot 2}} + \frac{a_3}{10^{1\cdot 2\cdot 3}} + \ldots + \frac{a_m}{10^{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot m}} + \ldots$ (9) , οι οποίοι είναι ακέραιοι και για αυτούς ισχύει $0 \le a_i < 10$. Έστω ότι αντικαθιστούμε τους m πρώτους όρους της σχέσης (9) με $\frac{p}{q}$. Η σχέση (9) γίνεται $\zeta = \frac{p}{q} + \frac{a_{m+1}}{q^{m+1}} + \frac{a_{m+2}}{q^{(m+1)(m+2)}} + \ldots$. Έτσι για $m > n+1$ προκύπτει η σχέση (8). Εφ' όσον $q = 10^{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots m}$, συνεπάγεται ότι οι αριθμοί ζ δεν είναι αλγεβρικοί και άρα είναι υπερβατικοί. ■

Ο θεμελιωτής της θεωρίας συνόλων, ο ***Georg Cantor*** (1845 – 1918 μ.Χ.) παρουσίασε την πρόταση του Liouville με τρόπο απλούστερο. Απέδειξε το 1873 ότι το σύνολο των ρητών , αλλά και το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο. Αντίθετα το σύνολο των πραγματικών, αλλά και το σύνολο των υπερβατικών αριθμών είναι υπεραριθμήσιμο. Αυτό σημαίνει ότι σχεδόν όλοι οι πραγματικοί και οι μιγαδικοί αριθμοί είναι υπερβατικοί, εφ' όσον το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο. Συμπεραίνουμε ότι αν και είναι δύσκολη η εύρεσή τους , υπάρχει πληθώρα υπερβατικών αριθμών.

Ας δούμε όμως αναλυτικότερα την απόδειξή του [8]. Ο Cantor απέδειξε πρώτα ότι οι πραγματικοί αλγεβρικοί αριθμοί αποτελούν αριθμήσιμο σύνολο, που στα μαθηματικά σημαίνει ότι υπάρχει 1-1 αντιστοιχία με το σύνολο των φυσικών αριθμών. Στη συνέχεια απέδειξε ότι το σύνολο των αριθμητικών τιμών με τις οποίες μπορούμε να αναπαραστήσουμε τα σημεία του τμήματος ευθείας από 0 έως 1, δεν είναι αριθμήσιμο. Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι στις αριθμητικές τιμές των σημείων ευθείας από 0 έως 1, περιλαμβάνονται και μη αλγεβρικοί αριθμοί.

Η απόδειξη της υπερβατικότητας του αριθμού e.

Ο τρόπος με τον οποίο προσδιορίστηκαν οι υπερβατικοί αριθμοί τόσο από τον Liouville όσο και από τον Cantor, δεν έδινε καμία άλλη πληροφορία για αυτούς, πέραν του ότι δεν αποτελούν ρίζες αλγεβρικών εξισώσεων με ακέραιους συντελεστές. Επιπλέον, η κατάταξη ενός αριθμού οριζόμενου κατά κάποιον τρόπο, στους αλγεβρικούς ή υπερβατικούς, συχνά παρουσιάζει έντονες δυσκολίες. Όταν το 1873, ο ***Charles Hermitte*** (1822 – 1901 μ.Χ.) απέδειξε ότι ο αριθμός e είναι υπερβατικός, ήταν επόμενο να προκαλέσει το ενδιαφέρον της παγκόσμιας μαθηματικής κοινότητας.

Ο αριθμός e είναι η βάση των φυσικών ή νεπέριων λογαρίθμων και ισούται με $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + ... = 2{,}718281828459...$ Οφείλει το συμβολισμό του στον μεγάλο μαθηματικό Leonard Euler και φαίνεται ότι προέκυψε από το πρόβλημα του ανατοκισμού. Η απόδειξη της υπερβατικότητάς του υπήρξε σταθμός στην ιστορία των μαθηματικών γιατί ήταν το πρώτο παράδειγμα αριθμού οριζόμενου με τρόπο αναλυτικό και απλό που αναγνωριζόταν ως υπερβατικός αριθμός. Επιπλέον, θεωρείται από πολλούς ως ο σημαντικότερος αριθμός στην Ανάλυση και ακόμα συνδέεται με το π, με την περίφημη σχέση του Euler $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Η απόδειξη του Hermitte [21] ήταν αρκετά πολύπλοκη και μακροσκελής. Ουσιαστικά κατάφερε να αποδείξει ότι η εξίσωση

$$C_1 e^a + C_2 e^b + C_3 e^c + ... = 0$$

όπου $C_1, C_2, C_3, ...$ είναι ρητοί συντελεστές και οι a,b,c,… φυσικοί αριθμοί, είναι αδύνατη. Η προηγούμενη πρόταση είναι ευρύτερα γνωστή ως *θεώρημα του*

Hermitte. Το θεώρημα αυτό αναθέρμανε το ενδιαφέρον των μαθηματικών, πυροδοτώντας το ερώτημα μήπως και το π είναι υπερβατικός αριθμός. Μια πρώτη απλοποίηση της απόδειξης του Hermitte δημοσιεύτηκε το 1885, στο *Berichte der Berliner Akademie* από τον Karl Wilhelm Weierstrass [21] (1815-1897 μ.Χ.). Το 1893 δημοσιεύτηκαν στο *Mathematische Annalen* και άλλες απλοποιημένες αποδείξεις, από τους Hilbert [21], Hurwitz και Gordan. Ας δούμε όμως την απόδειξη του ***Hilbert*** (1862-1943 μ. Χ.) αναλυτικότερα [47], [8].

Για την απόδειξη της υπερβατικότητας του e θα χρησιμοποιήσουμε εις άτοπον απαγωγή. Έστω η σχέση $F(e) = c_0 + c_1 e + c_2 e^2 + ... + c_n e^n = 0$ (10), όπου c_i ακέραιοι. Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (10) με κατάλληλο αριθμό M τέτοιο ώστε να προκύψει η εξής σχέση

$$\begin{aligned} &MF(e) = M_0 c_0 + M_1 c_1 + M_2 c_2 + ... + M_n c_n + \\ &+ \varepsilon_1 c_1 + \varepsilon_2 c_2 + ... + \varepsilon_n c_n = 0 \end{aligned} \quad (11).$$

Στη συνέχεια θα αποδειχτεί ότι η τιμή της πρώτης σειράς της σχέσης (11) είναι ακέραια και μη μηδενική, ενώ η τιμή της δεύτερης σειράς της σχέσης (11) δύναται να γίνει όσο μικρή θέλουμε. Κατά συνέπεια θα οδηγηθούμε σε άτοπο αφού δεν είναι δυνατό το άθροισμα ενός μη μηδενικού ακεραίου και ενός κλάσματος μικρότερου της μονάδας να είναι ίσο με το μηδέν.

Για το σκοπό αυτό, θέτουμε

$$M = \int_0^\infty z^\rho \left[(z-1)(z-2)...(z-n)\right]^{\rho+1} e^{-z} dz \quad (12),$$

όπου ρ ένας θετικός ακέραιος.

Ακόμα θέτουμε

$$P_1 = c_0 \int_0^\infty + c_1 e \int_1^\infty + c_2 e^2 \int_2^\infty + ... + c_n e^n \int_n^\infty \quad \text{και} \quad P_2 = c_1 e \int_0^1 + c_2 e^2 \int_0^2 + ... + c_n e^n \int_0^n \ ,$$

όπου με το σύμβολο του ολοκληρώματος συμβολίζονται οι εκφράσεις του ολοκληρώματος που αντιστοιχεί στο Μ.

Είναι γνωστό ότι ισχύει $\int_0^\infty z^\rho e^{-z} dz = \rho!$, και άρα το ολοκλήρωμα Μ παριστάνει έναν ακέραιο, διαιρετό από τον ρ!. Κάνοντας την κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών, δηλαδή θέτοντας $z = z' + 1, z = z' + 2, ..., z = z' + n$, προκύπτει ότι τα ολοκληρώματα $e\int_1^\infty, e^2\int_2^\infty, ..., e^n\int_n^\infty$, παριστάνουν ακέραιους διαιρετούς από τον $(\rho+1)!$. Επομένως η έκφραση P_1 παριστάνει έναν ακέραιο διαιρετό από τον ρ!, και επειδή ισχύει

$$\int_0^\infty = \pm(n!)^{\rho+1}\int_0^\infty z^\rho e^{-z} dz + N\int_0^\infty z^{\rho+1} e^{-z} dz + ...,$$

έχουμε

$$\frac{P_1}{\rho!} \mp c_0 (n!)^{\rho+1} = (\rho+1)\Lambda \text{, όπου Λ είναι ακέραιος.}$$

Παριστάνοντας τις μέγιστες απόλυτες τιμές των εκφράσεων

$$z(z-1)(z-2)...(z-n) \quad \text{και} \quad (z-1)(z-2)...(z-n)e^{-z}$$

με Κ και k αντίστοιχα για $z \in (0, n)$, προκύπτουν οι σχέσεις

$$\left|\int_0^1\right| < kK^\rho, \left|\int_0^2\right| < 2kK^\rho, ..., \left|\int_0^n\right| < nkK^\rho .$$

Για λόγους συντομίας θέτουμε $m = \{|c_1 e| + 2|c_2 e^2| + ... + n|c_n e^n|\}k$, οπότε προκύπτει η ανισότητα $|P_2| < mK^\rho$.

Επιλέγουμε κατάλληλο θετικό ακέραιο ρ στην (12) με τρόπο τέτοιο ώστε:

Α. Ο όρος $c_0(n!)$ να μη διαιρείται με τον ρ+1.

Β. Να ισχύει $m\frac{K^\rho}{\rho!}<1$.

Τότε ο ακέραιος όρος $\frac{P_1}{\rho!}$ δεν θα είναι διαιρετός με τον ρ+1, άρα θα είναι διάφορος του μηδέν. Επίσης ο όρος $\frac{P_2}{\rho!}$ είναι μικρότερος της μονάδας και άρα ισχύει ότι η σχέση $P_1+P_2=0$ είναι αδύνατη. Με άλλα λόγια ο αριθμός e δεν αποτελεί λύση αλγεβρικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές.

Για την καλύτερη κατανόηση της προηγούμενης απόδειξης, παρουσιάζονται τα βασικά της βήματα με πιο απλοποιημένο τρόπο.

Έστω ότι ο e είναι αλγεβρικός αριθμός. Τότε θα υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος ακέραιων συντελεστών $C_0, C_1, ..., C_n$, οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση

$$C_0 + C_1 e + C_2 e^2 + ... + C_n e^n = 0$$

και δεν είναι συγχρόνως 0. Για n ίσο με k, όπου k είναι ένας θετικός ακέραιος επαρκώς μεγάλος, ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης από 0 έως ∞. Έτσι προκύπτει η εξίσωση $C_0\int_0^\infty + C_1 e\int_0^\infty + ... + C_n e^n \int_0^\infty = 0$ η οποία γράφεται στη μορφή $P_1 + P_2 = 0$, όπου

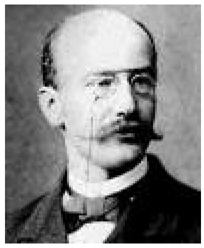
$$P_1 = C_0\int_0^\infty + C_1 e\int_1^\infty + C_2 e^2\int_2^\infty + ... C_n e^n \int_n^\infty \text{ και } P_2 = C_1 e\int_0^1 + C_2 e^2 \int_0^2 + ... + C_n e^n \int_0^n .$$

Το επόμενο βήμα είναι να δείξουμε ότι η σχέση $P_1 + P_2 = 0$ δεν ισχύει. Αρκεί να αποδειχτεί ότι ο $\frac{P_1}{k!}$ είναι μη μηδενικός ακέραιος ενώ ο $\frac{P_2}{k!}$ είναι μηδενικός ακέραιος. Το ότι ο $\frac{P_1}{k!}$ είναι μη αρνητικός ακέραιος προκύπτει από τη σχέση

$\int_0^\infty x^j e^{-x} dx = j!$, η οποία ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο j και μπορεί και αποδεικνύεται με ολοκλήρωση κατά ομάδες και επαγωγή.

Για να αποδείξουμε ότι $\left|\frac{P_2}{k!}\right| < 1$ για αρκετά μεγάλο k, δείχνουμε πρώτα ότι το γινόμενο των συναρτήσεων $[x(x-1)(x-2)...(x-n)]^k$ και $(x-1)(x-2)...(x-n)e^{-x}$ είναι $x^k[(x-1)(x-2)...(x-n)]^{k+1} e^{-x}$. Χρησιμοποιώντας άνω όρια για τις ποσότητες $|x(x-1)(x-2)...(x-n)|$ και $|(x-1)(x-2)...(x-n)e^{-x}|$ στο διάστημα $[0,n]$ και το γεγονός ότι $\lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{G^k}{k!} = 0$ για κάθε $G \in R$ είναι επαρκές για να ολοκληρωθεί η απόδειξη.■

Η απόδειξη της υπερβατικότητας του αριθμού π.



A. F. Lindemann.
Εικόνα 46

Εννέα χρόνια μετά την απόδειξη του Hermitte, το 1882, ο ***F. Lindemann*** (εικ.46) δημοσίευσε στο *Mathematische Annalen*, το άρθρο του *Ueber die Zahl π* [20], [21], [58]. Στο άρθρο αυτό γενίκευσε την απόδειξη του Hermitte, ή όπως συνήθως λέγεται το θεώρημα του Hermitte, και απέδειξε ότι το π είναι υπερβατικός αριθμός. Ουσιαστικά κατάφερε να δείξει ότι η εξίσωση $C_1e^a + C_2e^b + C_3e^c + ... = 0$ του θεωρήματος του Hermitte, είναι αδύνατη και στην περίπτωση που οι a,b,c… και $C_1, C_2, C_3,...$ είναι αλγεβρικοί αριθμοί, όχι απαραίτητα πραγματικοί.

Το θεώρημα του Lindemann διατυπώνεται ως εξής:

Αν οι a,b,c…n είναι διαφορετικοί αλγεβρικοί αριθμοί, πραγματικοί ή μιγαδικοί, και οι $C_1, C_2, C_3, ..., C_n$ είναι αλγεβρικοί αριθμοί, πραγματικοί ή μιγαδικοί, εκ των οποίων τουλάχιστον ένας είναι διάφορος του 0, τότε το παρακάτω πεπερασμένο άθροισμα,

$$C_1e^a + C_2e^b + C_3e^c + ... + nC_n \quad (13),$$

δεν μπορεί να είναι ίσο με το μηδέν. (*θεώρημα του Lindemann*)
Από αυτό το θεώρημα προκύπτει και η υπερβατικότητα του π, με τη βοήθεια του θεωρήματος του Euler,

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \text{.(θεώρημα του Euler)}$$

Όπως μπορεί εύκολα να παρατηρήσει κανείς, το θεώρημα του Euler είναι ένα άθροισμα της μορφής (13) όπου $C_1 = C_2 = 1$ αλγεβρικοί αριθμοί και οι υπόλοιποι συντελεστές είναι ίσοι με το μηδέν. Ακόμα $b = 0$, δηλαδή αλγεβρικός αριθμός, οπότε εφόσον το άθροισμα κάνει 0 πρέπει ο αριθμός $i\pi$ να είναι υπερβατικός. Γνωρίζουμε ότι ο i είναι αλγεβρικός άρα ο π είναι υπερβατικός αριθμός.
Η απόδειξη του Lindemann παρουσιάστηκε εδώ επιγραμματικά. Στο άρθρο του *Uber die Zahl* π που παρουσιάζεται η πλήρης απόδειξή του, καταλαμβάνει χώρο 13 σελίδων και χρησιμοποιεί ανώτερα μαθηματικά. Στην απόδειξή του δεν αποδεικνύει μόνο την υπερβατικότητα του π αλλά και γενικότερες προτάσεις. Ας δούμε αναλυτικότερα την πιο απλοποιημένη εκδοχή της που δημοσιεύτηκε από τον Hilbert στο *Mathematische Annalen* το 1882, και η οποία βασίζεται στην απαγωγή σε άτοπο [8], [47], [21].
Έστω ότι ο π είναι αλγεβρικός αριθμός και ότι ο αριθμός $a_1 = i\pi$ ικανοποιεί μια αλγεβρική εξίσωση βαθμού n με ακέραιους συντελεστές. Εάν οι υπόλοιπες ρίζες της αλγεβρικής εξίσωσης αυτής είναι οι $a_2, a_3, ..., a_n$, τότε από το θεώρημα του Euler $e^{i\pi} + 1 = 0$, θα προκύπτει

$$\left(1 + e^{a_1}\right)\left(1 + e^{a_2}\right)...\left(1 + e^{a_n}\right) = 1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + ... + e^{\beta_N} = 0 \text{.(14)}$$

Επομένως οι εκθέτες $\beta_1, \ldots, \beta_M$ ικανοποιούν μια αλγεβρική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές. Έστω ότι μεταξύ των β_i μόνο οι $\beta_1, \ldots, \beta_M$ είναι διάφοροι του μηδενός και θα πληρούν μια αλγεβρική εξίσωση

$$f(z) = b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + ... + b_M = 0,$$

όπου $b_0, b_1, ..., b_M$ ακέραιοι και $b_M \neq 0$.

Επομένως το γινόμενο (14) είναι δυνατό να γραφτεί στη μορφή

$$a + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + ... + e^{\beta_M} = 0,$$

όπου α θετικός ακέραιος. Ανάλογα με την απόδειξη της υπερβατικότητας του e, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της τελευταίας σχέσης με το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty z^\rho [g(z)]^{\rho+1} e^{-z} dz$, το οποίο για συντομία θα συμβολίζεται $\int_0^\infty$, και για το οποίο ισχύει ότι ρ είναι θετικός ακέραιος και $g(z) = b_0^M f(z)$. Έτσι το γινόμενο (14) δύναται να γραφτεί ως άθροισμα $P_1 + P_2 = 0$, όπου

$$P_1 = a\int_0^\infty + e^{\beta_1}\int_{\beta_1}^\infty + e^{\beta_2}\int_{\beta_2}^\infty + ... + e^{\beta_M}\int_{\beta_M}^\infty \quad \text{και} \quad P_2 = e^{\beta_1}\int_0^{\beta_1} + e^{\beta_2}\int_0^{\beta_2} + ... + e^{\beta_M}\int_0^{\beta_M}.$$

Επιπλέον να σημειωθεί ότι τα ολοκληρώματα της μορφής $\int_{\beta_i}^\infty$ εφαρμόζονται στο μιγαδικό επίπεδο, από το μιγαδικό σημείο $z = \beta_i$ και κατά μήκος μιας παραλλήλου προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών, μέχρι του σημείου $z = +\infty$. Αντίστοιχα τα ολοκληρώματα της μορφής $\int_0^{\beta_i}$ εφαρμόζονται από το σημείο $z = 0$ μέχρι του $z = \beta_i$.

Το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty$ όπως και στην περίπτωση του e, είναι πολλαπλάσιο του $\rho!$ και όπως και στην προηγούμενη απόδειξη προκύπτει ότι

$$\frac{1}{\rho!}\int_{0}^{\infty} \quad -b_0^{(\rho+1)M} b_M^{\rho+1} = (\rho+1)T$$, με T ακέραιο.

Θέτοντας $z = z' + \beta_i$, θα προκύψει ότι $g(\beta_i) = 0$, οπότε τελικά βρίσκουμε

$$e^{\beta_i}\int_{\beta_i}^{\infty} \quad = \int_{0}^{\infty}(z' + \beta_i)[g(z' + \beta_i)]^{\rho+1} e^{-z'} dz' = (\rho+1)G(\beta_i).$$

Η $G(\beta_i)$ είναι μια ακέραια συνάρτηση ως προς το β_i, βαθμού μικρότερου του $(\rho+1)M$ και με συντελεστές πολλαπλάσια του $b^{(\rho+1)M}$. Δεδομένου ότι οι αριθμοί $\beta_1,...,\beta_M$ είναι ρίζες της $f(z) = b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + ... + b_M = 0$, της οποίας οι συντελεστές είναι ακέραιοι, ο πολλαπλασιασμός με τον συντελεστή b_0 οδηγεί σε ακέραιους αλγεβρικούς αριθμούς. Άρα η έκφραση

$$G(\beta_1) + G(\beta_2) + ... + G(\beta_M)$$

παριστάνει ακέραιο αριθμό. Κατά συνέπεια η έκφραση P_1 είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $\rho!$ και άρα ισχύει

$$\frac{P_1}{\rho!} - ab_0^{(\rho+1)M} b_M^{\rho+1} =$$ πολλαπλάσιο του $(\rho+1)$ (15).

Παριστάνουμε με K και k αντίστοιχα, τις απόλυτες μέγιστες τιμές των συναρτήσεων $zg(z)$ και $g(z)e^{-z}$ στο τμήμα $z = 0$ έως $z = \beta_i$ της ευθείας ολοκληρώσεως, και προκύπτει

$$\left|\int_{0}^{\beta_i} \quad \right| < |\beta_i| kK^{\rho}$$, με $i = 1,2,...,M$.

Έτσι θέτοντας $m = \left\{\left|\beta_1 e^{\beta_1}\right| + \left|\beta_2 e^{\beta_2}\right| + ... + \left|\beta_M E^{\beta_M}\right|\right\}k$, προκύπτει η ανισότητα $\left|P_2\right| < mK^{\rho}$. Επιλέγοντας τον θετικό ακέραιο ρ με τέτοιο τρόπο ώστε:

Α. να είναι πολλαπλάσιος του ab_0b_M,

Β. να ισχύει $\frac{mK^{\rho}}{\rho!} < 1$,

συμπεραίνουμε ότι ο ακέραιος όρος $\frac{P_1}{\rho!}$, λόγω της σχέσης (15), δεν θα διαιρείται με το $\rho + 1$, και θα είναι αναγκαστικά διάφορος του μηδενός. Ο όρος $\frac{P_2}{\rho!}$ θα είναι μικρότερος της μονάδας και τελικά η σχέση $P_1 + P_2 = 0$ θα είναι αδύνατη.■

Το αδύνατο του τετραγωνισμού του κύκλου με κανόνα και διαβήτη.

Το ερώτημα που προκύπτει είναι γιατί οι υπερβατικοί αριθμοί προκάλεσαν τόσο πολύ το ενδιαφέρον των μαθηματικών και γιατί είναι σημαντική η ύπαρξή τους. Η απάντηση βρίσκεται στο ότι η υπερβατικότητα του π δίνει αμέσως την απάντηση στο πανάρχαιο ερώτημα, του αν ο κύκλος είναι τετραγωνίσιμος. Ας δούμε αναλυτικότερα το γιατί συμβαίνει κάτι τέτοιο.

Οι αρχαίοι Έλληνες προσπαθούσαν να τετραγωνίσουν τον κύκλο με τη χρήση μόνο **κανόνα και διαβήτη** σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Όπως είναι γνωστό το αξιωματικό σύστημα του Ευκλείδη βασίζεται στα εξής 5 αξιώματα:

Ι. Από κάθε σημείο είναι δυνατό να φέρουμε μια ευθεία γραμμή προς ένα άλλο σημείο.

ΙΙ. Μια πεπερασμένη ευθεία γραμμή είναι δυνατό να προεκταθεί έπ' άπειρον.

ΙΙΙ. Με κάθε κέντρο και κάθε ακτίνα δύναται να γραφτεί ένας κύκλος.

ΙV. Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.

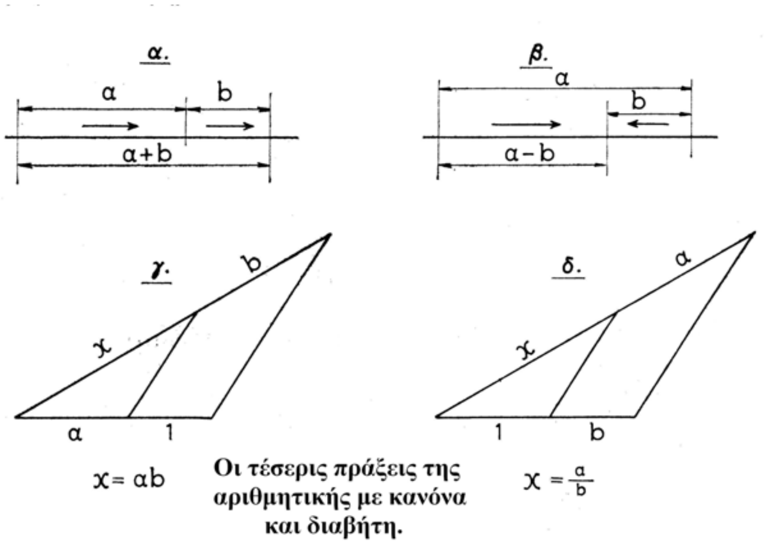
V. Αν ευθεία τέμνει δύο άλλες ευθείες και το άθροισμα των εντός και επί τα αυτά γωνιών είναι μικρότερο από δύο ορθές, τότε αν οι δύο ευθείες προεκταθούν έπ' άπειρον θα τέμνονται προς το μέρος των γωνιών που το άθροισμά τους είναι μικρότερο από δύο ορθές.

Η απόδειξη μιας πρότασης για τους αρχαίους Έλληνες, σήμαινε τη χρήση ισοδυναμιών προκειμένου η πρόταση προς απόδειξη να γίνει ισοδύναμη με κάποιο από τα παραπάνω αξιώματα ή άλλες ήδη αποδεδειγμένες προτάσεις. Τα αξιώματα του Ευκλείδη όμως, είναι απλές κατασκευές για την πραγματοποίηση των οποίων απαιτείται μόνο κανόνας και διαβήτης. Είναι προφανές ότι αν μια κατασκευή χρησιμοποιεί παραπάνω πράγματα εκτός από κανόνα και διαβήτη[6] δεν θα μπορέσει να γίνει ισοδύναμη με κάποιο από τα παραπάνω αξιώματα και άρα δεν αποδεικνύεται για τους αρχαίους Έλληνες[7].

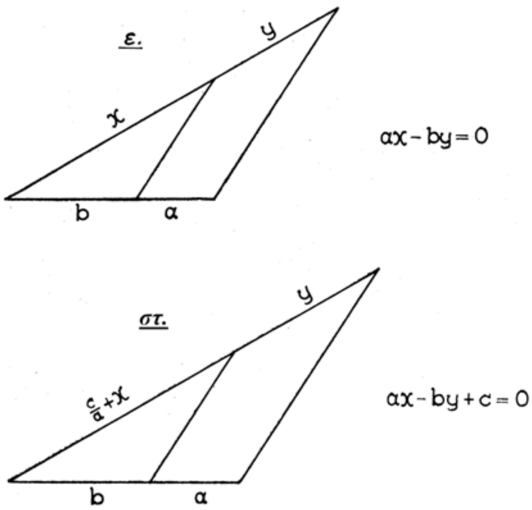
Προβλήματα κατασκευάσιμα με κανόνα και διαβήτη.

Ο Descartes επέφερε επανάσταση το 15^{o} αι. στο χώρο της γεωμετρίας με την ανακάλυψη της αναλυτικής γεωμετρίας, και το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου άρχισε να προσεγγίζεται με τον αναλυτικό τρόπο. Είναι προφανές ότι αν ο κύκλος μπορεί να τετραγωνιστεί, τότε μπορεί και η περιφέρεια του να γίνει ευθεία γραμμή. Αρκεί λοιπόν να κατασκευαστεί μια γραμμή μήκους π, η οποία αντιστοιχεί στην περιφέρεια κύκλου διαμέτρου 1. Με τη χρήση κανόνα και διαβήτη, μπορούμε να κατασκευάσουμε ευθείες και κύκλους, δηλαδή γραμμές που αντιστοιχούν σε πολυωνυμικές εξισώσεις μηδενικού, πρώτου ή δευτέρου βαθμού. Τα σημεία που προκύπτουν από τις διαδοχικές κατασκευές είναι σημεία τομής καμπυλών το πολύ δευτέρου βαθμού.
Αντιστοιχίζοντας σε κάθε αριθμό ένα κομμάτι μιας ευθείας, μπορούμε να κατασκευάσουμε με τη βοήθεια των τεσσάρων πράξεων της Αριθμητικής οποιοδήποτε αριθμητικό μέγεθος όπως περιγράφεται στο σχήμα 1. Οι κατασκευές αυτές βασίζονται στις ιδιότητες των όμοιων τριγώνων και στην αυθαίρετη επιλογή ενός τμήματος ως ίσου με τη μονάδα.

Επιπλέον μπορούμε να κατασκευάσουμε και μεγέθη της μορφής $y=\frac{a}{b}x$ (1) και $y=\frac{ax+c}{b}$ (2), όπως φαίνεται στο σχήμα 2. Συνοψίζοντας, με τη χρήση του κανόνα, υποβοηθούμενου από το διαβήτη, μπορούμε να επιλύσουμε προβλήματα των οποίων η αναλυτική διατύπωση εκφράζεται με εξισώσεις πρώτου βαθμού της μορφής (1) και (2).



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Η χρήση όμως του διαβήτη μπορεί να επεκταθεί περαιτέρω με τη χρήση της *δύναμης*[8] σημείου ως προς κύκλο. Η ιδιότητα αυτή εκφράζεται με τη βοήθεια μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού. Αυτό συνεπάγεται ότι οι λύσεις κάθε εξίσωσης δευτέρου βαθμού μπορούν να προκύψουν από την έκφραση της δύναμης κάποιου σημείου, ως προς κατάλληλα επιλεγμένο κύκλο[9]. Έτσι οι τομές ευθειών και κύκλων θα είναι μεγέθη της μορφής $m \pm \sqrt{n}$ (3), όπου m , n είναι της μορφής (1) και (2) με $n \geq 0$. Και οι τομές δύο κύκλων όμως είναι της μορφής (3) αφού ταυτίζονται με τις τομές ενός κύκλου και μιας ευθείας που περνάει από τα σημεία τομής. Άρα τελικά με τον κανόνα και το διαβήτη μπορούμε να κατασκευάσουμε μεγέθη των μορφών (1),(2) και (3), καθώς και τα μεγέθη που προκύπτουν από αυτά με πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση ή ριζικά. Συνοψίζοντας, με τον κανόνα και το διαβήτη, σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων, επιλύονται προβλήματα που ανάγονται σε εξισώσεις 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού. Επίσης επιλύονται και προβλήματα με εξισώσεις ανώτερου βαθμού, εάν αυτές ανάγονται τελικά σε εξισώσεις 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού.

Με όρους της θεωρίας Galois [8], [4]:

1) κάθε κατασκευή, με χρήση μόνο του κανόνα, μπορεί να απεικονίσει μεγέθη που εκφράζονται μόνο με τη βοήθεια ρητών αριθμών, δηλαδή μεγέθη που ανήκουν στο σώμα των ρητών, το οποίο συμβολίζεται με K(1) [10]
2) κάθε κατασκευή, η οποία ανάγεται στην τομή μιας ευθείας και ενός κύκλου ή στην τομή δύο κύκλων, μπορεί να απεικονίσει μόνο μεγέθη της μορφής $m + n\sqrt{r}$, όπου m, n ρητοί και r θετικός ακέραιος.

Από τα 1) και 2) συμπεραίνουμε κάθε κατασκευή η οποία προκύπτει με κανόνα και διαβήτη μπορεί να απεικονίσει μόνο μεγέθη που ανήκουν στο σώμα $K\left(\sqrt{r_1}, \sqrt{r_2}, ..., \sqrt{r_n}\right)$, το οποίο είναι επέκταση του K(1) και οι r_n είναι θετικοί ακέραιοι. Ας μελετήσουμε όμως λίγο περισσότερο τι είδους στοιχεία περιέχει το σώμα αυτό. Έστω x ένα μέγεθος του σώματος αυτού, για το οποίο θα ισχύει, $x = \frac{A}{B} + \frac{C}{D} + ... + \frac{F}{G}$ (4), όπου A, B, …,G συναρτήσεις των $\sqrt{r_n}$ και B, D,…,G $\neq 0$. Κάνοντας τα κλάσματα της (4) ομώνυμα, προκύπτει ένα ενιαίο κλάσμα της μορφής $x = \frac{A_0 + A_1 + A_2 + ... + A_m}{B_0 + B_1 + B_2 + ... + B_{m'}}$, όπου με τα σύμβολα

A_m, B_m παριστάνεται μια *έκφραση* τάξεως m, δηλαδή με m διαδοχικά ριζικά. Για παράδειγμα $A_5 = \sqrt{\left(a+\sqrt{b}\right)\sqrt{\sqrt{c}-\sqrt{d+\sqrt{e-\sqrt{f}}}}}$. Δεν αποκλείεται $m \neq m'$ και είναι δυνατό στην *έκφραση* του x να έχουμε πολλούς όρους της ίδιας τάξεως είτε στον αριθμητή είτε στον παρονομαστή. Μπορούμε όμως πάντα να γράψουμε τον x στη μορφή $x = \dfrac{p+q\sqrt{Q_n}}{r+s\sqrt{Q_n}}$ (5), όπου n είναι ο μεγαλύτερος των m, m΄, και άρα τα p,q,r,s περιέχουν όρους με τάξεις $\leq n-1$. Πολλαπλασιάζουμε την (5) με $r-s\sqrt{Q_n}$ και έτσι τη φέρνουμε στη μορφή $x = p_1 + q_1\sqrt{Q_n}$ (6), όπου τα p_1, q_1 θα περιέχουν τους όρους με τάξεις $\leq n-1$. Άρα θα είναι της μορφής $p_1 = \dfrac{p_2+q_2\sqrt{R_n}}{r_2+s_2\sqrt{R_n}}$ και $q_1 = \dfrac{p'_2+q'_2\sqrt{R_n}}{r'_2+s'_2\sqrt{R_n}}$. Απαλείφουμε και πάλι τους παρονομαστές και προκύπτει $p_1 = p_3 + q_3\sqrt{R_n}$ και $q_1 = p'_3 + q'_3\sqrt{R_n}$. Αντικαθιστούμε στη σχέση (6) και προκύπτει $x = \left(p_3+q_3\sqrt{R_n}\right) + \left(p'_3+q'_3\sqrt{R_n}\right)\sqrt{Q_n}$. Προχωρώντας κατά τον ίδιο τρόπο φέρνουμε το x στην παρακάτω μορφή, η οποία και ονομάζεται κανονική μορφή του x.

$$\begin{aligned} x &= m + \left(m_{1n}\sqrt{Q_n} + m_{2n}\sqrt{R_n} + \dots\right)_n \\ &+ \left(m_{12n}\sqrt{Q_n}\sqrt{R_n} + m_{13n}\sqrt{Q_n}\sqrt{S_n} + \dots\right)_n \\ &+ \left(m_{123n}\sqrt{Q_n}\sqrt{R_n}\sqrt{S_n} + \dots\right)_n \\ &+ \dots. \end{aligned}$$ (*κανονική μορφή του x*)

Το σύμβολο $(\ )_n$ σημαίνει άθροισμα n όρων, όπου $n = 1,2,\dots,n$. Τα μεγέθη Q, R, S, θεωρούνται ανεξάρτητα μεταξύ τους, δηλαδή οι υπόρριζες ποσότητες έχουν απλοποιηθεί. Έστω λ ο αριθμός των ανεξάρτητων ριζικών που περιλαμβάνονται στην κανονική μορφή του x. Εάν δώσουμε στα ριζικά αυτά είτε το πρόσημο + είτε το πρόσημο -, προκύπτουν 2^λ διαφορετικές τιμές για την κανονική μορφή του x (πρόκειται για διατάξεις με επανάληψη 2 αντικειμένων ανά λ). Οι τιμές αυτές καλούνται *συζυγείς* τιμές και δεν είναι πάντα διαφορετικές μεταξύ τους.

Για τη συνέχεια της απόδειξης του αδυνάτου του τετραγωνισμού του κύκλου με κανόνα και διαβήτη, χρειαζόμαστε το παρακάτω θεώρημα [8].

Θεώρημα του Abel. *Εάν μια έκφραση ε ικανοποιεί μια αλγεβρική εξίσωση με ρητούς συντελεστές, τότε και όλες οι συζυγείς τιμές της ε θα ικανοποιούν την εξίσωση.*

Ποια όμως θα είναι η μορφή μιας εξίσωσης που έχει για ρίζες όλες τις *συζυγείς* τιμές της έκφρασης ε ; Το πλήθος αυτών των συζυγών τιμών για λ ανεξάρτητα ριζικά της έκφρασης ε θα είναι 2^{λ}. Έστω λ ο αριθμός των ανεξάρτητων ριζικών τα οποία υπεισέρχονται στην *κανονική* μορφή ενός μεγέθους x. Ο αριθμός των συζυγών τιμών αυτού θα είναι ίσος με 2^{λ}. Έστω ότι αυτές οι συζυγείς τιμές είναι οι $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{2^{\lambda}}$. Το πολυώνυμο που προκύπτει είναι το $F(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots\ldots(x - x_{2^{l}})$(7), το οποίο είναι βαθμού 2^{λ}, έχει για ρίζες όλες τις τιμές $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{2^{\lambda}}$ και οι συντελεστές του είναι ρητοί. Οι συζυγείς τιμές του x δεν είναι απαραίτητα διαφορετικές μεταξύ τους.

Έστω τώρα η μικρότερου βαθμού μ εξίσωση με συντελεστές του σώματος K(1) $\phi(x) = 0$. Η εξίσωση αυτή έχει ρίζα την x, άρα και όλες τις *συζυγείς* τιμές της σύμφωνα με το θεώρημα του Abel, αλλά μπορεί να έχει και άλλες ρίζες εκτός αυτών. Προφανώς θα έχει όλες τις ρίζες του πολυωνύμου (7) αλλά όχι πολλαπλές όπως το (7), αφού έχουμε επιλέξει την μικρότερου βαθμού μ εξίσωση $\phi(x) = 0$. Άρα θα ισχύει $F(x) = \phi(x)F_1(x)$, διότι από την υπόθεση δεν υπάρχει πολυώνυμο μικρότερου βαθμού του $\phi(x)$ που έχει ρίζα τη x_1. Εφ' όσον το $F_1(x)$ δεν είναι σταθερό, θα είναι παράγοντας του $F(x)$, και άρα θα έχει για ρίζες κάποιες από τις $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{2^{\lambda}}$. Όμως από το θεώρημα του Abel θα έχει για ρίζες και τις υπόλοιπες από τις $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{2^{\lambda}}$. Άρα θα ισχύει $F_1(x) = \phi(x)F_2(x)$. Προχωρώντας κατά αυτό τον τρόπο, βρίσκουμε τελικά ότι $F(x) = [\phi(x)]^k$ (8).

Το αριστερό μέλος της σχέσης (8) θα είναι, όπως προαναφέρθηκε, βαθμού 2^{λ} ενώ το δεξιό βαθμού $\mu \cdot k$. Για να ισχύει η ισότητα θα πρέπει τα k και μ να είναι δυνάμεις του 2. Συνεπώς, η εξίσωση $\phi(x)=0$ είναι βαθμού της μορφής 2^s με συντελεστές του σώματος Κ(1). Ταυτόχρονα είναι η μικρότερου βαθμού εξίσωση, η οποία έχει ως ρίζα τη x_1, και άρα είναι *ανάγωγη*, δηλαδή δεν μπορεί να διασπαστεί σε δύο παράγοντες του σώματος Κ(1). Έστω για παράδειγμα ότι διασπάται σε δύο παράγοντες, ως εξής $\phi(x)=\psi(x)\cdot\vartheta(x)$. Είτε το $\psi(x)$, είτε το $\vartheta(x)$ θα έχει ως ρίζα την x_1 και άρα θα υπάρχει εξίσωση μικρότερου βαθμού από την $\phi(x)$ με συντελεστές του σώματος Κ(1) και ρίζα την x_1, κάτι το οποίο είναι άτοπο. Έτσι, από τα παραπάνω προκύπτει η εξής πρόταση:

Ο βαθμός μιας ανάγωγης εξίσωσης, με συντελεστές του σώματος Κ(1), η οποία έχει ως ρίζα x_1 μια έκφραση η οποία περιέχει μόνο ρητούς αριθμούς και τετραγωνικές ρίζες, είναι κάποια δύναμη του 2.

Δεδομένου του ότι υπάρχει μοναδική ανάγωγη εξίσωση με συντελεστές από το Κ(1) και ρίζα τη x_1, προκύπτει η αντίστροφη της προηγούμενης πρότασης:

Αν ο βαθμός μιας ανάγωγης εξίσωσης με συντελεστές του Κ(1) *δεν είναι δύναμη του 2, τότε η εξίσωση αυτή δεν έχει ρίζα τη* x_1.

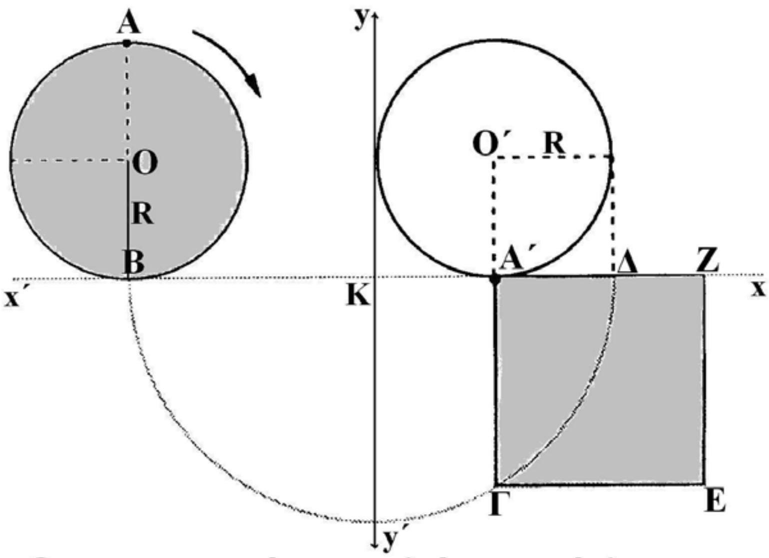
Είδαμε όμως ότι η x_1 ανήκει στο σώμα $K\left(\sqrt{r_1},\sqrt{r_2},...,\sqrt{r_n}\right)$, τα μεγέθη του οποίου και μόνο αυτά είναι κατασκευάσιμα με κανόνα και διαβήτη. Άρα ισοδύναμα μπορούμε να διατυπώσουμε την επόμενη πρόταση.

Αν ο βαθμός μιας ανάγωγης εξίσωσης δεν είναι δύναμη του 2, τότε η επίλυση αυτής δεν είναι δυνατή με κανόνα και διαβήτη.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι όταν ο Legendre απέδειξε ότι ο π είναι άρρητος αριθμός, το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου με κανόνα και διαβήτη δεν επιλύθηκε, καθώς υπάρχουν άπειροι στο πλήθος άρρητοι που αποτελούν ρίζα αλγεβρικών εξισώσεων βαθμού 2^ν και άρα είναι κατασκευάσιμοι. Αντιθέτως η απόδειξη του Lindemann για την υπερβατικότητα του π, αφού οι υπερβατικοί αριθμοί δεν αποτελούν λύση αλγεβρικών εξισώσεων, οριστικοποίησε το γεγονός ότι το π δεν είναι κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη, και κατ’ επέκταση ο κύκλος δεν τετραγωνίζεται.

Ο τετραγωνισμός του κυλιόμενου κύκλου.

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι αν και ο κύκλος δεν τετραγωνίζεται με κανόνα και διαβήτη σε περασμένα το πλήθος βήματα, ο κυλιόμενος κύκλος τετραγωνίζεται. Σύμφωνα με την απόδειξη του *Thomas Elsner* [55] έστω ο κυλιόμενος κύκλος του σχήματος της εικόνας 47, ο οποίος κινείται δεξιόστροφα έως ότου το σημείο Α της περιφέρειάς του ταυτιστεί με το σημείο Α΄.



Ο τετραγωνισμός του κυλιόμενου κύκλου.

Εικόνα 47

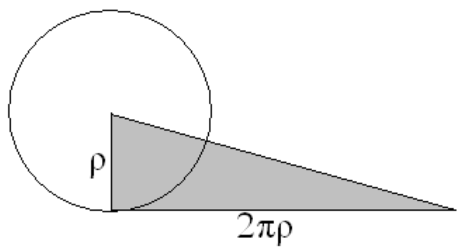
Προφανώς θα ισχύει $BA' = \frac{2\pi R}{2} = \pi R$. Άρα $B\Delta = \pi R + R$. Επιλέγουμε σημείο Κ τέτοιο ώστε ΒΚ = ΚΔ, και χαράσσουμε κύκλο με κέντρο Κ και ακτίνα $\frac{B\Delta}{2} = \frac{\pi R + R}{2}$. Το ημικύκλιο που φαίνεται στην εικόνα 47 έχει εξίσωση $y = -\sqrt{\left(\frac{\pi R + R}{2}\right)^2 - x^2}$.

Ακόμα εφ' όσον $KA' = \frac{\pi R + R}{2} - R = \frac{\pi R - R}{2}$, θα ισχύει και $|A'\Gamma| = \left| - \sqrt{\left(\frac{\pi R + R}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi R - R}{2}\right)^2} \right| = \frac{R}{2}\sqrt{4\pi} = R\sqrt{\pi}$.

Συνεπάγεται ότι $(\mathrm{A'\Gamma EZ}) = \left(R\sqrt{\pi}\right)\left(R\sqrt{\pi}\right) = \pi R^2$, και άρα ο κυλιόμενος κύκλος τετραγωνίζεται.

Οι τετραγωνιστές του κύκλου.

Ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι ένας μαθηματικός γρίφος που ξεπερνάει τα όρια της μαθηματικής κοινότητας. Ίσως είναι το διασημότερο άλυτο πρόβλημα των μαθηματικών. Η φράση «τετραγωνίζω τον κύκλο» χρησιμοποιείται μεταφορικά στην καθομιλουμένη, υποδηλώνοντας ένα δύσκολο έως και εκ των προτέρων καταδικασμένο σε αποτυχία σχέδιο. Η κυριολεκτική έννοια της φράσης αυτής σημαίνει τη γεωμετρική ή αλγεβρική κατασκευή ενός τετραγώνου, με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του κύκλου. Βέβαια οι αρχαίοι Έλληνες έθεσαν κάποιες προϋποθέσεις για την κατασκευή αυτού του τετραγώνου. Πρώτον, θα πρέπει να γίνει με τη χρήση μόνο **κανόνα και διαβήτη**, κάτι που συνεπάγεται ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε καμπύλες το πολύ δευτέρας τάξης. Δεύτερον, η κατασκευή θα πρέπει να γίνει σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Αυτοί οι δύο περιορισμοί καθιστούν το πρόβλημα άλυτο. Για παράδειγμα αν άρουμε τον πρώτο περιορισμό, και χρησιμοποιήσουμε καμπύλες ανώτερης τάξης όπως μια τετραγωνίζουσα ή μια έλικα μπορούμε να κατασκευάσουμε τετράγωνο ισεμβαδικό με τον κύκλο. Αν άρουμε το δεύτερο περιορισμό και χρησιμοποιήσουμε λογισμό, πάλι μπορούμε να κατασκευάσουμε ισεμβαδικό τετράγωνο με τον κύκλο.



Ο τετραγωνισμός του κύκλου από τον Αρχιμήδη.

Εικόνα 48

Ο Αρχιμήδης απέδειξε ότι το εμβαδόν ενός κύκλου ισούται με το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου που έχει τη μια πλευρά ίση με την ακτίνα του κύκλου και την άλλη ίση με την περιφέρειά του, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αυτό ήταν και το έναυσμα για πολλούς ανθρώπους να επιχειρήσουν να τετραγωνίσουν τον κύκλο. Βέβαια πριν από δύο χιλιάδες χρόνια κανείς δεν ήξερε ότι ο λόγος της περιφέρειας προς τη διάμετρο είναι αδύνατο να προσδιοριστεί ακριβώς. Έτσι η προσπάθεια τετραγωνισμού του κύκλου ήταν μια συνηθισμένη ασχολία, όχι μόνο στην αρχαία Ελλάδα αλλά και στα χρόνια που ακολούθησαν.

Γύρω στο 16^{ο} αι. μ. Χ. και αφού αποδείχτηκε λανθασμένη η μέθοδος του Nicolaus Cusanus (1401-1464 μ. Χ.) να τετραγωνίσει τον κύκλο, οι μαθηματικοί άρχισαν να συνειδητοποιούν ότι κάθε προσπάθεια τετραγωνισμού του κύκλου ήταν μάταιη. Από αυτό ο σημείο ξεκίνησε η ρήξη ανάμεσα στους «γνήσιους» μαθηματικούς και στους κοινώς λεγόμενους «τετραγωνιστές του κύκλου». Οι «γνήσιοι» μαθηματικοί αρχίζουν να διερευνούν την άπειρη φύση του π, αναζητώντας μια ικανοποιητική εξήγηση, ενώ οι «τετραγωνιστές του κύκλου» εμμένουν στην προσπάθεια επίλυσης του πανάρχαιου αυτού προβλήματος.

Μερικοί γνωστοί «τετραγωνιστές» του 16^{ου} και του 17^{ου} αι. ήταν ο ***Ορόντιους Φινέους***, ο ***Ζοζέφ Σκαλιζέ***, ο ***Λονγκομοντάνους της Κοπεγχάγης*** και ο ***Γρηγόριος του Αγίου Βικεντίου*** [22]. Προφανώς οι μέθοδοί τους αποδείχτηκαν εσφαλμένες. Ακόμα ο άγγλος φιλόσοφος ***Τόμας Χομπς*** παρουσίασε το δικό του τετραγωνισμό του κύκλου το 1668 στο έργο του *De Problematis Physicis* , όπου δείχνει ότι το π ισούται με $3\,{}^{1}\!/_{8}$. Όταν αργότερα η απόδειξή του απορρίφθηκε ο Χομπς συνέχιζε να υποστηρίζει τις θέσεις του αμφισβητώντας τις βασικές αρχές της γεωμετρίας, ακόμα και το Πυθαγόρειο θεώρημα [22].

Το 1775 ήταν τόσοι πολλοί αυτοί που αποζητούσαν να κατοχυρώσουν τη μέθοδό τους για τον τετραγωνισμό του κύκλου, ώστε η Académie Française (Γαλλική Ακαδημία Επιστημών) αποφάσισε να μην εξετάζει άλλες λύσεις του προβλήματος [22], [20]. Αποτελεί πραγματικά αξιοπερίεργο γεγονός, το πάθος τόσων ανθρώπων για την επίλυση αυτού του προβλήματος, και επιπλέον η αναγωγή του σε πρόβλημα ύψιστης σημασίας για τη γεωμετρία αλλά και για την πρόοδο της ανθρωπότητας. Είναι επίσης λανθασμένη η αντίληψη ότι θα δοθεί μεγάλο χρηματικό βραβείο σε όποιον καταφέρει να τετραγωνίσει τον κύκλο, αφού ουδέποτε προσφέρθηκε χρηματικό βραβείο για τη λύση αυτού του προβλήματος. Ο ***Αύγουστος ντε Μόργκαν*** υπήρξε κριτικός της επιστήμης το $19^{ο}$ αι. και έγραψε το βιβλίο *A budget of Paradoxes* [22]. Εκεί αναφέρει κάποιον Ιησουίτη που ταξίδεψε από τη Νότια Αμερική στην Αγγλία για να διεκδικήσει το έπαθλο για τον τετραγωνισμό του κύκλου και κάποιον Μ. ντε Βοζενβίλ που έκανε αγωγή εναντίον της Γαλλικής Ακαδημίας Επιστημών για να πάρει ένα βραβείο που θεωρούσε ότι του ανήκε δικαιωματικά για τη λύση του. Ο Αύγουστος ντε Μόργκαν ήταν ο πρώτος που επινόησε τη φράση *morbus cyclometricus*, δηλαδή η επιδημία του τετραγωνισμού του κύκλου [22].

Ο ***Άντεργουντ Ντάνλεϊ*** στο βιβλίο του *Mathematical Crunks* , αναφέρει κάποιον Τζ. Β. που το 1982 έγραψε πως είχε υπολογίσει ότι η τιμή του π είναι «3,0625 ακριβώς» [22]. Ένα μήνα αργότερα έγραψε «για τον περίφημο τετραγωνισμό του κύκλου που είναι το μέγιστο μαθηματικό επίτευγμα όλων των εποχών , εγώ, με βαθιά συναίσθηση της επιστημονικής του σημασίας δηλώνω ρητά και κατηγορηματικά μια για πάντα ότι πως ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι πλέον γεγονός. Όντας ο πρώτος άνθρωπος που υπολόγισε ποτέ το εμβαδόν του κύκλου με μαθηματική μέθοδο αλλά χωρίς την τιμή του π, δηλώνω επίσης ότι η μία και μοναδική τιμή για την αναλογία της περιφέρειας του κύκλου προς τη διάμετρό του είναι π, δηλαδή 2,91421351481511+, ούτε παραπάνω ούτε παρακάτω, τελεία και παύλα.» Ένα από τα χαρακτηριστικά των «τετραγωνιστών» είναι ότι εμμένουν στις απόψεις τους ακόμα και όταν αντικρούονται οι θέσεις τους. Για παράδειγμα ο Τζον Α. Πάρκερ το 1874 στο βιβλίο του *The Quadrature of the Circle*, υποστήριζε ότι «η περιφέρεια του κύκλου είναι η γραμμή που περικλείει ολόκληρο τον κύκλο και βρίσκεται έξω από αυτόν», και επεσήμαινε ότι όλες οι άλλες τιμές του π είναι λάθος γιατί «οι γεωμέτρες κάνουν λάθος εξ αιτίας αυτής της διαφοράς στο έκτο δεκαδικό ψηφίο» [22].

Συχνά κάποιες από όλες αυτές τις εκλογικεύσεις μπορεί να είναι πειστικές, όμως παραμένουν αβάσιμες. Συνήθως οι «τετραγωνιστές» κατασκευάζουν γεωμετρικές λύσεις χρησιμοποιώντας μόνο κανόνα και διαβήτη και ισχυρίζονται ότι οι μέθοδοί τους είναι πιο αξιόπιστες από τους αριθμούς, επειδή λειτουργούν με βάση μια λογική υψηλότερου επιπέδου. Πολλές φορές ισχυρίζονται ότι η γεωμετρική τους λύση είναι σωστή αλλά και ο αριθμητικός προσδιορισμός του π, 3,14159265… είναι επίσης σωστός [22]. Αν από τους υπολογισμούς τους καταλήξουν σε διαφορετική τιμή για το π από την ευρέως αποδεκτή και δεν καταφέρουν να εντοπίσουν το λάθος τους, υποστηρίζουν ότι η δικιά τους τιμή είναι η σωστή. Τέλος πολλές υποτιθέμενες λύσεις στηρίζονται στην απαγωγή σε άτοπο. Είναι όμως έτσι κατασκευασμένες ώστε οποιαδήποτε τιμή εισαχθεί για το π να είναι σωστή ανεξάρτητα από το ποια τιμή θα εισάγουν [22].

Όταν ο Lambert απέδειξε το 1761 ότι το π είναι άρρητος αριθμός, πολλοί «τετραγωνιστές» απογοητεύτηκαν. Παρ' όλ' αυτά δεν εγκατέλειψαν την προσπάθεια αφού υπάρχουν άρρητοι αριθμοί που μπορούν να κατασκευαστούν γεωμετρικά. Για παράδειγμα το $\sqrt{2}$ είναι η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές ίσες με 1. Η προσπάθεια τετραγωνισμού του κύκλου μετριάστηκε μόνο όταν ο Lindemann απέδειξε το 1882 ότι το π είναι υπερβατικός αριθμός. Αυτό συνέβη γιατί είχε ήδη αποδειχθεί ότι μόνο αλγεβρικές παραστάσεις που μπορούν να απλοποιηθούν σε δεύτερη τάξη κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη. Έτσι με την απόδειξη της υπερβατικότητας του π, αποκλείεται η περίπτωση της ύπαρξης πεπερασμένης αλγεβρικής εξίσωσης που να έχει ρίζα το π, και άρα είναι αδύνατο ν τετραγωνιστεί ο κύκλος με κανόνα και διαβήτη.

Βέβαια ακόμα και αν κάποιοι «τετραγωνιστές» αποδυναμώθηκαν από αυτήν την εξέλιξη, πολλοί δεν το έβαλαν κάτω. Αξίζει να σημειωθεί ότι το 1988 ένας γιατρός ονόματι Έντουιν Τζ. Γκούντγουιν, ισχυρίστηκε ότι ανακάλυψε μια λύση για το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, το οποίο το είχε διδαχτεί με υπερφυσικό τρόπο [22]. Ύστερα από πιέσεις του, το 1897, η Βουλή των Αντιπροσώπων της πολιτείας Indiana των Η.Π.Α., ψήφισε ένα νομοσχέδιο, σύμφωνα με το οποίο εισήγαγε μια νέα μαθηματική αλήθεια, αναγνωρίζοντας δύο τιμές για το π, 3,2 και 4. Ευτυχώς, τον Φεβρουάριο του 1897 οι γερουσιαστές ψήφισαν να αναβληθεί η συζήτηση έπ' αόριστον. Μέχρι σήμερα το θέμα δεν έχει επανέλθει [22], [58], [20].

Ο Άντεργουντ Ντάνλεϊ στο βιβλίο του *Mathematical Crunks*, μιλάει για κάποιον που έγραψε ότι «το π έχει θέση στα μαθηματικά μόνο και μόνο λόγω της σχέσης του με τις άπειρες σειρές, και δεν έχει σχέση με τον κύκλο… Ο Lindemann υποστήριζε ότι ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι αδύνατος, όμως η απόδειξή του είναι παραπλανητική, επειδή χρησιμοποιεί αριθμούς οι οποίοι είναι κατά προσέγγιση αριθμοί». Ο Αύγουστος ντε Μόργκαν διηγείται την ιστορία ενός ανθρώπου που δήλωσε «Θεώρησα πολύ παράξενο ότι υπήρξαν σε όλες τις εποχές τόσοι σπουδαίοι μελετητές που απέτυχαν να βρουν τον πραγματικό λόγο της περιφέρειας προς τη διάμετρο, και αποφάσισα να το προσπαθήσω κι εγώ». Στη συνέχεια χάραξε έναν κύκλο διαμέτρου 12 ιντσών και βρήκε ότι ο λόγος της περιφέρειας προς τη διάμετρο είναι «ακριβώς» 3,140625 [22].

Τέτοιου είδους επιχειρήματα παρουσιάζουν οι «τετραγωνιστές» όλων των εποχών, και μάλιστα δικαιολογούν την άρνηση της μαθηματικής κοινότητας να αποδεχθεί τις απόψεις τους, υποστηρίζοντας ότι εσκεμμένα κρύβουν την αλήθεια ή ότι θα ζημιωθούν οικονομικά πολλοί μαθηματικοί αν βρεθούν λάθη στα συγγράμματά τους και γι' αυτό πολεμούν τα αντεπιχειρήματα. Τέλος άλλοι νομίζουν ότι η μαθηματική κοινότητα δεν είναι προετοιμασμένη για τέτοιου είδους σημαντικά εγχειρήματα. Ο «τετραγωνιστής» Λόρενς Κάβεντερ έγραψε το 1967 στο έργο του *Unique Mathematical Geometrical Findings* «γιατί οι μαθηματικοί δεν ανακάλυψαν αυτές τις αλήθειες στο παρελθόν; Πρώτον, επειδή δεν προσέγγισαν αυτές τις λύσεις με κατάλληλο τρόπο. Δεύτερον, ούτε που τόλμησε κανείς να θεωρήσει ότι οι μεγάλοι μαθηματικοί μπορεί να έσφαλλαν σε αυτά τα θέματα» [22]. Με αυτές τις δηλώσεις κλείνει αυτή η μικρή παρένθεση στην ιστορία του π που ονομάζεται «τετραγωνιστές του κύκλου» και που αν μη τι άλλο περιγράφει την ακόρεστη και μυστηριώδη δίψα του ανθρώπου να τετραγωνίσει τον κύκλο με κανόνα και διαβήτη, ή αλλιώς να κάνει το αδύνατο δυνατό.

Η εποχή των ηλεκτρονικών υπολογιστών. 20ος αιώνας

Η ιστορία του π τον 20ο αιώνα θυμίζει σε πολλά την εποχή των ψηφιοθήρων του 18ου και του 19ου αιώνα. Η μόνη διαφοροποίηση είναι ότι το 18ο και το 19ο αιώνα οι κυνηγοί των ψηφίων ανταγωνίζονταν σε επίπεδο δεκάδων και εκατοντάδων ψηφίων, ενώ τον 20ο αιώνα ανταγωνίζονται σε επίπεδο εκατοντάδων χιλιάδων ψηφίων. Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές έφεραν επανάσταση σχεδόν σε όλους τους τομείς της καθημερινής μας ζωής και όπως ήταν επόμενο και στον υπολογισμό του π. Μέχρι το 1967 είχαν υπολογιστεί 500.000 δεκαδικά ψηφία στη διάρκεια 26 ωρών και 40 λεπτών, καθώς και 1 ώρας και 30 λεπτών επιπλέον για τη μετατροπή τους από το δυαδικό στο δεκαδικό σύστημα. Εντυπωσιακή εξέλιξη αν αναλογιστεί κανείς τις μέρες και τα χρόνια που αφιέρωσαν οι κυνηγοί των ψηφίων το 18ο αι. για μερικές εκατοντάδες δεκαδικά ψηφία.

Ας πάρουμε όμως τα πράγματα με τη σειρά. Η πρώτη απόπειρα υπολογισμού του π με ηλεκτρονικό υπολογιστή [68] έγινε το Σεπτέμβριο του 1949 με τον υπολογιστή Electronic Numerical Integrator and Computer ή όπως σύντομα αποκαλείται ENIAC. Η απόπειρα αυτή έλαβε χώρα στα εργαστήρια Ballistic Research και υπολογίστηκαν 2.037 ψηφία του π σε 70 ώρες, χρόνος που για τα σημερινά δεδομένα είναι ιδιαίτερα μεγάλος. Για τον υπολογισμό ο υπολογιστής προγραμματίστηκε με τον τύπο του Machin, στη μορφή

$$\pi = 16\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4\arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$ (*τύπος του Machin*)

Το Νοέμβριο του 1954 και τον Ιανουάριο του 1955 στο Dahlgren της Virginia, ο υπολογιστής Naval Ordnance Research Calculator ή πιο σύντομα NORC, υπολόγισε το π έως 3.089 ψηφία σε χρόνο 13 λεπτών. Τρία χρόνια αργότερα, το Μάρτιο του 1957, στο Ferranti Computer Centre στο Λονδίνο, ένας υπολογιστής Pegasus υπολόγισε 10.021 δεκαδικά ψηφία του π σε χρόνο 33 ωρών. Ο υπολογισμός έγινε με έναν τύπο παρόμοιο με τον τύπο του Strassnitzky [68].

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) (\textit{τύπος του Strassnitzky})$$

Στον επανέλεγχο του αποτελέσματος όμως, ανακαλύφθηκε ένα λάθος που είχε γίνει από τον υπολογιστή, τέτοιο ώστε μόνο τα 7.480 ψηφία ήταν σωστά. Ο υπολογισμός επαναλήφθηκε το Μάρτιο του 1958, αλλά το αποτέλεσμα δεν δημοσιεύτηκε.

Τον Ιούλιο του 1958, στο Paris Data Processing Center, ένας υπολογιστής IBM 704 υπολόγισε 10.000 δεκαδικά ψηφία σε 1 ώρα και 40 λεπτά. Ο υπολογισμός έγινε με βάση τον παρακάτω συνδυασμό του τύπου του Machin και της σειράς του Gregory [20].

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - ....\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - ....\right) (\textit{η σειρά του Machin})$$

Τον Ιούλιο του 1959, στο Commissariat á l'Energie Atomique στο Παρίσι, χρησιμοποιήθηκε το ίδιο πρόγραμμα σε έναν υπολογιστή IBM 704, και υπολογίστηκαν 16.167 δεκαδικά ψηφία σε 4 ώρες και 30 λεπτά. Ο τύπος του Machin ήταν και η βάση ενός προγράμματος που χρησιμοποιήθηκε σε έναν υπολογιστή IBM 7090, Data Centre του Λονδίνου το 1961 [20]. Το αποτέλεσμα ήταν 20.000 δεκαδικά ψηφία μόλις σε 39 λεπτά. Μέχρι εκείνη την εποχή είχαν εξαντληθεί τα όρια των διαθέσιμων υπολογιστών, και προκειμένου να υπάρξει μια σαφής βελτίωση στον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων του π θα έπρεπε να αυξηθεί η ταχύτητα των υπολογισμών. Τον Ιούλιο του 1961 στο IBM Data Processing Center της Νέας Υόρκης, οι Shanks και Wrench [62] εικοσαπλασίασαν την ταχύτητα των υπολογισμών. Αυτό το πέτυχαν αφενός με τη χρήση ενός ταχύτερου υπολογιστή, του IBM 7090, και αφετέρου χρησιμοποίησαν για τον προγραμματισμό του τον παρακάτω τύπο, ο οποίος ανακαλύφθηκε το 1896 από τον Störmer.

$$\pi = 24\arctan\left(\frac{1}{8}\right) + 8\arctan\left(\frac{1}{57}\right) + 4\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$ (*τύπος του Störmer*)

Για τον υπολογισμό του πρώτου όρου του παραπάνω αθροίσματος χρειάστηκαν 2 ώρες και 7 λεπτά, για το δεύτερο όρο 3 ώρες και 7 λεπτά και για τον τρίτο όρο 2 ώρες και 20 λεπτά. Για τη μετατροπή του αποτελέσματος από το δυαδικό στο δεκαδικό σύστημα χρειάστηκαν 42 λεπτά επιπλέον και άρα ο συνολικός χρόνος του υπολογισμού ήταν 8 ώρες και 43 λεπτά. Ξεπέρασαν το φράγμα των 100.000 ψηφίων, υπολογίζοντας 100.265 δεκαδικά ψηφία, από τα οποία τα 100.000 δημοσιεύτηκαν με φωτογραφική αναπαραγωγή της εκτύπωσης του υπολογιστή που περιλάμβανε 5.000 ψηφία ανά σελίδα. Ένας υπολογισμός τέτοιου μεγέθους περιλαμβάνει δισεκατομμύρια μεμονωμένων αριθμητικών πράξεων, εκ των οποίων έστω και μία αν γίνει λάθος όλο το αποτέλεσμα μπορεί να είναι λάθος. Έτσι, οι Shanks και Wrench προγραμμάτισαν τον υπολογιστή με βάση έναν τύπο τόξου εφαπτομένης του Gauss, προκειμένου να επαληθεύσουν το αποτέλεσμα που είχαν βρει. Βέβαια, η επαλήθευση χρησιμοποιεί τα επιμέρους αποτελέσματα του αρχικού υπολογισμού, ώστε να διαρκέσει λιγότερο.

Όσο εξελίσσονται οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές, το π αποκτάει και έναν άλλο ρόλο, αυτόν του ελέγχου της ακρίβειας και της αξιοπιστίας του υπολογιστή. Κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1960 και στις αρχές της δεκαετίας του 1970, οι Γάλλοι, οι Άγγλοι και οι Αμερικανοί συναγωνίζονταν για το ποιος θα καταφέρει να υπολογίσει περισσότερα ψηφία του π. Οι Shanks και Wrench προβλέπουν στο τέλος του άρθρου τους ότι θα χρειαστούν 5-7 χρόνια προκειμένου να υπολογιστούν 1.000.000 ψηφία του π [62]. Οι προβλέψεις τους αποδείχτηκαν υπερβολικά αισιόδοξες. Χρειάστηκε να περάσουν 12 χρόνια αφού μόλις το 1973 οι Jean Guilloud και Martine Bouyer κατάφεραν να υπολογίσουν το εκατομμυριοστό ψηφίο του π [22].

Παρά το ότι οι υπολογιστές γίνονταν όλο και πιο γρήγοροι, οι βασικές μέθοδοι υπολογισμού του π παρέμεναν ίδιες, γεγονός που εμπόδιζε την ουσιαστική αύξηση του αριθμού των ψηφίων. Μέχρι τη δεκαετία του ’70, οι υπολογισμοί βασίζονταν σε σειρές τόξων εφαπτομένων. Οι αλγόριθμοι αυτοί για κάθε διπλασιασμό του αριθμού των ψηφίων του π, χρειάζονται τετραπλάσιο αριθμό πράξεων. Για παράδειγμα ο υπολογισμός 1.000.000 ψηφίων του π διήρκεσε 23 ώρες. Άρα προκειμένου να υπολογιστούν 128.000.000 ψηφία του π, δηλαδή να διπλασιαστούν 7 φορές τα ψηφία του ($128 = 2^7$), θα πρέπει να τετραπλασιαστεί και ο χρόνος υπολογισμού τους εφτά φορές, δηλαδή απαιτούνται 43 χρόνια υπολογισμών… [58].

Το πρόβλημα αυτό ξεπεράστηκε όταν το 1976 ο Eugene Salamin [59] δημοσίευσε ένα άρθρο στο οποίο παρουσίασε τον παρακάτω τετραγωνικά συγκλίνοντα αλγόριθμο για τον υπολογισμό του π. Έστω a_0, b_0, c_0 θετικοί αριθμοί που ικανοποιούν τη σχέση $a_0^{\ 2} = b_0^{\ 2} + c_0^{\ 2}$. Ορίζουμε την ακολουθία των αριθμητικών μέσων a_n και την ακολουθία των γεωμετρικών μέσων b_n ως εξής:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}), b_n = (a_{n-1} b_{n-1})^{1/2}.$$

Επιπλέον ορίζουμε τη θετική ακολουθία c_n,

$$c_n^{\ 2} = a_n^{\ 2} - b_n^{\ 2}.$$

Ο αριθμητικός-γεωμετρικός μέσος (agm) είναι το κοινό όριο των δύο ακολουθιών a_n, b_n, $agm(a_0, b_0) = \lim a_n = \lim b_n$. Με τη βοήθεια αυτών των ακολουθιών και του αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, προκύπτει ο παρακάτω αλγόριθμος για τον υπολογισμό του π.

$$\pi = \frac{4agm(1,k)agm(1,k')}{1 - \sum_{j=1}^{\infty} 2^j \left(c_j^2 + c'^2_j\right)}$$ (*αλγόριθμος του Salamin*)

Ο αλγόριθμος αυτός συγκλίνει πολύ γρήγορα εξαιτίας του αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Σε κάθε βήμα υπολογισμών διπλασιάζεται ο αριθμός των σωστών ψηφίων του π, σε αντίθεση με άλλους γραμμικούς αλγόριθμους που σε κάθε βήμα υπολογισμών πρόσθεταν 1, 2 ψηφία του π. Ο Salamin βρήκε ότι ο αλγόριθμός του ήταν παρόμοιος με έναν αλγόριθμο που είχε ανακαλύψει ο Gauss για τον υπολογισμό αόριστων ολοκληρωμάτων. Ωστόσο ο Gauss γνώριζε ότι οι πράξεις θα ήταν ιδιαίτερα επίπονες, κάτι που δεν ήταν εμπόδιο για τον Salamin στην εποχή των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Μαζί με τη συμβολή του Richard Brent ο οποίος ανακάλυψε ανεξάρτητα τον ίδιο τετραγωνικά συγκλίνοντα αλγόριθμο [27], ο αλγόριθμος Gauss-Brent-Salamin και οι ισχυροί υπολογιστές του 20ου αιώνα εκτόξευσαν τον αριθμό των ψηφίων.

Η τεχνική για τη χρήση του τύπου των Brent-Salamin σε ηλεκτρονικό υπολογιστή έχει ως εξής:

Έστω $a_0 = 1, b_0 = 1/\sqrt{2}$ και $s_0 = 1/2$. Για $k = 1,2,3,...$, υπολογίζουμε τα

$$a_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2},$$

$$b_k = \sqrt{a_{k-1} b_{k-1}},$$

$$c_k = a_k^2 - b_k^2,$$

$$s_k = s_{k-1} - 2^k c_k$$

$p_k = \dfrac{2a_k^2}{s_k}$. Η ακολουθία p_k συγκλίνει τετραγωνικά στο π [19]. Δηλαδή σε κάθε βήμα προκύπτουν 1,4,9,20,42,85,173,347,697 κ.ο.κ. ψηφία του π. Προφανώς 25 βήματα είναι αρκετά για να υπολογιστούν πάνω από 45 εκατομμύρια δεκαδικά ψηφία. Βέβαια απαιτείται ο υπολογισμός επίπονων τετραγωνικών ριζών.

Το 1982 ο Yosaki Tamura από το International Latitude Observatory στη Μιτζουσάβα της Ιαπωνίας και ο Yasumasa Kanada από το πανεπιστήμιο του Τόκιο υπολόγισαν 8.388.608 ψηφία του π. Χρησιμοποίησαν τον αλγόριθμο του Salamin σε έναν υπολογιστή Hitac M-280H και βρήκαν το αποτέλεσμα σε κάτι λιγότερο από εφτά ώρες. Οι ίδιοι υπολόγισαν το 1983 16.000.000 ψηφία του π με έναν υπολογιστή Hitachi S-810.

Για τα επόμενα χρόνια οι αδελφοί Borwein και οι αδελφοί Chudnovsky εμφανίστηκαν στο προσκήνιο αναπτύσσοντας και αυτοί με τη σειρά τους ισχυρούς αλγόριθμους για τον υπολογισμό του π. Οι αδερφοί Jonathan και

Peter Borwein ανακάλυψαν έναν τετραγωνικά συγκλίνοντα αλγόριθμο για το $\frac{1}{\pi}$. Η ανακάλυψή τους βασίστηκε στη μελέτη των τύπων του Srinivasa Ramanujan (1887 – 1919) (εικ.49), ενός ιδιοφυούς μαθηματικού που έζησε στην Ινδία και που ανακάλυψε ριζοσπαστικές εξισώσεις χωρίς να αποκαλύπτει τις μεθόδους με τις οποίες κατέληγε στα συμπεράσματά του. Η σειρά που ανακάλυψε το 1914 ο Ramanujan για τον υπολογισμό του π είναι ο εξής,

Srinivasa Ramanujan.

Εικόνα 49

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9.801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1.103 + 26.390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$, (*η σειρά του Ramanujan*) [23], [35].

Το άθροισμα της σειράς αυτής συγκλίνει πολύ γρήγορα στην πραγματική τιμή του $\frac{1}{\pi}$. Κάθε βήμα υπολογισμών προσθέτει 8 σωστά δεκαδικά ψηφία του π. Το 1987, οι αδερφοί Borwein ανακάλυψαν την εξής σειρά,

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (6n)!}{(n!)^3 (3n)!}\frac{(A + nB)}{C^{n+\frac{1}{2}}}$$ (*η σειρά των Borwein*),

όπου

A : 212175710912$\sqrt{61}$ +1657145277365

B : 13773980892672$\sqrt{61}$ +107578229802750

C : [5280(236674+30303$\sqrt{61}$)]^3

Η σειρά αυτή συγκλίνει πολύ γρήγορα και σε κάθε υπολογιστικό βήμα προσθέτει περίπου 31 δεκαδικά ψηφία για κάθε όρο. Οι αδελφοί Borwein (εικ.50,51) δημιούργησαν και αναδρομικές εξισώσεις που βασίζονταν στο έργο του Ramanujan και ενδείκνυνται για υπολογισμούς με ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Ένας τετραγωνικός αλγόριθμος των Borwein είναι ο εξής [19]:

Έστω $a_0 = 6 - 4\sqrt{2}$ και $y_0 = \sqrt{2} - 1$,

$$y_{k+1} = \frac{1-\left(1-y_k^4\right)^{1/4}}{1+\left(1-y_k^4\right)^{1/4}}$$

$$a_{k+1} = a_k(1+y_{k+1})^4 - 2^{2k+3} y_{k+1}(1+y_{k+1}+y_{k+1}^2).$$

Η ακολουθία όμως a_k συγκλίνει τετραγωνικά στο $\frac{1}{\pi}$, δηλαδή $\pi \approx \frac{1}{a_k}$ για πολύ μεγάλο k. Σε κάθε βήμα των υπολογισμών τετραπλασιάζεται ο αριθμός των σωστών δεκαδικών ψηφίων του π. Το 1988 ο David Bailey χρησιμοποίησε την τεχνική των αδελφών Borwein και υπολόγισε 29.360.000 δεκαδικά ψηφία του π. Το αποτέλεσμα ελέγχθηκε με άλλον τετραγωνικά συγκλίνοντα αλγόριθμο των αδελφών Borwein. Ο υπολογισμός πραγματοποιήθηκε για να ελεγχθεί η αξιοπιστία του υπολογιστή Cray-2 και πραγματοποιήθηκε στο Nasa Ames Research Center.

Peter Borwein.

Εικόνα 50

Το 1991 οι αδερφοί Borwein ανακάλυψαν έναν άλλο κυβικά συγκλίνοντα αλγόριθμο [19]:

Έστω $a_0 = \frac{1}{3}$ και $s_0 = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$. Υπολογίζουμε τα

$$r_{k+1} = \frac{3}{1+2\left(1-s_k{}^3\right)^{1/3}}$$

$$s_{k+1} = \frac{r_{k+1}-1}{2}$$

$$a_{k+1} = r_{k+1}^2 a_k - 3^k\left(r_{k+1}^2 - 1\right).$$

Jonathan Borwein.

Εικόνα 51

Το $\frac{1}{a_k}$ θα συγκλίνει κυβικά στο π, δηλαδή σε κάθε βήμα τριπλασιάζεται ο αριθμός των σωστών δεκαδικών ψηφίων του π.

Πρόσφατα αποδείχτηκε ότι υπάρχουν αλγόριθμοι που παράγουν m-τάξης συγκλίνουσες ακολουθίες για το π, για οποιοδήποτε m. Ας δούμε για παράδειγμα έναν συγκλίνοντα αλγόριθμο 9^{ης} τάξης [19]:

Έστω $a_0 = \frac{1}{3}, r_0 = \frac{(\sqrt{3}-1)}{2}$ και $s_0 = (1 - r_0^3)^{1/3}$. Υπολογίζουμε τα

$t = 1 + 2r_k$,

$u = \left[9r_k\left(1 + r_k + r_k^2\right)\right]^{1/3}$,

$v = t^2 + tu + u^2$

$m = \dfrac{27\left(1 + s_k + s_k^2\right)}{v}$,

$a_{k+1} = ma_k + 3^{2k-1}(1-m)$,

$s_{k+1} = \dfrac{(1-r_k)^3}{(t+2u)v}$,

$r_{k+1} = \left(1 - s_k^3\right)1/3$.

Η $\dfrac{1}{a_k}$ παρουσιάζει σύγκλιση 9ης τάξης στο π. Βέβαια θα πρέπει να σημειωθεί, ότι αυτοί οι συγκλίνοντες αλγόριθμοι ανώτερης τάξης δεν παρουσιάζουν υπολογιστικό ενδιαφέρον καθώς δεν είναι ταχύτεροι π.χ. από τον τετραγωνικό αλγόριθμο των Salamin-Brent. Αν και απαιτούνται λιγότερα βήματα για τον ίδιο αριθμό ψηφίων, οι υπολογισμοί είναι και επίπονοι και αρκετά ακριβοί, καθιστώντας ασύμφορη τη χρήση τους.

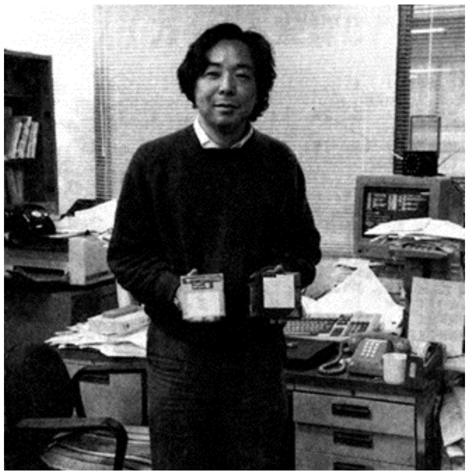
Το 1987 ο Yasumasa Kanada (εικ.52) υπολόγισε 201.326.000 δεκαδικά ψηφία του π χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο που ανακαλύφθηκε ανεξάρτητα από τους Salamin και τον Brent. Η ορθότητα του αποτελέσματος ελέγχθηκε με τον τετραγωνικά συγκλίνοντα αλγόριθμο των αδερφών Borwein. Ο υπολογισμός έγινε στο πανεπιστήμιο του Τόκιο με έναν υπολογιστή HITAC S-820, και διήρκεσε 5 ώρες και 57 λεπτά [19]. Στη συνέχεια οι αδερφοί Chudnovsky υπολόγισαν τον Μάιο του 1989 480.000.000 ψηφία και τον Ιούνιο του 1989 525.229.270 δεκαδικά ψηφία του π. Την ίδια χρονιά οι Kanada και Tamura υπολόγισαν τον Ιούλιο 536.870.898 δεκαδικά ψηφία και το Νοέμβριο 1.073.741.799 δεκαδικά ψηφία του π, υπερβαίνοντας το φράγμα του ενός δισεκατομμυρίου ψηφίων [19]. Από το 1989 και μετά οι αδερφοί Chudnovsky σημείωσαν αρκετά παγκόσμια ρεκόρ υπολογίζοντας 1.011.196.691 ψηφία, στη συνέχεια 2.260.000.000 ψηφία, ενώ το 1994 κατάφεραν να ανεβάσουν τον αριθμό των ψηφίων στα 4.044.000.000 [19].

Οι αδερφοί Chudnovsky εκτός από το κυνήγι των ψηφίων του π, συνέβαλαν στη δημιουργία καινούργιων μεθόδων για τον υπολογισμό του π. Ασχολήθηκαν με τον υπολογισμό και άλλων αριθμών, ενώ ο Gregory Chudnovsky κάποτε ανέφερε ότι το π είναι μια τρομερά καλή απομίμηση τυχαίου αριθμού. Δηλαδή τα ψηφία του προσεγγίζουν πάρα πολύ μια τυχαία ακολουθία αριθμών. Λίγο μετά την κατάρριψη του πρώτου παγκόσμιου ρεκόρ με τα 480.000.000 ψηφία, άρχισαν να κατασκευάζουν στο διαμέρισμά τους τον δικό τους υπολογιστή για να κάνουν τους υπολογισμούς τους, τον οποίο τον ονόμασαν m-zero [22]. Η σειρά που ανακάλυψαν το 1989, και με την οποία έκαναν τους υπολογισμούς τους είναι η ακόλουθη,

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(6n)!}{(n!)^3(3n)!}\frac{13591409 + n545140134}{\left(640320^3\right)^{n+\frac{1}{2}}}$$ (*η σειρά των Chudnovsky*) [19].

Η σειρά αυτή προσθέτει 14 σωστά δεκαδικά ψηφία του π σε κάθε βήμα υπολογισμών.

Τον Ιούνιο του 1995 οι Takahashi και Kanada κατάφεραν να υπολογίσουν 3.221.225.466 ψηφία, ενώ μέχρι τον Οκτώβριο του 1995 ο Kanada είχε υπολογίσει 6.442.450.938 ψηφία. Το κυνήγι των ψηφίων συνεχίστηκε με τους Kanada και Takahashi να υπολογίζουν πάνω από 51.000.000.000 ψηφία του π το 1997, ενώ το Σεπτέμβριο του 1999 υπολόγισαν 206.158.430.000 [19]. Για αυτόν τον υπολογισμό χρησιμοποίησαν τον αλγόριθμο Gauss-Brent-Salamin ενώ για τον έλεγχο του αποτελέσματος τον τετραγωνικά συγκλίνοντα αλγόριθμο των Borwein [19]. Ο υπολογισμός έγινε με έναν υπολογιστή Hitachi SR8000 με και διήρκεσε 37 ώρες και 21 λεπτά. Ο Kanada

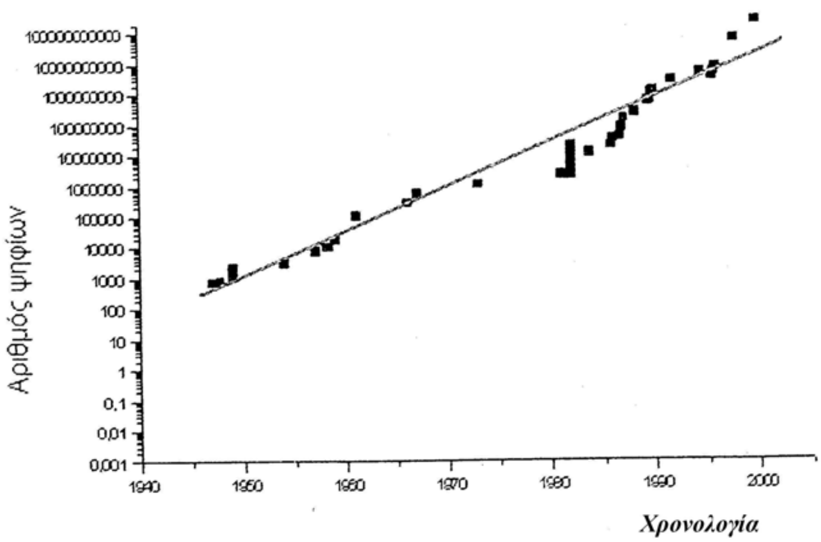


Yasumasa Kanada.

Εικόνα 52

κατέχει και το σημερινό ρεκόρ υπολογισμού του π [34], [38], αφού τον Δεκέμβριο του 2002 υπολόγισε 1.24 τρισεκατομμύρια δεκαδικά ψηφία.

Όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς από τα παραπάνω στοιχεία, η ανακάλυψη των ηλεκτρονικών υπολογιστών αλλά και η χρήση νέων αλγορίθμων με μεγαλύτερη απόδοση, αυξάνουν συνεχώς το ρυθμό εύρεσης ψηφίων του π. Ο ρυθμός αυτός αυξάνεται εκθετικά με το χρόνο [7] και απεικονίζεται στο διάγραμμα (1). Λόγω του ότι πρόκειται για ημιλογαριθμικό διάγραμμα ο ρυθμός εμφανίζεται ως μια ευθεία.



Διάγραμμα 1

Η γνώση όλο και περισσότερων ψηφίων του π, αν και φαίνεται ανούσια, βρίσκει αρκετές εφαρμογές, όπως για παράδειγμα το ότι δοκιμάζει τις δυνατότητες κάθε καινούργιου υπολογιστή. Επιπλέον αποκαλύπτονται περισσότερες πληροφορίες για το π, που ίσως να φανούν χρήσιμες για την περαιτέρω κατανόηση της φύσης του μυστηριώδους αυτού αριθμού. Όπως και να έχει ο $20^{ος}$ αι. αύξησε τις γνώσεις μας για το π ποιοτικά και ποσοτικά αλλά πολλά ερωτήματα παραμένουν αναπάντητα. Η βαθύτερη κατανόηση του π ίσως να αποδειχτεί σημαντική όχι μόνο για τα μαθηματικά αλλά για μια πληθώρα άλλων επιστημών.

Οι σύγχρονες γνώσεις μας για τη φύση του αριθμού π.

Το π και η παρουσία του στα μαθηματικά.

Το π είναι ένας αριθμός που μπορεί να οριστεί με πολλούς αριθμητικούς τρόπους αλλά μόνο με ένα γεωμετρικό [7]. Γεγονός αποτελεί το ότι έχει επικρατήσει να προσδιορίζεται ως ο λόγος της περιφέρειας του κύκλου προς την ακτίνα του . Είναι σωστότερο να ισχυριστεί κανείς ότι μια από τις ιδιότητές του είναι το ότι ισούται με το λόγο της περιφέρειας του κύκλου προς την ακτίνα του [16]. Πρόκειται για έναν από τους πιο σημαντικούς αριθμούς της ανάλυσης, αφού εμφανίζεται διαρκώς στα πιο απίθανα σημεία. Ένα από τα τυπικότερα παραδείγματα είναι ο περίφημος τύπος του Euler $e^{i\pi}+1=0$.

Εξ' ίσου έντονη η παρουσία του και στη θεωρία πιθανοτήτων. Έχει ήδη προαναφερθεί το πρόβλημα του Comte de Buffon με τη βελόνα. Η πιθανότητα να τμήσει μια βελόνα μήκους l παράλληλες γραμμές που απέχουν απόσταση d, με $l<d$, είναι $\frac{2\cdot l}{\pi\cdot d}$. Το 1904, ο R. Chartres σκέφτηκε να χρησιμοποιήσει τον τρόπο αυτό για να προσεγγίσει το π, με ανάλογη διαδικασία αυτής του προβλήματος της βελόνας [29]. Ακόμα είναι γνωστό ότι αν γραφτούν στην τύχη δύο αριθμοί, η πιθανότητα να είναι πρώτοι προς αλλήλους είναι $\frac{6}{\pi^2}$ [16], [22].

Επιπλέον, έστω ένας μεγάλος ορθογώνιος φράχτης με πασσάλους, στημένους κατακόρυφα στο έδαφος. Αν επιλέξουμε τυχαία δύο από αυτούς, η πιθανότητα να φαίνεται απ' ευθείας ο άλλος πάσσαλος – χωρίς να μεσολαβεί κάποιος πάσσαλος - είναι $\frac{6}{\pi^2}$ [22].

Άλλο γνωστό μαθηματικό πρόβλημα το οποίο σχετίζεται με το π είναι σε ποιο ποσοστό μπορούμε να καλύψουμε την επιφάνεια ενός επίπεδου τραπεζιού με ίσα κέρματα, χωρίς το ένα κέρμα να πατάει πάνω στο άλλο. Η απάντηση είναι ότι με τη διάταξη εξαγώνου έχουμε τη μεγαλύτερη κάλυψη, σε ποσοστό 90%.

Το μέρος του συνολικού εμβαδού που θα καλυφθεί με αυτή τη διάταξη είναι $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ [11]. Η απόδειξη έγινε μόλις στις αρχές του $20^{ου}$ αιώνα.

Το ανάλογο ερώτημα για τη διάταξη των σφαιρών στο χώρο είναι πολύ δυσκολότερο από αυτό της διάταξης των κύκλων στο επίπεδο. Το πρόβλημα πρωτοδιατυπώθηκε από τον J. Kepler (1571-1630), ο οποίος σε μια πραγματεία του για τις νιφάδες του χιονιού αναφέρθηκε στο πόσο πυκνά μπορούν να τοποθετηθούν τα κουκούτσια των φρούτων, π.χ. των μήλων. Ο ίδιος όντας μαθηματικός εμπνεύστηκε από το συγκεκριμένο ερώτημα και το έθεσε στη γενικότερη μορφή του, δηλαδή ποια είναι η πυκνότερη διάταξη των σφαιρών. Το πρόβλημα έμεινε γνωστό ως εικασία του Kepler και πέρασαν αιώνες μέχρι να αποδειχθεί. Στο διεθνές συνέδριο των μαθηματικών του Παρισιού το 1900, ο David Hilbert το κατέταξε στη $18^{η}$ θέση της λίστας των άλυτων προβλημάτων του [11].

Αναλογικά με το προηγούμενο πρόβλημα, και στην περίπτωση αυτή η εξαγωνική διάταξη είναι η καλύτερη. Δηλαδή τοποθετούμε μια σειρά σφαιρών σε εξαγωνικό σχήμα, στη δεύτερη σειρά τοποθετούνται οι σφαίρες στα κενά της πρώτης κ.ο.κ. Η πυκνότητα αυτής της διάταξης είναι $\frac{\pi}{\sqrt{18}} \cong 0,74$, που σημαίνει ότι μπορούμε να καλύψουμε το 74% του χώρου. Δεν είχε βρεθεί καλύτερη λύση για τη διάταξη και για μεγάλο διάστημα δεν μπορούσε να αποδειχθεί ότι υπάρχει πυκνότερη διάταξη. Πρώτος ο Carl Gauss το 1831 απέδειξε αυτήν την υπόθεση με τη δεσμευτική προϋπόθεση ότι οι σφαίρες της διάταξης δημιουργούν ένα κανονικό σχήμα. Το πρόβλημα γενικά παρέμενε άλυτο, μέχρι που μόλις το 1998 ο Thomas Hales κατάφερε να αποδείξει ότι αυτή η μέθοδος συσκευασίας είναι η πυκνότερη [41].

Αυτές είναι μόνο κάποιες ενδεικτικές αναφορές της έντονης παρουσίας του π, στα διάφορα μαθηματικά πεδία. Γνωρίζουμε ακόμα ότι οι αριθμοί e^{π} και $\pi + \log 2 + \sqrt{2}\log 3$ είναι υπερβατικοί. Επιπλέον, όπως προαναφέρθηκε σε άλλο κεφάλαιο, τον Δεκέμβριο του 2002 υπολογίστηκαν από τον Kanada 1.24 τρισεκατομμύρια δεκαδικά ψηφία. Παρά τις άπειρες ώρες μελέτης που έχουν αφιερώσει οι μαθηματικοί ανά τους αιώνες, οι γνώσεις μας για τον αριθμό π παραμένουν σε χαμηλό επίπεδο. Αρκεί να αναλογιστεί κανείς ότι δεν είναι γνωστό αν βασικές σταθερές όπως οι $\pi + e, \pi/e$ ή $\log \pi$, δεν έχουν αναγνωριστεί ως άρρητες, πόσο μάλλον υπερβατικές. Η καλύτερη πληροφορία που έχουμε για αυτές τις τρεις σταθερές είναι ότι δεν αποτελούν ρίζες πολυωνυμικής εξίσωσης όγδοου βαθμού ή μικρότερου, με ακέραιους συντελεστές μέσου μεγέθους μικρότερου του 10^9 [19]. Επιπλέον δε γνωρίζουμε τίποτα για τη συνέχεια του συνεχούς κλάσματος του π, παρά μόνο τους πρώτους 17 εκατομμύρια όρους του, που υπολόγισε ο Gosper το 1985. Ανάλογα εκτός από τα πρώτα 1,24 τρισεκατομμύρια ψηφία του, δε γνωρίζουμε τίποτα άλλο για το δεκαδικό ανάπτυγμα του π. Κατά κάποιο τρόπο τείνουμε να υπολογίζουμε άπειρα δεκαδικά ψηφία του π γιατί δεν υπάρχουν και πολλοί άλλοι τρόποι να προσεγγίσουμε το π.

Είναι ο π αριθμός Liouville;

Μέχρι τώρα είδαμε ότι το 1767 αποδείχτηκε με μη αυστηρό τρόπο η αρρητότητα του π από τον Lambert, και στη συνέχεια, το 1794, ο Legendre τελειοποίησε την απόδειξή του. Το 1882 ο Lindemann κατάφερε να αποδείξει και την υπερβατικότητα του π. Αξίζει να σημειωθεί ότι πρόκειται για τον πιο «φυσιολογικό» υπερβατικό αριθμό αφού προκύπτει με απλό τρόπο από την περιφέρεια ενός κύκλου με διάμετρο τη μονάδα. Το 1953 ο Mahler απέδειξε ότι ο π δεν αριθμός Liouville [18]. Ένας άρρητος αριθμός β, θεωρείται αριθμός Liouville όταν για κάθε n, υπάρχουν ακέραιοι p και q τέτοιοι ώστε

$$0 < \left| \beta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}.$$

Ο Liouville απέδειξε ότι όλοι οι αριθμοί αυτού του τύπου είναι υπερβατικοί, και σε ότι αφορά τον π συγκεκριμένα, απέδειξε ότι

$$\left|\pi-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{q^{14,65}},$$

για p, q ακέραιους, με q αρκετά μεγάλο. Αυτή η *εκτίμηση αρρητότητας* δεν είναι η καλύτερη δυνατή, σύμφωνα με τους Chudnovsky και Chudnovsky. Είναι πιθανό το 14,65 να μπορεί να αντικατασταθεί με 2 + ε, όπου ε > 0. Σχεδόν όλοι οι υπερβατικοί αριθμοί ικανοποιούν αυτή την ανισότητα.

Είναι ο π κανονικός αριθμός;

Στον 20^o αι. αναδείχθηκε ένα καινούργιο ερώτημα σε ότι αφορά τη φύση του αριθμού π. Το ερώτημα αν ο π είναι κανονικός αριθμός [67], [41]. Η έννοια της κανονικότητας, εισήχθη για πρώτη φορά από τον *E. Borel* το 1909, σε μια προσπάθειά του να προσδιορίσει το πότε ένας πραγματικός αριθμός είναι τυχαίος. Ο ορισμός αυτός έχει ως εξής:

Ένας πραγματικός αριθμός x ονομάζεται <u>κανονικός σε βάση b</u> , αν κατά την αναπαράστασή του στη βάση b όλα τα ψηφία του εμφανίζονται το ίδιο συχνά. Επιπλέον για κάθε m, οι b^m *διαφορετικές m-σειρές αριθμών πρέπει να εμφανίζονται το ίδιο συχνά. Με άλλα λόγια* $\lim_{n\to\infty} N(s,n)/n = 1/b^m$ *για κάθε s m-σειρά ψηφίων, όπου N(s,n) είναι ο αριθμός εμφάνισης των s στα πρώτα n βάσης b ψηφία του x.*[67], [41].

Με άλλα λόγια, ένας αριθμός ονομάζεται <u>κανονικός σε βάση b</u> αν όλα τα ψηφία του εμφανίζονται το ίδιο συχνά, όλες οι δυάδες ψηφίων του εμφανίζονται το ίδιο συχνά, όλες οι τριάδες ψηφίων εμφανίζονται το ίδιο συχνά κ.ο.κ. [67], [41].

Ένας αριθμός που είναι κανονικός σε κάθε βάση b, ονομάζεται απλά <u>κανονικός</u>.[67], [41].

Η διερεύνηση του αν τα ψηφία του π είναι τυχαία κατανεμημένα έχει απασχολήσει τους μαθηματικούς πριν τον αυστηρό ορισμό της έννοιας της κανονικότητας. Για παράδειγμα ο De Morgan υπολόγισε ότι το 7 εμφανίζεται 44 φορές στα πρώτα 608 ψηφία, συχνότητα μικρότερη από την αναμενόμενη. Στη συνέχεια όμως αποδείχτηκε ότι οι υπολογισμοί του βασίστηκαν σε λανθασμένα δεδομένα.

Υπάρχουν πάρα πολλοί κανονικοί αριθμοί, αφού όπως απέδειξε ο Borel το μέτρο Lebesgue του συνόλου των μη-κανονικών αριθμών είναι 0. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι ανάμεσα στις άπειρες δεκαδικές εκφράσεις των πραγματικών που βρίσκονται μεταξύ του 0 και του 1, οι «κανονικοί» αριθμοί είναι άπειρα περισσότεροι από τους «μη-κανονικούς». Με άλλα λόγια η πιθανότητα να επιλέξουμε «μη-κανονικό» πραγματικό αριθμό τείνει στο μηδέν [31]. Παρ' όλ' αυτά είναι δύσκολο να βρεθούν συγκεκριμένα παραδείγματα τέτοιων αριθμών. Ο Kac αναφέρει χαρακτηριστικά το 1959 «είναι πολύ πιο εύκολο να αποδειχτεί ότι ένα τεράστιο πλήθος αντικειμένων έχει μια ιδιότητα από το να βρεθεί ένα συγκεκριμένο τέτοιο αντικείμενο…Είναι πολύ δύσκολο να βρεθεί ένας κανονικός αριθμός!». Δεν γνωρίζουμε αν θεμελιώδεις μαθηματικές σταθερές, όπως οι π, $\ln 2$, ζ, $\sqrt{2}$ και e. Οι μόνοι αποδεδειγμένα κανονικοί αριθμοί είναι τεχνητά κατασκευασμένες σταθερές, όπως η σταθερά Champernowne 0,12345678910111213…., η οποία είναι κανονική με βάση 10.

Προκειμένου να αποδειχτεί ότι ο π είναι κανονικός αριθμός πρέπει να ελεγχθούν όσο γίνεται περισσότερα ψηφία του π, κάτι το οποίο αιτιολογεί τις υπερπροσπάθειες μαθηματικών όλων των εποχών, για την εύρεση όλο και περισσότερων δεκαδικών ψηφίων. Παρ' όλ' αυτά δεν μπορούμε να αποκλείσουμε το ενδεχόμενο να εμφανίζονται από κάποιο σημείο και μετά μόνο τα ψηφία π. χ. 0 ή 1.

Το 1986, ο David Bailey [17] έλεγξε τα πρώτα 29.360.000 ψηφία του π και βρήκε ότι αυτά είναι τυχαία κατανεμημένα. Το 1988, μια εκτενέστερη έρευνα του Yasumasa Kanada [45] ο οποίος υπολόγισε 201.326.000 ψηφία του π. Οι συχνότητες των ψηφίων 0-9 για τα πρώτα 200.000.000 ψηφία του π – 3 απεικονίζονται στους ακόλουθους πίνακες.

Ψηφίο	0	1	2	3	4
Συχνότητα $N = 200000000$	**19.997.437**	**20.003.774**	**20.002.185**	**20.001.410**	**19.999.846**

Οι συχνότητες των ψηφίων 0 έως 4.*Πίνακας 2*

Ψηφίο	5	6	7	8	9
Συχνότητα $N = 200000000$	**19.993.031**	**19.999.161**	**20.000.287**	**20.002.307**	**20.000.562**

Οι συχνότητες των ψηφίων 5 έως 9. ***Πίνακας 3***

Όπως φαίνεται και από τους πίνακες 2 και 3 οι συχνότητες των ψηφίων δεν παρουσιάζουν απόκλιση από τις αναμενόμενες συχνότητες τυχαίων αριθμών [7]. Επιπλέον, και η ταχύτητα με την οποία οι σχετικές συχνότητες συγκλίνουν στο $1/10$ σύμφωνα με τα αναμενόμενα αποτελέσματα [67]. Έστω για παράδειγμα το ψηφίο 7. Η σχετικές του συχνότητες για τα πρώτα για τα πρώτα 10^i ψηφία του π, όπου i = 1,…,7, είναι αντίστοιχα 0, 0.08, 0.095, 0.097, 0.10025, 0.0998, 0.1000207. Φαίνεται ότι πλησιάζει το $1/10$ με την ταχύτητα που προβλέπεται από την θεωρία πιθανοτήτων για τους τυχαίους αριθμούς, δηλαδή ταχύτητα ανάλογης της $1/\sqrt{n}$, χωρίς σημαντική στατιστική διαφορά. Παρακάτω παρατίθεται ο πίνακας 4 που παρουσιάζει τα αποτελέσματα του poker test για τα πρώτα 10^7 ψηφία. Το poker test σχετίζεται με την κανονικότητα σε βάση 10. Όπως φαίνεται και από τον πίνακα τα αποτελέσματα δεν παρουσιάζουν στατιστικά σημαντική διαφορά από τις αναμενόμενες τιμές.

Από την ίδια έρευνα και την ανάλυση της ακολουθίας των 200.000.000 ψηφίων του π προέκυψαν κάποια ενδιαφέροντα συμπεράσματα όπως τα παρακάτω:

- Η πιο μεγάλη φθίνουσα ακολουθία ψηφίων 2109876543 εμφανίζεται μόνο μια φορά στη θέση 26.160634. Η επόμενη φθίνουσα ακολουθία είναι η 876543210, η οποία εμφανίζεται μόνο μια φορά στη θέση 2.747.956. Η επόμενη φθίνουσα ακολουθία έχει μέγεθος 8 και εμφανίζεται 9 φορές.
- Η πιο μεγάλη αύξουσα ακολουθία ψηφίων 901234567 εμφανίζεται μόνο μια φορά στη θέση 197.090.144. Επόμενες αύξουσες ακολουθίες που εμφανίζονται είναι η 23456789 (θέση 995.998), η 89012345 (θέσεις 33.064.267, 39.202.678, 62.632.993, 78.340.559), η 90123456 (θέσεις

35.105.378, 44.994.87, 98.647.533 και 127.883.114), η 56789012 (θέσεις 100.800.812, 139.825.562), η 67890123 (θέσεις 102.197.548, 135.721.079 και 178.278.161), 01234567 (θέση 112.099.767), 78901234 (θέσεις 119.172.322, 122.016.838, 182.288.028 και 195.692.744), 12345678 (θέση 186.557.266) και 45678901 (θέση 194.981.709). Η επόμενη αύξουσα ακολουθία έχει μέγεθος 7 και εμφανίζεται 170 φορές.

Poker test (ανά 5 ψηφία)	Αναμενόμενο αποτέλεσμα	Πραγματικό αποτέλεσμα
Όλα τα ψηφία διαφορετικά	**604.800**	**604.976**
Ένα ζευγάρι ίδιων ψηφίων	**1.008.000**	**1.007.151**
Δύο ζευγάρια ίδιων ψηφίων	**216.000**	**216.520**
Μια τριάδα ίδιων ψηφίων	**144.000**	**144.375**
Μια τριάδα και ένα ζευγάρι ίδιων ψηφίων.	**18.000**	**17.891**
Μια τετράδα ίδιων ψηφίων	**9.000**	**8.887**
Μια πεντάδα ίδιων ψηφίων	**200**	**200**

Poker test. ***Πίνακας 4***

- Η μεγαλύτερη ακολουθία εννέα συνεχόμενων ψηφίων εμφανίζεται 3 φορές. Των ψηφίων 7 (θέση 24.658.601), των ψηφίων 6 (θέση 45.681.781) και των ψηφίων 8 (θέση 46.663.520). Η επόμενη συνεχόμενη ακολουθία πολλαπλότητας 8 εμφανίζεται 16 φορές.
- Η ακολουθία 27182818 εμφανίζεται 3 φορές (θέσεις 73.154.827, 143.361.474 και 183.026.622). Η αμέσως επόμενη 2718281 εμφανίζεται 22 φορές.

- Η ακολουθία 14142135 εμφανίζεται 3 φορές (θέσεις 52.638, 10.505.872 και 143.965.527). Η αμέσως επόμενη 1414213 εμφανίζεται 13 φορές. Η αμέσως επόμενη 141421 εμφανίζεται 169 φορές.
- Η ακολουθία 31415926 εμφανίζεται 2 φορές (θέσεις 50.366.472 και 157.060.182). Η επόμενη ακολουθία 3141592 εμφανίζεται 7 φορές.

Παρά τα δισεκατομμύρια των ψηφίων του π που είναι γνωστά και τις άπειρες ενδείξεις που υπάρχουν, δεν μπορούμε να πούμε με σιγουριά ότι ο π είναι κανονικός αριθμός, λόγω έλλειψης μιας αυστηρής μαθηματικής απόδειξης. Αν και τα γνωστά του δεκαδικά ψηφία έχουν περάσει όλους τους ελέγχους κανονικότητας, δεν μπορούν να ονομαστούν τυχαία διότι η σειρά τους μπορεί να βρεθεί με τη χρήση απλών τύπων. Έτσι κάθε επόμενο δεκαδικό ψηφίο του π μπορεί να προβλεφθεί με βεβαιότητα. Επειδή λοιπόν πρόκειται για το π τα ψηφία του είναι αυστηρά διατεταγμένα, αν όμως τα ίδια ψηφία δεν ανήκαν στο π, δεν θα διέθεταν κανένα ευδιάκριτο σχέδιο διαδοχής! [31]. Οι Gregory και David Chudnovsky [61] του Columbia university ανακάλυψαν ότι τα ψηφία του π είναι καλύτερη προσέγγιση τυχαίας ακολουθίας, σε σχέση με τις ακολουθίες των ψευδοτυχαίων αριθμών που δημιουργούνται από ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Το βασικό τους επιχείρημα είναι ότι οι ψευδοτυχαίες ακολουθίες δημιουργούνται από πεπερασμένους αλγόριθμους και άρα είναι περιοδικές. Βέβαια οι ειδικοί υποστηρίζουν ότι δεδομένου ότι το π υπολογίζεται πλέον με ταχύτατα συγκλίνοντες αλγορίθμους, πιθανότατα να υπάρχει κάποια βάση στην οποία το π δεν είναι κανονικός αριθμός. Επιλέγοντας τη βάση 10 όμως ο π είναι επαρκώς κανονικός αριθμός για πολλά εκατομμύρια ψηφία.

Ο T.Jaditz [44] εφάρμοσε διάφορα test στα ψηφία του π, όπως τα Knuth's collision tests, το BDSL test και moment tests. Αν και είναι πολύ δύσκολο να αποδειχθεί η ανεξαρτησία των ψηφίων σε ανώτερη τάξη, καθώς μπορούν να ελεγχθούν μόνο μικρές σειρές των ψηφίων του, τα ψηφία του π είναι ισοπίθανα και στατιστικά ανεξάρτητα στο εύρος που μπορούν να ελεγχθούν. Πιο συγκεκριμένα τα ψηφία του π είναι ισοπίθανα και στατιστικά ανεξάρτητα κατανεμημένα μετά τα πρώτα 500 ψηφία [51]. Το κυνήγι των ψηφίων του π ίσως να μας διαφωτίσει περισσότερο για την απάντηση στο ερώτημα της κανονικότητάς του.

Το π και η σχέση του με τα fractals.

Το σύνολο Mandelbrot.

Το 1991 ο Dave Ball πραγματοποίησε ένα μικρής εμβέλειας πείραμα σε ηλεκτρονικό υπολογιστή, στο οποίο παρατήρησε κάποια σχέση μεταξύ του συνόλου Mandelbrot και της σταθεράς π = 3,141592…. [40]. Για να γίνει κατανοητή η συσχέτιση αυτή, πρέπει πρώτα να γίνει μια σύντομη αναφορά στο σύνολο Mandelbrot, και κατ' επέκταση στα *fractals* [43]. Η έννοια αυτή εισήχθηκε από τον Benoît Mandelbrot το 1975 και η ονομασία της προέρχεται από τη λέξη *fractus* που σημαίνει «σπασμένο» ή «κατακερματισμένο».

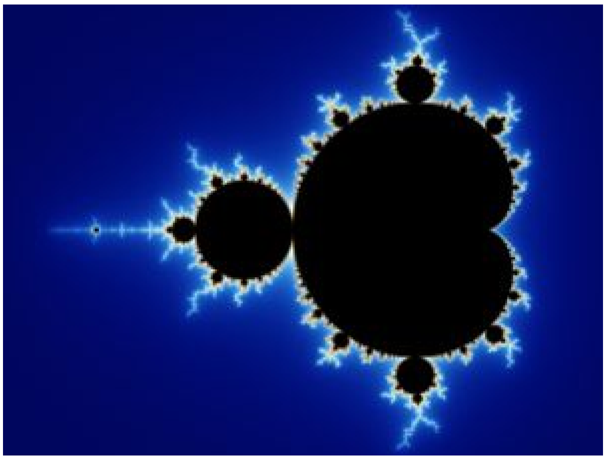
<u>Fractal</u> ονομάζεται ένα ανώμαλο ή κατακερματισμένο γεωμετρικό σχήμα, το οποίο μπορεί να χωριστεί σε κομμάτια, τα οποία τουλάχιστον κατά προσέγγιση, αποτελούν μια μικρογραφία του συνόλου.

Το fractal ως γεωμετρικό αντικείμενο έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά [43], [58]:

- Έχει άρτια δομή ακόμα και σε πολύ μικρή κλίμακα.
- Είναι πολύ ακανόνιστο για να μπορεί να περιγραφεί με την τυπική γλώσσα της ευκλείδειας γεωμετρίας.
- Είναι ίδιο με τον εαυτό του, τουλάχιστον κατά προσέγγιση.
- Έχει διάσταση Hausdorff, η οποία είναι μεγαλύτερη από την τοπολογική του διάσταση.
- Έχει απλό και επαναληπτικό ορισμό.

Το περίγραμμα του συνόλου Mandelbrot, είναι ένα από τα πιο διάσημα παραδείγματα fractal. Στην εικόνα 53 απεικονίζεται το σύνολο Mandelbrot, και στην εικόνα 54 φαίνονται επιλεγμένα μέρη του σε μεγέθυνση.

Το σύνολο Manelbrot δημιουργείται με την επανάληψη της ίδιας διαδικασίας πολλές φορές [43]. Στα μαθηματικά μια τέτοια διαδικασία συχνά ισοδυναμεί με την εφαρμογή μιας συνάρτησης. Η συνάρτηση που κρύβεται πίσω από το σύνολο Mandelbrot είναι η απλούστερη μη γραμμική συνάρτηση, $x^2 + c$ όπου c είναι μια σταθερά. Ξεκινώντας με τον πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό x_0 και εφαρμόζοντας τη συνάρτηση, προκύπτει ο $x_1 = (x_0)^2 + c$. Συνεχίζουμε τη διαδικασία, εφαρμόζουμε τη συνάρτηση για τον x_1, και προκύπτει ο $x_2 = (x_1)^2 + c$. Ανάλογα προκύπτουν οι $x_3 = (x_2)^2 + c$, $x_4 = (x_3)^2 + c$, $x_5 = (x_4)^2 + c$ κ.ο.κ. Οι αριθμοί $x_0, x_1, x_2, \ldots$ ονομάζονται *τροχιά* του x_0, υπό την επανάληψη της $x^2 + c$ [43].



Το σύνολο Mandelbrot. ***Εικόνα 53***

Το σύνολο Mandelbrot και επιλεγμένα μέρη του σε μεγέθυνση. ***Εικόνα 54***

Μερικά από τα πιο συνηθισμένα ερωτήματα στον κλάδο αυτό των μαθηματικών είναι: Ποια είναι η μοίρα των τυπικών τροχιών; Συγκλίνουν ή αποκλίνουν; Κινούνται κυκλικά ή όχι; Αυτά είναι και τα ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με τα fractals.

Επιλέγοντας $c = 1$ και $x_0 = 0$, η τροχιά που προκύπτει είναι $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$, $x_4 = 26$, $x_5 = 677$, $x_6 = 458330, \ldots$, δηλαδή τείνει στο άπειρο.

Επιλέγοντας $c=0$ και $x_0=0$, η τροχιά που προκύπτει είναι $x_0=0$, $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$, $x_5=0$, $x_6=0,\ldots$, δηλαδή είναι πάντα ίση με μηδέν. Επιλέγοντας $c=-1$ και $x_0=0$, η τροχιά που προκύπτει είναι $x_0=0$, $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=-1$, $x_4=0$, $x_5=-1$, $x_6=0,\ldots$, δηλαδή κάνει κύκλο περιόδου 2. Δίνοντας διάφορες τιμές στη σταθερά c, παρατηρούμε ότι η τροχιά του 0 (δηλ. για $x_0=0$) ή θα τείνει στο άπειρο ή όχι. Αν δεν τείνει στο άπειρο μπορεί να συμπεριφέρεται με διάφορους τρόπους, όπως για παράδειγμα κυκλικά ή χαοτικά. Το σύνολο Mandelbrot ουσιαστικά οριοθετεί τη συμπεριφορά της τροχιάς του 0, υπό την επίδραση της x^2+c, όπου η c παίρνει τιμές και από τους μιγαδικούς αριθμούς.

Το <u>σύνολο Mandelbrot</u> M αποτελείται από όλους τους μιγαδικούς c για τους οποίους η τροχιά του 0 υπό την επίδραση της συνάρτησης x^2+c, δεν τείνει στο άπειρο.[43]

Για να κατασκευάσουμε το σύνολο Mandelbrot στον ηλεκτρονικό υπολογιστή, κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο στο μιγαδικό επίπεδο, με κέντρο την αρχή των αξόνων και πλευρές μήκους 4. Καλύπτουμε το τετράγωνο με ένα πλέγμα , του οποίου κάθε τετραγωνάκι αντιστοιχεί σε έναν μιγαδικό αριθμό c. Στη συνέχεια για κάθε τιμή του c ελέγχουμε με τον υπολογιστή αν η αντίστοιχη τροχιά του 0 τείνει στο άπειρο ή όχι. Στην πρώτη περίπτωση αφήνουμε το αντίστοιχο c-κουτάκι του πλέγματος άσπρο, ενώ στη δεύτερη περίπτωση χρωματίζουμε το αντίστοιχο c-κουτάκι του πλέγματος μαύρο. Έτσι τα μαύρα κουτάκια που προκύπτουν σχηματίζουν το σχήμα της προηγούμενης εικόνας.

Ο ρόλος του π στο σύνολο Mandelbrot.

Το 1991 ο Boll, όπως ο ίδιος αναφέρει [58], στην προσπάθειά του να φτιάξει ένα πρόγραμμα για να αποδείξει ότι ο «λαιμός»[11], στη θέση $c=-0.75+0i$, του συνόλου Mandelbrot είναι μηδενικού πάχους, έκανε μια σημαντική ανακάλυψη. Προσπαθούσε να ελέγξει τον αριθμό των επαναλαμβανόμενων εφαρμογών της συνάρτησης που προκύπτουν από την $c=-0.75+\varepsilon i$ (όπου ε είναι ένας μικρός αριθμός), πριν η τροχιά του 0 αρχίσει να τείνει στο άπειρο. Στον πίνακα 5 απεικονίζονται τα αποτελέσματα για τις διάφορες τιμές του ε.

ε	*Εφαρμογές της συνάρτησης* $x^2 + c$.
0,1	***33***
0,01	***315***
0,001	***3143***
0,0001	***31417***
0,00001	***314160***
0,000001	***3141593***
0,0000001	***31415928***

Αποτελέσματα για τις διάφορες τιμές του ε. *Πίνακας 5*

Εύκολα μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι ο αριθμός των εφαρμογών της συνάρτησης προσεγγίζει την τιμή του π. Επιπλέον πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό των εφαρμογών της συνάρτησης με τον αριθμό ε, προκύπτει ο π με απόκλιση $\pm\varepsilon$.

Ο Boll παραξενεμένος συνέχισε τους πειραματισμούς του στο δεξιό μέρος της «καρδιάς», στο σημείο όπου συγκλίνουν οι δύο καμπύλες, στη θέση $c = 0{,}25 + 0i$. Σε αυτή τη θέση δοκίμαζε σημεία της μορφής $c = 0{,}25 + \varepsilon + 0i$ (όπου ε είναι ένας μικρός αριθμός). Στον πίνακα 6 απεικονίζονται τα αποτελέσματα για τις διάφορες τιμές του ε.

Παρατηρούμε ότι προκύπτουν παρόμοια αποτελέσματα με την προηγούμενη δοκιμή, με τη διαφορά ότι τώρα $\lim_{\varepsilon \to 0} N(\varepsilon) \cdot \sqrt{\varepsilon} = \pi$, όπου $N(\varepsilon)$ είναι ο αριθμός των εφαρμογών της συνάρτησης $x^2 + c$, πριν η τροχιά του 0 τείνει στο άπειρο. Ειδικά για την περίπτωση $c = 0{,}25$, ανάλογα αποτελέσματα είχαν προκύψει και πριν το 1991 στα πλαίσια της περιοδικότητας.

ε	*Εφαρμογές της συνάρτησης* $x^2 + c$.
0,1	**8**
0,01	**30**
0,001	**97**
0,0001	**312**
0,00001	**991**
0,000001	**3140**
0,0000001	**9933**
0,00000001	**31414**
0,000000001	**99344**
0,0000000001	**314157**
0,00000000001	**993457**
0,000000000001	**3141625**

Αποτελέσματα για τις διάφορες τιμές του ε. ***Πίνακας 6***

Ο Boll δημοσίευσε τα αποτελέσματά του και προκάλεσε το ενδιαφέρον πολλών, ενώ παράλληλα προσπάθησε να εξηγήσει το φαινόμενο αυτό. Σύμφωνα με τα δεδομένα του συνόλου Mandelbrot η ποσότητα $N(\varepsilon)\sqrt{\varepsilon}$ για $c = 0{,}25$ τείνει στην σταθερά 2,36, και είναι αξιοπερίεργο το ότι τείνει στο π. Οι Guckenheimer και Holmes επιχειρούν να δώσουν κάποια εξήγηση [58].

Έστω η ακολουθία $x_{k+1} = x_k^2 + 0{,}25 + \varepsilon$, $x_0 = 0$ (1). Σύμφωνα με τη μέθοδο του Euler, παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση $x'(t) = f_\varepsilon(x(t))$, και έστω ότι η αρχική ακολουθία μπορεί να γραφτεί στη μορφή $x_{k+1} = x_k + hf_\varepsilon(x_k)$ (2), για κάποια συνάρτηση f_ε με παράμετρο ε και βήμα Euler h. Για $h = 1$, η (2) γίνεται

$$f_\varepsilon(x_k) = x_{k+1} - x_k = x_k^2 + \frac{1}{4} + \varepsilon - x_k\,.$$

Έτσι προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$x'(t) = x^2(t) - x(t) + \frac{1}{4} + \varepsilon \,. \text{ (3)}$$

Ξεκινώντας την επίλυση της εξίσωσης αυτής με αρχική συνθήκη $x(0)=0$, υπολογίζουμε το χρόνο t που χρειάζεται μέχρι να φτάσει στην τιμή $x(t)=1$. Ο χρόνος θα είναι σύμφωνα με την (1), ο αριθμός των βημάτων Euler μέχρι να ισχύει $x_k \geq 1$, δηλαδή ο αριθμός των επαναλαμβανόμενων εφαρμογών της (1) κατά την πραγματοποίηση του πειράματος στον υπολογιστή. Όσο το ε τείνει στο 0, θα δούμε ότι το $\sqrt{\varepsilon \cdot t}$ τείνει στο π [58].

Με τη βοήθεια της (3), ολοκληρώνοντας από 0 έως t, προκύπτει το ολοκλήρωμα

$$\int_0^t \frac{x'(s)}{x(s)^2 - x(s) + \frac{1}{4} + \varepsilon} ds = \int_0^t ds \,.$$

Αντικαθιστώντας το $x'(s)ds$ με dx και το t με $x(t)$ στο αριστερό μέλος προκύπτει

$$\int_0^{x(t)} \frac{dx}{x^2 - x + \frac{1}{4} + \varepsilon} = t \,.\text{(4)}$$

Η αρχική συνάρτηση είναι η $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)$, οπότε το ολοκλήρωμα (4), πολλαπλασιάζοντας με $\sqrt{\varepsilon}$ θα πάρει την τελική μορφή

$$\arctan\left(\frac{x(t)}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) = \sqrt{\varepsilon} t \,.$$

Ενδιαφερόμαστε για το χρόνο t, όταν $x(t)=1$, και άρα τελικά έχουμε

$$2\arctan\left(\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) = \sqrt{\varepsilon} t \,.$$

Όταν το $\varepsilon \to 0$, το τόξο εφαπτομένης τείνει στο $\frac{\pi}{2}$ και άρα το αριστερό μέλος τείνει στο π. Οπότε $\lim \sqrt{\varepsilon} t = \pi$. Αν και η απόδειξη δεν είναι αυστηρή, παρέχει κάποιου είδους αιτιολόγηση του φαινομένου. Ανάλογη είναι η απόδειξη και για $c = -0{,}75$ [58].

Το π, το κυνήγι των ψηφίων του και οι σύγχρονες εφαρμογές του.

Αν το π αποτελούσε μόνο το λόγο της περιφέρειας του κύκλου προς την ακτίνα του, πολύ λίγο ενδιαφέρον θα παρουσίαζε ο υπολογισμός των ψηφίων του. Οι κυνηγοί των ψηφίων του κατηγορήθηκαν κατά καιρούς για την ενασχόλησή τους με την εύρεση όλο και περισσότερων ψηφίων. Συχνά η δουλειά τους χαρακτηρίζεται αναίτια και ανούσια, και υποτιμάται η μαθηματική της βαρύτητα. Αξίζει να αναφερθούν ξανά στο σημείο αυτό τα λόγια του Νεύτωνα «*Ντρέπομαι να σας πω πόσα δεκαδικά ψηφία υπολόγισα , μην έχοντας με τι άλλο να ασχοληθώ την περίοδο εκείνη.*», ο οποίος απολογείται για την ενασχόλησή του με την εύρεση ψηφίων του π κατά τα χρόνια παραμονής του στο Woolsthorpe, το 1665-66. Η ιστορία των μαθηματικών όμως τους δικαιώνει, καθώς το δεκαδικό ανάπτυγμα μας βοηθάει να κατανοήσουμε καλύτερα τα φύση αυτού του αριθμού.

Μια από τις σημαντικότερες εφαρμογές του π στη σύγχρονη εποχή, είναι η χρησιμότητά του στον έλεγχο της αξιοπιστίας ενός υπερυπολογιστή [18]. Ο υπολογισμός του δεκαδικού αναπτύγματος του π αποτελεί μια επίπονη δοκιμασία για τους σύγχρονους υπερυπολογιστές. Ο υπολογισμός του π σε μεγάλο εύρος, χρησιμοποιεί κάθε κομμάτι του υπολογιστή και αναπόφευκτα έχει και τις συνέπειές του σε αυτόν [58]. Τυχόν λάθη του δεκαδικού αναπτύγματος αποκαλύπτουν και το πιο αμελητέο λάθος του σκληρού δίσκου, το οποίο πρέπει να διορθωθεί έως ότου οι υπολογισμοί να πραγματοποιούνται με επιτυχία. Έτσι υπολογισμοί σε μικρότερη κλίμακα, εφαρμόζονται ως τεστ αξιοπιστίας σε υπερυπολογιστές, πριν αυτοί διατεθούν στην αγορά.

Η κανονικότητα του π δεν είναι ρητά μαθηματικά αποδεδειγμένη. Έτσι, η εύρεση όλο και περισσότερων ψηφίων του π ίσως να δώσει μια απάντηση στο ερώτημα αυτό. Επιπλέον, τα αποτελέσματα των στατιστικών αναλύσεων των ψηφίων του π, ίσως αποκαλύψουν περισσότερα στοιχεία για την έννοια της κανονικότητας, αλλά και να μας αποκαλύψουν νέους τρόπους προσέγγισης της έννοιας αυτής [19].

Παρ' όλ' αυτά, η κανονικότητα στο βαθμό που την παρουσιάζουν τα μέχρι σήμερα γνωστά ψηφία του π, τα καθιστά μια ικανοποιητική πηγή τυχαίων αριθμών. Οι τυχαίοι αριθμοί βρίσκουν ιδιαίτερη εφαρμογή στη στατιστική. Όπως αναφέρει ο Gardner [30], αντί της χρήσης ενός πίνακα τυχαίων αριθμών ή της ρίψης ενός νομίσματος, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα 100 πρώτα δεκαδικά ψηφία του π, καθώς αυτά αποτελούν ακολουθία τυχαίων αριθμών. Έστω για παράδειγμα ότι θέλουμε να πραγματοποιήσουμε μια τυχαία δειγματοληψία. Έχουμε έναν πληθυσμό 80 ατόμων τοποθετημένα αλφαβητικά και θέλουμε να επιλέξουμε ένα δείγμα 10 ατόμων. Αριθμούμε τα 80 άτομα με τους αριθμούς 1 έως 80 και επιλέγουμε από την ακολουθία των ψηφίων του π 20 ψηφία, τα οποία τα χωρίζουμε σε 10 δυάδες. Αντιστοιχίζουμε κάθε δυάδα στο αντίστοιχο άτομο του πληθυσμού και έχουμε ένα τυχαίο δείγμα [9].

Ακόμα, η πρόκληση του υπολογισμού όλο και περισσότερων ψηφίων του π, συμβάλλει στην εύρεση αποτελεσματικών υπολογιστικών μεθόδων. Πολλές εξελιγμένες υπολογιστικές τεχνικές πολλών κλάδων της επιστήμης και της μηχανικής, έχουν τις απαρχές τους στον υπολογισμό δεκαδικών ψηφίων του π [19].

Τέλος, το μεγαλύτερο κίνητρο για το κυνήγι των ψηφίων του π, είναι ότι «απλά υπάρχει» [19]. Πρόκειται για την πιο διάσημη μαθηματική σταθερά, η οποία εκπλήσσει τους μαθηματικούς ανά τους αιώνες, με τις αναπάντεχες ιδιότητες και εφαρμογές της. Ο άνθρωπος από τη φύση του προσπαθεί να κατακτήσει όλο και μεγαλύτερους στόχους, από την υψηλότερη κορυφή μέχρι τον πιο μακρινό πλανήτη. Για τους ίδιους λόγους και το κυνήγι των ψηφίων του π, δεν θα σταματήσει όσο υπάρχει η ανθρωπότητα.

Επίλογος.

Αν και το π είναι περισσότερο γνωστό εξαιτίας της αναλογίας του κύκλου, εμφανίζεται σε πολλές άλλες επιστήμες εκτός των μαθηματικών, όπως στη φυσική, στη μηχανική, στην αρχιτεκτονική, στη βιολογία, στην αστρονομία και στις τέχνες. Επιπλέον, βρίσκεται κρυμμένο στην περιοδικότητα των ηχητικών και των θαλάσσιων κυμάτων, είναι πανταχού παρόν στη φύση και βέβαια συναντάται συνέχεια στη γεωμετρία. Κατά συνέπεια, η καλύτερη κατανόηση του αριθμού αυτού θα οδηγήσει σε βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών και της φυσικής του σύμπαντός μας.

«Εγώ ήξερα –αλλά και ο καθένας θα μπορούσε να το αντιληφθεί μες στη μαγεία εκείνης της ήρεμης ανάσας- ότι η περίοδος ρυθμιζόταν από τη σχέση ανάμεσα στην τετραγωνική ρίζα του μήκους του νήματος και σ' εκείνο τον αριθμό π που, με τρόπο παράλογο για τις γήινες διάνοιες, συνδέει αναπότρεπτα, χάρη στη θεία φρόνηση, την περιφέρεια με τη διάμετρο όλων των δυνατών κύκλων –ώστε ο χρόνος του ταξιδιού από τον ένα πόλο στον άλλο να είναι αποτέλεσμα μυστηριώδους συνωμοσίας των πιο άχρονων μέτρων, της μοναδικότητας του σημείου εξάρτησης, της δυαδικότητας μιας αφηρημένης διάστασης, της τριαδικής φύσης του αριθμού π, του μυστικού τετραγώνου της ρίζας, της τελειότητας του κύκλου.»

Ουμπέρτο Έκο.
Απόσπασμα από
«Το εκκρεμές του Φουκώ.» Κεφ. 1^{o}

«Αεί ο Θεός ο Μέγας γεωμετρεί, το κύκλου μήκος ίνα ορίσει διαμέτρω, παρήγαγεν αριθμόν απέραντον, και όν, φευ, ουδέποτε όλον θνητοί θα εύρωσι.»

Νικόλαος Χατζηδάκις.

Το πλήθος των γραμμάτων κάθε λέξης της φράσης αυτής αντιστοιχεί σε καθένα από τα διαδοχικά ψηφία του αριθμού π (3,14159…).

Το χρονολόγιο του π.

2000 π.Χ.	*Οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούν την τιμή* $\pi = 3\,{}^{1}\!/_{8}$. *Οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούν την τιμή* $\pi = {}^{256}\!/_{81} = 3{,}16045$.
1100 π.Χ.	*Οι Κινέζοι χρησιμοποιούν την τιμή* $\pi = 3$.
550 π.Χ.	*Στην Παλαιά Διαθήκη υποδηλώνεται η τιμή* $\pi = 3$.
434 π.Χ.	*Ο Αναξαγόρας επιχειρεί να τετραγωνίσει τον κύκλο*
430 π.Χ.	*Ο Αντιφών και ο Βρύσων διατυπώνουν την αρχή της εξάντλησης.*
335 π.Χ.	*Ο Δεινόστρατος προσπαθεί κατασκευαστικά να τετραγωνίσει τον κύκλο.*
3^{ος}π.Χ.αι.	*Ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί ένα πολύγωνο με 96 πλευρές για να αποδείξει ότι* $3\,{}^{10}\!/_{71} < \pi < 3\,{}^{1}\!/_{7}$ *και* $\pi \approx 211875 : 67441 = 3{,}14163$. *Επίσης, χρησιμοποιεί την έλικα για να τετραγωνίσει τον κύκλο.*
225 π.Χ.	*Ο Απολλώνιος βελτίωσε την Αρχιμήδεια προσέγγιση, χωρίς να είναι γνωστό κατά πόσο.*
130 μ.Χ.	*Ο Chang Hong χρησιμοποιεί* $\pi = \sqrt{10} = 3{,}1622$.
150 μ.Χ.	*Ο Κλαύδιος ο Πτολεμαίος χρησιμοποιεί την τιμή* $\pi = 3^{0}8'30'' = {}^{377}\!/_{120} = 3{,}14166.$
250 μ.Χ.	*Ο Wang Fan χρησιμοποιεί την τιμή* $\pi = 142/45 = 3{,}155555$.
263 μ.Χ.	*Ο Liu Hui χρησιμοποιεί την τιμή* $\pi = 157/50 = 3{,}14159$.
480 μ.Χ.	*Ο Tsu Ch'ung Chi καθιερώνει το 355/113= 3,1415926 και επιπλέον 3,1415926< π < 3.1415927 .*
499 μ.Χ.	*Ο Aryabhata χρησιμοποιεί* $\pi = 62832/2000 = 3{,}1416$.
640 μ.Χ.	*Ο Brahmagupta χρησιμοποιεί* $\pi = \sqrt{10} = 3{,}1622$.
800 μ.Χ.	*Ο Al-Khwarizmi χρησιμοποιεί* $\pi = 3{,}1416$.
1220 μ.Χ.	*Ο Leonardo of Pisa (Fibonacci) βρίσκει* $\pi = 3{,}141818$.

1400 μ.Χ.	*Ο Madhava χρησιμοποιεί* $\pi = 3{,}14159265359$.
1430 μ.Χ.	*Ο Al-Kashi υπολόγισε* $\pi = 3{,}1415926535 8979$.
1573 μ.Χ.	*Ο Valentinus Otho βρίσκει ότι* $\pi \approx 355/113 = 3{,}1415929$.
1593 μ.Χ.	*Ο Francois Viéte βρίσκει πρώτος ένα άπειρο γινόμενο για να περιγράψει το π. Επίσης χρησιμοποιεί* $\pi = 3{,}1415926536$.
1593 μ.Χ.	*Ο Adriaen van Romanus υπολογίζει* $\pi = 3{,}1415926535 89793$.
1596 μ.Χ.	*Ο Ludolph van Ceulen υπολογίζει πάνω από 32 ψηφία* $\pi = 3{,}1415926535 8979323846...$
1610 μ.Χ.	*Ο Ludolph van Ceulen επεκτείνει τον υπολογισμό στα 35 δεκαδικά ψηφία.*
1621 μ.Χ.	*Ο Snellius βελτιώνει την αρχιμήδεια μέθοδο.*
1654 μ.Χ.	*Ο Huygens αποδεικνύει την εγκυρότητα της εργασίας του Snellius.*
1655 μ.Χ.	*Ο Wallis βρίσκει ένα άπειρο ρητό γινόμενο για το π.*
1655 μ.Χ.	*Ο Brouncker το μετατρέπει σε συνεχές κλάσμα.*
1663 μ.Χ.	*Ο Μουραμάτσου Σιγκεκίγιο υπολογίζει επτά ακριβή ψηφία στην Ιαπωνία.*
1665-1666 μ.Χ.	*Ο Newton ανακαλύπτει το λογισμό και υπολογίζει τουλάχιστον 16 δεκαδικά ψηφία του π. Δεν δημοσιεύονται μέχρι το 1737 (μετά το θάνατό του).* $\pi = 3{,}1415926535 897932$.
1671 μ.Χ.	*Ο Gregory ανακαλύπτει τη σειρά τόξου εφαπτομένης.*
1674 μ.Χ.	*Ο Leibniz ανακαλύπτει τη σειρά τόξου εφαπτομένης για το π.*
1699 μ.Χ.	*Ο Sharp υπολογίζει 71 δεκαδικά ψηφία του π.*
1700 μ.Χ.	*Ο Seki Kowa υπολογίζει 10 ψηφία του π.*
1706 μ.Χ.	*Ο Machin υπολογίζει 100 ψηφία του π.*
1706 μ.Χ.	*Ο Jones χρησιμοποιεί το σύμβολο π για να περιγράψει το λόγο του κύκλου.*
1713 μ.Χ.	*Κινέζοι αυλικοί εκδίδουν το Su-li Ching-yün, το οποίο περιέχει 19 ψηφία του π.*
1719 μ. Χ.	*Ο De Lagny υπολογίζει 127 ψηφία του π.*

1722 μ.Χ.	*Ο Takebe Kenkō υπολογίζει 40 ψηφία στην Ιαπωνία.*
1748 μ. Χ.	*Ο Leonard Euler δημοσιεύει το Introductio in Analysin Infinitorum που περιλαμβάνει το θεώρημα του Euler και πολλές σειρές για το π και το π^2.*
1755 μ. Χ.	*Ο Euler ανακαλύπτει μια ταχέως συγκλίνουσα σειρά τόξου εφαπτομένης.*
1761 μ. Χ.	*Ο Johann Heinrich Lambert αποδεικνύει ότι το π είναι άρρητος.*
1775 μ. Χ.	*Ο Euler εισηγείται ότι το π είναι υπερβατικός.*
1794 μ. Χ.	*Ο Georg Vega υπολογίζει 140 δεκαδικά ψηφία του π.* *Ο Andrien Mari Legendré αποδεικνύει ότι το π και το π^2 είναι άρρητοι.*
1840 μ. Χ.	*Ο Liouville αποδεικνύει την ύπαρξη των υπερβατικών αριθμών.*
1844 μ. Χ.	*Οι Strassnitzky και Dase υπολογίζουν 200 ψηφία του π σε λιγότερο από δυο μήνες.*
1855 μ. Χ.	*Ο Richter υπολογίζει 500 ψηφία του π.*
1873 μ. Χ.	*Ο Hermite αποδεικνύει ότι το e είναι υπερβατικός αριθμός.*
1873-74μ. Χ	*Ο Shanks υπολογίζει 707 δεκαδικά ψηφία του π.*
1874 μ. Χ.	*Ο Τσενγκ Τσι-Χουνγκ υπολογίζει 100 ψηφία στην Κίνα.*
1882 μ. Χ.	*Ο Ferdinand Lindemann αποδεικνύει ότι το π είναι υπερβατικός αριθμός.*
1945 μ. Χ.	*Ο D. F. Ferguson βρίσκει λάθος στους υπολογισμούς του Shanks από το 527ο ψηφίο και μετά.*
1946 μ. Χ.	*Ο D. F. Ferguson υπολογίζει 620 ψηφία του π.*
1947 μ. Χ.	*Ο D. F. Ferguson υπολογίζει 808 ψηφία του π, χρησιμοποιώντας έναν επιτραπέζιο υπολογιστή, σε διάστημα ενός έτους.*
1949 μ. Χ.	*Ο ENIAC υπολογίζει 2.037 ψηφία του π σε εβδομήντα ώρες.*
1954-55μ. Χ	*Ο NORC υπολογίζει 3.089 ψηφία σε δεκατρία λεπτά.*
1957 μ. Χ.	*Ο Pegasus υπολογίζει 7.480 ψηφία του π.*
1959 μ. Χ.	*Ο IBM 704 υπολογίζει 16.167 ψηφία του π.*
1961 μ. Χ.	*Οι Shanks και Wrench, με έναν IBM 7090, υπολογίζουν 100.265 ψηφία του π σε 8,72 ώρες.*

1966 μ .Χ.	*Οι Guilloud και Filliatre υπολογίζουν 250.000 ψηφία του π με έναν υπολογιστή IBM 7030.*
1967 μ. Χ.	Οι *Guilloud και Dichampt υπολογίζουν 500.000 ψηφία του π με έναν υπολογιστή CDC 6600.*
1973 μ. Χ.	*Οι Guilloud και Bouyer υπολογίζουν 1.001.250 ψηφία του π με έναν υπολογιστή CDC 7600.*
1981 μ. Χ.	*Οι Miyoshi και Kanada υπολογίζουν 2.000.036 ψηφία του π με έναν υπολογιστή FACOM M-200.*
1982 μ. Χ.	*Ο Guilloud υπολογίζει 2.000.050 ψηφία του π.*
1982 μ. Χ.	*Ο Tamura υπολογίζει 2.097.144 ψηφία του π με έναν υπολογιστή MELCOM 900II.*
1982 μ. Χ.	*Οι Tamura και Kanada υπολογίζουν 8.388.576 ψηφία του π με έναν υπολογιστή HITACHI M-280H.*
1982 μ. Χ.	*Οι Tamura, Kanada και Yosino υπολογίζουν 16.777.576 ψηφία του π με έναν υπολογιστή HITACHI M-280H.*
1983 μ. Χ.	*Οι Ushiro και Kanada υπολογίζουν τον Οκτώβριο 10.013.395 ψηφία του π με έναν υπολογιστή HITACHI S-810/20.*
1985 μ. Χ.	*Ο Gosper υπολογίζει τον Οκτώβριο 17.526.200 ψηφία του π με έναν υπολογιστή SYMBOLICS 3670.*
1986 μ. Χ.	*Ο Bailey υπολογίζει τον Ιανουάριο 29.360.111 ψηφία του π με έναν υπολογιστή CRAY-2.*
1986 μ. Χ.	*Οι Kanada και Tamura υπολογίζουν τον Οκτώβριο 67.108.839 ψηφία του π με έναν υπολογιστή HITACHI S-810/20.*
1987 μ. Χ.	*Οι Kanada, Tamura και Kubo υπολογίζουν τον Ιανουάριο 134.217.700 ψηφία του π με έναν υπολογιστή NEC SX-2.*
1988 μ. Χ.	*Οι Kanada και Tamura υπολογίζουν τον Ιανουάριο 201.326.551 ψηφία του π με έναν υπολογιστή HITACHI S-820/80.*
1989 μ. Χ.	*Οι αδερφοί Chudnovsky υπολογίζουν τον Ιούνιο 480.000.000. ψηφία του π.*
1989 μ. Χ.	*Οι Kanada και Tamura υπολογίζουν τον Ιούλιο 536.870.898 ψηφία του π.*

1989 μ.Χ.	*Οι αδερφοί Chudnovsky υπολογίζουν τον Αύγουστο 1.011.196.691 ψηφία του π.*
1989 μ.Χ.	*Οι Kanada και Tamura υπολογίζουν το Νοέμβριο 1.073.741.799 ψηφία του π.*
1991 μ.Χ.	*Οι αδερφοί Chudnovsky υπολογίζουν τον Αύγουστο 22.600.000.000 ψηφία του π.*
1994 μ. Χ.	*Οι αδερφοί Chudnovsky υπολογίζουν το Μάιο 4.044.000.000 ψηφία του π.*
1995 μ. Χ.	*Οι Kanada και Takahashi υπολογίζουν τον Οκτώβριο 6.442.450.938 ψηφία του π.*
1997 μ. Χ.	*Οι Kanada και Takahashi υπολογίζουν τον Ιούλιο 51.539.600.000 ψηφία του π.*
1999 μ. Χ.	*Οι Kanada και Takahashi υπολογίζουν το Σεπτέμβριο 206.158.430.000 ψηφία του π.*
2002 μ. Χ.	*Οι Kanada, Ushiro και Kuroda υπολογίζουν το Δεκέμβριο 1.241.100.000.000 ψηφία του π.*

Σημειώσεις.

1. Βλέπε σημερινή ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος.
2. Ένα απειρογινόμενο $\prod_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό $l, l \neq 0$ αν και μόνο αν η ακολουθία $a_1 a_2 ... a_\nu$, συγκλίνει στον αριθμό αυτό.
3. Το συμβολικό άθροισμα $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ λέγεται σειρά των πραγματικών αριθμών a_ν,ν φυσικός, ή απειροσειρά. Κάθε όρος της σειράς ονομάζεται ν-οστό μερικό άθροισμα.
4. Διωνυμικό θεώρημα: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
5. Αλγεβρική εξίσωση ονομάζεται η εξίσωση της μορφής $a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 = 0$, όπου το n είναι πεπερασμένο και οι συντελεστές a_j ακέραιοι. Προφανώς και ρητοί να είναι οι συντελεστές μετατρέπονται σε ακέραιους, πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλο αριθμό.
6. Τετραγωνίζουσα του Δεινόστρατου ή η έλικα του Αρχιμήδη.
7. Η απόδειξη θα ήταν ίσως δυνατή με απαγωγή σε άτοπο, αλλά έτσι αποδεικνύονται και ένα σωρό άλλες προτάσεις οι οποίες δεν προκύπτουν από τα αξιώματα του Ευκλείδη, όπως για παράδειγμα «η αιτία προηγείται του αποτελέσματος».
8. Έστω κύκλος (O, R) και ένα σημείο P. Δύναμη $\Delta^{P}_{(O,R)}$ του σημείου P ως προς τον κύκλο (O, R) ονομάζεται η ακόλουθη διαφορά $\Delta^{P}_{(O,R)} = OP^2 - R^2$.
9. Για περισσότερες πληροφορίες ως προς τις κατασκευές, Μπρίκας Μ. *Τα περίφημα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας*. σελ. 147-152.
10. Σώμα ονομάζεται ένα σύνολο στοιχείων [α, β, γ,…] τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με δύο πράξεις και τις αντίστροφες αυτών, ορισμένες έτσι ώστε να πληρούνται τα εξής αξιώματα:(εφαρμοσμένα για πρόσθεση-αφαίρεση και πολλαπλασιασμό-διαίρεση) Ι. Εάν α και β ανήκουν στο σώμα και το άθροισμα αυτών α+β θα ανήκει επίσης στο σώμα. ΙΙ. Ισχύει

α+β=β+α (αντιμεταθετική ιδιότητα). III. Ισχύει α+(β+γ)=(α+β)+γ (προσεταιριστική ιδιότητα). IV. Υπάρχει ένα και μόνο ένα στοιχείο, το 0 για το οποίο ισχύει α+0=α για κάθε α (ουδέτερο στοιχείο). V. Εάν α και β ανήκουν στο σώμα, υπάρχει μοναδικό γ τέτοιο ώστε β+γ=α. VI. Εάν α και β ανήκουν στο σώμα, υπάρχει μοναδικό δ τέτοιο ώστε α·β=δ. VII. Ισχύει α·β=β·α (αντιμεταθετική ιδιότητα). VIII. Ισχύει α·(β·γ)= (α·β)·γ (προσεταιριστική ιδιότητα). IX. Υπάρχει ένα και μόνο ένα στοιχείο, το 1, για το οποίο έχουμε α·1=α. X. Για το στοιχείο 0 που ορίστηκε στο IV, ισχύει πάντα α·0 = 0. XI. Ισχύει α·(β+γ)=α·β+β·γ (επιμεριστική ιδιότητα). XII. Αν α και β ανήκουν στο σώμα, υπάρχει μοναδικό ε τέτοιο ώστε ε = α/β.

11. Το κομμάτι στο οποίο ενώνεται το μέρος σε σχήμα «καρδιάς» με το μεγαλύτερο μέρος κυκλικού σχήματος.

Ελληνική Βιβλιογραφία.

[1] Αρτεμιάδης, Ν. Κ. (2000), *Ιστορία των Μαθηματικών (Από της Σκοπιάς του Μαθηματικού)*, Αθήνα: Ακαδημία Αθηνών Επιτροπή Ερευνών.

[2] Αρχιμήδης, *Κύκλου Μέτρησις*, Musaios, Thesaurus Lingua Graeca, Πανεπιστήμιο Αθηνών.

[3] Εξαρχάκος, Γ. Θ., (1999), *Ιστορία των μαθηματικών* (2 τόμοι), Αθήνα.

[4] Εξαρχάκος Γ. Θ., *Η θεωρία του Galois*, Ανάτυπο από το περιοδικό «Μαθηματική Επιθεώρηση» της Ε.Μ.Ε., 14, σελ. 58-91.

[5] Ήρων ο Αλεξανδρεύς, *Μετρικά*, Musaios, Thesaurus Lingua Graeca, Πανεπιστήμιο Αθηνών.

[6] Θωμαΐδης, Χ. Γ., (1990), "Εξερευνώντας την ιστορία του αριθμού π", *Διάσταση*, 1-2, 17-38.

[7] Λειβαδιώτης, Γ., (2003), "Η μαγεία του αριθμού π", *Περισκόπιο της επιστήμης*, 269, 64-71.

[8] Μπρίκας, Α. Μ., (1970), *Τα περίφημα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας*, Αθήνα.

[9] Παπαναστασίου, Κ., & Παπαναστασίου, Κ. Ε., (2005), *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*, Βιβλιοθήκη Πανεπιστημίου Κύπρου, Λευκωσία.

[10] Πάππος, *Συναγωγή* 4^{o} και 7^{o} βιβλίο, Musaios, Thesaurus Lingua Graeca, Πανεπιστήμιο Αθηνών.

[11] Πούλος, Κ.Γ., (2007), “Κύκλοι-Σφαίρες-Τυχαία γεγονότα. Ο π υπάρχει παντού.”, *Β’ Ευκλείδης*, 65, 4-7.

[12] Πτολεμαίος, *Σύνταξις*, Musaios, Thesaurus Lingua Graeca, Πανεπιστήμιο Αθηνών.

[13] Σταμάτης, Σ. Ε., (1973), *Αρχιμήδους Άπαντα* Τόμοι Α΄ και Β΄, Αθήνα: Εκδόσεις Τεχνικού Επιμελητηρίου Ελλάδας.

[14] Συμπλίκιος, *Σχόλια στα Φυσικά του Αριστοτέλη*, Musaios, Thesaurus Lingua Graeca, Πανεπιστήμιο Αθηνών.

[15] Τσιμπουράκης, Δ., (1997), *Η Γεωμετρία και οι εργάτες της στην Αρχαία Ελλάδα*, Αθήνα: Εκδόσεις Alien.

Ξένη Βιβλιογραφία.

[16] Ball, W. R. & Coxeter, H. S. M. (1974), *Mathematical recreations and essays*, New York: Dover Publications Inc.

[17] Bailey, D. H., (1988), “The computation of π to 29.360.000 decimal digits using Borweins’ quartically convergent algorithm”, *Mathematics of Computation*, 50, 283-296.

[18] Bailey, D. H., & Borwein, J. M. (1989), “Ramanujan, Modular Equations, and Approximations to Pi or How to Compute One Billion Digits of Pi”, *American Mathematical Monthly,* 96, 201-219.

[19] Bailey, D. H., Borwein, J. M., Borwein, P.M. & Plouffe, S., (1997), “The quest for pi”, *The Mathematical Intelligencer*, 19, 50-57.

[20] Beckmann, P., (1974) *A history of pi*, 3rd ed., New York: Golem Press.

[21] Berggren, L., Borwein, J., & Borwein P., (1997), *Pi: A Source Book*, 2nd ed., New York: Springer Verlag Inc.

[22] Blatner, D., (2001), *Η χαρά του π*, Αθήνα: Εκδόσεις Ωκεανίδα.

[23] Borwein, J. M., & Borwein, P. M., (1988), "Ramanujan and pi", *Science and Applications*, 2, 117-128.

[24] Borwein, J. M., Borwein, P. M. & Dichler, K., (1989), "Pi, Euler Numbers, and Asymptotic Expansions", *American Mathematical Monthly*, 96, 681-687.

[25] Borwein, J. M., & Borwein, P. M., (1984), "The arithmetic-geometric mean and fast computation of elementary functions", *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*, 26, 351-366.

[26] Boyer, B. C., & Merzbach, C. U., (1989), *Η ιστορία των μαθηματικών*, 2η έκδοση, Αθήνα: Εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικού.

[27] Brent, R. P., (1976), "Fast multiple-precision evaluation of elementary functions", *Journal of the Association for Computing Machinery*, 23, 242-251.

[28] Eco, O., (2000), *Το εκκρεμές του Φουκώ*, Αθήνα: Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα.

[29] Eves, H. V., (1971), *In Mathematical circles: A selection of Mathematical Stories and Anecdotes*, Boston: PWS Publishing Company.

[30] Gardner, M., (1997), *Το τσίρκο των μαθηματικών*, $2^η$ εκδ. (Μετάφραση από Mathematical Circus). Αθήνα: Εκδόσεις Τροχαλία.

[31] Gardner, M., (1986), *Το πανηγύρι των μαθηματικών*, $2^η$ εκδ. (Μετάφραση από Mathematical Carnival), Αθήνα: Εκδόσεις Τροχαλία.

[32] Gillings, R. J., (1982), *Mathematics in the times of the Pharaohs*, New York: Dover publications.

[33] Heath, T. L., (1953), *The works of Archimedes*, (reissued edition), New York: Dover.

[34] Heath, T. L., (1921), *A history of Greek mathematics*, (unabridged republication),(Vol. I, II), New York: Dover Publications, Inc.

[35] http://crd.lbl.gov/~dhbailey/dhbpapers/dhb-kanada.pdf

[36] http://geocities.com/vienna/9349/

[37] http://mathforum.org/library/topics/pi/

[38] http://projectmathematics.com/storypi.htm

[39] http://seattlepi.nwsource.com/national/98912_pi07.shtml

[40] http://www.math.ohio-state.edu/~edgar/piand.html

[41] http://www.math.pitt.edu/~thales/kepler98/

[42] http://mathworld.wolfram.com

[43] http://www.wikipedia.org/

[44] Jaditz, T., (2000), “Are the digits of pi an Independent and Identically Distrubuted sequence?”, *The American statistician*, 54, 12-16.

[45] Kanada, Y., (1988), “Vectorization of Multiple-Precision Arithmetic Program and 201.326.000 Decimal Digits of π Calculation”*, Scientific American*.

[46] Kaye, G. R., (1914), *Indian Mathematics* (2ος τόμος), Isis.

[47] Klein, F., (1956), *Famous Problems of Elementary Geometry*, New York: Dover Publications.

[48] Lam, L., & Ang, T., (1986), ”Circle Measurements in Ancient China”, *Historia Mathematica,*13, 325-340.

[49] Lindemann, F., (1882), “Ueber die Zahl π”, *Mathematische Annalen, 20*, 221-225.

[50] Loria, G., (1971), *Ιστορία των μαθηματικών* (1ος τόμος), Αθήνα: Εκδόσεις Ε. Μ. Ε.

[51] Mc Cauley, J., (1997), *Classical mechanics: transformations, flows, integrable and chaotic dynamics*, Cambridge: Cambridge University Press.

[52] Mikami, Y., (1974), *The development of mathematics in China and Japan*, New York: Republication by Chelsea.

[53] Morrow, R. G., (1970), *Proclus. A Commentary on the first book of Euclid’s Elements*, New Jersey: Princeton University Press.

[54] Needham, J., with the collaboration of Wang Ling, (1959), *Science and civilization in China* (3 τόμοι), New York: Cambridge university press.

[55] Nelsen, B. R., (1993), *Αποδείξεις χωρίς λόγια* (Μετάφραση του πρωτοτύπου Proofs without words), Αθήνα: Εκδόσεις Σαββάλα.

[56] Neugebauer, O., (1969), *The exact sciences in antiquity* (2^{nd} ed), New York: Dover publications, inc.

[57] Newman, D. J., (1985), "A Simplified Version of the Fast Algorithms of Brent and Salamin", *Mathematics of Computation*, 44, 207-210.

[58] Peitgen, H., Jürgens, H., & Saupe, D., (1992), *Fractals for the classroom* (2 τόμοι), New York: Springer-Verlag.

[59] Salamin, E., (1976), "Computation of π using Arithmetic-Geometric Mean", *Mathematics of computation, 30,* 565-570.

[60] Schepler, H. C., (1950), "The chronology of pi", *Mathematics Magazine*, *(Jan.-Feb.)* 165-170, *(Mar.-Apr.)* 216-228, *(May-Jun.)* 279-283.

[61] Schroeder, M., (1991), *Fractals, Chaos, Power Laws: minutes from an infinite paradise*, New York: Freeman W. H.

[62] Shanks, D., & Wrench, J. W. Jr., (1962), "Calculation of π to 100.000 decimals", *Mathematics of Computation*, 16, 76-99.

[63] Struve, W., (1930), *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museum*. (Vol.I)

[64] Thibaut, G., (1875), "On the salvasutras", *Journal of the Asiatic Society of Bengal*.

[65] Van der Waerden., B. L., (2000), *Η αφύπνιση της επιστήμης*, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

[66] Van der Waerden., B. L., (1983), *Geometry and Algebra in ancient civilizations*, New York: Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[67] Wagon, S., (1985), “Is π normal?”, *The Mathematical Intelligencer*, 7, 65-67.

[68] Wrench, J. W., (1960), “The evolution of extended decimal approximations to π”, *The Mathematics Teacher*, 644-650.

Ευχαριστίες.

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο **Ι. Αραχωβίτη**, ο οποίος από την πρώτη στιγμή αντιμετώπισε με ενθουσιασμό το θέμα αυτής της διπλωματικής εργασίας. Από την αρχή ως το τέλος στάθηκε δίπλα μου, καθοδηγώντας με και συμβουλεύοντάς με υπομονή και μεράκι. Η συμβολή του ήταν καθοριστική για την ολοκλήρωση αυτής της εργασίας.

Ευχαριστώ θερμά τους καθηγητές **Ε. Ράπτη** και **Π. Τσαγκάρη**, οι οποίοι διέθεσαν το χρόνο τους για να κάνουν διορθώσεις και επισημάνσεις, έτσι ώστε να επιτευχθεί όσο το δυνατόν καλύτερο αποτέλεσμα.

Ευχαριστώ θερμά τον ακαδημαϊκό καθηγητή **Ν. Κ. Αρτεμιάδη**, ο οποίος προθυμοποιήθηκε αμέσως να με βοηθήσει, παρέχοντάς μου βιβλιογραφία αλλά και πολύτιμες συμβουλές ως προς το περιεχόμενο αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Ευχαριστώ θερμά τον καθηγητή **Γ. Θωμαΐδη**, ο οποίος προθυμοποιήθηκε να με βοηθήσει παρέχοντάς μου σημαντικές πληροφορίες για την ολοκλήρωση αυτής της εργασίας.

Ευχαριστώ θερμά τον ελληνικής καταγωγής καθηγητή **Tom Apostol**, ο οποίος επίσης προθυμοποιήθηκε να με βοηθήσει παρέχοντάς μου σημαντικές πληροφορίες.

Ευρετήριο.