Στοχαστικές ανελίξεις

Εξέταση 29 Αυγούστου 2016

Στα θέματα 4 και 5, B είναι μια τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown.

1. (20 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 0}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{P}(X_n = -1) = \mathbf{P}(X_n = 1) = 1/2$. Θέτουμε $S_0 := 0, \mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}, S_n := X_1 + \cdots + X_n, \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ για κάθε $n \geq 1$. Έστω $t \in (0,1)$.

(α) Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η ακολουθία $M_n := a^{S_n} t^n, n \geq 0$ να είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

(β) Έστω $T_1 = \inf\{n \geq 0 : S_n = 1\}$. Με χρήση κατάλληλου martingale από το (α) και με δεδομένο ότι $\mathbf{P}(T_1 < \infty) = 1$, να υπολογιστεί η $\mathbf{E}(t^{T_1})$.

2. (20 Βαθμοί) Έστω κλαδωτή ανέλιξη $(Z_n)_{n\geq 0}$ με $Z_0 = 1$ και $X_{n,i}$ το πλήθος των παιδιών του i ατόμου της $n-1$ γεννιάς. Υποθέτουμε ότι καθεμία από τις $X_{n,i}$ έχει μέση τιμή $\mu \in \mathbb{R}$ και διασπορά $\sigma^2 \in (0, \infty)$.

(α) Να δειχθεί ότι

$$\mathrm{Var}(Z_n) = \begin{cases} \sigma^2 \mu^{n-1} \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1} & \text{αν } \mu \neq 1, \\ n\sigma^2 & \text{αν } \mu = 1. \end{cases}$$

(β) Αν η $X_{1,1}$ παίρνει τις τιμές 0, 1, 3 με πιθανότητες 1/6, 1/2, 1/3 αντίστοιχα, να υπολογιστεί η πιθανότητα εξάλειψης του πληθυσμού.

3. (20 Βαθμοί) Έστω G_n ένα τυχαίο γράφημα με κατανομή την $G(n, 1/n)$ (Erdos-Renyi με παραμέτρους $n \in \mathbb{N}^+, p = 1/n \in [0,1]$) όπου $n \geq 3$. Συμβολίζουμε με X_n το πλήθος των τριγώνων στο G_n. [Τρίγωνο στο G_n λέμε κάθε τριάδα $\{i, j, k\}$ σημείων του $\{1, 2, \ldots, n\}$ ώστε και οι τρεις ακμές $\{i, j\}, \{i, k\}, \{j, k\}$ να περιέχονται στο γράφημα. Τα i, j, k είναι διαφορετικά μεταξύ τους.]

(α) Να υπολογιστεί η μέση τιμή $\mathbf{E}(X_n)$.

(β) Να δειχθεί ότι η $\mathbf{P}(X_n \geq 1) \leq 1/6$.

[Υπόδειξη: Γράψτε το X_n ως άθροισμα κατάλληλων δεικτριών.]

4. (20 Βαθμοί) (α) Έστω $t > 0$, $n \geq 1$ φυσικός, και $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ διαμέριση του $[0, t]$ με $n - 1$ ενδιάμεσα σημεία. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2\right)^2\right] = t^2 + 2\sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1})^2.$$

(β) Έστω $t > 0$ και $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία διαμερίσεων του $[0, t]$ με $\Delta_n := \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} = t\}$ και $\lim_{n\to\infty} \max\{t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)} : j = 1, 2, \ldots, n\} = 0$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} (B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}})^2\right)^2\right] = t^2.$$

5. (20 Βαθμοί) Για κάθε $a > 0$ θέτουμε $M_a := \sup\{B_t : t \in [0, a]\}$. Να δειχθεί ότι $M_a \stackrel{d}{=} \sqrt{a} M_1$.

Για κάθε τυχαία μεταβλητή $Z \sim N(0,1)$ ισχύει $\mathbf{E}(Z^4) = 3$.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 **ώρες.**

Καλή επιτυχία!

Απαντήσεις

1. (α) $a = (1 \pm \sqrt{1-t^2})/t$.
(β) Επιλέγουμε $a = (1 + \sqrt{1-t^2})/t$. Ισχύει ότι $a > 1$. Βρίσκουμε $\mathbf{E}(t^{T_1}) = 1/a$.

2. (β) $s = (\sqrt{3} - 1)/2$ η μικρότερη λύση της $s = G(s)$ στο $[0, 1]$.

3. (α)

$$\mathbf{E}(X_n) = \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{6}.$$

(β) Markov.