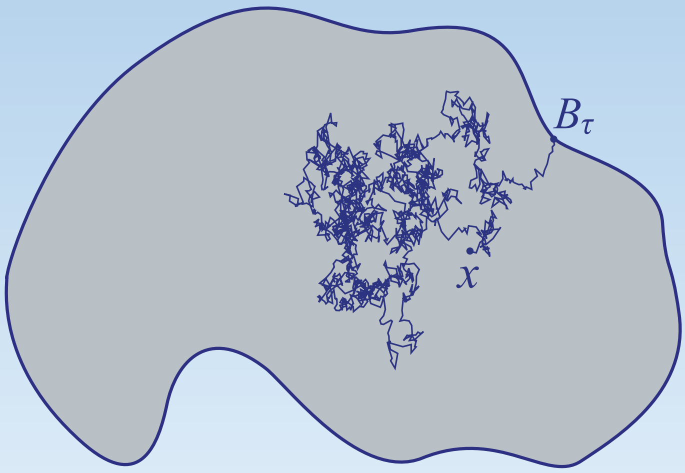
Δημήτρης Χελιώτης

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ

$$u(x) := \mathbf{E}_x\{\mathrm{f}(B_\tau)\}$$

$$\Delta u(x) = 0$$



Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr
HEALLINK
Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΕΛΙΩΤΗΣ
Επίκουρος καθηγητής
Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνων

Εισαγωγή στον στοχαστικό λογισμό

Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά
Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

Εισαγωγή στον στοχαστικό λογισμό

Συγγραφή

Δημήτρης Χελιώτης

Κριτικός αναγνώστης

Μιχάλης Λουλάκης

Συντελεστές έκδοσης

Γλωσσική Επιμέλεια: Θεόφιλος Τραμπούλης

ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου

www.kallipos.gr

ISBN:978-960-603-297-4

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Οι στοχαστικές ανελίξεις συνεχούς χρόνου μοντελοποιούν μεγέθη των οποίων η τιμή μεταβάλεται τυχαία ή απρόβλεπτα. Τυπικά παραδείγματα είναι η τιμή μιας μετοχής ή το πλήθος των ατόμων ενός συγκεκριμένου ζωικού είδους σε ένα οικοσύστημα. Πέρα από τις εφαρμογές που έχουν σε διάφορους τομείς όπως η Φυσική, η Βιολογία, και τα Οικονομικά, οι στοχαστικές ανελίξεις έχουν από μόνες τους μαθηματικό ενδιαφέρον. Μπορούν να ειδωθούν ως τυχαίες συναρτήσεις και για τη μελέτη των ιδιοτήτων τους θα θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία του απειροστικού λογισμού. Όμως οι πιο σημαντικές ανελίξεις σε συνεχή χρόνο, με χαρακτηριστικό εκπρόσωπο την κίνηση Brown, είναι μη διαφορίσιμες συναρτήσεις. Για τον λόγο αυτό αναπτύχθηκε από τη δεκατετία του 1940 και έπειτα ο Στοχαστικός Λογισμός, που σκοπό έχει να παρακάμψει αυτό το πρόβλημα. Δημιουργός και πρωτεργάτης του ήταν ο Kiyosi Itô (1915-2008). Αυτές οι σημειώσεις είναι μια εισαγωγή σε αυτόν τον λογισμό.

Οι σημειώσεις απευθύνονται σε προπτυχιακούς φοιτητές που έχουν ασχοληθεί με τις στοιχειώδεις πιθανότητες και έχουν κάποια τριβή με τις μετροθεωρητικές πιθανότητες (ή τη θεωρία μέτρου) και την πραγματική ανάλυση. Από τις μετροθεωρητικές πιθανότητες θεωρούνται δεδομένα η σχετική με μετρήσιμες συναρτήσεις ορολογία, οι τρόποι σύγκλισης μετρησίμων συναρτήσεων, τα οριακά θεωρήματα (μονότονης και κυριαρχημένης σύγκλισης), και οι βασικές ιδιότητες της ανεξαρτησίας σ-αλγεβρών και τυχαίων μεταβλητών. Από την πραγματική ανάλυση θεωρούνται δεδομένα τα εντελώς βασικά στοιχεία της θεωρίας των πλήρων μετρικών χώρων.

Τα θέματα που μελετούμε είναι τα martingales σε διακριτό χρόνο, η κίνηση Brown, το στοχαστικό ολοκλήρωμα (ολοκλήρωμα Itô), και ο τύπος του Itô.
Η έκθεση του υλικού γίνεται σε τέσσερα μέρη.

I. Εισάγεται η έννοια της δεσμευμένης μέσης τιμής και έπειτα του martingale. Από την θεωρία των martingales, καλύπτουμε μόνο το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής και όχι το θεώρημα σύγκλισης, επειδή χρειαζόμαστε το πρώτο ως υπολογιστικό εργαλείο, ενώ δεν χρειαζόμαστε εφαρμογές του δεύτερου.

II. Στο δεύτερο μέρος ασχολούμαστε με την κίνηση Brown. Γίνεται λεπτομερειακά μια κατασκευή της και βλέπουμε βασικές ιδιότητες της, κυρίως αναλυτικές. Για τη συνέχεια των σημειώσεων αρκούν οι Παράγραφοι 5.1, 5.2, 5.5, 8.3. Τα υπόλοιπα αποτελέσματα στόχο έχουν την τριβή με την κίνηση Brown, αλλά και να δείξουν τι πλούσιες και εξωτικές ιδιότητες έχει.

III. Αυτό το μέρος είναι το βασικότερο των σημειώσεων. Συνδυάζουμε πράγματα που είδαμε σε προηγούμενα κεφάλαια (κίνηση Brown, martingales, μετροθεωρητικά αποτελέσματα) για να κατασκευάσουμε το ολοκλήρωμα Itô. Βλέπουμε βασικές ιδιότητές του (συνεχής εκδοχή, martingale) και αποδεικνύουμε διάφορες μορφές του τύπου του Itô.

IV. Στο τελευταίο μέρος βλέπουμε τρεις εφαρμογές του τύπου του Itô. Στην πρώτη, χρησιμοποιούμε τον τύπο για να εξετάσουμε την κίνηση Brown σε διάφορες διαστάσεις ως προς την επαναληπτικότητα. Στη δεύτερη, λύνουμε με χρήση του τύπου κάποιες στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις. Πολλές από αυτές τις εξισώσεις εμφανίζονται φυσιολογικά σε περιοχές όπως η φυσική και τα χρηματοοικονομικά. Η τρίτη εφαρμογή είναι η απόδειξη της μερικής διαφορικής εξίσωσης Black-Scholes για τιμολόγηση παραγώγων Ευρωπαϊκού τύπου.

Αποδείξεις τεχνικών αποτελεσμάτων έχουν συγκεντρωθεί σε δύο παραρτήματα. Στο «Τεχνικά αποτελέσματα I» περιέχονται αποδείξεις που είναι ωφέλιμο να διαβάσει κανείς αφού έχει αποκτήσει ευχέρεια με την υπόλοιπη ύλη των σημειώσεων. Στο «Τεχνικά αποτελέσματα II» περιέχονται αποδείξεις που είναι πιο τεχνικές από αυτές του προηγούμενου παραρτήματος και δεν είναι απαραίτητο να τις διαβάσει κανείς. Αρκεί να καταλαβαίνει τι λένε οι εκφωνήσεις των θεωρημάτων που τους αντιστοιχούν. Κάποιες παράγραφοι έχουν σημειωθεί με «*». Είναι λίγο περισσότερο απαιτητικές και δεν χρησιμοποιούνται στο υπόλοιπο των σημειώσεων.

Ο στοχαστικός λογισμός είναι ένα αντικείμενο που δεν το μαθαίνει κανείς μονομιάς αλλά σε διαδοχικά περάσματα αυξανόμενης κάλυψης και γενικότητας. Αυτές οι σημειώσεις στοχεύουν να είναι το πρώτο πέρασμα και να ετοιμάσουν τον αναγνώστη για τη μελέτη πιο περιεκτικών παρουσιάσεων του αντικειμένου [Steele (2001), Durrett (1996), Karatzas and Shreve (1991), Revuz and Yor (1999)]. Έτσι, θέματα που μαθαίνει κανείς σε ένα πρώτο μεταπτυχιακό μάθημα σχετικό με martingales, κίνηση Brown, και στοχαστικό λογισμό παραλείπονται. Τέτοια θέματα είναι η ομοιόμορφη ολοκληρωσιμότητα, το θεώρημα σύγκλισης των martingales, ο νόμος 0-1 του Blumenthal, η αλλαγή χρόνου, το θεώρημα Girsanov, το θεώρημα αναπαράστασης των martingales, οι γεννήτορες διαχύσεων, και η θεωρία ολοκλήρωσης ως προς συνεχή ή ασυνεχή semimartingales [Protter (2005)].

Ευχαριστώ τον συνάδελφο Αντώνη Τσολομύτη για τη βοήθεια σε θέματα Latex και τη διαμόρφωση της εμφάνισης του κειμένου, δύο ανώνυμους αξιολογητές που στο πλαίσιο του προγράμματος «Κάλλιπος» έκαναν χρήσιμες παρατηρήσεις σε προηγούμενη έκδοση των σημειώσεων, και τον συνάδελφο Μιχάλη Λουλάκη που μελέτησε προσεκτικά τις σημειώσεις και έκανε πολλές διορθώσεις και προτάσεις για προσθήκες/αλλαγές, οι οποίες συνέβαλαν στη σημαντική βελτίωση των σημειώσεων.

Δημήτρης Χελιώτης
29 Ιανουαρίου 2016

Σύμβολα

$\mathbb{N}$ το σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων $\{0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{N}^+$ το σύνολο των θετικών ακεραίων $\{1, 2, \ldots\}$

Για $n \in \mathbb{N}^+$,

$$[n] := \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Για ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n\geq 1}$,

$$\limsup_n A_n := \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k,$$
$$\liminf_n A_n := \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Για A, B σύνολα, $A \subset B$: το A είναι υποσύνολο του B (όχι απαραίτητα γνήσιο).

Για A, B σύνολα, $A \backslash B := \{x \in A : x \notin B\}$.

Για X σύνολο,

$$\mathcal{P}(X) := \{A : A \subset X\},$$

το δυναμοσύνολο του X.

Για X τοπολογικό χώρο,

$$\mathcal{B}(X) : \text{ η σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του } X.$$

Για $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x \wedge y := \min\{x, y\},$$
$$x \vee y := \max\{x, y\}.$$

Για $x \in \mathbb{R}$,

$$x^+ = x \vee 0 = \begin{cases} x & \text{αν } x > 0, \\ 0 & \text{αν } x \leq 0, \end{cases} \qquad x^- = (-x) \vee 0 = \begin{cases} -x & \text{αν } x < 0, \\ 0 & \text{αν } x \geq 0. \end{cases}$$

Για X, Y τυχαίες μεταβλητές,

$$X \stackrel{d}{=} Y$$

σημαίνει ότι οι X, Y έχουν την ίδια κατανομή.

Για $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών,

$$a_n \sim b_n$$

σημαίνει ότι $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$.

Μέρος I

Δέσμευση και martingales

1

Εισαγωγικά

1.1 Η σ-αλγεβρα ως πληροφορία

Στη θεωρία μέτρου, όταν δουλεύει κανείς σε έναν χώρο X, συνήθως έχει διαλέξει μια αρκετά μεγάλη σ-άλγεβρα στον X έτσι ώστε όλα τα σύνολα που εμφανίζονται να ανήκουν σε αυτήν. Ο ρόλος της είναι να αποτρέψει προβλήματα/παράδοξα.

Αντίθετα, στις πιθανότητες η σ-άλγεβρα έχει διαισθητικό νόημα. Χρησιμοποιείται για να κωδικοποιήσει «πληροφορία» και συχνά, όταν δουλεύουμε σε έναν χώρο, θεωρούμε πολλές σ-άλγεβρες. Ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ μοντελοποιεί ένα πείραμα. Για κάθε πραγματοποίηση $\omega \in \Omega$ του πειράματος, η πληροφορία που θεωρούμε ότι μας δίνει η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ είναι σε ποια στοιχεία της ανήκει το ω και σε ποια όχι. Περισσότερα για αυτή την οπτική θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Παράδειγμα 1.1. Για τη ρίψη ενός ζαριού, ο φυσιολογικός δειγματικός χώρος είναι ο $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και συνήθως θεωρούμε ως σ-άλγεβρα για το πείραμα την $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$. Η $\mathcal{F}$ δίνει όλη την πληροφορία για το αποτέλεσμα μιας πραγματοποίησης αφού περιέχει τα μονοσύνολα $\{1\}, \ldots, \{6\}$. Η πληροφορία που παρέχει η σ-άλγεβρα

$$\mathcal{F}_1 := \{\emptyset, \Omega, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$$

είναι μόνο αν η ένδειξη του ζαριού είναι άρτιος ή περιττός. Δεν μπορεί να διακρίνει τα αποτελέσματα 1 και 3. Έτσι περιέχει λιγότερη πληροφορία από την $\mathcal{F}$.

1.2 Σ-άλγεβρα παραγόμενη από διαμέριση

Οι σ-άλγεβρες που παράγονται από διαμέριση εμφανίζονται σε πολλά πιθανοτικά μοντέλα και βοηθούν στην κατανόηση εννοιών που ορίζονται γενικά για όλες τις σ-άλγεβρες (π.χ. μετρησιμότητα, δέσμευση κτλ).

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό της σ-άλγεβρας παραγόμενης από μια οικογένεια συνόλων.

Ορισμός 1.2. Έστω X σύνολο και $C \subset \mathcal{P}(X)$. Ορίζουμε

$$\mathcal{J} := \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{A} \supset C \text{ και η } \mathcal{A} \text{ είναι σ-άλγεβρα}\},$$

δηλαδή το σύνολο των σ-αλγεβρών στο X που καθεμία τους περιέχει την οικογένεια C. Η σ-άλγεβρα που παράγεται από την C ορίζεται ως η τομή όλων των σ-άλγεβρων που περιέχουν την C και συμβολίζεται με $\sigma(C)$, δηλαδή

$$\sigma(C) = \cap_{\mathcal{A} \in \mathcal{J}} \mathcal{A}.$$

Η $\sigma(C)$ περιέχει ακριβώς όλα τα $B \subset X$ με την ιδιότητα $B \in \mathcal{A}$ για κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο X με $\mathcal{A} \supset C$.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η $\sigma(C)$ είναι πράγματι σ-άλγεβρα που περιέχει την οικογένεια C και από την κατασκευή της είναι η μικρότερη με την ιδιότητα αυτή. Δηλαδή περιέχεται σε οποιανδήποτε σ-άλγεβρα περιέχει την C. Προφανώς, αν η C είναι σ-άλγεβρα, τότε $\sigma(C) = C$.

Μπορούμε να έχουμε στο μυαλό μας ότι η $\sigma(C)$ προκύπτει με την εξής αναδρομική διαδικασία. Ξεκινάμε με την C και, αν αυτή δεν είναι σ-άλγεβρα, π.χ., γιατί το συμπλήρωμα ενός στοιχείου της ή κάποια αριθμήσιμη ένωση στοιχείων της δεν είναι στοιχείο της, προσθέτουμε σε αυτή το σύνολο που ανακαλύψαμε ότι της λείπει. Αυτό πρέπει να το κάνουμε πολλές φορές με τη νέα οικογένεια που προκύπτει μετά την προσθήκη κάθε συνόλου. Κάποια στιγμή φτάνουμε σε μια οικογένεια που είναι σ-άλγεβρα και τότε σταματάμε, βρήκαμε τη $\sigma(C)$.

Παράδειγμα 1.3 (Σ-άλγεβρα παραγόμενη από αριθμήσιμη διαμέριση)**.** Έστω X σύνολο και $C := \{A_i : i \in I\}$ αριθμήσιμη διαμέριση του X (δηλαδή τα A_i είναι μη κενά σύνολα, ξένα ανά δύο, με ένωση το X), με $I = \{1, 2, \ldots, k\}$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ή $I = \mathbb{N}$. Για τη σ-άλγεβρα που παράγει η C, έχουμε την εξής απλή περιγραφή,

$$\sigma(C) = \Big\{ \cup_{i\in J} A_i : J \subset I\Big\}. \tag{1.1}$$

Δηλαδή ένα σύνολο της $\sigma(C)$ είναι ένωση κάποιων στοιχείων της διαμέρισης C.
Ας ονομάσουμε $\mathcal{A}$ το σύνολο στο δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης. Τότε έχουμε τα εξής:

- Η οικογένεια $\mathcal{A}$ περιέχει τη C. Πράγματι, οποιοδήποτε σύνολο της C είναι της μορφής A_{i_0} για κάποιο $i_0 \in I$. Η επιλογή $J = \{i_0\} \subset I$ στην περιγραφή στοιχείων της $\mathcal{A}$ δίνει $\cup_{i\in J} A_i = A_{i_0} \in \mathcal{A}$.
- Οποιαδήποτε σ-άλγεβρα $\mathcal{A}_1$ περιέχει τη C πρέπει να περιέχει την $\mathcal{A}$. Γιατί οποιαδήποτε ένωση $\cup_{i\in J} A_i$ είναι αριθμήσιμη αφού το I είναι αριθμήσιμο. Και εφόσον η $\mathcal{A}_1$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει τα A_i με $i \in J$, θα περιέχει και την ένωσή τους.
- Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα. Πράγματι, η επιλογή $J = \emptyset$ δίνει $\cup_{i\in J} A_i = \emptyset$. Επίσης, αν πάρουμε A της μορφής $A = \cup_{i\in J} A_i$ για κάποιο $J \subset I$, τότε $X\backslash A = \cup_{i\in I\backslash J} A_i$ που είναι στοιχείο της $\mathcal{A}$. Τέλος, αν έχουμε ακολουθία $(B_n)_{n\geq 1}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$ με $B_n = \cup_{i\in J_n} A_i$, όπου $J_n \subset I$ για κάθε $n \geq 1$, τότε για $J := \cup_{n=1}^{\infty} J_n$ έχουμε $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{i\in J} A_i$ που πάλι είναι στοιχείο της $\mathcal{A}$.

Συνδυάζοντας αυτές τις τρεις παρατηρήσεις παίρνουμε την (1.1).

Παράδειγμα 1.4 (Μετρήσιμες συναρτήσεις στην $\{\emptyset, X\}$)**.** Έστω $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ η τετριμμένη σ-άλγεβρα στο X.

Ισχυρισμος: Μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη αν και μόνο αν είναι σταθερή.

Πράγματι, αν η $f(x) = c$ για κάθε $x \in X$ όπου $c \in \mathbb{R}$ σταθερά, τότε για κάθε $A \subset \mathbb{R}$ σύνολο Borel έχουμε

$$f^{-1}(A) = \begin{cases} X & \text{αν } c \in A, \\ \emptyset & \text{αν } c \in \mathbb{R}\backslash A. \end{cases}$$

Επειδή λοιπόν $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, έχουμε ότι η f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη.

Έστω τώρα $f : X \to \mathbb{R}$ που είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη. Αν δεν είναι σταθερή, τότε παίρνει δύο διαφορετικές τιμές, έστω a, b με $a < b$. Υπάρχουν $x_1, x_2 \in X$ με $f(x_1) = a, f(x_2) = b$. Λόγω μετρησιμότητας πρέπει το σύνολο $\Delta := f^{-1}((-\infty, a])$ να ανήκει στην $\mathcal{A}$. Όμως $\Delta \neq \emptyset$ αφού περιέχει το x_1, και $\Delta \neq X$ αφού δεν περιέχει το x_2, επομένως $\Delta \notin \mathcal{A}$, άτοπο. Άρα η f πρέπει να είναι σταθερή.

Γενίκευση του προηγούμενου παραδείγματος είναι το εξής.

Παράδειγμα 1.5 (Μετρήσιμες συναρτήσεις σε σ-άλγεβρα παραγόμενη απο αριθμήσιμη διαμέριση)**.** Τι μορφή έχουν οι πραγματικές συναρτήσεις που είναι μετρήσιμες ως προς τη σ-άλγεβρα $\sigma(C)$ πιο πάνω;

Ισχυρισμος: Μια $\sigma(C)$-μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ πρέπει να είναι σταθερή σε κάθε σύνολο της διαμέρισης.

Πράγματι, έστω f μετρήσιμη και $i_0 \in I$. Ας υποθέσουμε ότι η f παίρνει δύο διαφορετικές τιμές $a < b$ στο A_{i_0}. Θα έπρεπε λοιπόν το σύνολο $A_{i_0} \cap \{f < b\}$ να ανήκει στη $\sigma(C)$. Όμως αυτό το σύνολο είναι μη κενό και γνήσιο υποσύνολο του A_{i_0}. Τέτοιο σύνολο δεν υπάρχει στη $\sigma(C)$ (δες την περιγραφή της $\sigma(C)$ στην (1.1)).

Επίσης, είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι μια συνάρτηση που είναι σταθερή σε κάθε σύνολο της διαμέρισης είναι μετρήσιμη. Άρα, αυτές είναι ακριβώς όλες οι μετρήσιμες συναρτήσεις στον $(X, \sigma(C))$

1.3 Σ-άλγεβρα παραγόμενη από συναρτήσεις

Ορισμός 1.6. Έστω Ω σύνολο. Για μια συνάρτηση $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$, ονομάζουμε **σ-άλγεβρα παραγόμενη από την** f το σύνολο

$$\sigma(f) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}([-\infty, \infty])\}.$$

Αυτή είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο Ω η οποία κάνει την f μετρήσιμη στον $(\Omega, \mathcal{A})$ [Άσκηση]. Βέβαια αν στο Ω έχει ήδη οριστεί μία σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ ώστε η f να είναι μετρήσιμη στον $(\Omega, \mathcal{F})$, τότε θα έχουμε $\sigma(f) \subset \mathcal{F}$.

Σε περίπτωση που έχουμε πολλές συναρτήσεις $\{f_i : i \in I\}$ ορισμένες στο σύνολο Ω και θέλουμε να βρούμε μία σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ ώστε να είναι όλες μετρήσιμες στον $(\Omega, \mathcal{A})$, τότε πρέπει και αρκεί $\sigma(f_i) \subset \mathcal{A}$ για κάθε $i \in I$. Δηλαδή η $\mathcal{A}$ να περιέχει την ένωση $\cup_{i \in I} \sigma(f_i)$. Από όλες τις $\mathcal{A}$ που ικανοποιούν αυτή την ιδιότητα διαλέγουμε τη μικρότερη.

Ορισμός 1.7. Έστω Ω σύνολο. Αν $\{f_i : i \in I\}$ είναι οικογένεια συναρτήσεων στο Ω με τιμές στο $[-\infty, \infty]$, ονομάζουμε **σ-άλγεβρα παραγόμενη από τις συναρτήσεις** $\{f_i : i \in I\}$ το σύνολο

$$\sigma(\{f_i : i \in I\}) := \sigma\Big(\cup_{i \in I} \sigma(f_i) \Big). \tag{1.2}$$

Αυτή είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που κάνει όλες τις $\{f_i : i \in I\}$ μετρήσιμες.

Παράδειγμα 1.8 (Ακολουθία ρίψεων νομίσματος)**.** Παίρνουμε $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^+}$. Μπορούμε να δούμε αυτό το σύνολο ως το δειγματικό χώρο για μια ακολουθία ρίψεων ενός νομίσματος. Το -1 παριστά το αποτέλεσμα «Κορώνα» και το 1 το αποτέλεσμα «Γράμματα». Για $n \in \mathbb{N}^+$, ορίζουμε τη συνάρτηση $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ με $X_n(\omega) = \omega_n$, όπου $\omega = (\omega_n)_{n \geq 1} \in \Omega$. Δηλαδή η X_n είναι η προβολή στη n-οστή συντεταγμένη. Η X_n παίρνει μόνο δύο τιμές. Οπότε η $\sigma(X_n)$ είναι ακριβώς το σύνολο $\{\emptyset, \Omega, A_{n,-1}, A_{n,1}\}$, με

$$\begin{aligned}
A_{n,-1} &:= X_n^{-1}(\{-1\}) = \{\omega \in \Omega : \omega_n = -1\} = \{-1, 1\}^{n-1} \times \{-1\} \times \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^+ \setminus [n]}, \\
A_{n,1} &:= X_n^{-1}(\{1\}) = \{\omega \in \Omega : \omega_n = 1\} = \{-1, 1\}^{n-1} \times \{1\} \times \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^+ \setminus [n]},
\end{aligned}$$

όπου $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$.

Θα περιγράψουμε τώρα τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_n := \sigma(\{X_1, X_2, \ldots, X_n\})$. Για δεδομένη ακολουθία $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \{-1, 1\}^n$, θεωρούμε το σύνολο

$$\begin{aligned}
A_s &:= \{(s_1, s_2, \ldots, s_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) : x_i \in \{-1, 1\} \text{ για κάθε } i \geq n + 1\} \\
&= X_1^{-1}(\{s_1\}) \cap X_2^{-1}(\{s_2\}) \cap \cdots \cap X_n^{-1}(\{s_n\}).
\end{aligned}$$

Δηλαδη το A_s περιέχει όλες τις άπειρες ακολουθίες από -1 και 1 που το αρχικό τους τμήμα είναι το s και μετά είναι ελεύθερες να έχουν ό,τι θέλουν. Για μια ακολουθία που ανήκει στο A_s, η συμπεριφορά της ως τον χρόνο n είναι γνωστή.

Ισχυρισμος: Η $\mathcal{F}_n$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από τη διαμέριση $C := \{A_s : s \in \{-1, 1\}^n\}$ του Ω.

Από τον ορισμό της η $\mathcal{F}_n$ πρέπει να περιέχει τα $X_i^{-1}(\{s_i\})$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Άρα, ως σ-άλγεβρα, περιέχει και το A_s, που είναι πεπερασμένη τομή των $X_i^{-1}(\{s_i\})$. Επομένως $\sigma(C) \subset \mathcal{F}_n$. Από την άλλη, κάθε X_i με $1 \leq i \leq n$ είναι μετρήσιμη ως προς τη $\sigma(C)$. Για παράδειγμα,

$$X_i^{-1}(\{1\}) = \cup_{s \in \{-1,1\}^n : s_i = 1} A_s$$

είναι πεπερασμένη ένωση στοιχείων της $\sigma(C)$, άρα στοιχείο της. Από την ελαχιστότητα της $\mathcal{F}_n$ έπεται ότι $\mathcal{F}_n \subset \sigma(C)$ και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

1.4 Οι χώροι L^p

Για X τυχαία μεταβλητή στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και $p \in [1, \infty)$, ορίζουμε

$$\|X\|_p = \{\mathbf{E}(|X|^p)\}^{1/p}$$

και

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) := \{X \text{ τυχαία μεταβλητή στο } \Omega : \|X\|_p < \infty\}.$$

Όταν είναι σαφές ποιος είναι ο χώρος Ω και ποια η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$, γράφουμε $\mathcal{L}^p(\mathbf{P})$ αντί $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $X \mapsto \|X\|_p$ ικανοποιεί τις ιδιότητες

$$\|\lambda X\|_p = |\lambda| \|X\|_p,$$
$$\|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p,$$

για $X, Y \in \mathcal{L}^p(\mathbf{P})$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{L}^p(\mathbf{P})$ είναι διανυσματικός χώρος. Η συνάρτηση $\|\cdot\|_p$ θα ήταν νόρμα αν επιπλέον ικανοποιούσε την $\|X\|_p = 0 \Rightarrow X \equiv 0$. Όμως δεν την ικανοποιεί γιατί ενδέχεται μια τυχαία μεταβλητή X να μην είναι η μηδενική, αλλά να ισούται με 0 με πιθανότητα 1, δηλαδή $\mathbf{P}(X = 0) = 1$, και επομένως να έχει $\|X\|_p = 0$. Η λύση σε αυτό το πρόβλημα είναι να ορίσουμε στον $\mathcal{L}^p(\mathbf{P})$ μια σχέση ισοδυναμίας: $X \sim Y$ αν $\mathbf{P}(X = Y) = 1$, δηλαδη δύο τυχαίες μεταβλητές τις ταυτίζουμε αν είναι ίσες με πιθανότητα 1. Συμβολίζουμε το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας με $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ή $L^p(\mathbf{P})$.

Σχεδόν όποια συνάρτηση έχουμε ορίσει σε τυχαίες μεταβλητές μπορούμε να ορίσουμε και για τα στοιχεία της $L^p(\mathbf{P})$. Πώς; Μέσω ενός αντιπροσώπου. Ας το δούμε για τη συνάρτηση $\|\cdot\|_p$. Έστω $H \in L^p(\mathbf{P})$ μία κλάση και X ένα στοιχείο της κλάσης (λέμε αυτό το στοιχείο **εκδοχή** της H). Ορίζουμε $\|H\|_p = \|X\|_p$. Ο ορισμός δεν εξαρτάται από την επιλογή του αντιπροσώπου X γιατί αν Y είναι άλλος αντιπρόσωπος, τότε $\mathbf{E}(|X|^p) = \mathbf{E}(|Y|^p)$ (αφού οι X, Y είναι σχεδον παντού ίσες), οπότε $\|X\|_p = \|Y\|_p$. Από την άλλη, για μια $H \in L^p([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ δεν έχει νόημα να μιλάμε για την τιμή $H(1)$ γιατί αν πάρουμε δύο αντιπροσώπους f, g από την κλάση H, δεν ισχύει απαραίτητα $f(1) = g(1)$.

Για μετροθεωρητικά θέματα, θεωρούμε δύο τυχαίες μεταβλητές που είναι ίσες με πιθανότητα 1 ταυτόσημα αντικείμενα. Με τον ίδιο τρόπο, βλέπουμε τον χώρο $L^p(\mathbf{P})$ ως χώρο τυχαίων μεταβλητών και όχι ως χώρο κλάσεων ισοδυναμίας. Τώρα η συνάρτηση $\|\cdot\|_p$ ορισμένη στον $L^p(\mathbf{P})$ είναι νόρμα γιατί για μία $X \in L^p(\mathbf{P})$ η $\|X\|_p = 0$ συνεπάγεται $\mathbf{P}(X = 0) = 1$, άρα η κλάση της X είναι η κλάση της μηδενικής συνάρτησης. Αυτή η κλάση είναι το 0 του διανυσματικού χώρου $L^p(\mathbf{P})$.

Πρόταση 1.9. *(Ανισότητα Hölder) Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές, $p \in (1, \infty)$, και $q \in (1, \infty)$ τέτοιο ώστε $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Τότε*

$$\mathbf{E}\,|XY| \leq \|X\|_p \|Y\|_q.$$

Ειδική περίπτωση της ανισότητας Hölder ($p = q = 2$) είναι η ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$\mathbf{E}\,|XY| \leq \{\mathbf{E}(X^2)\}^{1/2} \{\mathbf{E}(Y^2)\}^{1/2}.$$

Πρόταση 1.10. *Για κάθε τυχαία μεταβλητή X και $1 \leq r < s$, ισχύει*

$$\|X\|_r \leq \|X\|_s.$$

Απόδειξη. Είναι συνέπεια της ανισότητας Hölder, όπου τη θέση της X έχει η $|X|^r$, την θέση της Y έχει η σταθερή συνάρτηση 1, $p = s/r$, και $q = s/(s - r)$. Δηλαδή,

$$\mathbf{E}\,|X|^r = \mathbf{E}(|X|^r 1) \leq \mathbf{E}(|X|^s)^{r/s} (\mathbf{E}(1^q))^{1/q} = \mathbf{E}(|X|^s)^{r/s}$$

και το συμπέρασμα έπεται. ∎

Κατά συνέπεια $L^s(\mathbf{P}) \subset L^r(\mathbf{P})$. Ο τελευταίος εγκλεισμός όμως έπεται και πιο εύκολα από την παρατήρηση ότι $|X|^r \leq |X|^s + 1$ (το 1 καλύπτει την περίπτωση που $|X(\omega)| < 1$).

Η νόρμα $\| \cdot \|_p$ ορίζει μία μετρική d_p στον χώρο $L^p(\mathbf{P})$. Ισχύει το εξής σημαντικό αποτέλεσμα [Κουμουλλής Γ. και Νεγρεπόντης Σ (1991), Θεώρημα 11.17].

Θεώρημα 1.11. *Ο μετρικός χώρος $(L^p(\mathbf{P}), d_p)$ είναι πλήρης.*

Όταν είναι σαφές ποιο είναι το μέτρο $\mathbf{P}$, τότε γράφουμε L^p αντί $L^p(\mathbf{P})$.

Ασκήσεις

1.1 Έστω f όπως στον Ορισμό 1.6. Να δειχθεί ότι

(α) Η f είναι $\sigma(f)$-μετρήσιμη.

(β) Αν η f είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη, όπου $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα στο Ω, τότε $\sigma(f) \subset \mathcal{F}$.

Άρα η $\sigma(f)$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα στο Ω που κάνει την f μετρήσιμη.

1.2 Έστω $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις στο σύνολο Ω. Να δειχθεί ότι $\sigma(f) \subset \sigma(f, g)$.

1.3 Έστω $\mathcal{F}$ το σύνολο των συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι άρτιες. Να προσδιοριστεί η σ-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$ που παράγει η οικογένεια $\mathcal{F}$ (Ορισμός 1.7).

2

Δεσμευμένη μέση τιμή

2.1 Ορισμός

Παντού σε αυτό το κεφάλαιο, αν δεν αναφέρεται κάτι διαφορετικό, δουλεύουμε σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και η $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ είναι μια σ-άλγεβρα.

Ορισμός 2.1. Για $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή στον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ με $\mathbf{E}|X| < \infty$, **δεσμευμένη μέση τιμή** της X ως προς τη σ-άλγεβρα $\mathcal{G}$ ονομάζουμε οποιανδήποτε τυχαία μεταβλητή $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) Η Y είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη.

(ii) Ισχύει

$$\int_A X \, d\mathbf{P} = \int_A Y \, d\mathbf{P} \tag{2.1}$$

για κάθε $A \in \mathcal{G}$.

Η απαίτηση (ii) εμπεριέχει και την απαίτηση η Y να είναι τέτοια ώστε το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (2.1) να ορίζεται.

Γενικά, αν μια τυχαία μεταβλητή είναι μετρήσιμη ως προς μια μικρή σ-άλγεβρα, τότε συμπεραίνουμε ότι είναι απλό αντικείμενο. Για παράδειγμα, αν είναι μετρήσιμη ως προς μια σ-άλγεβρα που παράγεται από διαμέριση με n στοιχεία, τότε μπορεί να παίρνει το πολύ n διαφορετικές τιμές (Παράδειγμα 1.5).

Ο ορισμός λοιπόν μας λέει ότι αν θέλουμε να υπολογίζουμε ολοκληρώματα της X σε σύνολα της υποάλγεβρας $\mathcal{G}$, δεν είναι ανάγκη να χρησιμοποιούμε τη X, η οποία μπορεί να είναι αρκετά περίπλοκη συνάρτηση. Υπάρχει η Y που είναι απλούστερο αντικείμενο από τη X και μπορεί να κάνει την ίδια δουλειά.

Για την πρακτική σημασία της δεσμευμένης μέσης τιμής θα αναφερθούμε στην επόμενη παράγραφο. Ξεκινάμε με το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας και κάποια παραδείγματα.

Πρόταση 2.2. *(Ύπαρξη και μοναδικότητα)*

(i) Μία δεσμευμένη μέση τιμή Y της X ως προς την $\mathcal{G}$ υπάρχει.

(ii) Για οποιαδήποτε δεσμευμένη τιμή Y της X ως προς την $\mathcal{G}$ ισχύει $\mathbf{E}|Y| \le \mathbf{E}|X| < \infty$.

(iii) Αν Y, Y' είναι δύο δεσμευμένες μέσες τιμές της X ως προς την $\mathcal{G}$, τότε $\mathbf{P}(Y = Y') = 1$.

Απόδειξη. (i) Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $X \ge 0$. Η συνάρτηση $\nu : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ με

$$\nu(A) = \int_A X \, d\mathbf{P}$$

για κάθε $A \in \mathcal{G}$ είναι ένα μέτρο και επιπλέον $\mathbf{P}(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$ (Άσκηση). Το Θεώρημα Radon-Nikodym [Κουμουλλής Γ. και Νεγρεπόντης Σ (1991), Θεώρημα 10.15] δίνει ότι υπάρχει $Y \ge 0, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ ώστε $\nu(A) = \int_A Y \, d\mathbf{P}$.

Τώρα για τη γενική περίπτωση, θέτουμε $X_1 := X^+, X_2 := X^-$. Από την προηγούμενη παράγραφο έχουμε ότι υπάρχουν $Y_1, Y_2 \geq 0$ που να αντιστοιχούν στις X_1, X_2 και έχουν $\mathbf{E}\, Y_1, \mathbf{E}\, Y_2 < \infty$. Εύκολα βλέπουμε ότι η $Y := Y_1 - Y_2$ είναι μια δεσμευμένη τιμή για τη X.

(ii) Έστω $A_1 := \{Y > 0\}, A_2 := \Omega \backslash A_1 = \{Y \leq 0\}$, που είναι και τα δύο στοιχεία της $\mathcal{G}$ αφού η Y είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη. Τότε

$$\mathbf{E}\,|Y| = \int_{A_1} Y\, d\mathbf{P} - \int_{A_2} Y\, d\mathbf{P} = \int_{A_1} X\, d\mathbf{P} - \int_{A_2} X\, d\mathbf{P} \leq \int_{A_1} |X|\, d\mathbf{P} + \int_{A_2} |X|\, d\mathbf{P} = \mathbf{E}\,|X|.$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει με εφαρμογή του (ii) του Ορισμού 2.1 για τα σύνολα A_1, A_2.

(iii) Έστω ότι $\mathbf{P}(Y - Y' > 0) > 0$. Τότε το σύνολο $A := [Y - Y' > 0]$ είναι στοιχείο της $\mathcal{G}$ (αφού η $Y - Y'$ είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη) και

$$\int_A (Y - Y')\, d\mathbf{P} = \int_A X\, d\mathbf{P} - \int_A X\, d\mathbf{P} = 0.$$

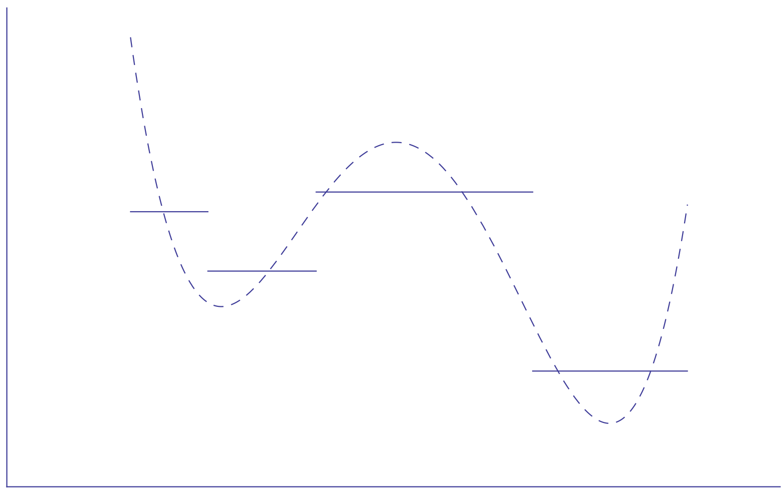
Δηλαδή η μη αρνητική συνάρτηση $(Y - Y')\mathbf{1}_A$ έχει μηδενικό ολοκλήρωμα. Πρέπει $\mathbf{P}((Y - Y')\mathbf{1}_A > 0) = 0$. Όμως $\mathbf{P}((Y - Y')\mathbf{1}_A > 0) = \mathbf{P}(A) > 0$ από υπόθεση. Άτοπο. Άρα $\mathbf{P}(Y - Y' > 0) = 0$. Λόγω συμμετρίας, $\mathbf{P}(Y' - Y > 0) = 0$, και το συμπέρασμα έπεται. ■

Συμβολίζουμε οποιαδήποτε δεσμευμένη μέση τιμή της X ως προς τη $\mathcal{G}$ με $\mathbf{E}(X \mid \mathcal{G})$. Το (iii) της προηγούμενης πρότασης επιτρέπει να θεωρούμε ότι η $\mathbf{E}(X \mid \mathcal{G})$ είναι ουσιαστικά μοναδική.

Παράδειγμα 2.3. (1) Στην περίπτωση που $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ ισχύει $\mathbf{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbf{E}\, X$, δηλαδή είναι σταθερά. Αυτό γιατί οι μόνες $\mathcal{G}$-μετρήσιμες συναρτήσεις είναι οι σταθερές και αν υποθέσουμε ότι $\mathbf{E}(X \mid \mathcal{G}) = c$ και εφαρμοσουμε την (2.1) για $A = \Omega \in \mathcal{G}$, παίρνουμε $\mathbf{E}\, X = \int_\Omega c\, d\mathbf{P} = c$.

Παράδειγμα 2.4. Στην περίπτωση που $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ ισχύει $\mathbf{E}(X \mid \mathcal{G}) = X$. Αυτό γιατί η X είναι $\mathcal{G}$ μετρήσιμη και προφανώς ικανοποιεί το (ii) του Ορισμού 2.1.

Παράδειγμα 2.5. Θα δούμε τώρα την περίπτωση που η $\mathcal{G}$ παράγεται από μια αριθμήσιμη διαμέριση, έστω $\mathcal{C} = \{A_i : i \in I\} \subset \mathcal{F}$, του δειγματικού χώρου Ω (Παράδειγμα 1.3). Δηλαδή $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{C})$. Βέβαια, επειδή πρέπει $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, θα έχουμε ότι $A_i \in \mathcal{F}$ για κάθε $i \in I$.



Σχήμα 2.1: Συνάρτηση (διακεκομμένες γραμμές) και η δεσμευμένη μέση τιμή της (ευθύγραμμα τμήματα) ως προς μία σ-άλγεβρα. Η σ-άλγεβρα παράγεται από τη διαμέριση $\{[4, 6.5), [6.5, 10), [10, 17), [17, 22]\}$ του πεδίου ορισμού $[4, 22]$.

Η δεσμευμένη μέση τιμή, έστω Y, είναι $\sigma(\mathcal{C})$-μετρήσιμη. Άρα με βάση το Παράδειγμα 1.5, είναι σταθερή σε κάθε σύνολο της διαμέρισης. Δηλαδή υπάρχουν σταθερές $\{c_i : i \in I\}$ ώστε $Y(\omega) = c_i$ για κάθε $\omega \in A_i$ και $i \in I$. Θα βρούμε αυτές τις σταθερές. Εφαρμόζουμε την (2.1) για $A = A_i \in \sigma(C)$ και παίρνουμε

$$\int_{A_i} X \, d\mathbf{P} = c_i \, \mathbf{P}(A_i). \tag{2.2}$$

Αν $\mathbf{P}(A_i) \neq 0$, έχουμε αμέσως $c_i = \mathbf{E}(X; A_i)/\,\mathbf{P}(A_i)$, ενώ αν $\mathbf{P}(A_i) = 0$, οποιαδήποτε σταθερά ικανοποιεί την (2.2) αφού και το αριστερό μέλος ισούται με 0 (ολοκλήρωμα σε σύνολο μέτρου 0). Άρα

$$\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G})(\omega) = \begin{cases} \frac{\mathbf{E}(X;A_i)}{\mathbf{P}(A_i)} & \text{αν } \omega \in A_i \text{ και } \mathbf{P}(A_i) > 0, \\ 0 & \text{αν } \omega \in A_i \text{ και } \mathbf{P}(A_i) = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

και έτσι η $\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G})$ καθορίστηκε πλήρως σε όλο το Ω (το δεύτερο σκέλος του ορισμού είναι ασήμαντο αφού αφορά το σύνολο $\cup_{i:\mathbf{P}(A_i)=0} A_i$, το οποίο έχει μέτρο 0 ως αριθμήσιμη ένωση συνόλων με μέτρο μηδέν).

Στις στοιχειώδεις πιθανότητες το πηλίκο στην (2.3) συμβολίζεται με $\mathbf{E}(X\,|\,A_i)$ και λέγεται δεσμευμένη μέση τιμή της X δεδομένου ότι συνέβη το A_i. Είναι επίσης η μέση τιμή της X ως προς την κανονικοποίηση του περιορισμού της $\mathbf{P}$ στο A_i (Άσκηση 2.1). Είναι η «μέση τιμή της X στο σύνολο A_i» με την ίδια έννοια που η μέση τιμή μιας συνεχούς συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ σε ένα διάστημα $[a, b]$ είναι ο αριθμός

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt.$$

Στο Σχήμα 2.1 έχουμε (με διακεκομμένες γραμμές) το γράφημα μιας συνάρτησης X με πεδίο ορισμού το $\Omega := [4, 22]$. Ο χώρος πιθανότητας είναι ο $([4, 22], \mathcal{B}([4, 22]), \lambda/18)$, όπου λ είναι το μέτρο Lebesgue στο $[4, 22]$. Οι οριζόντιες γραμμές είναι το γράφημα της δεσμευμένης μέσης τιμής της X ως προς τη σ-άλγεβρα που παράγεται από τη διαμέριση $\{[4, 6.5), [6.5, 10), [10, 17), [17, 22]\}$. Ο προσδιορισμός της δεσμευμένης μέσης τιμής έγινε ως εξής. Έστω $\mu = \lambda/18$. Η δεσμευμένη μέση τιμή στο πρώτο διάστημα $[4, 6.5) = [a, b)$ ισούται με

$$\frac{\int_a^b X(t) d\mu(t)}{\mu([a, b))} = \frac{\int_a^b X(t)\, dt}{b-a}.$$

Αυτή είναι η «μέση τιμή της X στο $[a, b)$». Όμοια υπολογίζεται η δεσμευμένη μέση τιμή και στα υπόλοιπα διαστήματα.

2.2 Σημασία της δεσμευμένης μέσης τιμής

Σε αυτή την παράγραφο θέλουμε να στηρίξουμε τη δήλωση ότι

«Η δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G})$ δίνει την καλύτερη εκτίμηση για τη X δεδομένης της πληροφορίας που δίνει η σ-άλγεβρα $\mathcal{G}$.»

Οι έννοιες «εκτίμηση» και «πληροφορία» είναι ασαφείς και ελάχιστα θα τις διασαφηνίσουμε παρακάτω. Η πιο πάνω φράση απλώς προσφέρει έναν τρόπο να σκεφτόμαστε για τη δεσμευμένη μέση τιμή. Δεν πρόκειται να την χρησιμοποιήσουμε στην ανάπτυξη της θεωρίας.

Υπενθυμίζουμε ότι, για μια σ-άλγεβρα $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, ως πληροφορία που κρατάει η $\mathcal{G}$ θεωρούμε την εξής γνώση. Όταν γίνεται το πείραμα το οποίο μοντελοποιεί ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και προκύψει ένα αποτέλεσμα $\omega \in \Omega$ (το οποίο εμείς δεν ξέρουμε), η πληροφορία της $\mathcal{G}$ είναι το σε ποια στοιχεία της ανήκει και σε ποια δεν ανήκει το ω. Δηλαδή η πληροφορία ενδεχομένως να μην μας πει ποιο ακριβώς είναι το ω, αλλά θα το περιορίσει. Εμείς βεβαίως ξέρουμε τα πάντα για την τριάδα $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και τη συνάρτηση X και μπορούμε να κάνουμε υπολογισμούς πιθανοτήτων και μέσων τιμών.

Θα δούμε τώρα αυτό το σκεπτικό εφαρμοσμένο σε προηγούμενα παραδείγματα για τα οποία έχουμε υπολογίσει τη δεσμευμένη μέση τιμή.

Στο Παράδειγμα 2.3 η σ-άλγεβρα $\{\emptyset, \Omega\}$ δεν μας δίνει καμία πληροφορία. Το ότι $\omega \in \Omega$ το ξέρουμε. Έτσι, αφού γίνει το πείραμα, η καλύτερη εκτίμηση που κάνουμε για την τιμή $X(\omega)$ που έχει πάρει η X είναι η $\mathbf{E}\, X$.

Στο Παράδειγμα 2.5. Όταν η $\mathcal{G}$ παράγεται από μια αριθμήσιμη διαμέριση $\{A_i : i \in I\}$, για ένα δεδομένο $\omega \in \Omega$, η πληροφορία της $\mathcal{G}$ μας λέει σε ποιο στοιχείο A_i της διαμέρισης ανήκει το ω και δεν μπορεί να πει κάτι πιο κατατοπιστικό γιατί το A_i δεν περιέχει γνησίως μικρότερο και μη κενό υποσύνολο που να είναι στοιχείο της διαμέρισης. Ξέροντας λοιπόν ότι $\omega \in A_i$ και συνδυάζοντάς το με το σκεπτικό του προηγουμένου παραδείγματος, είναι εντελώς φυσιολογικό να πάρουμε ως καλύτερη εκτίμησή μας για το $X(\omega)$ τη μέση τιμή της X ως προς την κανονικοποίηση του περιορισμού του $\mathbf{P}$ στο A_i (το μέτρο στον υπόλοιπο χώρο δεν μας ενδιαφέρει). Δηλαδή τον αριθμό στην (2.3).

Στο Παράδειγμα 2.4. Αφού η X είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη, όλα τα σύνολα $\{X = r\}$, όπου $r \in \mathbb{R}$, ανήκουν στην $\mathcal{G}$, και για δεδομένο $\omega \in \Omega$, ξέρουμε σε ποια αυτό ανήκει και σε ποια όχι. Άρα ξέρουμε ποιο είναι το $X(\omega)$ ακριβώς. Γι' αυτό και $\mathbf{E}(X \,|\, \mathcal{G}) = X$.

Αυτή η διαίσθηση όμως δεν λειτουργεί πάντα, όπως δείχνει το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.6. Στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με $\Omega := (0,1), \mathcal{F} := \mathcal{B}((0,1)), \mathbf{P} := \lambda_1$ το μέτρο Lebesgue στο $(0,1)$, θεωρούμε τη σ-άλγεβρα

$$\mathcal{G} := \{A \subset (0,1) : A \text{ αριθμήσιμο ή } (0,1) \setminus A \text{ αριθμήσιμο}\}$$

που είναι υποσύνολο της $\mathcal{F}$ (γιατί;). Θεωρούμε και την τυχαία μεταβλητή X με $X(\omega) = \omega$ για κάθε $\omega \in \Omega$ [είναι αυτή που λέμε τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφη στο $(0,1)$]. Γίνεται λοιπόν το πείραμα και προκύπτει ένα ω. Η $\mathcal{G}$ περιέχει όλα τα μονοσύνολα του Ω και άρα η πληροφορία που κρατάει πρέπει να μας δώσει ποιο είναι το ω ακριβώς και άρα και την ακριβή τιμή του $X(\omega)$. Από την άλλη, επειδή κάθε σύνολο της $\mathcal{G}$ έχει $\mathbf{P}$ μέτρο 0 ή 1, έχουμε ότι η X είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{G}$ και επομένως, από την Πρόταση 2.7(iii) πιο κάτω, $\mathbf{E}(X \,|\, \mathcal{G})(\omega) = \mathbf{E}\, X = \int_0^1 x \, d\lambda_1(x) = 1/2$ για κάθε $\omega \in \Omega$.

2.3 Βασικές ιδιότητες

Θα δούμε σε αυτή την παράγραφο κάποιες χρήσιμες ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής. Οι ισχυρισμοί, ισότητες/ανισότητες, πιο κάτω ισχύουν με πιθανότητα 1. Παραλείπουμε αυτή τη διασαφήνιση για απλότητα στη διατύπωση.

Πρόταση 2.7. *Έστω $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρα. Ισχύουν τα εξής.*

(i) $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X \,|\, \mathcal{G})) = \mathbf{E}\, X$.

(ii) Αν η X είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη, τότε $\mathbf{E}(X \,|\, \mathcal{G}) = X$.

(iii) Αν η X είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{G}$, τότε $\mathbf{E}(X \,|\, \mathcal{G}) = \mathbf{E}\, X$.

Απόδειξη. (i) Προκύπτει θέτοντας $A = \Omega$ στην (2.1).
(ii) Η X ικανοποιεί τις δύο απαιτήσεις του ορισμού της δεσμευμένης μέσης τιμής.
(iii) Η σταθερή συνάρτηση $\mathbf{E}\, X$ είναι προφανώς $\mathcal{G}$-μετρήσιμη και για $A \in \mathcal{G}$ έχουμε

$$\int_A X \, d\mathbf{P} = \mathbf{E}(\mathbf{1}_A X) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_A)\, \mathbf{E}\, X = \mathbf{P}(A)\, \mathbf{E}\, X = \int_A \mathbf{E}\, X \, d\mathbf{P}.$$

∎

Πρόταση 2.8. *Έστω $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Ισχύουν τα εξής.*

(i) $\mathbf{E}(aX + bY \,|\, \mathcal{G}) = a\, \mathbf{E}(X \,|\, \mathcal{G}) + b\, \mathbf{E}(Y \,|\, \mathcal{G})$.

(ii) *Αν* $X \geq 0$, *τότε* $\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}) \geq 0$.

(iii) *Αν* $X \leq Y$, *τότε* $\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}) \leq \mathbf{E}(Y\,|\,\mathcal{G})$.

Απόδειξη. (i) Η $a\,\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}) + b\,\mathbf{E}(Y\,|\,\mathcal{G})$ είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη, και για $A \in \mathcal{G}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_A \{a\,\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}) + b\,\mathbf{E}(Y\,|\,\mathcal{G})\}\,d\mathbf{P} &= a\int_A \mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G})\,d\mathbf{P} + b\int_A \mathbf{E}(Y\,|\,\mathcal{G})\,d\mathbf{P} \\ &= a\int_A X\,d\mathbf{P} + b\int_A Y\,d\mathbf{P} = \int_A (aX + bY)\,d\mathbf{P}.\end{aligned}$$

Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα ορισμού των $\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}), \mathbf{E}(Y\,|\,\mathcal{G})$ και το ότι $A \in \mathcal{G}$. Άρα η $a\,\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}) + b\,\mathbf{E}(Y\,|\,\mathcal{G})$ είναι μια δεσμευμένη μέση τιμή της $aX + bY$ ως προς την $\mathcal{G}$.

(ii) Έπεται από την απόδειξη της Πρότασης 2.2(i) ότι υπάρχει μια δεσμευμένη μέση τιμή που είναι μη αρνητική. Όμως η δεσμευμένη μέση τιμή είναι μοναδική (Πρόταση 2.2(iii)) και το συμπέρασμα έπεται.

(iii) Θέτουμε $W := Y - X$, εφαρμόζουμε το προηγούμενο μέρος της πρότασης, και μετά χρησιμοποιούμε τη γραμμικότητα της δεσμευμένης μέσης τιμής (πρώτο μέρος της πρότασης). ■

Πρόταση 2.9. *Έστω* $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *και* $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ *σ-άλγεβρες. Τότε*

(i) $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}_1)\,|\,\mathcal{G}_2)) = \mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}_1)$.

(ii) $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}_2)\,|\,\mathcal{G}_1)) = \mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}_1)$.

Απόδειξη. (i) Η τυχαία μεταβλητή $\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}_1)$ είναι $\mathcal{G}_2$-μετρήσιμη αφού είναι $\mathcal{G}_1$-μετρήσιμη και $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$. Το συμπέρασμα έπεται από την Πρόταση 2.7(ii).

(ii) Η $\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}_1)$ είναι $\mathcal{G}_1$-μετρήσιμη, και για $A \in \mathcal{G}_1$ έχουμε

$$\int_A \mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}_1)\,d\mathbf{P} = \int_A X\,d\mathbf{P} = \int_A \mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}_2)\,d\mathbf{P}.$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιούμε τον ορισμο της $\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}_2)$ και το ότι το A είναι στοιχείο της $\mathcal{G}_2$ επίσης. Το συμπέρασμα έπεται. ■

Πρόταση 2.10 (Τα γνωστά βγαίνουν έξω). *Έστω* $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *και* $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *συνάρτηση* $\mathcal{G}$-*μετρήσιμη ώστε* $\mathbf{E}\,|XY| < \infty$. *Τότε*

$$\mathbf{E}(XY\,|\,\mathcal{G}) = Y\,\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}). \tag{2.4}$$

Απόδειξη. Το δεξί μέλος της ισότητας είναι μια $\mathcal{G}$-μετρήσιμη συνάρτηση, άρα μένει να δείξουμε ότι ικανοποιεί τη δεύτερη συνθήκη του Ορισμού 2.1. Θα πάμε με τη συνήθη τακτική.

1. Αν η $Y = \mathbf{1}_B$ με $B \in \mathcal{G}$, τότε για κάθε $A \in \mathcal{G}$ έχουμε

$$\int_A Y\,\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G})\,d\mathbf{P} = \int_{A\cap B} \mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G})\,d\mathbf{P} = \int_{A\cap B} X\,d\mathbf{P} = \int_A \mathbf{1}_B X\,d\mathbf{P} = \int_A XY\,d\mathbf{P},$$

και το συμπέρασμα έπεται.

2. Η προηγούμενη ειδική περίπτωση και η γραμμικότητα της δεσμευμένης μέσης τιμής δίνουν την (2.4) όταν η Y είναι απλή και $\mathcal{G}$-μετρήσιμη.

3. Αν οι $X, Y \geq 0$, τότε παίρνουμε αύξουσα ακολουθία $(Y_n)_{n\geq 1}$ μη αρνητικών απλών και $\mathcal{G}$-μετρήσιμων συναρτήσεων που συγκλίνει σημειακά στην Y. Με βάση τα προηγούμενα, για $A \in \mathcal{G}$ έχουμε

$$\int_A Y_n\,\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G})\,d\mathbf{P} = \int_A XY_n\,d\mathbf{P}.$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μονότονης σύγκλισης στην τελευταία, και παίρνουμε

$$\int_A Y\,\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G})\,d\,\mathbf{P} = \int_A XY\,d\,\mathbf{P}\,.$$

Έτσι πάλι ισχύει η (2.4).

4. Για τη γενική περίπτωση. Εφαρμόζουμε την (2.4) για τα ζευγάρια $\{X^-, Y^-\}, \{X^-, Y^+\}, \{X^+, Y^-\}$, $\{X^+, Y^+\}$ για τα οποία ξέρουμε ότι ισχύει, και κάνουμε τις απαραίτητες πράξεις με τις ισότητες που θα προκύψουν. Χρησιμοποιούμε βέβαια το γεγονός ότι

$$\mathbf{E}(X^-Y^-) + \mathbf{E}(X^-Y^+) + \mathbf{E}(X^+Y^-) + \mathbf{E}(X^+Y^+) = \mathbf{E}\,|XY| < \infty.$$

■

Συμβολισμός: Αν Z, W είναι τυχαίες μεταβλητές, τότε για τη δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbf{E}(Z\,|\,\sigma(W))$ χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathbf{E}(Z\,|\,W)$.

Η πιο κάτω πρόταση είναι χρήσιμη σε υπολογισμούς. Για απλοποίηση στη διατύπωση, υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X, Y που εμφανίζονται παίρνουν τιμές στο $\mathbb{R}$. Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και αν παίρνουν τιμές σε αυθαίρετο μετρήσιμο χώρο η καθεμία.

Πρόταση 2.11. *Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$ και $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμη ώστε $\mathbf{E}\,|h(X, Y)| < \infty$. Θέτουμε $\phi(x) := \mathbf{E}(h(x, Y))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε*

$$\mathbf{E}(h(X, Y)\,|\,X) = \phi(X).$$

Δηλαδή, για να υπολογίσουμε την τιμή της δεσμευμένης μέσης τιμής της $h(X, Y)$ σε ένα $\omega \in \Omega$, παγώνουμε τη X στην τιμή $x = X(\omega)$ και υπολογίζουμε τη μέση τιμή της ποσότητας $h(x, Y)$, στην οποία η τυχαιότητα οφείλεται μόνο στο Y.

Απόδειξη. Η ϕ είναι Borel μετρήσιμη, οπότε η $\phi(X)$ είναι $\sigma(X)$ μετρήσιμη. Έπειτα θα ελέγξουμε την ισχύ της δεύτερης συνθήκης του Ορισμού 2.1. Έστω $A \in \sigma(X)$. Υπάρχει $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ έτσι ώστε $A = X^{-1}(B)$. Έστω μ, ν οι κατανομές των X, Y αντίστοιχα. Η τ.μ. (X, Y) έχει κατανομή $\rho := \mu \times \nu$ (μέτρο γινόμενο) επειδή οι X, Y είναι ανεξάρτητες. Χρησιμοποιώντας τον τύπο αλλαγής μεταβλητής, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\int_A h(X, Y)\,d\,\mathbf{P} &= \int h(X, Y)\mathbf{1}_B(X)\,d\,\mathbf{P} = \int h(x, y)\mathbf{1}_B(x)\,d\rho(x, y) \\
&= \iint h(x, y)\mathbf{1}_B(x)\,d\nu(y)d\mu(x) = \int_B \int h(x, y)\,d\nu(y)d\mu(x) \\
&= \int_B \phi(x)d\mu(x) = \int \phi(X)\mathbf{1}_B(X)\,d\,\mathbf{P} = \int_A \phi(X)\,d\,\mathbf{P},
\end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Παράδειγμα 2.12. Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, με καθεμία να έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$. Η μέση τιμή $\mathbf{E}(X^Y)$ υπολογίζεται ως εξής.

$$\mathbf{E}(X^Y) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X^Y\,|\,Y)) = \mathbf{E}(\phi(Y))$$

με $\phi(y) = \mathbf{E}(X^y)$. Για $y \in (0, 1)$ έχουμε $\mathbf{E}(X^y) = \int_0^1 x^y\,dx = 1/(y + 1)$. Άρα η ζητούμενη μέση τιμή ισούται με $\mathbf{E}(1/(Y + 1)) = \int_0^1 (1 + y)^{-1}\,dy = \log 2$.

Πρόταση 2.13 (Ανισότητα Jensen)**.** *Έστω $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και f κυρτή συνάρτηση σε ένα διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ με $\mathbf{P}(X \in I) = 1$ και $\mathbf{E}\,|f(X)| < \infty$. Τότε*

$$f(\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G})) \leq \mathbf{E}(f(X)\,|\,\mathcal{G}).$$

Η ανισότητα Jensen έχει την εξής χρήσιμη συνέπεια.

Πόρισμα 2.14. *Για $p \geq 1$ και $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ισχύει*

$$\|\,\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G})\|_p \leq \|X\|_p.$$

Την περίπτωση $p = 1$ την έχουμε ήδη δει στην Πρόταση 2.2(ii).

Απόδειξη. Το ότι η X είναι στοιχείο του L^p δίνει ότι είναι στοιχείο και του L^1. Έτσι, εφαρμόζοντας την ανισότητα Jensen για την κυρτή συνάρτηση $f(x) = |x|^p$, έχουμε ότι

$$|\,\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G})|^p \leq \mathbf{E}(|X|^p\,|\,\mathcal{G})$$

με πιθανότητα 1. Παίρνουμε μέση τιμή στα δύο μέλη, και με χρήση της Πρότασης 2.7(i) παίρνουμε

$$\mathbf{E}\,\{|\,\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G})|^p\} \leq \mathbf{E}(|X|^p),$$

που είναι το ζητούμενο. ■

Για τη δεσμευμένη μέση τιμή υπάρχουν οριακά θεωρήματα αντίστοιχα αυτών της μέσης τιμής. Τα καταγράφουμε χωρίς απόδειξη. Για όλες τις τυχαίες μεταβλητές που εμφανίζονται σε αυτά υποθέτουμε ότι είναι στοιχεία του $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Θεώρημα 2.15 (Λήμμα Fatou)**.** *Αν οι X_n είναι μη αρνητικές, τότε*

$$\mathbf{E}(\varliminf_{n\to\infty} X_n\,|\,\mathcal{G}) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n\,|\,\mathcal{G}).$$

Θεώρημα 2.16 (Θεώρημα μονότονης σύγκλισης)**.** *Αν $0 \leq X_n \leq X_{n+1}$ για κάθε $n \geq 1$, τότε*

$$\mathbf{E}(\lim_{n\to\infty} X_n\,|\,\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n\,|\,\mathcal{G}).$$

Θεώρημα 2.17 (Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης)**.** *Αν οι $\{X_n : n \geq 1\}$ συγκλίνουν με πιθανότητα 1 σε μια τυχαία μεταβλητή X και υπάρχει $Y \in L^1(\mathbf{P})$ με $|X_n| \leq Y$ για κάθε $n \geq 1$, τότε $X \in L^1(\mathbf{P})$ και*

$$\mathbf{E}(\lim_{n\to\infty} X_n\,|\,\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n\,|\,\mathcal{G}).$$

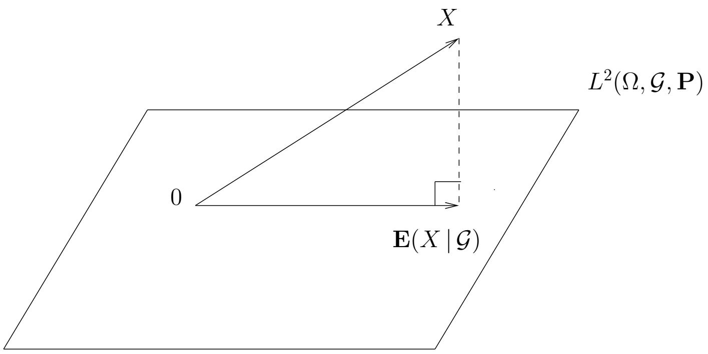
2.4 Η δεσμευμένη μέση τιμή ως προβολή

Το σύνολο $H := L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο $(X, Y) \mapsto \mathbf{E}(XY) = \int XY\,d\mathbf{P}$ είναι χώρος Hilbert (δες Παράρτημα Β′). Ο $H_0 := L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ είναι υπόχωρος του H και μάλιστα κλειστός. Έχουμε ορίσει τη δεσμευμένη μέση τιμή ως προς την $\mathcal{G}$ για τα στοιχεία του $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \supset H$. Όμως για τα στοιχεία του H η δεσμευμένη μέση τιμή έχει την εξής γεωμετρική ερμηνεία.

Πρόταση 2.18. *Η απεικόνιση $T : H \to H_0$ με $T(X) = \mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G})$ είναι η ορθογώνια προβολή στον υπόχωρο H_0.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, η T παίρνει πράγματι τιμές στον H_0 γιατί από το Πόρισμα 2.14 (για $p = 2$), αν $X \in H$, τότε $\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}) \in H_0$.

Κάθε $X \in H$ γράφεται ως $X = \mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}) + \{X - \mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G})\}$ με $\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}) \in H_0$. Μένει να δείξουμε ότι $X - \mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}) \in H_0^\perp$, δηλαδή $\mathbf{E}(Y\{X - \mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G})\}) = 0$ για κάθε $Y \in H_0$. Αυτό αφήνεται ως άσκηση (Άσκηση 2.9). ■



Σχήμα 2.2: Η δεσμευμένη μέση τιμή ως προβολή. Ο περιβάλλων χώρος είναι ο $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, και ο υπόχωρος $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ παριστάνεται από ένα επίπεδο.

Ασκήσεις

Στις ασκήσεις πιο κάτω υποθέτουμε ότι δουλεύουμε σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και ότι η $\mathcal{G}$ είναι σ-άλγεβρα υποσύνολο της $\mathcal{F}$.

2.1 Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου και $A_0 \in \mathcal{F}$ με $\mu(A_0) > 0$.

(α) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $\nu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ με

$$\nu(A) = \mu(A \cap A_0)$$

είναι μέτρο στον $(\Omega, \mathcal{F})$. Αυτό το μέτρο ονομάζεται περιορισμός του μ στο A_0. Κανονικοποιώντας το (δηλαδή διαιρώντας το με τη συνολική του μάζα), παίρνουμε το μέτρο πιθανότητας

$$\hat{\nu}(A) = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)} = \frac{\mu(A \cap A_0)}{\mu(A_0)}.$$

(β) Να δειχθεί ότι για κάθε $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη με $\int |X| \, d\mu < \infty$ ή με $X \geq 0$ ισχύει ότι

$$\int X \, d\hat{\nu} = \frac{1}{\mu(A_0)} \int_{A_0} X \, d\mu.$$

2.2 Έστω (X, Y) διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ και $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμη ώστε $\mathbf{E}\,|h(X)| < \infty$. Η Y έχει πυκνότητα $f_Y(y) := \int f(x, y) \, dx$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Για $x, y \in \mathbb{R}$ θέτουμε

$$f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y) := \begin{cases} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} & \text{αν } f_Y(y) \neq 0, \\ 0 & \text{αν } f_Y(y) = 0. \end{cases}$$

Τέλος θέτουμε $\phi(y) := \int h(x) f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y) \, dx$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(h(X)\,|\,Y) = \phi(Y).$$

2.3 Έστω $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με $X(\omega) > 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Να δειχθεί ότι:

(α) $\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}) > 0$ με πιθανότητα 1.

(β) $\mathbf{E}\left(\frac{X}{\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G})}\right) = 1$.

2.4 Έστω $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με $X(\omega) \neq 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Ισχύει απαραίτητα $\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}) \neq 0$ με πιθανότητα 1;

2.5 Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}(X^2) < \infty$ και $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρες. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(X \mid \mathcal{F}_1)^2) \leq \mathbf{E}(\mathbf{E}(X \mid \mathcal{F}_2)^2).$$

Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία της ανισότητας;

2.6 Έστω $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(X\,\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G})) \le \mathbf{E}(X^2).$$

2.7 Αν οι $X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ικανοποιούν $\mathbf{E}(Y\,|\,\mathcal{G}) = X$ και $\mathbf{E}(Y^2) = \mathbf{E}(X^2)$, τότε $X = Y$ με πιθανότητα 1.

2.8 Αν οι $X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ικανοποιούν $\mathbf{E}(Y^2\,|\,\mathcal{G}) = X^2$ και $\mathbf{E}(Y\,|\,\mathcal{G}) = X$, τότε $X = Y$ με πιθανότητα 1.

2.9 Για $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και $Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$, να δειχθεί ότι

(α)

$$\mathbf{E}(YX) = \mathbf{E}(Y\,\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G})),$$

δηλαδή $X - \mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}) \perp Y$.

(β)

$$\mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}))^2) \le \mathbf{E}((X - Y)^2),$$

και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $Y = \mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G})$, δηλαδή ισούνται με πιθανοτητα 1. Με άλλα λόγια, η $\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G})$ είναι το (ουσιαστικά μοναδικό) εγγύτερο στο X σημείο του υποχώρου $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$.

2.10 Για $X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G})\,Y) = \mathbf{E}(X\;\mathbf{E}(Y\,|\,\mathcal{G})).$$

2.11 Για $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ονομάζουμε την τυχαία μεταβλητή

$$\mathrm{Var}(X\,|\,\mathcal{G}) := \mathbf{E}\{(X - \mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}))^2\,|\,\mathcal{G}\}$$

δεσμευμένη διασπορά της X ως προς τη σ-άλγεβρα $\mathcal{G}$. Να δειχθεί ότι:

(α) $\mathrm{Var}(X\,|\,\mathcal{G}) = \mathbf{E}(X^2\,|\,G) - \{\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G})\}^2$.

(β) $\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}(\mathrm{Var}(X\,|\,\mathcal{G})) + \mathrm{Var}(\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}))$.

Στην τελευταία ισότητα η Var στην πρώτη και στην τρίτη ποσότητα είναι η συνηθισμένη διασπορά τυχαίας μεταβλητής.

2.12 Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Θέτουμε $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_k := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ για $1 \le k \le n$. Έστω και τυχαίες μεταβλητές $a_1, a_2, \dots, a_n$ ώστε η a_k να είναι $\mathcal{F}_{k-1}$-μετρήσιμη και φραγμένη για $1 \le k \le n$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}\left\{\left(\sum_{k=1}^n a_k X_k\right)^2\right\} = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(a_k^2).$$

2.13 Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ώστε $\mathbf{E}\,|X|, \mathbf{E}\,|Y| < \infty$ και $\mathbf{E}(X) = 0$. Να δειχθεί ότι $\mathbf{E}\,|X + Y| \ge \mathbf{E}\,|Y|$.

2.14 (Αλλαγή μέτρου και δεσμευμένη μέση τιμή) Έστω $\mathbf{P}$ μέτρο στον $(\Omega, \mathcal{F})$ και $f : \Omega \to [0, \infty]$ τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E_P}(f) = 1$. Να δειχθεί ότι:

(α) Η συνάρτηση $\mathbf{Q} : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ με $\mathbf{Q}(A) := \int_A f\,d\mathbf{P} = \int f\mathbf{1}_A\,d\mathbf{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας. [Γράφουμε $d\mathbf{Q} = f\,d\mathbf{P}$.]

(β) Για κάθε $X \ge 0$ τυχαία μεταβλητή ισχύει

$$\mathbf{E_Q}(X) = \mathbf{E_P}(Xf).$$

Και για $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ τυχαία μεταβλητή, $\mathbf{E_Q}(|X|) < \infty \Leftrightarrow \mathbf{E_P}(|X|f) < \infty$.

(γ) Για $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρα και $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{Q})$,

$$\mathbf{E_Q}(X\,|\,\mathcal{G}) = \frac{\mathbf{E_P}(Xf\,|\,\mathcal{G})}{\mathbf{E_P}(f\,|\,\mathcal{G})}.$$

3

Martingales

3.1 Ορισμός και παραδείγματα

Έστω χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. **Διήθηση** σε αυτό τον χώρο λέμε μια αύξουσα ακολουθία $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ σ-αλγεβρών, η καθεμία από τις οποίες είναι υποσύνολο της $\mathcal{F}$. Δηλαδή, έχουμε $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}$ για κάθε $n \geq 0$. Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\geq 0}$ στον Ω λέγεται **προσαρμοσμένη** στη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ αν για κάθε $n \geq 0$ η X_n είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη.
Συμβαση: Σε αυτό το κεφάλαιο, οι δείκτες των διαφόρων οικογενειών που εμφανίζονται είναι φυσικοί αριθμοί. Έτσι, όταν γράφουμε $n \geq 1, n \geq 0$, εννοούμε $n \in \mathbb{N}^+$ και $n \in \mathbb{N}$ αντίστοιχα.

Ορισμός 3.1. Αν η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X = (X_n)_{n\geq 0}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες

(i) Η $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$,

(ii) $\mathbf{E}\,|X_n| < \infty$ για κάθε $n \geq 0$,

(iii) $\mathbf{E}(X_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n) = X_n$ για κάθε $n \geq 0$,

τότε λέγεται **martingale** ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ και το μέτρο $\mathbf{P}$. Αν αντί της (iii) ισχύει η $\mathbf{E}(X_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n) \geq X_n$, τότε η ακολουθία λέγεται **submartingale**, ενώ αν ισχύει η $\mathbf{E}(X_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n) \leq X_n$, τότε η ακολουθία λέγεται **supermartingale** (ως προς τα $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ και $\mathbf{P}$).

Όταν είναι σαφές ποια είναι τα $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ και $\mathbf{P}$, δεν τα αναφέρουμε όταν χαρακτηρίζουμε μια ακολουθία ως martingale, submartingale, ή supermartingale ως προς αυτά.

Αν η $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι submartingale, τότε η $(-X_n)_{n\geq 0}$ είναι supermartingale. Και η $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale αν και μόνο αν είναι ταυτόχρονα submartingale και supermartingale.

Επίσης, παίρνοντας μέσες τιμές στα μέλη της (iii) έχουμε ότι η ακολουθία $(\mathbf{E}(X_n))_{n\geq 0}$ είναι σταθερή, αύξουσα, ή φθίνουσα όταν αντίστοιχα η X είναι martingale, submartingale, supermartingale.

Φανταζόμαστε έναν παίχτη που συμμετέχει σε ένα παιχνίδι που γίνεται σε βήματα και X_n δηλώνει την περιουσία του μετά το βήμα n. Η $\mathbf{E}(X_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n)$ δίνει την καλύτερη εκτίμηση που έχουμε για την περιουσία του μετά από ένα βήμα με δεδομένη όλη την πληροφορία κατά τον χρόνο n. Επομένως, όταν η X είναι submartingale (supermartingale), το παιχνίδι είναι υπέρ (αντίστοιχα, κατά) του παίχτη, ενώ όταν η X είναι martingale, το παιχνίδι είναι δίκαιο.

Ο απλός τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}$. Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \mathbf{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Θέτουμε

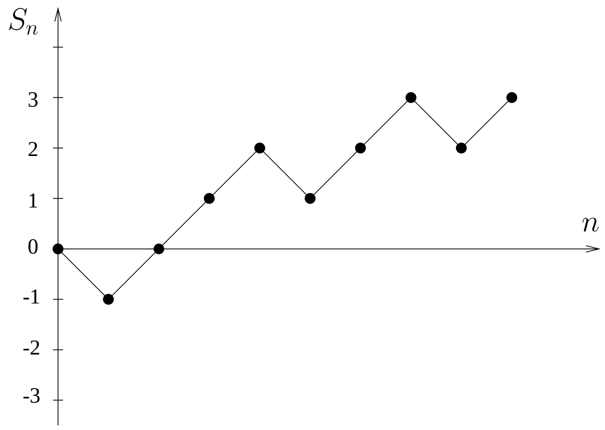
$$\begin{aligned} S_0 &:= 0, \\ S_n &:= X_1 + \cdots + X_n \text{ για κάθε } n \geq 1. \end{aligned}$$

Η ανέλιξη $S = (S_n)_{n\geq 0}$ λέγεται απλός τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}$.

Θα δούμε αμέσως δύο martingales που προκύπτουν από τον απλό τυχαίο περίπατο τα οποία μάλιστα βοηθούν στη μελέτη του. Η διήθηση που θα θεωρούμε είναι η εξής:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &:= \{\emptyset, \Omega\}, \\ \mathcal{F}_n &:= \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) \text{ για } n \geq 1. \end{aligned}$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $M_n := S_n^2 - n$.



Σχήμα 3.1: Το γράφημα μιας πραγματοποίησης των πρώτων 9 βημάτων του απλού τυχαίου περιπάτου στο $\mathbb{Z}$.

Παράδειγμα 3.2. Οι ανελίξεις

(α) $(S_n)_{n\geq 0}$

(β) $(M_n)_{n\geq 0}$

είναι martingales ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

Πράγματι, από τον ορισμό της $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ προκύπτει ότι οι S, M είναι προσαρμοσμένες. Η (ii) του ορισμού του martingale ικανοποιείται αφού $|S_n| \leq n, |M_n| \leq n^2 + n$ στον Ω για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Σχετικά με την ιδιότητα (iii) του ορισμού, για την ανέλιξη του (α) υπολογίζουμε

$$\mathbf{E}(S_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(S_n + X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = S_n + \mathbf{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = S_n + \mathbf{E}(X_{n+1}) = S_n.$$

Στη δεύτερη ισότητα, χρησιμοποιήσαμε τη γραμμικότητα της δεσμευμένης τιμής και το γεγονός ότι η S_n είναι $\mathcal{F}_n$ μετρήσιμη. Στην τρίτη ισότητα, το ότι η X_{n+1} είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_n$ και την Πρόταση 2.7(iii).

Για την ανέλιξη του (β), επειδή $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, έχουμε

$$S_{n+1}^2 - S_n^2 = 2X_{n+1}S_n + X_{n+1}^2 = 2X_{n+1}S_n + 1$$

και άρα $M_{n+1} - M_n = 2X_{n+1}S_n$. Παίρνοντας μέση τιμή ως προς τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_n$ έχουμε

$$\mathbf{E}(M_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) - M_n = \mathbf{E}(2X_{n+1}S_n \,|\, \mathcal{F}_n) = 2S_n \,\mathbf{E}(X_{n+1}) = 0.$$

Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 2.10 και την Πρόταση 2.7(iii).

Ας φανταστούμε έναν παίκτη Α που εμφανίζεται σε ένα καζίνο και παίζει το εξής παιχνίδι. Κάθε χρονική στιγμή 1, 2, 3,... ρίχνεται ένα τίμιο νόμισμα. Άν έρθει «Κεφαλή», ο Α κερδίζει μία μονάδα, ενώ αν έρθει «Γράμματα», ο Α χάνει μία μονάδα. Το συνολικό κέρδος του παίκτη ακριβώς μετά το παιχνίδι n είναι S_n. Η μέση του τιμή διατηρείται σταθερή, ίση με 0, αφού η $(S_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale.

Παράδειγμα 3.3. Έστω $(Z_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{E}\,|Z_1| < \infty$ και $\mathbf{E}(Z_1) = 1$. Θέτουμε $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n := \sigma(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ για κάθε $n \geq 1$, και

$$\begin{aligned} R_0 &:= 1, \\ R_n &:= Z_1 Z_2 \cdots Z_n \text{ για } n \geq 1. \end{aligned}$$

Η $(R_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Πάλι το (i) του ορισμού είναι προφανές. Για το (ii), χρησιμοποιούμε την ανεξαρτησία και υπολογίζουμε

$$\mathbf{E}\,|Z_1 Z_2 \cdots Z_n| = \mathbf{E}\,|Z_1|\,\mathbf{E}\,|Z_2| \cdots \mathbf{E}\,|Z_n| = (\mathbf{E}\,|Z_1|)^n < \infty.$$

Για το (iii), έχουμε

$$\mathbf{E}(R_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(R_n Z_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n) = R_n\,\mathbf{E}(Z_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n) = R_n\,\mathbf{E}(Z_{n+1}) = R_n.$$

Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 2.10.

Παράδειγμα 3.4 (Martingale του Doob)**.** Έστω χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, μια διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ σε αυτόν, και $X \in L^1(\mathbf{P})$. Ορίζουμε

$$X_n := \mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{F}_n)$$

για κάθε $n \geq 0$. Τότε η $X = (X_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Ότι η X είναι προσαρμοσμένη προκύπτει από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής. Έπειτα $\mathbf{E}\,|X_n| = \mathbf{E}(|\,\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{F}_n)|) \leq \mathbf{E}\,|X| < \infty$ από το (ii) της Πρότασης 2.2. Τέλος, για $n \geq 0$,

$$\mathbf{E}(X_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{F}_{n+1})\,|\,\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{F}_n) = X_n.$$

Στη δεύτερη ισότητα, χρησιμοποιήσαμε ότι $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ και την Πρόταση 2.9(ii).

Στο επόμενο παράδειγμα, για την απόδειξη ότι μια ακολουθία είναι martingale θα χρειαστεί να κάνουμε έναν πραγματικό υπολογισμό μιας δεσμευμένης μέσης τιμής (ενώ στα προηγούμενα παραδείγματα πάντα μια απλή ιδιότητα μας γλύτωνε από τον κόπο).

Παράδειγμα 3.5 (Η κάλπη του Polya)**.** Μια κάλπη περιέχει α άσπρες και μ μαύρες μπάλες. Επιλέγουμε στην τύχη μία από τις μπάλες που περιέχει η κάλπη, την επιστρέφουμε στην κάλπη, και προσθέτουμε ακόμα ℓ του ίδιου χρώματος με αυτήν. Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία επ' άπειρον. Έστω A_n και B_n ο αριθμός των άσπρων και μαύρων μπαλών αντίστοιχα μετά τη n-οστή επανάληψη του πειράματος και $X_n := A_n/(A_n + B_n)$ το ποσοστό των άσπρων μπαλών στην κάλπη εκείνη τη στιγμή. Θέτουμε $\mathcal{F}_n := \sigma(\{A_i, B_i : i = 1, 2, \ldots, n\})$.

Ισχυρισμος: Η $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.

Οι ιδιότητες (i), (ii) του ορισμού του martingale ικανοποιούνται. Σχετικά με την (iii), για τον υπολογισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής, θα χρησιμοποιήσουμε το Παράδειγμα 2.5. Η $\mathcal{F}_n$ παράγεται από διαμέριση κάθε μέλος της οποίας είναι της μορφής

$$C(j_1, k_1, j_2, k_2, \ldots, j_n, k_n) := \{A_r = j_r, B_r = k_r \text{ για κάθε } r = 1, 2, \ldots, n\}$$

όπου j_r, k_r θετικοί ακέραιοι. Αυτό συγκεκριμενοποιεί τα αποτελέσματα των n πρώτων πειραμάτων και για να έχει θετική πιθανότητα πρέπει οι j_r, k_r να ικανοποιούν κάποιες προφανείς σχέσεις. Έστω λοιπόν C ένα σύνολο αυτής της μορφής με θετική πιθανότητα, και για ευκολία γράφουμε j, k αντί j_n, k_n. Για $\omega \in C$ υπολογίζουμε

$$\mathbf{E}(X_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n)(\omega) = \frac{\mathbf{E}(X_{n+1}; C)}{\mathbf{P}(C)} \tag{3.1}$$

$$= \frac{j+\ell}{j+k+\ell}\,\frac{\mathbf{P}(\{A_{n+1} = j+\ell\} \cap C)}{\mathbf{P}(C)} + \frac{j}{j+k+\ell}\,\frac{\mathbf{P}(\{A_{n+1} = j\} \cap C)}{\mathbf{P}(C)} \tag{3.2}$$

$$= \frac{j+\ell}{j+k+\ell}\,\mathbf{P}(A_{n+1} = j+\ell\,|\,C) + \frac{j}{j+k+\ell}\,\mathbf{P}(A_{n+1} = j\,|\,C) \tag{3.3}$$

$$= \frac{j+\ell}{j+k+\ell}\,\frac{j}{j+k} + \frac{j}{j+k+\ell}\,\frac{k}{j+k} = \frac{j}{j+k} = X_n, \tag{3.4}$$

και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Δώσαμε μια σχολαστική απόδειξη του ισχυρισμού. Ο τρόπος που την ανακαλύπτουμε, και συνήθως την γράφουμε, είναι ως εξής. Στην $\mathbf{E}(X_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n)$ μας δίνεται όλη η ιστορία της διαδικασίας ως τη n-οστή επανάληψη του πειράματος. Είναι στη διάθεσή μας λοιπόν οι αριθμοί $j := A_n, k := B_n$. Οι ενδεχόμενες τιμές του X_{n+1} είναι $(j+\ell)/(j+k+\ell)$ και $j/(j+k+\ell)$ και, δεδομένου του παρελθόντος, έχουν πιθανότητα $\mathbf{P}(A_{n+1} = j+\ell \,|\, A_n = j, B_n = k), \mathbf{P}(A_{n+1} = j \,|\, A_n = j, B_n = k)$ αντίστοιχα. Εδώ η δεσμευμένη πιθανότητα είναι η συνηθισμένη από τις στοιχειώδεις πιθανότητες. Και έπειτα γράφουμε την τελευταία γραμμή του παραπάνω υπολογισμού.

Ένα εύλογο ερώτημα είναι τι κάνει η X_n καθώς το $n \to \infty$. Συγκλίνει σε κάποιον σταθερό αριθμό; Π.χ. το 1/2, που θα σήμαινε ότι τελικά επέρχεται μια ισορροπία στον αριθμό των μπαλών στην κάλπη. Αυτό που ισχύει είναι ότι η X_n πράγματι συγκλίνει σε έναν αριθμό στο (0, 1), αλλά αυτός είναι τυχαίος. Κάθε πραγματοποίηση της άπειρης διαδικασίας δίνει και διαφορετικό αριθμό. Μπορεί να αποδειχθεί το εξής: Με πιθανότητα 1, η ακολουθία $(X_n)_{n\ge1}$ συγκλίνει σε μια τυχαία μεταβλητή X η οποία έχει κατανομή Βήτα με παραμέτρους $\alpha/\ell, \mu/\ell$. Στην ειδική περίπτωση που $\alpha = \mu = \ell = 1$, η οριακή τυχαία μεταβλητή έχει κατανομή την ομοιόμορφη στο (0, 1). Για λεπτομέρειες δες την Παράγραφο 5.3.2 στο Durrett (2010) .

3.2 Βασικές ιδιότητες

Πρόταση 3.6. *Έστω $X = (X_n)_{n\ge0}$ μια ανέλιξη και $m, n \in \mathbb{N}$ με $n > m$.*

(i) Αν η X είναι supermartingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\ge0}$, τότε

$$\mathbf{E}(X_n \,|\, \mathcal{F}_m) \le X_m.$$

(ii) Αν η X είναι submartingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\ge0}$, τότε

$$\mathbf{E}(X_n \,|\, \mathcal{F}_m) \ge X_m.$$

(iii) Αν η X είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\ge0}$, τότε

$$\mathbf{E}(X_n \,|\, \mathcal{F}_m) = X_m.$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε το (i). Παίρνουμε σταθερό $m \in \mathbb{N}$ και εφαρμόζουμε επαγωγή στο n. Για $n = m+1$ η ζητούμενη ισχύει από τον ορισμό του supermartingale. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $n > m$. Τότε

$$\mathbf{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_m) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) \,|\, \mathcal{F}_m) \le \mathbf{E}(X_n \,|\, \mathcal{F}_m) \le X_m.$$

Η πρώτη ισότητα έπεται από την Πρόταση 2.9, η πρώτη ανισότητα από το ότι η X είναι supermartingale, και η δεύτερη είναι η επαγωγική υπόθεση. ∎

Πρόταση 3.7. *Έστω $(X_n)_{n\ge0}$ martingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\ge0}$ και f κυρτή συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{P}(X_n \in I) = 1$ και $\mathbf{E}|f(X_n)| < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε η $(f(X_n))_{n\ge0}$ είναι submartingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\ge0}$.*

Απόδειξη. Μένει να ελέγξουμε την ιδιότητα (iii) του Ορισμού 3.1 για submartingales.

$$\mathbf{E}(f(X_{n+1}) \,|\, \mathcal{F}_n) \ge f(\mathbf{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n)) = f(X_n)$$

Χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Jensen (Πρόταση 2.13) και στην τελευταία ισότητα ότι η $(X_n)_{n\ge0}$ είναι martingale. ∎

Πρόταση 3.8. *Έστω $(X_n)_{n\ge0}$ submartingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\ge0}$ και f κυρτή και αύξουσα συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{P}(X_n \in I) = 1$ και $\mathbf{E}|f(X_n)| < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε η $(f(X_n))_{n\ge0}$ είναι submartingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\ge0}$.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$\mathbf{E}(f(X_{n+1})\,|\,\mathcal{F}_n) \geq f(\mathbf{E}(X_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n)) \geq f(X_n).$$

Χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Jensen και στην τελευταία ανισότητα το γεγονός ότι η $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι submartingale και η f είναι αύξουσα. ■

Παράδειγμα 3.9. Η προηγούμενη πρόταση συνεπάγεται ότι αν η $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι submartingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ και $\mathbf{E}(X_n^2) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η $(X_n^2)_{n\geq 0}$ είναι submartingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

3.3 Παιχνίδια και το διακριτό στοχαστικό ολοκλήρωμα

Έστω μια διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ και μια προσαρμοσμένη σε αυτήν ανέλιξη $X = (X_n)_{n\geq 0}$.

Σε αυτή την παράγραφο, ερμηνεύουμε την ανέλιξη X ως εξής. Υποθέτουμε ότι ένα παιχνίδι παίζεται σε πολλά στάδια, τις χρονικές στιγμές 1, 2, 3, κ.ο.κ. Αν ποντάρει κανείς μία μονάδα για το στάδιο της χρονικής στιγμής n, τότε το κέρδος του είναι $X_n - X_{n-1}$. Για παράδειγμα, X_n μπορεί να είναι η τιμή μιας μετοχής τη χρονική στιγμή n. Αμέσως μετά τη χρονική στιγμή $n-1$, έχοντας παρατηρήσει ότι η μετοχή έχει τιμή X_{n-1}, αγοράζουμε μία μετοχή. Τη χρονική στιγμή n αυτή η μετοχή έχει αξία X_n. Αν την πουλήσουμε, το κέρδος ή η ζημιά μας είναι $X_n - X_{n-1}$. Θεωρούμε ότι το επιτόκιο της τράπεζας είναι 0%.

Ορισμός 3.10. Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(A_n)_{n\geq 1}$ λέγεται **προβλέψιμη** αν για κάθε $n \geq 1$, η A_n είναι $\mathcal{F}_{n-1}$ μετρήσιμη.

Στα πλαίσια ενός παιχνιδιού, μια τέτοια ακολουθία τη λέμε στρατηγική πονταρίσματος. Συνήθως, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, και $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ για $n \geq 1$. Για το αποτέλεσμα του σταδίου n, ο παίκτης ποντάρει A_n μονάδες. Η προβλεψιμότητα είναι ο μαθηματικός τρόπος να πει κανείς ότι η ποσότητα A_n μπορεί να εξαρτάται μόνο από την πληροφορία που είναι διαθέσιμη *πριν* πραγματοποιηθεί το στάδιο n του παιχνιδιού, δηλαδή την $\mathcal{F}_{n-1}$.

Για δύο ακολουθίες $(X_n)_{n\geq 0}, (A_n)_{n\geq 1}$ όπως πιο πάνω, ορίζουμε την ανέλιξη $A \bullet X$ ως εξής.

$$\begin{aligned}(A \bullet X)_0 &:= 0,\\ (A \bullet X)_n &:= \sum_{k=1}^{n} A_k(X_k - X_{k-1}) \text{ για κάθε } n \geq 1.\end{aligned}$$

Ο αριθμός $(A \bullet X)_n$ είναι το συνολικό κέρδος ενός παίκτη μετά το στάδιο n του παιχνιδιού αν ακολουθεί τη στρατηγική $(A_n)_{n\geq 1}$. Η ανέλιξη $A \bullet X$ είναι το **διακριτό στοχαστικό ολοκλήρωμα**.

Πρόταση 3.11. *Έστω $(A_n)_{n\geq 1}$ προβλέψιμη ακολουθία.*

(i) Αν η $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι (sub)supermartingale και κάθε A_n είναι μη αρνητική φραγμένη τυχαία μεταβλητή, τότε η $A \bullet X$ είναι (sub)supermartingale.

(ii) Αν η $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale και κάθε A_n είναι φραγμένη τυχαία μεταβλητή, τότε η $A \bullet X$ είναι martingale.

Απόδειξη. Η (i) του Ορισμού (3.1) προκύπτει από τις υποθέσεις για τις $(X_n)_{n\geq 1}, (A_n)_{n\geq 1}$, ενώ η (ii) προκύπτει από το ότι, για κάθε $n \geq 1$, η A_n είναι φραγμένη τυχαία μεταβλητή. Έπειτα, για κάθε $n \geq 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{(A \bullet X)_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n\} - (A \bullet X)_n &= \mathbf{E}\{(A \bullet X)_{n+1} - (A \bullet X)_n\,|\,\mathcal{F}_n\} = \mathbf{E}\{A_n(X_{n+1} - X_n)\,|\,\mathcal{F}_n\}\\ &= A_n\,\{\mathbf{E}(X_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n) - X_n\}\end{aligned}$$

Με τις υποθέσεις του (i), επειδή $A_n \geq 0$, η τελευταία ποσότητα είναι μη θετική αν η $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι supermartingale και μη αρνητική αν η $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι submartingale. Με τις υποθέσεις του (ii), η τελευταία ποσότητα ισούται με 0. ■

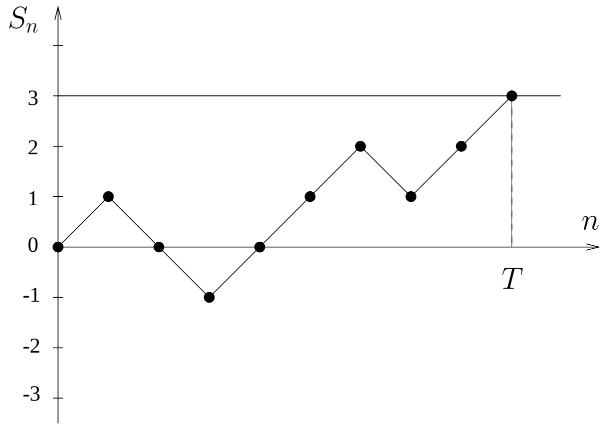
Η διαισθητική ερμηνεία του μέρους (ii) της προηγούμενης πρότασης είναι ότι σε ένα δίκαιο παιχνίδι (το martingale X) δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε πλεονέκτημα (να κερδίσουμε κατά μέσο όρο) αν η στρατηγική πονταρίσματος που χρησιμοποιούμε είναι προβλέψιμη.

3.4 Χρόνοι διακοπής

Ορισμός 3.12. Μια συνάρτηση $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ λέγεται **χρόνος διακοπής** ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Δηλαδή το αν ισχύει $T \leq n$ μπορεί να καθοριστεί με βάση τις πληροφορίες που έχουμε ως το χρόνο n. Τα επόμενα παραδείγματα το κάνουν αυτό πιο κατανοητό.



Σχήμα 3.2: Ο χρόνος διακοπής T του Παραδείγματος 3.13. Στη συγκεκριμένη πραγματοποίηση έχουμε $T = 9$.

Παράδειγμα 3.13 (Χρόνος διακοπής)**.** Έστω $(S_n)_{n\geq 0}$ ο απλός τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}$ και $(\mathcal{F}_N)_{n\geq 0}$ η διήθηση όπως πριν το Παράδειγμα 3.2. Η τυχαία μεταβλητή

$$T := \inf\{k \geq 0 : S_k = 3\}$$

παίρνει τιμές στο $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ($\inf \emptyset = \infty$). Είναι ο πρώτος χρόνος που ο απλός τυχαίος περίπατος χτυπάει το 3. Για $n \in \mathbb{N}$, $\{T \leq n\} = \cup_{j=0}^{n} \{S_j = 3\}$ και $\{S_j = 3\} \in \mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_n$ για κάθε $j \leq n$ αφού η S_j είναι $\mathcal{F}_j$ μετρήσιμη. Άρα ο T είναι πράγματι χρόνος διακοπής.

Πρακτικά, αν μας δώσει κάποιος την πληροφορία του $\mathcal{F}_n$, δηλαδή τι τιμές πήρανε οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$, μπορούμε να αποφανθούμε αν ισχύει $T \leq n$.

Γενικά οι χρόνοι πρώτης εισόδου σε ένα σύνολο για την $(S_n)_{n\geq 0}$ είναι χρόνοι διακοπής ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ του Παραδείγματος 3.2. Τώρα θα δούμε ένα παράδειγμα χρόνου που δεν είναι χρόνος διακοπής.

Παράδειγμα 3.14 (Χρόνος που δεν είναι χρόνος διακοπής)**.** Δουλεύουμε πάλι με τον απλό τυχαίο περίπατο. Έστω

$$\hat{T} := \sup\{k \leq 7 : S_k = 0\}.$$

Αυτό είναι το τελευταίο μηδενικό της S πριν το χρόνο 7. Το σύνολο του οποίου το sup είναι το $\hat{T}$ είναι μη κενό αφού περιέχει το 0. Θα χρησιμοποιήσουμε για το χρόνο διακοπής τον ισοδύναμο χαρακτηρισμό από την Άσκηση 3.6.

Για $n \geq 0$ αναρωτιόμαστε αν $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$. Το ερώτημα έχει ενδιαφέρον μόνο για $n \leq 7$, αλλιώς το σύνολο $\{T = n\}$ είναι το κενό. Ας πάρουμε λοιπόν $n = 2$. Έχοντας την πληροφορία για το τι συνέβη ως τον χρόνο 2, μπορούμε να πούμε αν συνέβη το γεγονός $T = 2$; Όχι, γιατί ακόμα και να ισχύει $S_2 = 0$, δεν ξέρουμε αν αργότερα η S ξαναχτυπήσει το 0. Είναι δυνατόν, για παράδειγμα, να ισχύει $S_6 = 0$, οπότε $T = 6$ (η $S_7 = 0$ δεν ειναι δυνατόν να συμβεί ποτέ), ή να ισχύει $S_6 \neq 0$, οπότε $T = 2$ ή $T = 4$.

Πάμε τώρα να το δούμε και τυπικά. Αν $\{T = 2\} \in \mathcal{F}_2$, τότε επειδή και το σύνολο $A := \{X_1 = 1, X_2 = -1\} \in \mathcal{F}_2$, θα ισχύει $B := \{T = 2\} \cap A \in \mathcal{F}_2$. Τότε $\emptyset \neq B \subsetneq A$ γιατί

$$\{X_1 = 1, X_2 = -1, X_3 = 1, X_4 = -1\} \subset A \setminus B$$

και

$$\{X_1 = 1, X_2 = -1, X_3 = 1, X_4 = 1, X_5 = 1\} \subset B.$$

Όμως από την περιγραφή της σ-άλγεβρας $\mathcal{F}_2$ (Παράδειγμα 1.8) προκύπτει ότι το μόνο στοιχείο της που είναι γνήσιο υποσύνολο του A είναι το $\emptyset$.

3.5 Το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής

Για χρόνο διακοπής T και μια προσαρμοσμένη στοχαστική ανέλιξη $X = (X_n)_{n\geq 0}$, ορίζουμε τη σταματημένη ανέλιξη X^T ως $X_n^T = X_{n\wedge T}$. Δηλαδή για $n \in \mathbb{N}$ η $X_n^T : \Omega \to [-\infty, \infty]$ έχει τιμές

$$X_n^T(\omega) = X_{n\wedge T(\omega)}(\omega) = \begin{cases} X_i(\omega) & \text{αν } T(\omega) = i < n, \\ X_n(\omega) & \text{αν } T(\omega) \geq n. \end{cases}$$

Για κάθε $\omega \in \Omega$, θέτοντας $r := T(\omega)$, η X^T ακολουθεί τη X στις τιμές $X_0, X_1, \ldots, X_r$ και έπειτα σταθεροποιείται στην τιμή X_r. Αν $T(\omega) = \infty$, τότε για αυτή την τιμή του ω η X^T έχει το ίδιο μονοπάτι με τη X. Το ότι η X^T είναι επίσης προσαρμοσμένη προκύπτει από την απόδειξη της παρακάτω πρότασης, αλλά μπορεί να το δει κανείς και πιο απλά (Άσκηση 3.9).

Πρόταση 3.15. *Έστω T χρόνος διακοπής.*

(i) Αν η $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι (sub)supermartingale, τότε η X^T ειναι (sub)supermartingale.

(ii) Αν η $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale, τότε η X^T ειναι martingale.

Απόδειξη. Θεωρούμε την ανέλιξη $(A_n)_{n\geq 1}$ που ορίζεται ως $A_n := \mathbf{1}_{n\leq T}$ για κάθε $n \geq 1$. Δηλαδή

$$A_n(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ αν } n \leq T(\omega), \\ 0 \text{ αν } n > T(\omega). \end{cases}$$

Με την ερμηνεία της στρατηγικής που δώσαμε στην A, η συγκεκριμένη επιλογή σημαίνει ότι σε κάθε στάδιο του παιχνιδιού μέχρι και το στάδιο T ποντάρουμε μία μονάδα. Έπειτα σταματάμε. Η A είναι προβλέψιμη γιατί, για κάθε $n \geq 1$, η A_n είναι η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου

$$\{T \geq n\} = \Omega \setminus \{T \leq n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1}.$$

Έπειτα

$$(A \bullet X)_n = X_{n\wedge T} - X_0,$$

και το συμπέρασμα έπεται από την Πρόταση 3.11 και το ότι η X_0 είναι $\mathcal{F}_0$ μετρήσιμη. ■

Έπεται λοιπόν ότι για χρόνο διακοπής T, supermartingale X, και $n \geq 1$, ισχύει

$$\mathbf{E}(X_{n\wedge T}) \leq \mathbf{E}(X_0), \tag{3.5}$$

ενώ για X martingale ισχύει

$$\mathbf{E}(X_{n\wedge T}) = \mathbf{E}(X_0). \tag{3.6}$$

Σε πολλές περιπτώσεις ισχύει $P(T < \infty) = 1$ και τότε $\lim_{n\to\infty} X_{n\wedge T} = X_T$ με πιθανότητα 1. Για X martingale, θα θέλαμε να ισχυριστούμε ότι $\mathbf{E}(X_T) = \mathbf{E}(X_0)$ και θα το πετυχαίναμε αν μπορούσαμε στην εκφραση $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_{n\wedge T}) = \mathbf{E}(X_0)$ να βάζαμε το όριο μέσα στη μέση τιμή.

Ας δούμε ένα παράδειγμα που αυτό δεν μπορεί να γίνει. Θεωρούμε $(S_n)_{n\ge 0}$ τον απλό τυχαίο περίπατο στο $\mathbb{Z}$ και $T := \inf\{k \ge 1 : S_k = 1\}$. Ο T είναι χρόνος διακοπής και θα δείξουμε στο Παράδειγμα 3.18 πιο κάτω ότι $P(T < \infty) = 1$. Άρα $S_T = 1$ και επομένως $\mathbf{E}(S_T) = 1 \ne 0 = \mathbf{E}(S_0)$.

Για να περάσουμε το όριο μέσα στη μέση τιμή επικαλούμαστε τα γνωστά θεωρήματα από τη θεωρία ολοκλήρωσης. Δηλαδή το θεώρημα μονότονης σύγκλισης και το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. Το επόμενο θεώρημα απομονώνει κάποιες καταστάσεις που εμφανίζονται συχνά και στις οποίες το θεώρημα κυριαρχημένης σύγλισης μπορεί να εφαρμοστεί.

Θεώρημα 3.16 (Θεώρημα επιλεκτικής διακοπής). *Έστω $(X_n)_{n\ge 0}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών στοιχείων του $L^1(\mathbf{P})$ και T τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ισχύει ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_{n\wedge T}) = \mathbf{E}(X_T) \tag{3.7}$$

αν μία από τις παρακάτω προϋποθέσεις ικανοποιείται:

(i) Η T είναι φραγμένη τυχαία μεταβλητή.

(ii) $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$ και υπάρχει $M < \infty$ ώστε $|X_n(\omega)| \le M$ για κάθε $n \ge 0$ και $\omega \in \Omega$.

(iii) $\mathbf{E}(T), \mathbf{E}\,|X_0| < \infty$ και υπάρχει $M < \infty$ ώστε $|X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega)| \le M$ για κάθε $n \ge 1$ και $\omega \in \Omega$.

Αν επιπλέον ο T είναι χρόνος διακοπής, τότε ισχύει

$$\mathbf{E}(X_T) \le \mathbf{E}(X_0) \tag{3.8}$$

για X supermartingale,

$$\mathbf{E}(X_T) \ge \mathbf{E}(X_0) \tag{3.9}$$

για X submartingale, και

$$\mathbf{E}(X_T) = \mathbf{E}(X_0) \tag{3.10}$$

για X martingale.

Απόδειξη. (i) Από την υπόθεση, υπάρχει φυσικός αριθμός N ώστε $T(\omega) \le N$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Άρα $\mathbf{E}(X_{n\wedge T}) = \mathbf{E}(X_T)$ για κάθε $n \ge N$, και η (3.7) έπεται.

(ii) Τώρα η (3.7) έπεται από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης. Γιατί η ακολουθία $(X_{n\wedge T})_{n\ge 0}$ είναι φραγμένη από το M και, με πιθανότητα 1, το όριό της ισούται με X_T αφού $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$.

(iii) Η ισότητα $X_{n\wedge T} = X_0 + \sum_{k=1}^{n\wedge T}(X_k - X_{k-1})$ δίνει

$$|X_{n\wedge T}| \le |X_0| + MT$$

για κάθε $n \ge 0$ και $\omega \in \Omega$. Η $\mathbf{E}(T) < \infty$ δίνει $P(T < \infty) = 1$, οπότε $\lim_{n\to\infty} X_{n\wedge T} = X_T$ με πιθανότητα 1. Επειδή $\mathbf{E}(|X_0| + MT) < \infty$, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται το συμπέρασμα.

Τώρα, συνδυάζοντας τις (3.5), (3.6) με την (3.7), παίρνουμε τις (3.8), (3.9), (3.10). ■

3.6 Εφαρμογές στον απλό τυχαίο περίπατο

Σε αυτή την παράγραφο δουλεύουμε στο πλαίσιο του Παραδείγματος 3.2. Η τιμή S_n είναι το συνολικό κέρδος του παίχτη Α ακριβώς μετά το παιχνίδι n (δες ακριβώς μετά το Παράδειγμα 3.2). Για κάθε ακέραιο r, θέτουμε

$$T_r := \inf\{k \ge 0 : S_k = r\},$$

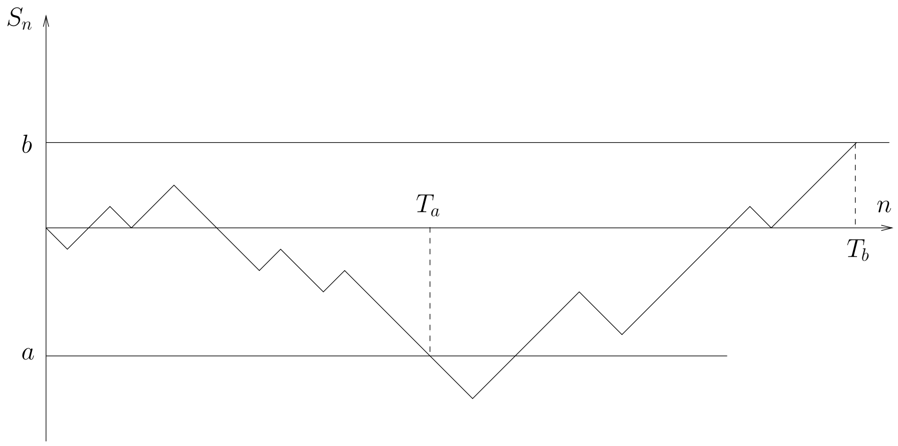
που είναι η στιγμή κατά την οποία το κέρδος του παίχτη γίνεται r για πρώτη φορά.

Έστω ότι ο παίχτης έχει συνολικό κεφάλαιο $-a$ ($a < 0$) ενώ το καζίνο b, με $a, b \in \mathbb{Z}$. Αν $T_b < T_a$, τότε ο παίχτης καταφέρνει να οδηγήσει το καζίνο σε χρεωκοπία, ενώ αν $T_a < T_b$, τότε χρεωκοπεί ο παίχτης. Το παιχνίδι τελειώνει τη χρονική στιγμή $T_b \wedge T_a$, όταν κάποιος από τους δύο χρεωκοπεί. Το επόμενο παράδειγμα δίνει τη μέση διάρκεια του παιχνιδιού και την πιθανότητα να κερδίσει ο παίχτης Α.

Παράδειγμα 3.17 (Έξοδος από διάστημα)**.** Θεωρούμε ακεραίους a, b με $a < 0 < b$ και θέτουμε $T = T_a \wedge T_b$. Θα δείξουμε ότι

$$\text{(i) } \mathbf{E}(T) < \infty,$$
$$\text{(ii) } \mathbf{P}(T_b < T_a) = \frac{|a|}{b + |a|},$$
$$\text{(iii) } \mathbf{E}(T) = |a|b.$$

Η πρώτη είναι η πιθανότητα ο απλός τυχαίος περίπατος να βγεί από το διάστημα (a, b) στο σημείο b και $T := T_a \wedge T_b$ είναι ο χρόνος εξόδου.



Σχήμα 3.3: Χρόνος ως την πρώτη έξοδο από το διάστημα (a, b). Στη συγκεκριμένη πραγματοποίηση, $T = T_a$ αφού $T_a < T_b$.

(i) Χρησιμοποιώντας το Παράδειγμα 3.2 και την Πρόταση 3.15, έχουμε ότι η $(Z_n)_{n\geq 0}$ με $Z_n := S^2_{n\wedge T} - (n \wedge T)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι martingale. Η $\mathbf{E}(Z_n) = \mathbf{E}(Z_0) = 0$ δίνει

$$\mathbf{E}(S^2_{n\wedge T}) = \mathbf{E}(n \wedge T) \tag{3.11}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Το δεξί μέλος της τελευταίας ισότητας, για $n \to \infty$, συγκλίνει στο $\mathbf{E}(T)$ (θεώρημα μονότονης σύγκλισης). Το αριστερό μέλος είναι φραγμένο από το $\max\{a^2, b^2\}$ λόγω του ορισμού του T. Έπεται ότι $\mathbf{E}(T) < \infty$ και άρα $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$.

(ii) Η $(W_n)_{n\geq 0}$ με $W_n := S_{n\wedge T}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι ένα φραγμένο martingale. Έτσι η $\mathbf{E}(W_n) = \mathbf{E}(W_0) = 0$ δίνει $\mathbf{E}(S_{n\wedge T}) = 0$, και το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης δίνει $E(S_T) = 0$ (αφού $T < \infty$ με πιθανότητα 1). Προφανώς $\{T < \infty\} = \{T_a < T_b\} \cup \{T_b < T_a\}$, και $S_T = a$ στο $\{T_a < T_b\}$, ενώ $S_T = b$ στο $\{T_b < T_a\}$. Άρα

$$\begin{aligned} 0 = \mathbf{E}(S_T) &= \mathbf{E}(S_T \mathbf{1}_{T_a<T_b}) + \mathbf{E}(S_T \mathbf{1}_{T_a>T_b}) = a\,\mathbf{P}(T_a < T_b) + b\,\mathbf{P}(T_a > T_b) \\ &= a\{1 - \mathbf{P}(T_b < T_a)\} + b\,\mathbf{P}(T_b < T_a) = a + (b - a)\,\mathbf{P}(T_b < T_a), \end{aligned}$$

και έτσι προκύπτει ο ισχυρισμός (i).

(iii) Συνεχίζουμε από την (3.11). Επειδή έχουμε $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$, εφαρμόζοντας το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης στο αριστερό μέλος της (3.11) και το θεώρημα μονότονης σύγκλισης στο δεξί, παίρνουμε

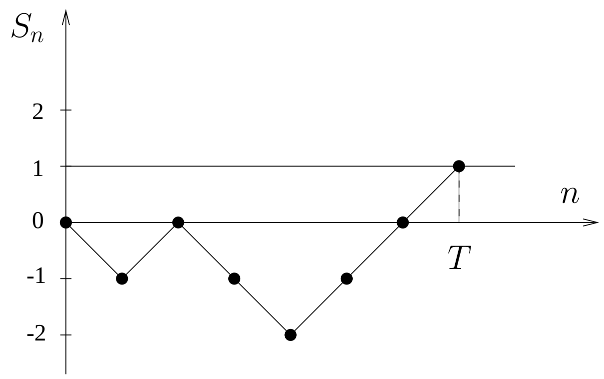
$$\mathbf{E}(T) = \mathbf{E}(S_T^2) = a^2\,\mathbf{P}(T_a < T_b) + b^2\,\mathbf{P}(T_a < T_b) = a^2\frac{b}{b+|a|} + b^2\frac{|a|}{b+|a|} = |a|b.$$

Χρησιμοποιήσαμε το (ii) στη δεύτερη ισότητα.

Παράδειγμα 3.18 (Χρόνος μέχρι κέρδος 1)**.** Υπενθυμίζουμε ότι έχουμε ορίσει

$$T_1 := \inf\{n \geq 0 : S_n = 1\}.$$

Θα δείξουμε ότι:



(i) $\mathbf{E}(T_1) = \infty$.

(ii) $\mathbf{P}(T_1 < \infty) = 1$.

(iii) Για κάθε $k \geq 1$ ακέραιο ισχύει

$$\mathbf{P}(T_1 = 2k-1) = (-1)^{k+1}\binom{1/2}{k} = \frac{1}{(2k-1)2^{2k}}\binom{2k}{k},$$
$$\mathbf{P}(T_1 = 2k) = 0.$$

Η (iii) καθορίζει πλήρως την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής T_1.

(i) Αν υποθέσουμε ότι $\mathbf{E}(T_1) < \infty$, τότε $\mathbf{P}(T_1 < \infty) = 1$ και άρα $\mathbf{P}(S_{T_1} = 1) = 1$. Επίσης, η συνθήκη (iii) του θεωρήματος επιλεκτικής διακοπής θα ικανοποιούνταν και θα παίρναμε $1 = \mathbf{E}(S_{T_1}) = \mathbf{E}(S_0) = 0$. Άτοπο.

(ii), (iii) Έστω $a > 0$ σταθερό. Για $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$Z_n := \frac{e^{aX_n}}{\cosh a}.$$

Επειδή οι $(Z_n)_{n\geq 0}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με $Z_1 > 0$ και $E(Z_1) = 1$, έπεται ότι η $(R_n)_{n\geq 0}$ που ορίζεται όπως στο Παράδειγμα 3.3 είναι martingale. Ισχύει βέβαια $R_n = e^{aS_n}/(\cosh a)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για $n \in \mathbb{N}$ δεδομένο, εφαρμόζουμε το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής για τον φραγμένο χρόνο διακοπής $n \wedge T_1$. Παίρνουμε

$$\mathbf{E}\left(\frac{e^{aS_{n\wedge T_1}}}{(\cosh a)^{n\wedge T_1}}\right) = \mathbf{E}(e^{aS_0}) = 1.$$

Η συνάρτηση στη μέση τιμή είναι φραγμένη από το e^a γιατί $a > 0$, $S_{n\wedge T_1} \le 1$, από τον ορισμό του T_1, και $\cosh a > 1$. Στο $\{T_1 < \infty\}$ έχουμε $S_{T_1} = 1$ και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{aS_{n\wedge T_1}}}{(\cosh a)^{n\wedge T_1}} = \frac{e^a}{(\cosh a)^{T_1}},$$

ενώ στο $\{T_1 = \infty\}$ το όριο ισούται με 0 αφού $(\cosh a)^{n\wedge T_1} = (\cosh a)^n$, $\cosh a > 1$ και $S_{n\wedge T_1} \le 1$. Άρα το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης δίνει $\mathbf{E}\left(e^a(\cosh a)^{-T_1}\mathbf{1}_{T_1<\infty}\right) = 1$ και άρα

$$\mathbf{E}\left((\cosh a)^{-T_1}\mathbf{1}_{T_1<\infty}\right) = e^{-a}.$$

Τώρα εφαρμόζουμε στην τελευταία σχέση το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης για $a \to 0^+$. Παίρνουμε έτσι $\mathbf{P}(T_1 < \infty) = 1$. Και χρησιμοποιώντας αυτή την πληροφορία η ίδια σχέση δίνει

$$\mathbf{E}\left((\cosh a)^{-T_1}\right) = e^{-a}$$

για κάθε $a > 0$. Αυτή η ισότητα δίνει ουσιαστικά την πιθανογεννήτρια της T_1 και άρα πλήρη περιγραφή της κατανομής της T_1. Συγκεκριμένα, θέτοντας $t = 1/\cosh a = 2/(e^a + e^{-a}) \in (0, 1)$, παίρνουμε $e^a = (1 + \sqrt{1-t^2})/t$ και

$$\mathbf{E}(t^{T_1}) = \frac{t}{1+\sqrt{1-t^2}} = \frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t} = \sum_{k=1}^{\infty}\binom{1/2}{k}(-1)^{k+1}t^{2k-1}$$

με χρήση του διωνυμικού αναπτύγματος. Καθώς το a διατρέχει το $(0, \infty)$, το t διατρέχει το $(0, 1)$. Άρα η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $t \in (0, 1)$. Όμως η T_1 είναι τυχαία μεταβλητή με τιμές ακέραιες θετικές, οπότε $\mathbf{E}(t^{T_1}) = \sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{P}(T_1 = j)t^j$. Έπεται ότι

$$\mathbf{P}(T_1 = 2k-1) = (-1)^{k+1}\binom{1/2}{k} = \frac{1}{(2k-1)2^{2k}}\binom{2k}{k}$$

και $\mathbf{P}(T_1 = 2k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^+$.

Παρατήρηση 3.19 (Ασυμμετρικός τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}$)**.** Έστω $(X_i)_{i\ge1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με

$$\mathbf{P}(X_1 = 1) = p,\ \mathbf{P}(X_1 = -1) = 1 - p =: q,$$

όπου $p \in (0, 1)$. Ως συνήθως, θεωρούμε την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(S_n)_{n\ge0}$, με $S_0 := 0, S_n := X_1 + \cdots + X_n$ για $n \in \mathbb{N}^+$. Ορίζουμε για $r \in \mathbb{Z}$ την τυχαία μεταβλητή $T_r := \inf\{k \ge 0 : S_k = r\}$. Θα δείξουμε ότι για $a < 0 < b$ ακεραίους ισχύει $\mathbf{P}(T_a \wedge T_b < \infty) = 1$. Δηλαδή, ο ασυμμετρικός τυχαίος περίπατος βγαίνει με πιθανότητα 1 από το διάστημα (a, b). Έστω $\ell := |a|+b$ το μήκος του διαστήματος. Για $n \in \mathbb{N}^+$ θέτουμε

$$A_n := \{X_k = 1 \text{ για } k = n\ell + 1, n\ell + 2, \ldots, n\ell + \ell\}.$$

Τι συμβαίνει κατά τους χρόνους k τους οποίους περιορίζει το A_n; Ο τυχαίος περίπατος ξεκινάει από μια τιμή (τη $S_{n\ell}$) και αυξάνει για ℓ διαδοχικά βήματα. Αν συμβεί ένα από τα A_n, τότε σίγουρα ο περίπατος βγαίνει από το διάστημα (a, b).

Τα $\{A_n : n \ge 1\}$ είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και το καθένα έχει πιθανότητα $s := p^\ell > 0$. Ισχυριζόμαστε ότι η ένωσή τους έχει πιθανότητα 1, δηλαδή με πιθανότητα 1 κάποιο από τα A_n συμβαίνει [Το δεύτερο λήμμα Borel-Cantelli δίνει ότι, με πιθανότητα 1, άπειρα από τα A_n συμβαίνουν, αλλά θέλουμε να το κάνουμε εντελώς στοιχειωδώς]. Εξετάζουμε την πιθανότητα του συμπληρώματος της ένωσης. Δηλαδή υπολογίζουμε

$$\mathbf{P}(\cap_{n=1}^{\infty}A_n^c) \le \mathbf{P}(\cap_{n=1}^{N}A_n^c) = (1-s)^N \to 0$$

για $N \to \infty$. Η ισότητα είναι συνέπεια της ανεξαρτησίας. Άρα $\mathbf{P}(\cup_{n=1}^{\infty}A_n) = 1$. Επειδή, όπως σχολιάσαμε πιο πάνω, $\{T_a \wedge T_b = \infty\} \cap (\cup_{n=1}^{\infty}A_n) = \emptyset$, έπεται ότι $\mathbf{P}(T_a \wedge T_b = \infty) = 0$.

Περισσότερα για τον ασυμμετρικό τυχαίο περίπατο θα δούμε στις ασκήσεις.

3.7 Ανισότητα Doob

Θα χρειαστούμε αργότερα την εξής ισχυροποίηση της ανισότητας Markov.

Θεώρημα 3.20 (Ανισότητα Doob)**.** *Έστω $X = (X_n)_{n\geq 0}$ submartingale και $n \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε*

$$\mathbf{P}(\sup_{0\leq k\leq n} X_k \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\,\mathbf{E}(X_n^+).$$

Απόδειξη. Για $k \in \mathbb{N}$ με $0 \leq k \leq n$, έστω $A_k := \{X_k \geq \lambda > X_i \text{ για κάθε } i < k\} \in \mathcal{F}_k$. Θέτουμε $M := \sup_{0\leq k\leq n} X_k$. Τότε $\{M \geq \lambda\} = \cup_{k=0}^n A_k$ και τα σύνολα της ένωσης είναι ξένα ανά δύο. Έπειτα, από την Πρόταση 3.8 έχουμε ότι η $(X_n^+)_{n\geq 0}$ είναι submartingale (η $f(x) = x^+$ είναι αύξουσα και κυρτή), άρα

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_n^+) &\geq \sum_{k=0}^n \mathbf{E}(X_n^+ \mathbf{1}_{A_k}) = \sum_{k=0}^n \mathbf{E}(\mathbf{E}(X_n^+ \mathbf{1}_{A_k} \,|\, \mathcal{F}_k)) = \sum_{k=0}^n \mathbf{E}(\mathbf{E}(X_n^+ \,|\, \mathcal{F}_k)\mathbf{1}_{A_k}) \\ &\geq \sum_{k=0}^n \mathbf{E}(X_k^+ \mathbf{1}_{A_k}) \geq \sum_{k=0}^n \lambda\,\mathbf{P}(A_k) = \lambda\,\mathbf{P}(M \geq \lambda).\end{aligned}$$

Στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι η $X_n^+ \geq 0$ και το ότι τα $\{A_k : 0 \leq k \leq n\}$ είναι ξένα ανά δύο. Στη δεύτερη ισότητα, το ότι $A_k \in \mathcal{F}_k$. Τέλος, στη δεύτερη ανισότητα, το ότι η $(X_n^+)_{n\geq 0}$ είναι submartingale. ■

Ασκήσεις

3.1 Έστω ότι η $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 0}$. Ορίζουμε $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, \dots, X_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{G}_n$, και η $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

3.2 Έστω $(X_n)_{n\geq 0}$ supermartingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

(α) Να δειχθεί ότι για $A \in \mathcal{F}_m$ και $n > m$ ισχύει

$$\int_A X_n \, d\mathbf{P} \leq \int_A X_m \, d\mathbf{P}.$$

(β) Υποθέτοντας ότι $X_n \geq 0$ για όλα τα n, να δειχθεί ότι για σταθερά $m \geq 0$, $i \geq 1$ έχουμε ότι

$$\text{σχεδόν παντού στο } \{X_m = 0\} \text{ ισχύει } X_{m+i} = 0,$$

δηλαδή $\mathbf{P}(\{X_m = 0\} \setminus \{X_{m+i} = 0\}) = 0$.

(γ) Με την υπόθεση του (β), να δειχθεί ότι για σταθερό $m \geq 0$ έχουμε ότι

$$\text{σχεδόν παντού στο } \{X_m = 0\} \text{ ισχύει } X_{m+i} = 0 \text{ για κάθε } i \geq 1.$$

3.3 Με $(S_n)_{n\geq 0}$ και $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ όπως στο Παράδειγμα 3.2, να δειχθεί ότι η $(Z_n)_{n\geq 0}$ με $Z_n := S_n^3 - 3nS_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

3.4 Έστω $(S_n)_{n\geq 0}$ ο ασυμμετρικός τυχαίος περίπατος όπως ορίστηκε στην Παρατήρηση 3.19 και ορίζουμε τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ ως $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ για $n \geq 1$. Να δειχθεί ότι οι ακολουθίες $(W_n)_{n\geq 0}, (M_n)_{n\geq 0}$ με

$$W_n := S_n - (p-q)n, M_n := (q/p)^{S_n}$$

είναι martingales ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

3.5 Έστω $(S_n)_{n\geq 0}$ ο απλός τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}$.

(α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $\mathbf{P}(S_n = k)$ για τις διάφορες τιμές των $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$.

(β) Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

καθώς $n \to \infty$.

(γ) Έστω $N = |\{n \geq 1 : S_{2n} = 0\}|$. Να δειχθεί ότι $\mathbf{E}(N) = \infty$.

3.6 Να δειχθεί ότι η συνθήκη του Ορισμού 3.12 είναι ισοδύναμη με την

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

3.7 Αν $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, να δειχθεί ότι η σταθερή τυχαία μεταβλητή $T = k$ είναι χρόνος διακοπής.

3.8 Αν οι τυχαίες μεταβλητές S, T είναι χρόνοι διακοπής ως προς μια διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$, να δειχθεί ότι χρόνοι διακοπής ως προς την ίδια διήθηση είναι επίσης και οι τυχαίοι χρόνοι

$$S \wedge T, S \vee T, S + T.$$

3.9 Αν η ανέλιξη $X = (X_n)_{n\geq 0}$ είναι προσαρμοσμένη στη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, και T είναι χρόνος διακοπής ως προς την ίδια διήθηση, να δειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η συνάρτηση X_n^T είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη. Ιδιαιτέρως, η X_n^T είναι τυχαία μεταβλητή.

3.10 (Το πρόβλημα εξόδου για τον ασυμμετρικό τυχαίο περίπατο) Συνεχίζουμε στο πλαίσιο της Άσκησης 3.4. Υποθέτουμε ότι $p > q$ (και άρα $p > 1/2$). Για κάθε ακέραιο r, θέτουμε $T_r := \inf\{k \geq 0 : S_k = r\}$. Και έστω $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με $\phi(x) = (q/p)^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α) Για ακεραίους a, b με $a < 0 < b$, να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}(T_a < T_b) = \frac{\phi(b) - \phi(0)}{\phi(b) - \phi(a)}.$$

[Σημείωση: Ξέρουμε ήδη από την Παρατήρηση 3.19 ότι $\mathbf{P}(T_a \wedge T_b < \infty) = 1$.]

(β) Για $a < 0$ ακέραιο, να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(T_a < \infty) = 1/\phi(a) < 1$.

(γ) Για $b > 0$ ακέραιο, να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(T_b < \infty) = 1$.

(δ) Για $b > 0$ ακέραιο, να δειχθεί ότι $\mathbf{E}(T_b) = b/(p - q)$.

3.11 Θεωρούμε την ειδική περίπτωση του Παραδείγματος 3.3, κατά την οποία η Z_1 παίρνει τις τιμές 0 και 2 με πιθανότητα 1/2 την καθεμία. Θεωρούμε τις $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, (R_n)_{n\geq 0}$ όπως εκεί και τον χρόνο διακοπής $N := \min\{n \geq 1 : R_n = 0\}$. Τι κατανομή έχει ο N; Μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής για το martingale R και τον χρόνο N;

3.12 Έστω $(S_n)_{n\geq 0}$ ο απλός τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}$ και $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ η διήθηση όπως πριν το Παράδειγμα 3.2. Θέτουμε $J_0 = 0$ και

$$J_n := \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{S_k = 0} \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

Δηλαδή η J_n μετράει τον αριθμό των επισκέψεων του περιπάτου στο 0 ως τον χρόνο $n - 1$ (ξεκινώντας από τον χρονο 0). Θέτουμε επίσης $M_n = |S_n| - J_n$ για κάθε $n \geq 0$.

(α) Να δειχθεί ότι η $(M_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

(β) Έστω a θετικός ακέραιος και $T_a := \min\{k \geq 0 : |S_k| = a\}$. Να δειχθεί ότι $\mathbf{E}(J_{T_a}) = a$.

3.13 Οι καλεσμένοι σε ένα πάρτυ έχουν πλήθος K και έχουν αφήσει στην είσοδο το σακάκι τους. Κάποια στιγμή αποφασίζουν όλοι να φύγουν και ο οικοδεσπότης τούς μοιράζει τυχαία τα σακάκια. Όσοι πάρουν το δικό τους αποχωρούν, ενώ για τους υπόλοιπους, ο οικοδεσπότης επαναλαμβάνει τη διαδικασία όσες φορές χρειαστεί ώσπου να βρει ο καθένας το σακάκι του. Έστω A_n το πλήθος των καλεσμένων που δεν έχουν βρει το σακάκι τους μετά τη n μοιρασιά του οικοδεσπότη ($A_0 = K$).

(α) Να δειχθεί ότι η $(A_n + n)_{n\geq 0}$ είναι martingale.

(β) Έστω T ο αριθμός των φορών που ο οικοδεσπότης κάνει τυχαία μοιρασιά ώσπου όλοι να έχουν βρει το σακάκι τους. Να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(T > n) \leq a^n$ για κάθε $n \geq 1$ όπου $a = 1 - (K!)^{-1} \in (0, 1)$.

(γ) Να δειχθεί ότι $\mathbf{E}(T) = K$.

3.14 (Αλλαγή μέτρου και martingales) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ διήθηση σε αυτόν, $f, \mathbf{Q}$ όπως στην Άσκηση 2.14, και $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβητών με τιμές στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $f_n := \mathbf{E}(f \,|\, \mathcal{F}_n)$ για κάθε $n \geq 1$. Να δειχθεί ότι τα εξής δύο είναι ισοδύναμα.

(α) Η $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ και το μέτρο $\mathbf{Q}$.

(β) Η $(X_n f_n)_{n\geq 1}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ και το μέτρο $\mathbf{P}$.

[Υπόδειξη: Χρησιμοποιούμε την Άσκηση 2.14 και τις Προτάσεις 2.9, 2.10]

4

Ανελίξεις σε συνεχή χρόνο

Σε αυτό το κεφάλαιο είναι συγκεντρωμένοι ορισμοί και αποτελέσματα από τη θεωρία των στοχαστικών ανελιξεων συνεχούς χρόνου. Με εξαίρεση την Παράγραφο 4.1, η οποία είναι εντελώς βασική, οι υπόλοιπες μπορούν να διαβαστούν τη στιγμή που θα γίνει αναφορά σε αυτές στα παρακάτω κεφάλαια, οπότε και θα έχουν ενδιαφέρον.

4.1 Ανελίξεις

Έστω $(\mathcal{S}, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος. Δηλαδή το $\mathcal{S}$ είναι ένα σύνολο και $\mathcal{A}$ είναι μια σ-άλγεβρα στο $\mathcal{S}$.

Στοχαστική ανέλιξη με τιμές στον $\mathcal{S}$ λέμε μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X_t : t \in I\}$ που ορίζονται σε κοινό χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και παίρνουν τιμές στον $\mathcal{S}$. Το I είναι ένα αυθαίρετο σύνολο δεικτών, αλλά συνήθως είναι το $\mathbb{N}$ ή το $[0, \infty)$ και τότε ερμηνεύουμε το t ως χρόνο και το X_t ως την τιμή ενός μεγέθους (π.χ. η περιουσία μιας εταιρίας) τη χρονική στιγμή t. Για σταθερό $\omega \in \Omega$, η συνάρτηση $t \mapsto X_t(\omega)$ ονομάζεται **μονοπάτι** (ή και τροχιά) της ανέλιξης.

Ως συνήθως, όταν ο $\mathcal{S}$ είναι μετρικός χώρος, παίρνουμε $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{S})$, τη σ-άλγεβρα των συνόλων Borel στον $\mathcal{S}$. Σε αυτές τις σημειώσεις θα ασχοληθούμε με ανελίξεις που παίρνουν τιμές σε κάποιο χώρο της μορφής $\mathbb{R}^d$.

Παράδειγμα 4.1. Παίρνουμε $I = [0, \infty)$. Υπάρχει χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $(X_t)_{t \geq 0}$ ορισμένες σε αυτόν ώστε για κάθε $t \geq 0$ η X_t να παίρνει τις τιμές -1 και 1 καθεμία με πιθανότητα $1/2$ (π.χ., $\Omega = \{-1, 1\}^I$, $\mathbf{P}$ το κατάλληλο μέτρο γινόμενο, και $X_t : \Omega \to \{-1, 1\}$ η προβολή στην t συντεταγμένη). Πρακτικά, κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα και, αν έρθει Γράμματα, θέτουμε $X_t = -1$, ενώ αν έρθει Κεφαλή, θέτουμε $X_t = 1$. Με πιθανότητα 1, το μονοπάτι της ανέλιξης είναι μια συνάρτηση που ταλαντώνεται συνεχώς (καθώς το t μεταβάλλεται) ανάμεσα στις τιμές -1 και 1.

Μια ανέλιξη μπορεί να ειδωθεί ως απεικόνιση

$$X : I \times \Omega \to \mathcal{S}$$

με $X(t, \omega) = X_t(\omega)$ ή και ως απεικόνιση

$$\hat{X} : \Omega \to \mathcal{S}^I$$

με $\hat{X}(\omega)$ να είναι η συνάρτηση με τιμές $\hat{X}(\omega)(t) = X(t, \omega)$. Ο $\mathcal{S}^I$ εφοδιάζεται με τη σ-άλγεβρα γινόμενο και ως προς αυτήν η $\hat{X}$ είναι τυχαία μεταβλητή.

Υπενθυμίζουμε ότι η σ-άλγεβρα γινόμενο είναι αυτή που παράγεται από τους μετρήσιμους κυλίνδρους και μετρήσιμο κύλινδρο λέμε κάθε σύνολο της μορφής $\prod_{i \in I} A_i$ με $A_i \in \mathcal{A}$ για κάθε $i \in I$ και με $\{i \in I : A_i \neq \mathcal{S}\}$ πεπερασμένο.

Ορισμός 4.2. **Κατανομή** της ανέλιξης X λέμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $\hat{X}$, δηλαδή το μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}^X(A) = \mathbf{P}(\hat{X} \in A)$ για κάθε $A \subset \mathcal{S}^I$ στη σ-άλγεβρα γινόμενο.

Οι διάφορες προβολές της κατανομής της X σε πεπερασμένες το πλήθος συντεταγμένες του $\mathcal{S}^I$ λέγονται κατανομές πεπερασμένης διάστασης της X.

Ορισμός 4.3. **Κατανομές πεπερασμένης διάστασης** μιας ανέλιξης X λέμε τις κατανομές των διανυσμάτων $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ όπου n θετικός ακέραιος και $t_1, t_2, \ldots, t_n \in I$ διαφορετικοί δείκτες.

Στο πιο πάνω παράδειγμα, για οποιοδήποτε $n \geq 1$ και $t_1, t_2, \ldots, t_n \geq 0$ διαφορετικούς δείκτες, η κατανομή του $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ είναι το μέτρο γινόμενο $\mu \times \mu \times \cdots \times \mu$ (n φορές) όπου μ είναι το ομοιόμορφο μέτρο στο $\{-1, 1\}$.

4.2 Ισοδυναμία ανελίξεων

Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε τέσσερις έννοιες ισοδυναμίας ανελίξεων.

Ορισμός 4.4. Έστω $X = (X_t)_{t\geq 0}, Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ δύο στοχαστικές ανελίξεις που ορίζονται σε κοινό χώρο πιθανότητας.

(i) Η X λέγεται **τροποποίηση** της Y αν για κάθε $t \geq 0$ ισχύει $P(X_t = Y_t) = 1$.

(ii) Οι X, Y λέγονται **μη διακρίσιμες** αν

$$\mathbf{P}(X_t = Y_t \text{ για κάθε } t \geq 0) = 1.$$

Η δεύτερη σχέση ισοδυναμίας ανελίξεων είναι πιο ισχυρή από την πρώτη αφού για δεδομένο $t \geq 0$, ισχύει $\{X_s = Y_s \text{ για κάθε } s \geq 0\} \subset \{X_t = Y_t\}$.

Παράδειγμα 4.5. Θεωρούμε την ανέλιξη X με $X_t = 0$ για κάθε $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$ και μια τυχαία μεταβλητή T με κατανομή την ομοιόμορφη στο διάστημα $(0, 1)$. Θέτουμε

$$Y_t := \begin{cases} 0 \text{ αν } t \in [0, \infty) \setminus \{T\}, \\ 1 \text{ αν } t = T. \end{cases}$$

Τότε για κάθε $t \geq 0$, $P(X_t \neq Y_t) = P(T = t) = 0$, αφού η T είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή, άρα $P(X_t = Y_t) = 1$. Όμως $P(X_t = Y_t \text{ για κάθε } t \geq 0) = 0$. Κάθε μονοπάτι της X είναι συνεχής συνάρτηση (σταθερή μάλιστα), ενώ κάθε μονοπάτι της Y έχει μια ασυνέχεια στο σημείο T που επιλέγεται τυχαία. Επομένως οι X, Y είναι τροποποίηση η μιά της άλλης, αλλά δεν είναι μη διακρίσιμες.

Για τη σχέση μεταξύ των δύο πιο πάνω εννοιών διατυπώνουμε ως πρόταση μια απλή παρατήρηση. Θα την χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 12.1.

Πρόταση 4.6. *Αν οι X, Y παίρνουν τιμές σε έναν μετρικό χώρο, είναι τροποποίηση η μια της άλλης, και με πιθανότητα 1 έχουν συνεχή μονοπάτια, τότε είναι μη διακρίσιμες.*

Απόδειξη. Από την υπόθεση, υπάρχουν $C_1, C_2 \subset \Omega$ με πιθανότητα 1 ώστε για κάθε $\omega \in \Omega_1$ η $t \mapsto X_t(\omega)$ είναι συνεχής και για κάθε $\omega \in \Omega_2$ η $t \mapsto Y_t(\omega)$ είναι συνεχής. Για $t \geq 0$ θέτουμε $A_t := \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}$. Τότε το σύνολο $C_1 \cap C_2 \cap (\cap_{t\in\mathbb{Q}, t>0} A_t)$ έχει πιθανότητα 1 και σε αυτό ισχύει $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ για κάθε $t \geq 0$ λόγω συνέχειας. Το ζητούμενο αποδείχθηκε. ∎

Παρατηρούμε ότι το συμπέρασμα της πρότασης έπεται επίσης αν η υπόθεση συνεχών μονοπατιών αντικατασταθεί με την υπόθεση ότι με πιθανότητα 1 οι X, Y έχουν μονοπάτια που σε κάθε σημείο t ή είναι και οι δύο συνεχείς από δεξιά του t ή είναι και οι δύο συνεχείς από αριστερά του t.

Τώρα για ανελίξεις με τιμές σε έναν μετρήσιμο χώρο $\mathcal{S}$, με ίδιο σύνολο δεικτών I, αλλά ορισμένες σε ενδεχομένως διαφορετικό χώρο πιθανότητας, δηλαδή

$$X : I \times \Omega \to \mathcal{S},$$
$$Y : I \times \tilde{\Omega} \to \mathcal{S},$$

έχουμε τις εξής έννοιες ισοδυναμίας.

Ορισμός 4.7. Έστω $X = (X_t)_{t\in I}, Y = (Y_t)_{t\in I}$ δύο στοχαστικές ανελίξεις με τιμές στον ίδιο μετρήσιμο χώρο $\mathcal{S}$.

(i) Λέμε ότι οι X, Y έχουν τις **ίδιες κατανομές πεπερασμένης διάστασης** αν, για κάθε $n \geq 1$ και $t_1, t_2, \ldots, t_n \in I$ διαφορετικούς δείκτες, τα διανύσματα $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$, $(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n})$ έχουν την ίδια κατανομή.

(ii) Λέμε ότι οι X, Y έχουν την **ίδια κατανομή** αν $\mathbf{P}^X = \mathbf{P}^Y$.

Η ισότητα κατανομής για στοχαστικές ανελίξεις βλέπει τις ανελίξεις ως τυχαίες μεταβλητές στον $\mathcal{S}^I$ και είναι η συνηθισμένη ισότητα κατανομών τυχαίων μεταβλητών. Δύο ανελίξεις με ίδια κατανομή έχουν τις ίδιες κατανομές πεπερασμένης διάστασης (Άσκηση 4.2), αλλά, γενικά, το αντίστροφο δεν ισχύει. Το επόμενο θεώρημα δίνει ένα σενάριο όπου το αντίστροφο ισχύει. Σε αυτό υποθέτουμε ότι ο $\mathcal{S}$ είναι μετρικός χώρος και συμβολίζουμε με $C_{\mathcal{S}}([0,\infty))$ τον χώρο των συναρτήσεων $f : [0,\infty) \to \mathcal{S}$ που είναι συνεχείς.

Θεώρημα 4.8. *Έστω X, Y ανελίξεις όπως πριν τον Ορισμό 4.7, με $\mathcal{S}$ διαχωρίσιμο μετρικό χώρο και $I = [0,\infty)$. Αν οι X, Y παίρνουν τιμές στον $C_{\mathcal{S}}([0,\infty))$ και έχουν τις ίδιες κατανομές πεπερασμένης διάστασης, τότε έχουν και την ίδια κατανομή.*

Για την απόδειξη, δες το Θεώρημα 2.6 στο Bass (2011) στην περίπτωση που $\mathcal{S} = \mathbb{R}$. Η πιο γενική περίπτωση που περιγράφει το θεώρημα αποδεικνύεται ανάλογα.

Ένα τέτοιο αποτέλεσμα είναι εντελώς φυσιολογικό. Το μονοπάτι $X|[0,1]$, λόγω συνέχειας, προσεγγίζεται από το διάνυσμα $(X(0/2^n), X(1/2^n), X(2/2^n), \ldots, X(2^n/2^n))$ [δηλαδή από τη γραμμική επέκταση στο $[0,1]$ της συνάρτησης που στα σημεία $0/2^n, 1/2^n, 2/2^n, \ldots, 2^n/2^n$ έχει τιμές $X(0/2^n), X(1/2^n), X(2/2^n), \ldots, X(2^n/2^n)$]. Και η προσέγγιση γίνεται όλο και καλύτερη καθώς $n \to \infty$. Ξέροντας την κατανομή αυτού του διανύσματος για ένα αρκετά μεγάλο n είναι σχεδόν σαν να ξέρουμε την κατανομή ολόκληρου του μονοπατιού $X|[0,1]$.

Παρατήρηση 4.9 (Σ-άλγεβρα στον $C_{\mathcal{S}}([0,\infty))$)**.** Δύο σ-άλγεβρες που μπορεί να θεωρήσει κανείς στον $Y := C_{\mathcal{S}}([0,\infty))$ είναι οι εξής:
(α) $\mathcal{A}_1 := \{A \cap Y : A \in \otimes_{t\in[0,\infty)}\mathcal{B}(\mathcal{S})\}$. Δηλαδή θεωρούμε τον Y ως υποσύνολο του χώρου γινόμενο $\mathcal{S}^{[0,\infty)}$, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με τη σ-άλγεβρα γινόμενο (αυτήν που παράγεται από τους μετρήσιμους κυλίνδρους) και αυτή η σ-άλγεβρα ορίζει φυσιολογικά μια σ-άλγεβρα στον Y.
(β) $\mathcal{A}_2 := \mathcal{B}(Y)$. Η Borel σ-άλγεβρα στον Y. Εδώ θεωρούμε τον Y ως μετρικό χώρο με μετρική την

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(\{\sup_{t\in[0,n]} d(f(t), g(t))\} \wedge 1).$$

Με d συμβολίζουμε τη μετρική στον $\mathcal{S}$. Μια ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει ως προς τη μετρική ρ σε μια συνάρτηση f αν και μόνο αν συγκλίνει ομοιόμορφα στην f σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $[0,\infty)$.

Ισχύει το εξής αποτέλεσμα, το οποίο αποδεικνύουμε στο Παράρτημα Δ΄.

Πρόταση 4.10. $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.

4.3 Martingales και χρόνοι διακοπής

Ορισμός 4.11. (i) **Διήθηση** στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ λέμε μια αύξουσα οικογένεια $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ σ-αλγεβρών, καθεμία υποσύνολο της $\mathcal{F}$. Δηλαδή, έχουμε $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ για κάθε $0 \leq s < t$.

(ii) Μια στοχαστική ανέλιξη $(X_t)_{t\geq 0}$ λέγεται **προσαρμοσμένη** στη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ αν για κάθε $t \geq 0$ η X_t είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη.

Τώρα, αν $X = (X_t)_{t\geq 0}$ είναι μια στοχαστική ανέλιξη, τότε η ελάχιστη διήθηση ως προς την οποία η X είναι προσαρμοσμένη είναι αυτή που ορίζεται ως

$$\mathcal{F}_t := \sigma(\{X_s : 0 \leq s \leq t\}) \text{ για κάθε } t \geq 0,$$

δηλαδή η διήθηση που παράγεται από τη X.

Ανάλογα ορίζεται η έννοια της διήθησης με γενικό σύνολο δεικτών I αρκεί σε αυτό να έχουμε μια διάταξη. Και αντίστοιχα για μια ανέλιξη $(X_t)_{t\in I}$ ορίζεται η διήθηση που αυτή παράγει. Ακριβώς πριν το Παράδειγμα 3.2 είδαμε χρήση αυτών των εννοιών (εκεί είχαμε $I = \mathbb{N}$).

Οι ανελίξεις που θα θεωρήσουμε ως το τέλος αυτής της παραγράφου παίρνουν τιμές στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός 4.12. Αν η στοχαστική ανέλιξη $(X_t)_{t\geq 0}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες:

(i) Η $(X_t)_{t\geq 0}$ είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$,

(ii) $\mathbf{E}\,|X_t| < \infty$ για κάθε $t \geq 0$,

(iii) $\mathbf{E}(X_t\,|\,\mathcal{F}_s) = X_s$ για κάθε $0 \leq s < t$,

τότε λέγεται **martingale** ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Αν αντί της (iii) ισχύει η $E(X_t\,|\,\mathcal{F}_s) \geq X_s$, τότε η ανέλιξη λέγεται **submartingale**, ενώ αν ισχύει η $E(X_t\,|\,\mathcal{F}_s) \leq X_s$, τότε η ανέλιξη λέγεται **supermartingale**.

Προφανώς, αν $(X_t)_{t\geq 0}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ και $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία στο $[0,\infty)$, τότε η ανέλιξη $(X_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Χρησιμοποιούμε αυτή την παρατήρηση για να μεταφέρουμε στο πλαίσιο των ανελίξεων σε συνεχή χρόνο αποτελέσματα που έχουν δειχθεί σε διακριτό χρόνο (δες την απόδειξη του Θεωρήματος 4.16 πιο κάτω).

Ανάλογα με την περίπτωση που έχουμε διήθηση σε διακριτό χρόνο ($I = \mathbb{N}$), ορίζεται και τώρα, με $I = [0,\infty)$, η έννοια του χρόνου διακοπής.

Ορισμός 4.13. Μια συνάρτηση $T : \Omega \to [0,\infty]$ λέγεται **χρόνος διακοπής** ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ αν για κάθε $t \geq 0$ ισχύει

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t. \tag{4.1}$$

Σε αυτές τις σημειώσεις θα χρησιμοποιήσουμε martingales σε συνεχή χρόνο για να υπολογίσουμε ποσότητες που αφορούν την κίνηση Brown, όπως στην Παράγραφο 3.5 χρησιμοποιήσαμε martingales σε διακριτό χρόνο για τον τυχαίο περίπατο.

Για $(X_t)_{t\geq 0}$ ανέλιξη και $T : \Omega \to [0,\infty]$, συμβολίζουμε με X^T την ανέλιξη που ορίζεται ως $X^T_t = X_{t\wedge T}$ για κάθε $t \geq 0$. Χρειαζόμαστε το ακόλουθο θεώρημα, την απόδειξη του οποίου μπορεί να δει ο αναγνώστης στην Παράγραφο 3 του Κεφαλαίου II στο Revuz and Yor (1999).

Θεώρημα 4.14. *Έστω $X = (X_t)_{t\geq 0}$ συνεχές martingale και T χρόνος διακοπής. Τότε η ανέλιξη X^T είναι martingale.*

Άμεση συνέπεια αυτού του αποτελέσματος είναι το εξής.

Θεώρημα 4.15 (Θεώρημα επιλεκτικής διακοπής)**.** *Έστω $X = (X_t)_{t\geq 0}$ συνεχές martingale και T φραγμένος χρόνος διακοπής. Τότε*

$$\mathbf{E}(X_T) = \mathbf{E}(X_0).$$

Απόδειξη. Αν M είναι ένα άνω φράγμα του χρόνου διακοπής T, τότε επειδή η X^T είναι martingale, θα έχουμε $\mathbf{E}(X^T_M) = \mathbf{E}(X^T_0)$, το οποίο είναι η ζητούμενη ισότητα αφού $T \wedge M = T$. ∎

Χρήσιμη στην κατασκευή του στοχαστικού ολοκληρώματος είναι η ακόλουθη ανισότητα.

Θεώρημα 4.16 (Ανισότητα Doob για submartingales)**.** *Έστω* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *συνεχές submartingale και* $t > 0$*. Τότε για κάθε* $\lambda > 0$*, έχουμε*

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{s\in[0,t]} X_s \geq \lambda\Big) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbf{E}(X_t^+).$$

Απόδειξη. Για $n \geq 1$, έστω $I_n := (\{k/2^n : k \in \mathbb{N}\} \cap [0,t]) \cup \{t\}$. Το Θεώρημα 3.20 δίνει ότι για $r > 0$ ισχύει

$$\mathbf{P}(\sup_{s\in I_n} X_s > r) \leq \mathbf{P}(\sup_{s\in I_n} X_s \geq r) \leq \frac{1}{r}\mathbf{E}(X_t^+).$$

Η ακολουθία $A_n := \{\sup_{s\in I_n} X_s > r\}$, $n \geq 1$ είναι αύξουσα (γιατί και η $(I_n)_{n\geq 1}$ είναι) και η ένωσή της είναι το σύνολο $\{\sup_{s\in[0,t]} X_s > r\}$. Στον τελευταίο ισχυρισμό χρησιμοποιούμε ότι η X έχει συνεχή μονοπάτια και ότι η ένωση των I_n είναι ένα πυκνό υποσύνολο του $[0,t]$. Άρα

$$\mathbf{P}(\sup_{s\in[0,t]} X_s > r) \leq \frac{1}{r}\mathbf{E}(X_t^+). \tag{4.2}$$

Παίρνουμε τώρα μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $(r_n)_{n\geq 1}$ θετικών αριθμών που συγλίνει στο λ. Τότε η ακολουθία $A_n := \{\sup_{s\in[0,t]} X_s > r_n\}$ είναι φθίνουσα με τομή το σύνολο $\{\sup_{s\in[0,t]} X_s \geq \lambda\}$. Εφαρμόζουμε την (4.2) για $r = r_n$, παίρνουμε $n \to \infty$, και έπειτα επικαλούμαστε ότι $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(\cap_{n\geq 1} A_n)$. Προκύπτει έτσι το ζητούμενο. ■

Μια ιδιότητα ασθενέστερη από αυτήν του martingale αλλά εξίσου χρήσιμη είναι αυτή του local martingale. Ο ορισμός της είναι ο εξής.

Ορισμός 4.17. Η ανέλιξη $(X_t)_{t\geq 0}$ λέγεται **local martingale** ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ αν υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(\tau_n)_{n\geq 1}$ χρόνων διακοπής ώστε:

(i) $\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty) = 1$.

(ii) Για κάθε $n \geq 1$ η σταματημένη ανέλιξη $(X_{t\wedge\tau_n})_{t\geq 0}$ είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Επειδή $X_t = \lim_{n\to\infty} X_{t\wedge\tau_n}$, η X είναι προσαρμοσμένη στην$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Κάθε martingale είναι local martingale όπως θα δούμε τώρα, το αντίστροφο όμως δεν ισχύει (δες παράδειγμα 13.7).

Παρατήρηση 4.18. Θα δείξουμε ότι κάθε martingale X είναι local martingale. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ θέτουμε $\tau_n := n$ (σταθερός χρόνος διακοπής). Μένει να δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ η ανέλιξη $(X_{t\wedge n})_{t\geq 0}$ είναι martingale. Είναι προσαρμοσμένη γιατί, αν $t < n$, τότε η $X_{t\wedge n} = X_t$ είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη, ενώ, αν $t \geq n$, έχουμε $X_{t\wedge n} = X_n$ η οποία είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη, άρα και $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη αφού $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_t$. Επίσης, $\mathbf{E}|X_{t\wedge n}| < \infty$ προφανώς, αφού για τον αριθμό $s := t \wedge n$ ξέρουμε ότι $\mathbf{E}|X_s| < \infty$. Μένει να δείξουμε ότι για κάθε $0 \leq s < t$ ισχύει

$$\mathbf{E}(X_{t\wedge n} \,|\, \mathcal{F}_s) = X_{s\wedge n}.$$

Για αυτό διακρίνει κανείς τις περιπτώσεις $s < t \leq n$, $s < n \leq t$, $n \leq s < t$. Ας δούμε την τελευταία. Θέλουμε $\mathbf{E}(X_n \,|\, \mathcal{F}_s) = X_n$, το οποίο ισχύει αφού η X_n είναι $\mathcal{F}_s$- μετρήσιμη (ως $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη). Οι άλλες δύο περιπτώσεις είναι εξίσου απλές.

Υπό κάποιες προϋποθέσεις ένα local martingale είναι martingale. Μια τέτοια περίπτωση είναι η ακόλουθη.

Πρόταση 4.19. *Αν ένα local martingale* $(X_t)_{t\geq 0}$ *είναι φραγμένο [δηλαδή υπάρχει* $M \in (0,\infty)$ *ώστε* $|X_t(\omega)| \leq M$ *για κάθε* $t \geq 0$ *και* $\omega \in \Omega$*], τότε είναι martingale.*

Απόδειξη. Ξέρουμε ότι η $(X_t)_{t\geq 0}$ είναι προσαρμοσμένη. Έστω $(\tau_n)_{n\geq 1}$ μια ακολουθία χρόνων διακοπής όπως στον Ορισμό 4.17. Αφού η X_t είναι φραγμένη, έπεται ότι $\mathbf{E}\,|X_t| < \infty$. Τέλος, για $0 \leq s < t$ έχουμε

$$\mathbf{E}(X_{t\wedge\tau_n} \,|\, \mathcal{F}_s) = X_{s\wedge\tau_n}$$

για κάθε $n \geq 1$. Για $n \to \infty$, το δεξί μέλος της τελευταίας ισότητας τείνει στο X_s, ενώ στο αριστερό εφαρμόζουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης για τη δεσμευμένη μέση τιμή (Θεώρημα 2.17). Κυριαρχούσα συνάρτηση είναι η σταθερά M. ∎

Παραδείγματα martingales σε συνεχή χρόνο καθώς και εφαρμογές του θεωρήματος επιλεκτικής διακοπής (Θεώρημα 4.15) θα δούμε αφότου κατασκευάσουμε την κίνηση Brown στο επόμενο κεφάλαιο.

4.4 Ιδιότητες Markov*

Μια ειδική κατηγορία ανελίξεων είναι οι ανελίξεις Markov. Έτσι λέμε αυτές που έχουν την ιδιότητα Markov, την οποία θα ορίσουμε τώρα.

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας, $I \subset \mathbb{R}$ σύνολο δεικτών, $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ μια διήθηση, $(\mathcal{S}, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος, και $X = (X_t)_{t\in I}$ μια ανέλιξη με τιμές στον $\mathcal{S}$ και προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$. Συνήθως, η $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ είναι αυτή που παράγεται από τη X. Δηλαδή $\mathcal{F}_t := \sigma(\{X_s : s \in I, s \leq t\})$.

Χρόνο διακοπής ως προς την $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ λέμε οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή $T : \Omega \to [0, \infty]$ ικανοποιεί την (4.1) για κάθε $t \in I$.

Για $C \in \mathcal{F}$ και $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρα, θα συμβολίζουμε με $\mathbf{P}(C \,|\, \mathcal{G})$ τη δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbf{E}(\mathbf{1}_C \,|\, \mathcal{G})$.

Ορισμός 4.20. Λέμε ότι η X έχει την **ιδιότητα Markov** ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ αν για κάθε $s, t \in I$ με $s \leq t$ και $A \in \mathcal{A}$ ισχύει

$$\mathbf{P}(X_t \in A \,|\, \mathcal{F}_s) = \mathbf{P}(X_t \in A \,|\, X_s)$$

με πιθανότητα 1.

Δηλαδή, αν τοποθετήσουμε τον εαυτό μας στη χρονική στιγμή s, η κατανομή της τιμής της X σε έναν δεδομένο μελοντικό χρόνο t, δεδομένου ολόκληρου του παρελθόντος (από τη στιγμη s και πριν), είναι η ίδια αν δεδομένη είναι απλώς η τιμή X_s της X κατά τον παρόντα χρόνο s. Μάλιστα είναι συνέπεια του ορισμού ότι η κατανομή ολόκληρης της ανέλιξης $(X_t)_{t\geq s}$ δεδομένης της $\mathcal{F}_s$ παραμένει η ίδια αν αντί της $\mathcal{F}_s$ είναι δεδομένη η X_s.

Παράδειγμα 4.21. (α) Ο απλός τυχαίος περίπατος $(S_n)_{n\geq 0}$ στο $\mathbb{Z}$ (δες Παράγραφο 3.1 για τον συμβολισμό) έχει την ιδιότητα Markov ως προς τη διήθηση που παράγει ο ίδιος γιατί για $n \geq k$ και $A \subset \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\mathbf{P}(S_n \in A \,|\, \mathcal{F}_k) = \phi(S_k) = \mathbf{P}(S_n \in A \,|\, S_k)$$

με $\phi(r) = \mathbf{P}(a + \sum_{k<j\leq n} X_j \in A)$ για κάθε $r \in \mathbb{Z}$. Οι ισότητες είναι διαισθητικά προφανείς και προκύπτουν με χρήση της Πρότασης 2.11 (γενικευμένης για X, Y πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές).

(β) Η ανέλιξη $(M_n)_{n\geq 0}$ με $M_n = \max_{0\leq k\leq n} S_k$, όπου $(S_n)_{n\geq 0}$ είναι ο απλός τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}$, δεν έχει την ιδιότητα Markov ως προς τη διήθηση που αυτή παράγει. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού αφήνεται ως μια μη τετριμμένη άσκηση.

Πολλές φορές, μια ανέλιξη Markov $(X_t)_{t\in I}$ ικανοποιεί την ιδιότητα του Ορισμού 4.20 πιο πάνω όχι απλώς για κάθε σταθερό χρόνο s αλλά και για κάθε πεπερασμένο χρόνο διακοπής T. Δηλαδή, η κατανομή του μονοπατιού $(X_t)_{t\geq T}$ της X μετά τον χρόνο T επηρεάζεται από την «πληροφορία του παρελθόντος» μόνο μέσω της τιμής $X(T)$. Πρώτα ορίζουμε τι σημαίνει «πληροφορία » μέχρι τον τυχαίο χρόνο T. Αυτή είναι η σ-άλγεβρα

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ για κάθε } t \in I\}. \tag{4.3}$$

Διαισθητικά, αυτή η σ-άλγεβρα περιέχει τα γεγονότα για τα οποία μπορούμε την χρονική στιγμή T να αποφανθούμε αν έχουν συμβεί ως τότε. Και οι τυχαίες μεταβλητές που είναι μετρήσιμες ως προς αυτή τη σ-άλγεβρα είναι εκείνες των οποίων η τιμή μπορεί να καθοριστεί από την πληροφορία ως και τον χρόνο T. Επειδή η X είναι προσαρμοσμένη στη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$, η πληροφορία ως και τον χρόνο T περιέχει την τιμή του T και τις τιμές που έχει πάρει η X στο διάστημα $[0, T]$. Το κάνουμε πιο σαφές αυτό στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.22. (α) Η T είναι $\mathcal{F}_T$-μετρήσιμη. Αρκεί να δείξουμε ότι για οποιοδήποτε $r \geq 0$ το γεγονός $A := \{T \leq r\}$ είναι στοιχείο της $\mathcal{F}_T$. Πράγματι, για κάθε $t \in I$ θέτουμε $s := \sup(I \cap [0, r \wedge t])$ και ας υποθέσουμε ότι $s \in I$. Τότε

$$A \cap \{T \leq t\} = \{T \leq r \wedge t\} = \{T \leq s\} \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$$

αφού ο T είναι χρόνος διακοπής. Η περίπτωση που $s \notin I$ αφήνεται ως άσκηση.
(β) Ας υποθέσουμε ότι $I = [0, \infty)$ και ότι η X παίρνει τιμές σε έναν μετρικό χώρο και έχει συνεχή μονοπάτια. Τότε η τυχαία μεταβλητή X_T είναι $\mathcal{F}_T$ μετρήσιμη. Αυτό είναι κάτι εντελώς αναμενόμενο από την περιγραφή που δώσαμε για την $\mathcal{F}_T$ αλλά δεν είναι άμεσο, οπότε αφήνουμε την απόδειξή του για τις ασκήσεις (Άσκηση 4.11).

Δίνουμε τώρα τον ορισμό της ισχυρής ιδιότητας Markov. Θεωρούμε σημείο $\delta \notin \mathcal{S}$ και ορίζουμε $X_t = \delta$ για κάθε $t \in \mathbb{R}\setminus I$.

Ορισμός 4.23. Λέμε ότι η X έχει την **ισχυρή ιδιότητα Markov** ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ αν για κάθε χρόνο διακοπής T που παίρνει τιμές στο I, $t > 0$ και $A \in \mathcal{A}$ ισχύει

$$\mathbf{P}(X_{T+t} \in A \,|\, \mathcal{F}_T) = \mathbf{P}(X_{T+t} \in A \,|\, X_T).$$

Για την ισχυρή ιδιότητα Markov ισχύει ανάλογη παρατήρηση με αυτήν που ακολουθεί τον Ορισμό 4.20.

Για περισσότερα σχετικά με τις ανελίξεις που έχουν την ιδιότητα Markov ή την ισχυρή ιδιότητα Markov και τη σχέση των δύο ιδιοτήτων μπορεί να δει κανείς στα Κεφάλαια 19, 20 του Bass (2011) ή στο Κεφάλαιο III των Revuz and Yor (1999).

Ασκήσεις

4.1 (Δέσμευση και ολοκλήρωμα Lebesgue) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ διήθηση σε αυτόν, και $X : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ ανέλιξη μετρήσιμη ως προς τη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{F}$. Αν $\int_0^\infty \mathbf{E}\,|X(r, \omega)|\,dr < \infty$ και η $r \mapsto \mathbf{E}\{X(r, \omega)\,|\,\mathcal{F}_s\}$ είναι μετρήσιμη, τότε για κάθε $s \geq 0$ ισχύει

$$\mathbf{E}\left(\int_0^\infty X(r, \omega)\,dr \middle| \mathcal{F}_s\right) = \int_0^\infty \mathbf{E}\{X(r, \omega)\,|\,\mathcal{F}_s\}\,dr.$$

4.2 Έστω $(X_t)_{t\geq 0}, (Y_t)_{t\geq 0}$ στοχαστικές ανελίξεις με τιμές σε έναν μετρικό χώρο $\mathcal{S}$. Αν έχουν την ίδια κατανομή, να δειχθεί ότι έχουν τις ίδιες κατανομές πεπερασμένης διάστασης.

4.3 Αν $a \in (0, \infty)$, να δειχθεί ότι η σταθερή τυχαία μεταβλητή $T = a$ είναι χρόνος διακοπής.

4.4 Αν οι τυχαίες μεταβλητές T, S είναι χρόνοι διακοπής και $a > 1$, να δειχθεί ότι χρόνοι διακοπής είναι επίσης και οι τυχαίοι χρόνοι

$$S \wedge T, S \vee T, S + T, aS.$$

4.5 Έστω T χρόνος διακοπής. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τον τυχαίο χρόνο $T_n := [2^n T + 1]/2^n$, δηλαδή θέτουμε $T_n = k/2^n$ $(k \in \mathbb{N}^+)$ ακριβώς όταν $T \in [(k-1)/2^n, k/2^n)$, ενώ $T_n = \infty$ όταν $T = \infty$. Να δειχθεί ότι:
(α) Κάθε T_n είναι χρόνος διακοπής.
(β) Η $(T_n)_{n\geq 0}$ είναι φθίνουσα και $\lim_{n\to\infty} T_n = T$.

4.6 Αν ο T είναι χρόνος διακοπής ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, τότε για κάθε $t > 0$ ισχύει $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$.

4.7 Έστω $X = (X_t)_{t\geq 0}$ συνεχές μη αρνητικό submartingale, $p \geq 1$, και $t > 0$. Τότε για κάθε $\lambda > 0$, έχουμε

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{0\leq s\leq t} X_s \geq \lambda\Big) \leq \frac{1}{\lambda^p}\,\mathbf{E}(X_t^p).$$

4.8 Έστω $X = (X_t)_{t\geq 0}$ μη αρνητικό local martingale. Να δειχθεί ότι είναι supermartingale.

4.9 Έστω $X = (X_t)_{t\geq 0}$ θετικό συνεχές martingale με $X_0 = x_0 \in (0, \infty)$ δεδομένη σταθερά και $\lim_{t\to\infty} X_t = 0$ με πιθανότητα 1. Θέτουμε $X^* := \sup_{t\geq 0} X_t$. Να δειχθεί ότι για κάθε $x > x_0$ ισχύει

$$\mathbf{P}(X^* > x) = \frac{x}{x_0}.$$

[Υπόδειξη.: Έστω $T := \inf\{t \geq 0 : X_t = x\}$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής για το martingale X και τον χρόνο $T \wedge r$ με $r \in (0, \infty)$ αυθαίρετο.]

4.10 Να δειχθεί ότι πράγματι η $\mathcal{F}_T$ της σχέσης (4.3) είναι σ-άλγεβρα. Ο T είναι χρόνος διακοπής.

4.11 Έστω $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ διήθηση σε ένα χώρο πιθανότητας και $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ανέλιξη με τιμές σε έναν μετρικό χώρο και προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Για T χρόνο διακοπής θεωρούμε την ακολουθία των τυχαίων χρόνων $\tilde{T}_n = [2^n T]/2^n, n \in \mathbb{N}$ (δεν είναι απαραίτητα χρόνοι διακοπής). Να δειχθεί ότι:
(α) Η $X_{\tilde{T}_n}$ είναι $\mathcal{F}_T$-μετρήσιμη για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(β) Αν η X έχει συνεχή μονοπάτια, να δειχθεί ότι η X_T είναι $\mathcal{F}_T$-μετρήσιμη.

Μέρος II

Κίνηση Brown

5

Κατασκευή της κίνησης Brown και απλές ιδιότητες

5.1 Ορισμός, ύπαρξη, και μοναδικότητα

Ορισμός 5.1. Μια στοχαστική ανέλιξη $\{B(t) : t \geq 0\}$ ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και με τιμές στο $\mathbb{R}$ λέγεται (μονοδιάστατη) **κίνηση Brown** αν ισχύουν τα εξής:

(i) Η ανέλιξη έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Δηλαδή για κάθε $n \geq 1$ και $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, οι τυχαίες μεταβλητές

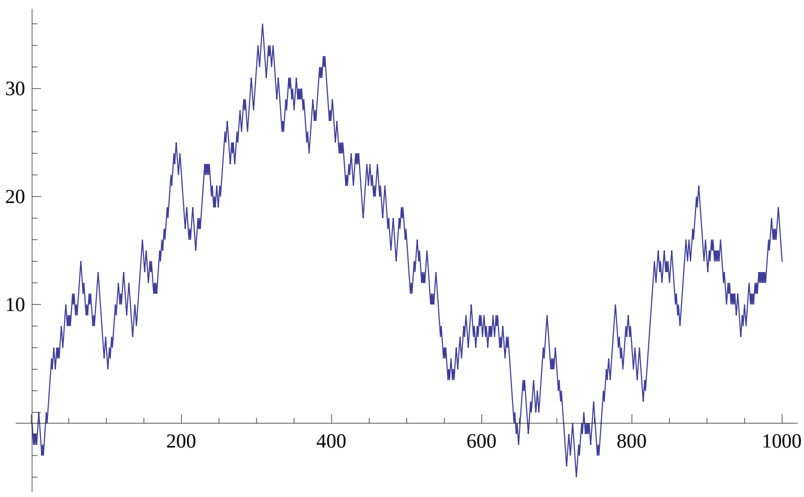
$$B(t_1), B(t_2) - B(t_1), B(t_3) - B(t_2), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1})$$

είναι ανεξάρτητες.

(ii) Για κάθε $0 \leq s < t$,

$$B(t) - B(s) \sim N(0, t-s).$$

(iii) Με πιθανότητα 1, η συνάρτηση $t \mapsto B(t)$ είναι συνεχής.



Σχήμα 5.1: Το γράφημα μιας πραγματοποίησης της κίνησης Brown.

Μια κίνηση Brown για την οποία με πιθανότητα 1 ισχύει $B(0) = x$ λέγεται κίνηση Brown που ξεκινάει από το x, ενώ όταν $x = 0$ μια τέτοια ανέλιξη λέγεται **τυπική κίνηση Brown**.

Στην απαίτηση (i) του ορισμού, η $B(t_1)$ δεν είναι προσαύξηση της B εκτός αν η B είναι τυπική κίνηση Brown, οπότε $B(t_1) = B(t_1) - B(0)$. Έτσι η (i), στη γενική περίπτωση, είναι κάτι παραπάνω από «ανεξάρτητες προσαυξήσεις».

Παρατήρηση 5.2 (Σημείο εκκίνησης της B)**.** Ο πιο πάνω ορισμός δεν θέτει κανένα περιορισμό στην αρχική τιμή $B(0)$ της κίνησης. Έτσι, είναι δυνατόν η κίνηση να ξεκινάει από ένα συγκεκριμένο $x \in \mathbb{R}$ ή, γενικότερα, να ξεκινάει τυχαία επιλέγοντας το αρχικό της σημείο με βάση ένα μέτρο πιθανότητας μ στο $\mathbb{R}$ (δηλαδή η $B(0)$ να είναι τυχαία μεταβλητή με κατανομή μ). Όλες αυτές οι κινήσεις Brown παράγονται από την τυπική κίνηση Brown ως εξής. Έστω B τυπική κίνηση Brown και X τυχαία μεταβλητή (στον ίδιο χώρο πιθανότητας) ανεξάρτητη της B και με κατανομή μ. Τότε η ανέλιξη W με

$$W(t) := X + B(t)$$

για κάθε $t \geq 0$ είναι κίνηση Brown με αρχική κατανομή μ. Ιδιαιτέρως, όταν το μ δίνει όλη του τη μάζα σε ένα σημείο $x \in \mathbb{R}$, τότε έχουμε $W(t) = x + B(t)$, δηλαδή την κίνηση Brown που ξεκινάει από το x.

Αν σε μια πιθανότητα ή σε μια μέση τιμή εμφανίζεται μια κίνηση Brown B με αρχική κατανομή μ και θέλουμε να το κάνουμε ξεκάθαρο, το δηλώνουμε γράφοντας $\mathbf{P}_\mu, \mathbf{E}_\mu$ αντίστοιχα. Ειδικά για την κίνηση Brown που ξεκινάει από το $x \in \mathbb{R}$, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathbf{P}_x, \mathbf{E}_x$. Αν το αρχικό σημείο είναι αδιάφορο ή ξεκάθαρο από τα συμφραζόμενα, θα γράφουμε απλώς $\mathbf{P}, \mathbf{E}$.

Παρατήρηση 5.3 (Κατανομές πεπερασμένης διάστασης)**.** Αν ξέρουμε την κατανομή της $B(0)$, όλες οι κατανομές πεπερασμένης διάστασης της B υπολογίζονται (Ορισμός 4.3). Ας υποθέσουμε ότι η B ξεκινάει από το x, δηλαδή $B(0) = x$ (για κάθε $\omega \in \Omega$). Τότε για $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, η κατανομή του διανύσματος

$$(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) := (B(t_1) - B(t_0), B(t_2) - B(t_1), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1}))$$

καθορίζεται μοναδικά από τις ιδιότητες (i), (ii) του ορισμού. Είναι η ίδια με αυτήν ενός διανύσματος

$$(\sqrt{t_1 - t_0}X_1, \sqrt{t_2 - t_1}X_2, \cdots, \sqrt{t_n - t_{n-1}}X_n),$$

όπου οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές. Άρα και η κατανομή του

$$(B(t_1), B(t_2), \ldots, B(t_n))$$

καθορίζεται μοναδικά αφού

$$\begin{pmatrix} B(t_1) \\ B(t_2) \\ \vdots \\ B(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + Y_1 \\ x + Y_1 + Y_2 \\ \vdots \\ x + Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}.$$

Η τελευταία σχέση λέει επιπλέον ότι το τυχαίο διάνυσμα $(B(t_1), B(t_2), \ldots, B(t_n))$ είναι Γκαουσιανό (Ορισμός Α΄.3 στο Παράρτημα Α΄).

Η κατανομή ενός Γκαουσιανού διανύσματος καθορίζεται πλήρως από τις μέσες τιμές των συνιστωσών του και τον πίνακα συνδιακύμανσης του (Βλέπε συζήτηση μετά το Θεώρημα Α΄.4 στο Παράρτημα Α΄). Υπολογίζουμε τώρα αυτά τα χαρακτηριστικά για το $(B(t_1), B(t_2), \ldots, B(t_n))$. Σαφώς, $\mathbf{E}(B(t)) = x$ για κάθε $t \geq 0$ αφού η $B(t) - B(0) \sim N(0, t)$. Για τις συνδιακυμάνσεις έχουμε το εξής.

Παράδειγμα 5.4. Έστω $x \in \mathbb{R}$ και B κίνηση Brown με $B(0) = x$. Τότε $\mathrm{Cov}(B(s), B(t)) = s \wedge t$ για κάθε $s, t \geq 0$.
Πράγματι, έστω ότι $0 \leq s < t$. Τότε

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(B(s), B(t)) &= \mathrm{Cov}(B(s), B(t) - B(s) + B(s)) \\ &= \mathrm{Cov}(B(s), B(t) - B(s)) + \mathrm{Cov}(B(s), B(s)) \\ &= 0 + \mathrm{Var}(B(s)) = s. \end{aligned}$$

Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιούμε τη διγραμμικότητα της συνδιακύμανσης. Στην τρίτη ισότητα ότι οι $B(s), B(t) - B(s)$ είναι ανεξάρτητες και ότι $B(s) \sim N(x, s)$ (αφού $B(s) - B(0) \sim N(0, s)$).

Την κίνηση Brown ως φυσικό φαινόμενο κατέγραψε πρώτος ο Robert Brown το 1828 παρατηρώντας την κίνηση κόκων γύρης μέσα σε νερό. Έπειτα, το 1900, ο Louis Bachelier τη χρησιμοποίησε ως μοντέλο για τις τιμές μετοχών. Ο Albert Einstein το 1905 απέδειξε ότι μια κίνηση με κάποια «φυσιολογικά» επιθυμητά χαρακτηριστικά θα ικανοποιεί την ιδιότητα (ii) του ορισμού πιο πάνω και υπέδειξε εφαρμογές στον μικρόκοσμο (π.χ., προσδιορισμός του αριθμού του Avogadro). Παρ'όλα αυτά, η απόδειξη ότι η κίνηση Brown υπάρχει, δηλαδή ότι υπάρχει ανέλιξη που να ικανοποιεί τις απαιτήσεις του Ορισμού 5.1, έγινε το 1923 από τον Nobert Wiener. Ακολούθησαν και άλλες αποδείξεις ύπαρξης.

Θεώρημα 5.5. *Μια τυπική κίνηση Brown υπάρχει.*

Στο Παράρτημα Γ′ δίνεται μια απόδειξη που οφείλεται στον Paul Lévy και δημοσιεύτηκε το 1939.

Μοναδικότητα. Υπάρχουν άραγε πολλές στοχαστικές ανελίξεις που να ικανοποιούν τις ιδιότητες του Ορισμού 5.1 πιο πάνω μαζί με τη $B(0) = 0$; Δηλαδή να είναι τυπικές κινήσεις Brown; Ναι, υπάρχουν. Για παράδειγμα, αν B είναι μια τέτοια, τότε το ίδιο είναι και η $-B$. Μοναδική όμως είναι η *κατανομή* της τυπικής κίνησης Brown στον χώρο $C([0,\infty))$ των συνεχών συναρτήσεων στο $[0,\infty)$. Ας θυμηθούμε (Παράγραφος 4.1) ότι η τυπική κίνηση Brown μπορεί να θεωρηθεί τυχαία μεταβλητή με τιμές στον $C([0,\infty))$. Δηλαδή

$$\omega \mapsto f^{\omega},$$

όπου $f^{\omega} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με τιμές $f^{\omega}(t) = B(t)$. Ως συνήθως, για μια τυχαία μεταβλητή παραλείπουμε το δειγματικό σημείο ω και γράφουμε $B(t)$ αντί $B(t)(\omega)$. Η κατανομή μιας τυπικής κίνησης Brown είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον $C([0,\infty))$. Για τη σ-άλγεβρα με την οποία εφοδιάζουμε τον $C([0,\infty))$, δες την Παρατήρηση 4.9.

Οι ιδιότητες ορισμού της τυπικής κίνησης Brown είναι αρκετές ώστε να καθορίζουν μόνο μία κατανομή. Έτσι έχουμε το εξής αποτέλεσμα μοναδικότητας.

Θεώρημα 5.6. *Έστω δύο τυπικές κινήσεις Brown B, B^*. Τότε οι B, B^* έχουν την ίδια κατανομή.*

Απόδειξη. Με βάση την Παρατήρηση 5.3, οι B, B^* έχουν τις ίδιες κατανομές πεπερασμένης διάστασης. Το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα 4.8. ∎

5.2 Απλές ιδιότητες

Κάθε κίνηση Brown ορίζει στον χώρο πιθανότητας στον οποίο ορίζεται μια φυσιολογική διήθηση. Την $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ με

$$\mathcal{F}_t := \sigma(\{B(s) : s \in [0,t]\})$$

για κάθε $t \in [0,\infty)$.

Πρόταση 5.7 (Μετατόπιση)**.** *Έστω B κίνηση Brown και $t_0 \ge 0$. Ορίζουμε την ανέλιξη X ως*

$$X(t) := B(t_0 + t) - B(t_0) \text{ για κάθε } t \in [0,\infty).$$

Τότε:

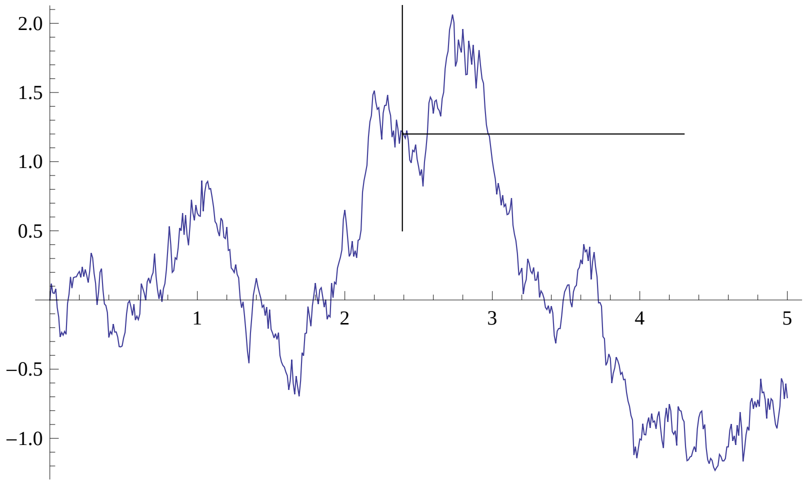
(i) Η X είναι τυπική κίνηση Brown.
(ii) Η X είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_{t_0}$.

Απόδειξη. (i) Ελέγχουμε τις ιδιότητες του ορισμού. Για $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$

$$\begin{aligned}&(X(t_1), X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1}))\\ &\quad = (B(t_0+t_1) - B(t_0), B(t_0+t_2) - B(t_0+t_1), B(t_0+t_3) - B(t_0+t_2), \ldots, B(t_0+t_n) - B(t_0+t_{n-1})).\end{aligned}$$

Οι συντεταγμένες του τελευταίου διανύσματος είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές επειδή η B είναι κίνηση Brown.

Για $0 \le s < t$, έχουμε $X(t) - X(s) = B(t_0 + t) - B(t_0 + s) \sim N(0, s - t)$ επειδή η B είναι κίνηση και $(t_0 + t) - (t_0 + s) = t - s$.



Σχήμα 5.2: Η Πρόταση 5.7 λέει ότι τοποθετώντας νέους άξονες στο $(t_0, B(t_0))$, η ανέλιξη δεξιά του νέου συστήματος αξόνων είναι τυπική κίνηση Brown και ανεξάρτητη από το παρελθόν.

Τέλος, με πιθανότητα 1, η συνάρτηση $t \mapsto X(t)$ είναι συνεχής αφού η B είναι συνεχής με πιθανότητα 1. Το $B(t_0)$ είναι απλώς ένας αριθμός που εξαρτάται από το ω αλλά όχι από το t.

(ii) Η απόδειξη είναι τεχνική και δίνεται στο Παράρτημα Γ΄. ∎

Η προηγούμενη πρόταση λέει ότι για δεδομένο $t_0 > 0$, η κίνηση Brown ξαναγεννιέται τη χρονική στιγμή t_0 με την έννοια ότι αυτό που ακολουθεί επηρεάζεται από το παρελθόν $\{B(s) : s \in [0, t_0]\}$ μόνο από την τιμή $B(t_0)$. Το υπόλοιπο τμήμα της κίνησης, δηλαδή το $B(t_0 + t) - B(t_0) : t \geq 0$, είναι κάτι εντελώς καινούργιο. Δεν εξαρτάται από το παρελθόν. Εναλλακτικά, αν παρατηρούμε το γράφημα $\{(t, B(t)) : t \geq 0\}$ της κίνησης Brown και τοποθετήσουμε την αρχή των αξόνων στο $(t_0, B(t_0))$, η κίνηση που θα δούμε δεξιά από το $(0, 0)$ του νέου συστήματος συντεταγμένων είναι πάλι κίνηση Brown και μάλιστα ανεξάρτητη από το παρελθόν. Συνέπεια αυτής της ιδιότητας είναι ότι η B είναι ανέλιξη Markov ως προς τη διήθηση που παράγει.

Πρόταση 5.8. *Έστω B τυπική κίνηση Brown. Ορίζουμε την ανέλιξη X ως*

$$X(t) := -B(t) \text{ για κάθε } t \in [0, \infty).$$

Τότε η X είναι τυπική κίνηση Brown.

Απόδειξη. Όμοια όπως στο (i) της Πρότασης 5.7. ∎

Πρόταση 5.9 (Αλλαγή κλίμακας)**.** *Έστω B τυπική κίνηση Brown και $c \neq 0$. Ορίζουμε την ανέλιξη X ως*

$$X(t) := \frac{1}{c} B(c^2 t) \text{ για κάθε } t \in [0, \infty).$$

Τότε η X είναι τυπική κίνηση Brown.

Απόδειξη. Όμοια όπως στο (i) της Πρότασης 5.7. ∎

Παρατήρηση 5.10. Η ιδιότητα αλλαγής κλίμακας είναι πολύ χρήσιμη σε υπολογισμούς. Για παράδειγμα, για $a \neq 0$, αν ορίσουμε $T_a^B := \inf\{t \geq 0 : B(t) = a\}$ τον χρόνο που απαιτείται ώστε η τυπική κίνηση Brown B να πάρει την τιμή a, τότε

$$T_a^B \stackrel{d}{=} a^2 T_1^B.$$

Πράγματι, επειδή για την κίνηση Brown $X^a := B(a^2 \cdot)/a$ έχουμε $B(t) = a \Leftrightarrow X^a(t/a^2) = 1$, έπεται ότι $T_a^B = a^2 T_1^{X^a} \stackrel{d}{=} a^2 T_1^B$.

Η επόμενη ιδιότητα της κίνησης Brown συσχετίζει τη συμπεριφορά της στο 0 με αυτήν στο ∞.

Πρόταση 5.11 (Αντιστροφή χρόνου)**.** *Έστω B τυπική κίνηση Brown. Ορίζουμε την ανέλιξη X ως*

$$X(t) := \begin{cases} tB(1/t) & \text{για κάθε } t > 0, \\ 0 & \text{για } t = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Η X είναι τυπική κίνηση Brown.

Η απόδειξη της πρότασης δίνεται στο Παράρτημα Γ′. Μια συνέπεια της είναι ότι με πιθανότητα 1 η X είναι συνεχής στο 0 και άρα με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B(t)}{t} = 0. \tag{5.2}$$

Παρατήρηση 5.12 (Υπολογισμοί με την κίνηση Brown)**.** Σε υπολογισμούς με την κίνηση Brown χρησιμοποιούμε:
(α) Την ιδιότητα των ανεξάρτητων προσαυξήσεων και την συνέπεια της ότι για $0 \le s < t$

$$\text{η } B(t) - B(s) \text{ είναι ανεξάρτητη από την σ-άλγεβρα } \mathcal{F}_s. \tag{5.3}$$

Αυτό γιατί με βάση την Πρόταση 5.7 η ανέλιξη Y με $Y(r) = B(s+r) - B(s)$ για κάθε $r \ge 0$ είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}_s$ και $B(t) - B(s) = Y(t-s)$.
(β) Στην περίπτωση της τυπικής κίνησης Brown το ότι για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$B(t) \overset{d}{=} \sqrt{t}B(1). \tag{5.4}$$

Αυτό είναι σωστό γιατί και τα δύο μέλη έχουν κατανομή $N(0,t)$. Προσοχή όμως. Οι ανελίξεις $(B(t))_{t\ge0}$ και $(X(t))_{t\ge0}$ με $X(t) = \sqrt{t}B(1)$ είναι διαφορετικές. Κάθε μονοπάτι της X είναι απλώς ένα (τυχαίο) πολλαπλάσιο της συνάρτησης $\sqrt{t}$, ενώ αυτό δεν ισχύει για τα μονοπάτια της B. Αυτό που ισχύει είναι ότι οι B, X έχουν τις ίδιες κατανομές διάστασης 1 (δες Ορισμό 4.3), δηλαδή αυτό που λέει η (5.4), αλλά έχουν διαφορετικές κατανομές [οι οποίες είναι μέτρα στον $C([0,\infty))$]. Διαφορετικές είναι ακόμα και οι κατανομές τους διάστασης 2 (Άσκηση).

Για παραδειγμα, στον υπολογισμό

$$\mathbf{E}\left(\int_0^1 e^{B(s)}\,ds\right) = \int_0^1 \mathbf{E}(e^{B(s)})\,ds = \int_0^1 \mathbf{E}(e^{\sqrt{s}B(1)})\,ds = \int_0^1 e^{s/2}\,ds,$$

εφαρμόζουμε την (5.4) χωριστά για κάθε s. Δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι $\int_0^1 e^{B(s)}\,ds \overset{d}{=} \int e^{\sqrt{s}B(1)}\,ds$.

Στο δεξί μέλος της (5.4) φυσικά αντί της $B(1)$ μπορούμε να βάλουμε μια $Z \sim N(0,1)$ η να γράψουμε $W(1)$ όπου W είναι μια άλλη τυπική κίνηση Brown.

Όμοια όπως στην (5.4), ισχύει $B(t) - B(s) \overset{d}{=} \sqrt{|t-s|}B(1)$ για κάθε $s, t \ge 0$. Έτσι αναγόμαστε σε υπολογισμούς που αφορούν την κατανομή $N(0,1)$.

5.3 Επισκέψεις στο 0

Όπως θα φανεί στο Κεφάλαιο 8, η κίνηση Brown έχει αρκετά ακανόνιστο γράφημα. Για παράδειγμα, το μήκος του περιορισμού του γραφήματος σε οποιοδήποτε διάστημα είναι άπειρο ενώ η ίδια η κίνηση, ως συνάρτηση του χρόνου, δεν είναι διαφορίσιμη πουθενά. Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε ότι μόλις ξεκινάει από το μηδέν, αμέσως παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές. Δηλαδή δεν είναι δυνατόν να υπάρχει διάστημα $(0,\varepsilon)$ όπου η κίνηση να διατηρεί πρόσημο.

Θεωρούμε τους τυχαίους χρόνους

$$\begin{aligned} T^- &:= \inf\{t > 0 : B(t) < 0\}, \\ T^+ &:= \inf\{t > 0 : B(t) > 0\}. \end{aligned}$$

Πρόταση 5.13. *Έστω B τυπική κίνηση Brown. Τότε με πιθανότητα 1, ισχύει*

$$T^- = T^+ = 0.$$

Απόδειξη. Ανάλογα όπως στην Παρατήρηση 5.10, δείχνουμε ότι για κάθε $a \neq 0$ ισχύει $T^+ \stackrel{d}{=} a^2 T^+$. Οπότε για κάθε $x, c > 0$ έχουμε

$$\mathbf{P}(T^+ > x) = \mathbf{P}(cT^+ > x) = \mathbf{P}(T^+ > x/c).$$

Για $c \to 0^+$ η τελευταία ποσότητα συγκλίνει στην $\mathbf{P}(T^+ = \infty)$. Έπεται λοιπόν ότι $\mathbf{P}(T^+ \in \{0, \infty\}) = 1$. Όμως

$$\mathbf{P}(T^+ = \infty) \leq \mathbf{P}(T_1 = \infty),$$

όπου $T_1 := \inf\{t \geq 0 : B(t) = 1\}$, και η τελευταία πιθανότητα είναι 0, όπως θα δείξουμε στην Πρόταση 7.3. Έτσι ο ισχυρισμός για το T^+ αποδείχθηκε. Για το T^- έπεται όμοια ή με χρήση της Πρότασης 5.8 και του αποτελέσματος για το T^+. ∎

Έπεται από την προηγούμενη πρόταση και τη συνέχεια της κίνησης Brown ότι με πιθανότητα 1,

$$\inf\{t > 0 : B(t) = 0\} = 0.$$

Επομένως, υπάρχει ακολουθία μηδενικών της B που τείνουν στο 0.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι το σύνολο

$$Z := \{t \in [0, \infty) : B(t) = 0\}$$

έχει Lebesgue μέτρο 0.

Πρόταση 5.14. *Με πιθανότητα 1 ισχύει $\lambda(Z) = 0$.*

Με λ συμβολίζουμε το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini, υπολογίζουμε

$$\mathbf{E}\{\lambda(Z)\} = \mathbf{E}\left(\int_0^\infty \mathbf{1}_{B(s)=0}\, ds\right) = \int_0^\infty \mathbf{E}(\mathbf{1}_{B(s)=0})\, ds = \int_0^\infty \mathbf{P}(B(s) = 0)\, ds = 0,$$

αφού η $B(s)$ είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή [έχει κατανομή $N(0, s)$]. Το συμπέρασμα έπεται. ∎

Η τελευταία πρόταση λέει ότι κατά μια έννοια το σύνολο Z είναι μικρό. Από την άλλη, θα δείξουμε στην Πρόταση 6.6 ότι είναι ένα τέλειο σύνολο (είναι κλειστό και κάθε σημείο του είναι σημείο συσσώρευσης του), επομένως υπεραριθμήσιμο. Επίσης μπορεί να δειχθεί ότι έχει διάσταση Hausdorff 1/2.

5.4 Συμπεριφορά στο άπειρο*

Η κίνηση Brown παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές για οσοδήποτε μεγάλους χρόνους. Μάλιστα ισχύει ότι $\overline{\lim}_{t\to\infty} B_t = \infty, \underline{\lim}_{t\to\infty} B_t = -\infty$. Εμείς θα αποδείξουμε κάτι ισχυρότερο.

Πρόταση 5.15. *Για την τυπική κίνηση Brown B με πιθανότητα 1 ισχύει*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{B(t)}{\sqrt{t}} = \infty, \qquad \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{B(t)}{\sqrt{t}} = -\infty.$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} = \infty.$$

Θέτουμε $X_k := B(k) - B(k-1)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^+$. Οι τυχαίες μεταβλητές $(X_k)_{k\geq 1}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Για $C > 0$ σταθερό και κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ θέτουμε $A_n(C) := \{B(n) \geq C\sqrt{n}\}$. Τότε

$$A(C) := \left\{ \varlimsup_{n\to\infty} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} \geq C \right\} \supset \limsup_{n\geq 1} A_n(C)$$

και

$$\mathbf{P}(\limsup_{n\geq 1} A_n(C)) \geq \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n(C)) = \mathbf{P}(B(1) \geq C) > 0.$$

Η πρώτη ανισότητα είναι γνωστή ιδιότητα των μέτρων πιθανότητας και η ισότητα έπεται από την ιδιότητα αλλαγής κλίμακας της κίνησης Brown. Άρα το σύνολο $A(C)$ έχει θετική πιθανότητα. Από την άλλη, ανήκει στην τελική σ-άλγεβρα των $(X_k)_{k\geq 1}$. Από τον νόμο 0-1 του Kolmogorom, έπεται ότι το $A(C)$ έχει πιθανότητα 1. Άρα και το

$$\left\{ \varlimsup_{n\to\infty} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} = \infty \right\} = \cap_{k=1}^{\infty} A(k)$$

έχει πιθανότητα 1.

Για το δεύτερο όριο, παρατηρούμε ότι η $-B$ είναι επίσης τυπική κίνηση Brown, άρα από το πρώτο όριο έχουμε με πιθανότητα 1 ότι $\varlimsup_{t\to\infty}(-B(t)/\sqrt{t}) = \infty$ που σημαίνει ότι $\varliminf_{t\to\infty}(B(t)/\sqrt{t}) = -\infty$. Σε ένα σύνολο με πιθανότητα 1 τα δύο όρια έχουν τις τιμές ∞ και $-\infty$ αντίστοιχα. ■

Καλύτερη εικόνα για τη συμπεριφορά της κίνησης Brown στο άπειρο δίνει ο νόμος του επαναλαμβανόμενου λογαρίθμου (Θεώρημα 8.8.1 στο Durrett (2010)), που λέει ότι

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1, \qquad \varliminf_{t\to\infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} = -1. \tag{5.5}$$

Μάλιστα, τα σημεία συσσώρευσης του δικτύου

$$\left(\frac{B(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} \right)_{t>0}$$

(για $t \to \infty$) είναι ολόκληρο το διάστημα $[-1, 1]$.

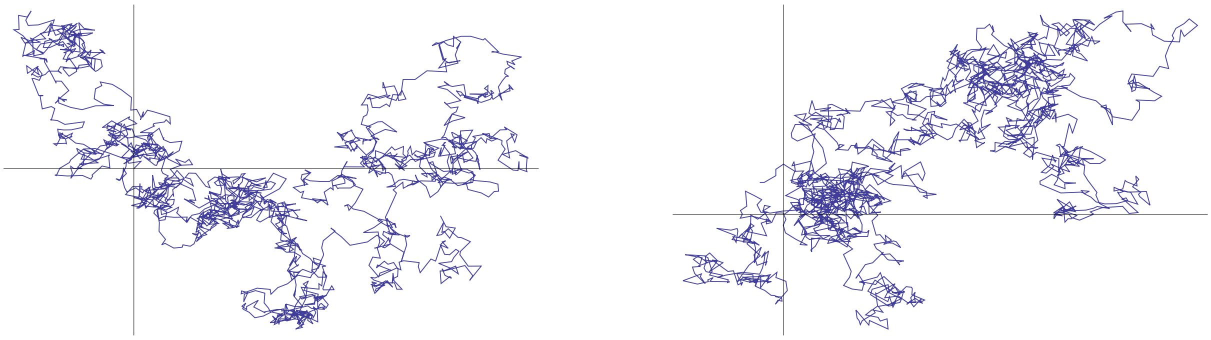
5.5 Πολυδιάστατη κίνηση Brown

Ορισμός 5.16. Έστω $d \geq 1$ φυσικός αριθμός και $B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(d)}$ ανεξάρτητες μονοδιάστατες κινήσεις Brown. Ονομάζουμε **d-διάστατη κίνηση Brown** την ανέλιξη

$$B(t) = \begin{pmatrix} B^{(1)}(t) \\ B^{(2)}(t) \\ \vdots \\ B^{(d)}(t) \end{pmatrix}, \ t \in [0, \infty).$$

Όταν $B(0) = 0 \in \mathbb{R}^d$ για όλα τα $\omega \in \Omega$, λέμε ότι η B είναι d-διάστατη τυπική κίνηση Brown.

Η d-διάστατη κίνηση Brown περιγράφει την κίνηση ενός σωματιδίου στον $\mathbb{R}^d$. Σε κάθε συντεταγμένη η κίνηση του σωματιδίου είναι μια μονοδιάστατη κίνηση Brown και οι κινήσεις Brown που



Σχήμα 5.3: Δυό πραγματοποιήσεις της τυπικής διδιάστατης κίνησης Brown για το χρονικό διάστημα $[0,1]$. Ζωγραφίζουμε την εικόνα της B στο διάστημα $[0,1]$ και όχι το γράφημα της.

αντιστοιχούν στις d συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες. Η κίνηση που απασχόλησε τους Brown και Einstein ήταν η τριδιάστατη κίνηση Brown.

Σχετικά με το σημείο εκκίνησης της πολυδιάστατης κίνησης Brown και τον χρησιμοποιούμενο συμβολισμό, ισχύουν αυτά που είπαμε στην Παρατήρηση 5.2 για τη μονοδιάστατη περίπτωση.

Για την πολυδιάστατη κίνηση Brown ισχύουν τα ανάλογα των Προτάσεων 5.6 και 5.7. Για την Πρόταση 5.7 η διήθηση που θεωρούμε είναι η $\mathcal{F}_t := \sigma(\{B(s) : s \in [0,t]\})$ για κάθε $t \in [0,\infty)$.

5.6 Η κίνηση Brown ως φυσιολογικό αντικείμενο

Η κίνηση Brown είναι το συνεχές ανάλογο του απλού τυχαίου περιπάτου $\mathbb{Z}$ (Παράγραφος 3.1). Οι δυό αυτές ανελίξεις συνδέονται με πολλούς τρόπους και εδώ θα περιγράψουμε έναν από αυτούς, ίσως τον πιο απλό.

Έστω $(S_n)_{n\geq 0}$ ο απλός τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}$. Αν τον θεωρήσουμε ως τυχαία συνάρτηση, το γράφημά της είναι το διακριτό σύνολο σημείων $\{(k,S_k) : k \in \mathbb{N}\}$. Ενώνοντας διαδοχικά σημεία με ευθύγραμμα τμήματα, φτιάχνουμε μια συνεχή συνάρτηση $S : [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$S(x) := \begin{cases} S_x & \text{αν } x \in \mathbb{N}, \\ \text{γραμμική επέκταση} & \text{σε κάθε διάστημα } [k,k+1] \text{ με } k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{5.6}$$

Τυπικά, η S ισούται με

$$S(x) = \{1-(x-[x])\}S_{[x]} + (x-[x])S_{[x]+1} = S_{[x]} + (x-[x])(S_{[x]+1} - S_{[x]})$$

για κάθε $x \in [0,\infty)$.

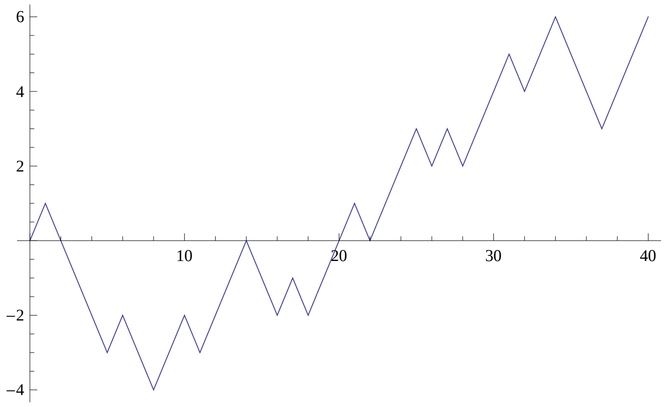
Για $n \in \mathbb{N}^+$ θεωρούμε τη συνάρτηση $S_n^* : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$S_n^*(t) = \frac{S(nt)}{\sqrt{n}} \tag{5.7}$$

για κάθε $t \in [0,\infty)$. Με άλλα λόγια, το γράφημα της S_n^* προκύπτει αν πάρουμε το γράφημα της S και συρρικνώσουμε τον μεν οριζόντιο άξονα κατά $1/n$ τον δε κάθετο κατά $1/\sqrt{n}$.
Αυτό που ισχύει είναι ότι:

Για μεγάλο n, η ανέλιξη S_n^* προσεγγίζει την κίνηση Brown.

Δηλαδή, αν θέλει να δει κανείς μια πραγματοποίηση της κίνησης Brown, αρκεί να πάρει μεγάλο n και να κάνει μια πραγματοποίηση της S_n^*. Αυτή η ασαφής πρόταση είναι μια απλουστευμένη διατύπωση ενός θεωρήματος το οποίο θα διατυπώσουμε τώρα.



Σχήμα 5.4: Το γράφημα της συνάρτησης S στο διάστημα $[0, 40]$ για μια πραγματοποίση του τυχαίου περιπάτου.

Θεωρούμε το χώρο $C[0, \infty)$ με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα του $[0, \infty)$ και ένα χώρο πιθανότητας $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbf{P}})$ στον οποίο συμβολίζουμε τη μέση τιμή με $\widetilde{\mathbf{E}}$ και στον οποίο είναι ορισμένη μια κίνηση Brown B.

Έπειτα θεωρούμε $(X_n)_{n\ge 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{E}(X_1) = 0$, $\mathrm{Var}(X_1) = 1$. Θέτουμε $S_0 = 0, S_n := X_1 + \cdots + X_n$ για κάθε $n \ge 1$ και ορίζουμε τις συναρτήσεις S και S_n^* όπως στις (5.6), (5.7).

Παρατηρήστε ότι η $(S_n^*)_{n\ge 1}$ είναι ακολουθία τυχαίων μεταβλητών η οποία παίρνει τιμές στο $C[0, \infty)$. Στο ίδιο σύνολο παίρνει τιμές και η B.

Θεώρημα 5.17 (Donsker)**.** *Η ακολουθία $(S_n^*)_{n\ge 1}$ συγκλίνει κατά κατανομή στη B.*

Αν θυμηθούμε τον της σύγκλισης κατά κατανομή, αυτό σημαίνει ότι για κάθε συνάρτηση $F : C[0, \infty) \to \mathbb{R}$ συνεχή και φραγμένη ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\, F(S_n^*) = \widetilde{\mathbf{E}} F(B).$$

Την απόδειξη του θεωρήματος μπορεί να βρεί κανείς σε βιβλία που ασχολούνται με την κίνηση Brown, για παράδειγμα, στο Karatzas and Shreve (1991), Θεώρημα 4.20 του Κεφαλαίου 2.

Το θεώρημα Donsker περιέχει το κεντρικό θεώρημα. Γιατί για $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχή και φραγμένη, παίρνουμε τη συνεχή και φραγμένη συνάρτηση $F : C[0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $F(f) = g(f(1))$. Δηλαδή η F από το μονοπάτι f κοιτάει μόνο την τιμή του στο 1. Τότε

$$F(S_n^*) = g\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right),$$

$F(B) = g(B(1))$, και το θεώρημα δίνει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\, g\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \widetilde{\mathbf{E}} g(B(1)),$$

που σημαίνει ότι

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow B(1).$$

Όμως $B(1) \sim N(0, 1)$, άρα αυτό είναι το κεντρικό οριακό θεώρημα.

Παράδειγμα 5.18. Έστω $(S_n)_{n\ge 0}$ ο απλός τυχαίος περίπατος. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\mathbf{P}\left(\frac{\max_{1\le k\le n} S_k}{\sqrt{n}} < x\right) \to \widetilde{\mathbf{P}}(\max_{t\in[0,1]} B(t) < x)$$

καθώς $n \to \infty$.

Πράγματι, ο ισχυρισμός έπεται αν εφαρμόσουμε το θεώρημα Donsker για τη συνάρτηση $F : C[0,\infty) \to \mathbb{R}$ με $F(f) = 1_{\max\{f(t):t\in[0,1]\}<x}$, η οποία είναι φραγμένη και συνεχής. Η πιθανότητα $\widetilde{\mathbf{P}}(\max_{t\in[0,1]} B(t) < x)$, που εμφανίζεται στο όριο, υπολογίζεται στο Πόρισμα 6.4.

Ασκήσεις

Στις ασκήσεις πιο κάτω, B είναι μια τυπική κίνηση Brown.

5.1 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(t) = \mathbf{P}(B(t) > t)$ για κάθε $t > 0$.

(α) Να δειχθεί ότι η f είναι φθίνουσα.

(β) Ποια είναι η παράγωγός της;

5.2 Για $s, t \geq 0$ να δειχθεί ότι $\mathrm{Cov}(B^2(t), B^2(s)) = \mathrm{Var}(B^2(s \wedge t)) = 2(s \wedge t)^2$.

5.3 Έστω $n \in \mathbb{N}^+$, χρόνοι $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, και σταθερές $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η τυχαία μεταβλητή

$$a_1 B(t_1) + \cdots + a_n B(t_n)$$

ακολουθεί την κανονική κατανομή. Ποια είναι η μέση τιμή και διασπορά της;

5.4* Έστω $0 \leq r < s < t$. Να δειχθεί ότι η $B(s) - B(r) \,|\, (B(r), B(t))$ ακολουθεί την κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με

$$\mu := \frac{s-r}{t-r}(y-x), \ \sigma^2 = \frac{s-r}{t-r}(t-s),$$

και $x = B(r), y = B(s)$.
Αυτή η ιδιότητα μας επιτρέπει να προσομοιώνουμε ακριβώς οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος σημείων στο μονοπάτι της κίνησης Brown. Για παράδειγμα, θέτουμε $B(0) = 0$ και ξέρουμε ότι η $B(1) \sim N(0,1)$, άρα προσομοιώνουμε την τιμή της ακριβώς. Έπειτα προσομοιώνουμε τη $B(1/2)$ με χρήση της άσκησης και μπορούμε να συνεχίσουμε προσομοιώνοντας τις τιμές $B(1/4), B(3/4)$.

5.5 Έστω $t > 0$. Να δειχθεί ότι η $X = \int_0^t B(s)\, ds$ ακολουθεί την κατανομή $N(0, t^3/3)$.

5.6 Για $t > 0$ να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $Y = \int_0^t B^2(s)\, ds$.

5.7 Έστω $a > 0$. Να δειχθεί ότι η ανέλιξη X με $X(t) := B(a-t) - B(a)$ για κάθε $t \in [0, a]$ είναι κίνηση Brown στο $[0, a]$.

5.8 Έστω $Z := \{s > 0 : B(s) = 0\}$ το σύνολο των μηδενικών της B. Να δειχθεί ότι για κάθε $a > 0$ ισχύει $Z \stackrel{d}{=} a^2 Z$ και άρα η $\mathbf{E}\{\lambda(Z)\} \in \{0, \infty\}$, όπου $\lambda(Z)$ είναι το μέτρο Lebesgue του συνόλου Z.

5.9 Έστω $t_0 \geq 0$. Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 η κίνηση Brown δεν έχει τοπικό ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο) στο t_0.

5.10* Έστω $t_0 \geq 0$. Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 η κίνηση Brown δεν είναι διαφορίσιμη στο t_0.

5.11 Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και φραγμένη συνάρτηση. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $F : C[0,\infty) \to \mathbb{R}$ με $F(f) = g(f(1))$ είναι συνεχής και φραγμένη.

5.12 Έστω $(S_n)_{n\geq 0}$ ο απλός τυχαίος περίπατος. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $(I_n)_{n\geq 1}$ με

$$I_n := \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} S_k^2$$

συγκλίνει κατά κατανομή στην τυχαία μεταβλητή $\int_0^1 B(t)^2\, dt$.

6

Η ισχυρή ιδιότητα Markov και συνέπειες*

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε ότι η κίνηση Brown σε κάθε διάσταση έχει την ισχυρή ιδιότητα Markov. Δηλαδή, για κάθε χρόνο διακοπής T, το μονοπάτι της κίνησης μετά τον χρόνο T επηρεάζεται από το παρελθόν $\{B(s) : s \in [0, T]\}$ μόνο μέσω της τιμής $B(T)$. Η ιδιότητα αυτή φανερώνει πολλά ποιοτικά χαρακτηριστικά του μονοπατιού της κίνησης, αλλά και διευκολύνει τον υπολογισμό ποσοτήτων σχετικών με αυτήν.

6.1 Η ισχυρή ιδιότητα Markov

Έστω $(B(t))_{t\geq 0}$ μια d-διάστατη κίνηση Brown ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ η διήθηση που ορίσαμε στην Παράγραφο 5.5.

Έχουμε δει ότι για κάθε σταθερό χρόνο $t_0 \geq 0$ η ανέλιξη $(B(t_0 + t) - B(t_0))_{t\geq 0}$ είναι τυπική κίνηση Brown ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_{t_0}$, την οποία κατανοούμε ως την «πληροφορία» μέχρι τον χρόνο t_0. Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε ότι το ίδιο ισχύει αν, αντί του σταθερού χρόνου t_0, έχουμε οποιονδήποτε χρόνο διακοπής T που παίρνει πεπερασμένες τιμές. Έστω λοιπόν T χρόνος διακοπής. Υπενθυμίζουμε (δες Παράγραφο 4.4) ότι η σ-άλγεβρα που κωδικοποιεί τη διαθέσιμη πληροφορία ως τον τυχαίο χρόνο T είναι η

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ για κάθε } t \geq 0\}. \tag{6.1}$$

Το κύριο αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου είναι το ακόλουθο θεώρημα, του οποίου η απόδειξη δίνεται στο Παράρτημα Γ′ .

Θεώρημα 6.1. *Έστω B μια d-διάστατη κίνηση Brown και T χρόνος διακοπής που με πιθανότητα 1 παίρνει πεπερασμένες τιμές. Τότε η ανέλιξη $(B(T + t) - B(T))_{t\geq 0}$ είναι κίνηση Brown ανεξάρτητη από τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_T$.*

Συνέπεια του θεωρήματος αυτού είναι η ισχυρή ιδιότητα Markov που λέει ότι η κατανομή της $\{B(t) : t \geq T\}$ με δεδομένο το παρελθόν $\mathcal{F}_T$ είναι η ίδια με την κατανομή της αν δεδομένη είναι μόνο η τιμή $B(T)$. Αυτό γιατί

$$B(t) = B(T) + B(t) - B(T),$$

και άρα η $\{B(t) : t \geq T\}$ καθορίζεται από την τιμή $B(T)$ και την ανέλιξη $\{B(t) - B(T) : t \geq T\}$ που είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν $\mathcal{F}_T$.
Στο υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου, B θα συμβολίζει μια μονοδιάστατη κίνηση Brown.
Χρόνοι για τους οποίους μπορούμε να εφαρμόσουμε το προηγούμενο θεώρημα είναι οι εξής:

$$T_1 := \inf\{t \geq 0 : B(t) = 2\}, \tag{6.2}$$

$$T_2 := \inf\{t \geq 0 : B(t) \in \{-2, 3\}\}, \tag{6.3}$$

$$T_3 := \inf\{t \geq 1 : B(t) = \max_{s\in[0,1]} B(s)\}. \tag{6.4}$$

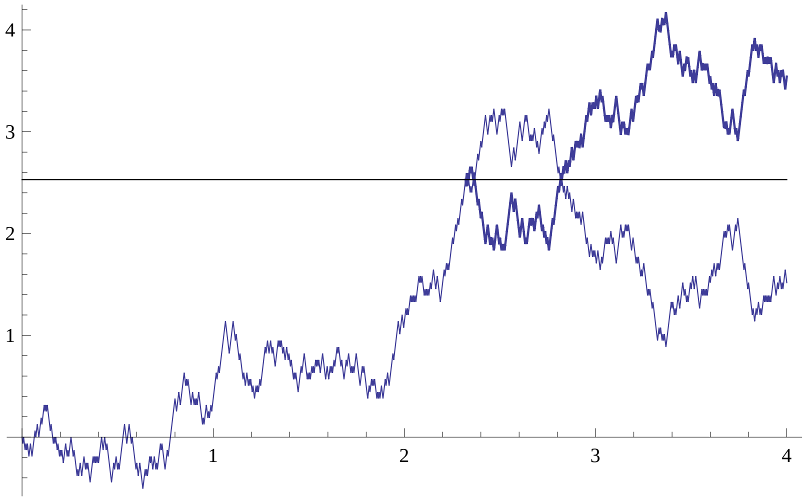
Παράδειγμα 6.2. Έστω ότι $B(0) = 0$. Θα δείξουμε ότι ο χρόνος

$$T := \max\{t \in [0, 1] : B(t) = 0\}$$

δεν είναι χρόνος διακοπής, το οποίο διαισθητικά είναι προφανές. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι με πιθανότητα 1 ισχύει $B(1) \neq 0$ και επειδή $B(0) = 0$, έπεται ότι $T \in [0, 1)$ με πιθανότητα 1. Από τον ορισμό του T έχουμε ότι η ανέλιξη $\{B(T + t) - B(T) : t \geq 0\}$ μένει διαφορετική από το 0 στο διάστημα $(0, 1 - T)$, άρα εξαιτίας της Πρότασης 5.13 δεν μπορεί να είναι τυπική κίνηση Brown. Το πιο πάνω θεώρημα συνεπάγεται ότι ο T δεν είναι χρόνος διακοπής.

6.2 Η αρχή της ανάκλασης

Από τις πολλές εφαρμογές της ισχυρής ιδιότητας Markov απομονώνουμε σε αυτή την παράγραφο την αρχή της ανάκλασης. Σύμφωνα με αυτήν, αν από ένα χρόνο διακοπής T και μετά αντικαταστήσουμε το μονοπάτι της κίνησης Brown με την ανάκλαση του ως προς την ευθεία $y = B(T)$, το μονοπάτι που προκύπτει είναι και αυτό κίνηση Brown.



Σχήμα 6.1: Τα γραφήματα των B και $\hat{B}$ της Πρότασης 6.3 στην περίπτωση που $T = T_a$. Με παχύτερη γραμμή απεικονίζεται το γράφημα της $\hat{B}$ μετά τον χρόνο που ξεκινάει η ανάκλαση. Στο συγκεκριμένο σχήμα $a = 2.53$ και $T_a \approx 2.32$

Πρόταση 6.3 (Αρχή της ανάκλασης)**.** *Έστω B τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown και T χρόνος διακοπής πεπερασμένος με πιθανότητα 1. Τότε η ανέλιξη $(\hat{B}(t) : t \geq 0\}$ με*

$$\hat{B}(t) = \begin{cases} B(t) & \text{αν } t \leq T, \\ B(T) - (B(t) - B(T)) & \text{αν } t > T \end{cases}$$

είναι τυπική κίνηση Brown.

Στο Σχήμα 6.1 φαίνεται πώς προκύπτει η $\hat{B}$ από τη B.

Απόδειξη. Έστω $B^{(1)}$ ο περιορισμός της B στο $[0, T]$, και $B^{(2)} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $B^{(2)}(t) = B(T + t) - B(T)$ για κάθε $t \geq 0$. Οι δύο συναρτήσεις εξαρτώνται επίσης από το $\omega \in \Omega$ αλλά το παραλείπουμε. Τις βλέπουμε ως τυχαίες συναρτήσεις. Το Θεώρημα 6.1 δίνει ότι η $B^{(2)}$ είναι ανεξάρτητη από τα $B^{(1)}, T$ και είναι μια τυπική κίνηση Brown. Άρα $B^{(2)} \stackrel{d}{=} -B^{(2)}$ και συνδυάζοντας αυτό με την ανεξαρτησία έχουμε

$$(B^{(1)}, B^{(2)}) \stackrel{d}{=} (B^{(1)}, -B^{(2)}). \tag{6.5}$$

Το συμπέρασμα έπεται γιατί η B είναι το αποτέλεσμα της συγκόλησης των γραφημάτων των $B^{(1)}, B^{(2)}$, ενώ η $\hat{B}$ είναι το αποτέλεσμα της συγκόλησης των γραφημάτων των $B^{(1)}, -B^{(2)}$.

Γράφουμε πιο λεπτομερειακά το τελευταίο επιχείρημα. Έστω $C^< = \cup_{t>0} C([0,t])$ και $G : C^< \times C([0,\infty)) \to C([0,\infty))$ η απεικόνιση η τιμή $G(f,g)$ της οποίας είναι η συνάρτηση που προκύπτει με «συγκόλληση» της g μετά την f. Δηλαδή, αν $f : [0,t] \to \mathbb{R}$ και $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, η $G(f,g)$ έχει τιμές

$$G(f,g)(s) = \begin{cases} f(s) & \text{αν } s \in [0,t], \\ f(t) + g(s-t) - g(0) & \text{αν } s \in [t,\infty). \end{cases}$$

Η G είναι μετρήσιμη (παραλείπουμε τον ορισμό της κατάλληλης σ-άλγεβρας στο πεδίο ορισμού της G και την απόδειξη της μετρησιμότητας), $B = G(B^{(1)}, B^{(2)})$, και $\hat{B} = G(B^{(1)}, -B^{(2)})$ αφού για $t > T$ έχουμε

$$G(B^{(1)}, -B^{(2)})(t) = B^{(1)}(T) + (-B^{(2)}(s-T) + B^{(2)}(0)) = 2B(T) - B(t).$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις αυτές με την (6.5) έχουμε το αποτέλεσμα. ■

Στο υπόλοιπο της παραγράφου θα δούμε δύο εφαρμογές της αρχής της ανάκλασης. Θέτουμε

$$M(t) := \sup\{B(s) : s \in [0,t]\}$$

για κάθε $t \geq 0$, το τρέχον μέγιστο της κίνησης Brown.

Πόρισμα 6.4. *Έστω B τυπική κίνηση Brown. Για κάθε $t, a > 0$ ισχύει*

$$\mathbf{P}(M(t) > a) = 2\,\mathbf{P}(B(t) > a). \tag{6.6}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την αρχή της ανάκλασης για τον χρόνο διακοπής $T_a := \inf\{s \geq 0 : B(t) = a\}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(M(t) > a) &= \mathbf{P}(M(t) > a, B(t) > a) + \mathbf{P}(M(t) > a, B(t) < a) \\ &= \mathbf{P}(B(t) > a) + \mathbf{P}(\hat{B}(t) > a) = 2\,\mathbf{P}(B(t) > a).\end{aligned}$$

Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε πρώτα ότι $\{B(t) > a\} \subset \{M(t) > a\}$ και έπειτα ότι το γεγονός $\{M(t) > a, B(t) < a\}$ συμβαίνει ακριβώς όταν συμβαίνει το $\hat{B}(t) > a$ [η $\hat{B}(t) > a$ συνεπάγεται ότι $T_a < t$ και $\hat{B}(t) = 2B(T_a) - B(t) = 2a - B(t)$, οπότε $B(t) < a$]. Η τρίτη ισότητα είναι συνέπεια της αρχής της ανάκλασης. ■

Η (6.6) προσδιορίζει την κατανομή της $M(t)$ αφού το δεξί μέλος είναι κάτι γνωστό. Γράφεται και ως $2\,\mathbf{P}(B(1) > a/\sqrt{t}) = 2\{1 - \Phi(a/\sqrt{t})\}$, όπου Φ είναι η συνάρτηση κατανομής της $N(0,1)$. Παραγωγίζοντας ως προς a, παίρνουμε την πυκνότητα της $M(t)$.

Παρατηρούμε επίσης ότι το δεξί μέλος της (6.6) ισούται με $\mathbf{P}(|B(t)| > a)$ επειδή $B(t) \stackrel{d}{=} -B(t)$. Άρα οι $M(t), |B(t)|$ έχουν την ίδια κατανομή (για t σταθερό). Όμως ως ανελίξεις οι $(M(t))_{t\geq 0}, (|B(t)|)_{t\geq 0}$ δεν έχουν την ίδια κατανομή, είναι πολύ διαφορετικές. Η M έχει μονοπάτια που είναι αύξουσες συναρτήσεις σε αντίθεση με την $|B|$ της οποίας τα μονοπάτια ταλαντώνονται.

Πόρισμα 6.5. *Για κάθε $a, t > 0$ και $x \in (-\infty, a]$ ισχύει*

$$\mathbf{P}(M(t) \geq a, B(t) \leq x) = \mathbf{P}(B(t) \geq 2a - x) = 1 - \Phi((2a - x)/\sqrt{t}). \tag{6.7}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την αρχή της ανάκλασης πάλι για τον χρόνο διακοπής $T_a := \inf\{s \geq 0 : B(t) = a\}$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(M(t) \geq a, B(t) \leq x) &= \mathbf{P}(T_a \leq t, \hat{B}(t) \geq 2a - x) \\ &= \mathbf{P}(\hat{B}(t) \geq 2a - x) = \mathbf{P}(B(t) \geq 2a - x).\end{aligned}$$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει γιατί $2a - x \geq a$ από την υπόθεση $x \leq a$ και η $\hat{B}(t) \geq a$ δίνει $T_a \leq t$. Η τρίτη ισότητα προκύπτει από την αρχή της ανάκλασης. ■

Όταν $x > a > 0$, βλέπουμε ότι

$$\mathbf{P}(M(t) \geq a, B(t) \leq x) = \mathbf{P}(B(t) \leq x) - \mathbf{P}(M(t) \leq a),$$

και συνδυάζοντας αυτή την ισότητα με την (6.7) βρίσκουμε ότι το ζευγάρι $(B(t), M(t))$ έχει από κοινού πυκνότητα

$$f_{B(t),M(t)}(x,a) = \frac{2(2a-x)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(2x-a)^2}{2t}} \mathbf{1}_{a \geq 0 \vee x}$$

στο $\mathbb{R}^2$.

6.3 Άλλες εφαρμογές

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος στον οποίο ορίζεται μια μονοδιάστατη κίνηση Brown B. Στις δύο παρακάτω προτάσεις, για σαφήνεια, σημειώνουμε την εξάρτηση από το $\omega \in \Omega$ αντικειμένων που είναι συναρτήσεις ορισμένες στο Ω. Για παράδειγμα, γράφουμε $B^\omega(t)$ για την τιμή της $B(t)$ στο ω.

Πρόταση 6.6. *Με πιθανότητα 1, το σύνολο $Z(\omega) := \{t \in [0,\infty) : B^\omega(t) = 0\}$ δεν έχει μεμονωμένα σημεία.*

Απόδειξη. Για κάθε $q \in [0,\infty) \cap \mathbb{Q}$ θέτουμε $\tau_q(\omega) := \inf\{s \geq q : B^\omega(s) = 0\}$. Ο τ_q είναι χρόνος διακοπής και είναι πεπερασμένος με πιθανότητα 1 (συνέπεια της Πρότασης 5.15). Επειδή $B^\omega(\tau_q) = 0$ (αφού η B^ω είναι συνεχής), η ισχυρή ιδιότητα Markov δίνει ότι η $(B(\tau_q + t))_{t\geq 0}$ είναι τυπική κίνηση Brown και άρα από την Πρόταση 5.13 ο χρόνος $\tau_q(\omega)$ προσεγγίζεται από δεξιά από σημεία του $Z(\omega)$. Άρα υπάρχει ένα $\Omega_q \subset \Omega$ με πιθανότητα 1 ώστε για κάθε $\omega \in \Omega_q$ να ισχύει ότι $\tau_q(\omega) < \infty$ και $\inf\{s > \tau_q(\omega) : B^\omega(s) = 0\} = \tau_q(\omega)$. Το $A := \cap_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,\infty)}\Omega_q$ έχει πιθανότητα 1, και ισχυριζόμαστε ότι για $\omega \in A$ ισχύει ότι το $Z(\omega)$ δεν έχει μεμονωμένα σημεία. Πράγματι, έστω $\omega \in A$ και $s \in Z(\omega)$. Αν το $s > 0$ είναι σημείο συσσώρευσης σημείων του $Z(\omega)$ από αριστερά, δεν έχουμε τίποτα επιπλέον να δείξουμε για αυτό. Αν δεν είναι, τότε υπάρχει ρητός $q \in (0, s)$ με $(q, s) \cap Z(\omega) = \emptyset$. Τότε $s = \tau_q(\omega)$ και, από την κατασκευή του A, το $\tau_q(\omega)$ είναι σημείο συσσώρευσης σημείων του $Z(\omega)$. Τέλος, αν $s = 0 \in Z(\omega)$, τότε $s = \tau_0(\omega)$, και άρα είναι και αυτό σημείο συσσώρευσης του $Z(\omega)$. ■

Άρα με πιθανότητα 1, το $Z(\omega)$ είναι κλειστό (αφού η B είναι συνεχής) χωρίς μεμονωμένα σημεία, δηλαδή τέλειο. Έπεται, επειδή επιπλέον είναι μη κενό, ότι είναι υπεραριθμήσιμο.

Πρόταση 6.7. *Για κάθε $t_0 > 0$, η πιθανότητα η $B|[t_0,\infty)$ να έχει τοπικό μέγιστο με τιμή $M(t_0)$ είναι 0.*

Απόδειξη. Το t_0 δεν είναι τοπικό ακρότατο της B (Άσκηση 5.9). Για $q \in (t_0,\infty)$ θέτουμε $\tau_q(\omega) := \inf\{s > q : B^\omega(s) = M^\omega(t_0)\}$. Η ισχυρή ιδιότητα Markov και η Πρόταση 5.13 δίνουν ότι σε ένα σύνολο $\Omega_q \subset \Omega$ που έχει πιθανότητα 1, το τ_q δεν είναι σημείο τοπικού μεγίστου για τη B. Το $A = \cap_{q\in(t_0,\infty)\cap\mathbb{Q}}\Omega_q$ έχει πιθανότητα 1 και για $\omega \in A$ η $B^\omega|[t_0,\infty)$ δεν έχει τοπικό μέγιστο με τιμή $M^\omega(t_0)$. Αφήνεται στον αναγνώστη η απόδειξη του τελευταίου ισχυρισμού. ■

Εφαρμογές της ισχυρής ιδιότητας Markov στην πολυδιάστατη κίνηση Brown θα δούμε στην Παράγραφο 13.2.

Ασκήσεις

6.1 Έστω B μονοδιάστατη κίνηση Brown. Να δειχθεί ότι ο χρόνος

$$T := \inf\{t \in [0,1] : B(t) = \max_{s\in[0,1]} B(s)\}$$

με πιθανότητα 1 είναι < 1 και έπειτα ότι δεν είναι χρόνος διακοπής.

6.2 Έστω B μονοδιάστατη κίνηση Brown. Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1
(α)* Δεν υπάρχουν δύο τοπικά ακρότατα της B στα οποία η κίνηση έχει την ίδια τιμή.
(β) Το σύνολο $\{t \in [0,\infty) : t$ σημείο τοπικού ακροτάτου της $B\}$ είναι αριθμήσιμο.

7

Martingales και κίνηση Brown

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε κάποια martingales που προκύπτουν από την κίνηση Brown και θα τα χρησιμοποιήσουμε για να κάνουμε υπολογισμούς ανάλογους με αυτούς των Παραδειγμάτων 3.18, 3.17. Πιο συγκεκριμένα θα βρούμε την πιθανότητα η τυπική κίνηση Brown να βγει από το αριστερό άκρο ενός διαστήματος που περιέχει το 0, τον μέσο χρόνο ωσότου να βγει από το διάστημα, και την ροπογεννήτρια του χρόνου ωσότου να περάσει από έναν δεδομένο πραγματικό αριθμό.

7.1 Martingales σχετικά με την κίνηση Brown

Συζητώντας για martingales σχετικά με την κίνηση Brown, θα χρησιμοποιήσουμε τη διήθηση που παράγει η ίδια η κίνηση, δηλαδή

$$\mathcal{F}_t := \sigma(\{B(s) : s \in [0, t]\}) \tag{7.1}$$

για κάθε $t \in [0, \infty)$.

Θεώρημα 7.1. *Έστω B τυπική κίνηση Brown. Οι ακόλουθες ανελίξεις είναι martingales.*

(i) $\{B(t) : t \geq 0\}$

(ii) $\{B(t)^2 - t : t \geq 0\}$

(iii) $\{e^{\lambda B(t) - \frac{\lambda^2}{2} t} : t \geq 0\}$, *με $\lambda \in \mathbb{R}$ δεδομένο.*

Απόδειξη. (i) Είναι προφανές ότι είναι προσαρμοσμένη. Έπειτα, για $t > 0$, η $B(t)$ έχει την κατανομή $N(0, t)$ της οποίας η απόλυτη τιμή έχει πεπερασμένο ολοκλήρωμα. Τέλος, για $0 \leq s < t$,

$$\mathbf{E}(B(t) \,|\, \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(B(t) - B(s) \,|\, \mathcal{F}_s) + \mathbf{E}(B(s) \,|\, \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(B(t) - B(s)) + B(s) = B(s).$$

Η δεύτερη ισότητα έπεται από την Πρόταση 5.7(ii), ενώ η τελευταία από το ότι η $B(t) - B(s)$ έχει μέση τιμή 0 και η $B(s)$ είναι $\mathcal{F}_s$-μετρήσιμη.

(ii) Ελέγχουμε μόνο την τρίτη απαίτηση του ορισμού του martingale. Για $0 \leq s < t$, έχουμε

$$B(t)^2 - t = \{B(t) - B(s) + B(s)\}^2 - t = \{B(t) - B(s)\}^2 + B(s)^2 + 2\{B(t) - B(s)\}B(s) - t,$$

και άρα παίρνοντας δεσμευμένη μέση τιμή υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(B(t)^2 - t \,|\, \mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}(\{B(t) - B(s)\}^2) + B(s)^2 + 2B(s)\,\mathbf{E}(B(t) - B(s) \,|\, \mathcal{F}_s) - t \\ &= t - s + B(s)^2 + 0 - t = B(s)^2 - s. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε ότι η $B(t) - B(s)$ είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}_s$, έχει μέση τιμή 0 και διασπορά $t - s$. Επίσης ότι η $B(s)$ είναι $\mathcal{F}_s$-μετρήσιμη.

(iii) Όμοια, όπως στο προηγούμενο, παρατηρούμε ότι για $0 \leq s < t$ ισχύει

$$e^{\lambda B(t) - \frac{\lambda^2}{2} t} = e^{\lambda\{B(t) - B(s)\}} e^{\lambda B(s) - \frac{\lambda^2}{2} t}.$$

Η $e^{\lambda B(s)}$ είναι $\mathcal{F}_s$-μετρήσιμη, ενώ η $B(t) - B(s)$ είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}_s$ και ακολουθεί την κατανομή $N(0, t-s)$. Άρα

$$\mathbf{E}\left(e^{\lambda B(t)-\frac{\lambda^2}{2}t} \,\Big|\, \mathcal{F}_s\right) = \mathbf{E}\left(e^{\lambda\{B(t)-B(s)\}}\right) e^{\lambda B(s)-\frac{\lambda^2}{2}t} = e^{\frac{\lambda^2}{2}(t-s)+\lambda B(s)-\frac{\lambda^2}{2}t} = e^{\lambda B(s)-\frac{\lambda^2}{2}s}.$$

■

7.2 Έξοδος από διάστημα και από ημιευθεία

Έστω B τυπική κίνηση Brown. Για $a \in \mathbb{R}$ θέτουμε

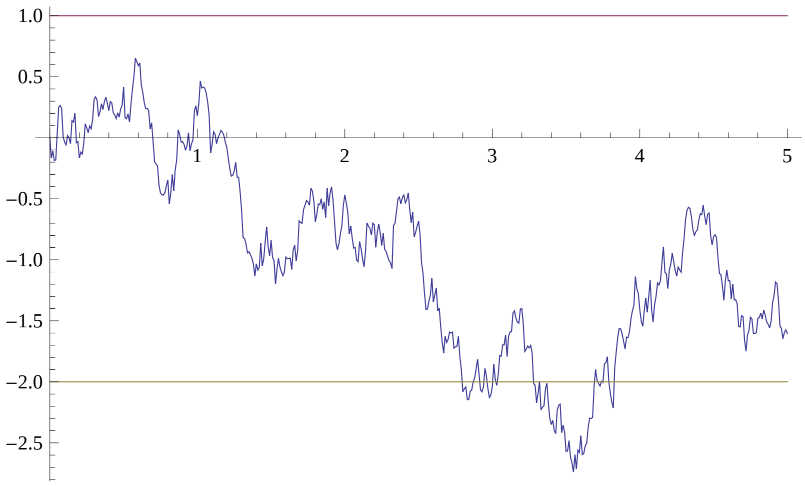
$$T_a := \inf\{t \geq 0 : B(t) = a\},$$

τον πρώτο χρόνο κατά τον οποίο η κίνηση Brown χτυπάει τον αριθμό a. Ας υποθέσουμε ότι $a > 0$ και θα δείξουμε ότι ο T_a είναι χρόνος διακοπής. Παρατηρούμε κατάρχάς ότι για κάθε $t \geq 0$ ισχύει

$$\{T_a \leq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{q \in [0,t] \cap \mathbb{Q}} \left\{B(q) \geq a - \frac{1}{n}\right\}.$$

Η επαλήθευση αυτής της ισότητας είναι απλή άσκηση πραγματικής ανάλυσης και χρησιμοποιεί ότι η B έχει συνεχή μονοπάτια. Τώρα, το δεξί μέλος της ισότητας είναι στοιχείο της $\mathcal{F}_t$ γιατί είναι αριθμήσιμη τομή συνόλων καθένα από τα οποία είναι αριθμήσιμη ένωση στοιχείων της $\mathcal{F}_t$.

Το πρώτο αποτέλεσμα που θα αποδείξουμε αφορά την έξοδο της κίνησης από ένα διάστημα γύρω από το μηδέν. Με τι πιθανότητα βγαίνει η κίνηση από το αριστερό (ή το δεξί) άκρο του διαστήματος και πόση είναι η μέση τιμή του χρόνου ώσπου να βγεί από κάποιο άκρο;



Σχήμα 7.1: Εδώ έχουμε $[a, b] = [-2, 1]$. Σε αυτή την πραγματοποίηση έτυχε η κίνηση Brown να βγεί από το $[-2, 1]$ στο -2.

Πρόταση 7.2. *Για $a < 0 < b$ ισχύει*

(i) $\mathbf{P}(T_a < T_b) = b/(|a| + b)$.

(ii) $\mathbf{E}(T_a \wedge T_b) = |a|b$.

Απόδειξη. Πριν αρχίσουμε την απόδειξη, θα δείξουμε ότι $T := T_a \wedge T_b < \infty$ με πιθανότητα 1. Για $r > 0$ δεδομένο, εφαρμόζουμε το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής (Θεώρημα 4.15) για το martingale $M_t := B(t)^2 - t$ και τον φραγμένο χρόνο διακοπής $T \wedge r$. Η $\mathbf{E}(M_{T\wedge r}) = \mathbf{E}(M_0) = 0$ δίνει

$$\mathbf{E}(B^2(T \wedge r)) = \mathbf{E}(T \wedge r). \tag{7.2}$$

Το αριστερό μέλος είναι φραγμένο από το $a^2 \vee b^2$, ενώ το δεξί συγκλίνει για $r \to \infty$ στο $\mathbf{E}(T)$ (από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης). Άρα $\mathbf{E}(T) < \infty$, και επομένως $T < \infty$ με πιθανότητα 1.

(i) Έστω $r > 0$ δεδομένο. Εφαρμόζουμε το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής (Θεώρημα 4.15) για το martingale $B(t)$ και τον φραγμένο χρόνο διακοπής $T \wedge r$. Παίρνουμε $\mathbf{E}(B(T \wedge r)) = 0$. Τώρα, με πιθανότητα 1 έχουμε $\lim_{r\to\infty} T \wedge r = T < \infty$ και άρα $\lim_{r\to\infty} B(T \wedge r) = B(T)$ [εδώ είναι κρίσιμο να ξέρουμε ότι $T < \infty$ ώστε να έχει νόημα το σύμβολο $B(T)$]. Επίσης, για κάθε $r > 0$ έχουμε $B(T \wedge r) \leq |a| \vee b$. Άρα το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης δίνει

$$0 = \mathbf{E}(B(T)) = \mathbf{E}\{B(T)\mathbf{1}_{T_a<T_b} + B(T)\mathbf{1}_{T_a>T_b}\} = \mathbf{E}\{a\mathbf{1}_{T_a<T_b} + b\mathbf{1}_{T_a>T_b}\} = a\,\mathbf{P}(T_a < T_b) + b\,\mathbf{P}(T_a > T_b).$$

Η τελευταία σχέση, μαζί με την $\mathbf{P}(T_a < T_b) + \mathbf{P}(T_a > T_b) = 1$, δίνει το ζητούμενο.

(ii) Συνεχίζουμε από την (7.2). Εφαρμόζοντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης στο δεξί μέλος και το φραγμένης στο αριστερό παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(T) = \mathbf{E}(B^2(T)) &= \mathbf{E}\{B(T)^2\mathbf{1}_{T_a<T_b} + B(T)^2\mathbf{1}_{T_a>T_b}\} = a^2\,\mathbf{P}(T_a < T_b) + b^2\,\mathbf{P}(T_a > T_b)\\ &= a^2\frac{b}{|a|+b} + b^2\frac{|a|}{|a|+b} = |a|b.\end{aligned}$$

Στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το πρώτο μέρος της πρότασης. ∎

Πρόταση 7.3. *Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $\mathbf{P}(T_a < \infty) = 1$ και, επιπλέον, για κάθε $\lambda > 0$ ισχύει*

$$\mathbf{E}(e^{-\lambda T_a}) = e^{-|a|\sqrt{2\lambda}}.$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $a > 0$. Δειχνουμε πρώτα ότι $T_a < \infty$ με πιθανότητα 1. Πράγματι, για οποιοδήποτε $c < 0$, το πρώτο μέρος της προηγούμενης πρότασης δίνει ότι

$$\mathbf{P}(T_a < \infty) \geq \mathbf{P}(T_a < T_c) = \frac{|c|}{a+|c|}.$$

Το όριο της τελευταίας ποσότητας για $c \to -\infty$ είναι 1 και έτσι προκύπτει ο ισχυρισμός μας.

Τώρα για δεδομένα $r, \ell > 0$ εφαρμόζουμε το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής (Θεώρημα 4.15) για το martingale $e^{\ell B(t) - \frac{\ell^2}{2}t}$ και τον φραγμένο χρόνο διακοπής $T_a \wedge r$. Παίρνουμε

$$\mathbf{E}\left\{e^{\ell B(T_a\wedge r) - \frac{\ell^2}{2}(T_a\wedge r)}\right\} = 1.$$

Η ποσότητα στη μέση τιμή είναι φραγμένη από το $e^{\ell a}$ (αφού παγώνουμε την κίνηση Brown μόλις φτάσει στην τιμή a και όλες οι προηγούμενες τιμές της είναι μικρότερες από a, αφού ξεκινάει από το 0) και το όριό της για $r \to \infty$ ισούται με

$$e^{\ell a - \frac{\ell^2}{2}T_a}.$$

Αυτό γιατί με πιθανότητα 1 ισχύει $T_a < \infty$ και άρα $B(T_a) = a$. Έτσι το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης δίνει

$$\mathbf{E}(e^{-\frac{\ell^2}{2}T_a}) = e^{-\ell a}.$$

Θέτοντας $\ell = \sqrt{2\lambda}$ παίρνουμε το ζητούμενο. ∎

Στην προηγούμενη πρόταση αυτό που υπολογίσαμε είναι ο μετασχηματισμός Laplace της τυχαίας μεταβλητής T_a. Μπορούμε από αυτό να δείξουμε ότι η T_a είναι απόλυτα συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f(x) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi x^3}}\, e^{-a^2/2x}\mathbf{1}_{x>0}.$$

Ασκήσεις

7.1 Έστω $(B_t)_{t\ge 0}$ τυπική κίνηση Brown. Να δειχθεί ότι η ανέλιξη $X_t := tB_t - \int_0^t B_r\, dr, t \ge 0$ είναι martingale ως προς τη διήθηση που παράγει η B.

7.2 Έστω B τυπική κίνηση Brown, $\mu > 0$, και $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την ανέλιξη X με

$$X_t := x + B(t) + \mu t$$

για κάθε $t \ge 0$. Η X ονομάζεται κίνηση Brown με τάση μ που ξεκινάει από το x. Για $r \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $T_r := \inf\{s \ge 0 : X_s = r\}$ και $\phi(r) := e^{-2\mu r}$. Να δειχθεί ότι:

(α) Η ανέλιξη $M_t := \phi(X_t)$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $\mathcal{F}_t := \sigma(\{B_s : s \in [0,t]\})$.

(β) $\mathbf{P}(T_a \wedge T_b < \infty) = 1$.

(γ) Για $a < x < b$ ισχύει

$$\mathbf{P}(T_a < T_b) = \frac{\phi(b) - \phi(x)}{\phi(b) - \phi(a)}.$$

(δ) Για $x = 0$ και $a < 0$ ισχύει $\mathbf{P}(T_a < \infty) = e^{2\mu a}$. Δηλαδή, όταν προσθέσουμε μια θετική τάση στην κίνηση Brown, εκείνη ενδέχεται να παραμείνει για πάντα δεξιά του αριθμού $a < 0$, σε αντίθεση με την τυπική κίνηση Brown.

(ε) Έστω $x = 0$ και $R := \inf\{X_t : t \ge 0\} \in [-\infty, 0]$. Να δειχθεί ότι η $-R$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο 2μ. Παρατηρήστε ότι $R > -\infty$ με πιθανότητα 1.

7.3 Σε αυτή την άσκηση θα δούμε μια εναλλακτική απόδειξη του μέρους (ε) της προηγούμενης άσκησης, δηλαδή ότι η $-R$ είναι εκθετική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο 2μ.
Βρείτε κατάλληλο $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ώστε η $M_t := e^{\lambda X_t}$ να είναι martingale με $\lim_{t\to\infty} M_t = 0$ και χρησιμοποιήστε την Άσκηση 4.9.

7.4 (Τα πολυώνυμα Hermite και martingales) Έστω $x, \rho \in \mathbb{R}$ σταθερές. Η συνάρτηση $\lambda \mapsto e^{\lambda x - \frac{1}{2}\lambda^2 \rho}$, ως αναλυτική στο $\mathbb{C}$, αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0, έστω

$$e^{\lambda x - \frac{1}{2}\lambda^2 \rho} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} H_k(x;\rho)\lambda^k. \tag{7.3}$$

(α) Να δειχθεί ότι ο συντελεστής $H_k(x;\rho)$ είναι μονικό πολυώνυμο του x με βαθμό k και να προσδιοριστούν τα H_0, H_1, H_2, H_3. Τα H_k ονομάζονται πολυώνυμα Hermite.

(β) Να δειχθεί ότι για κάθε $k \ge 0$ η ανέλιξη $(H_k(B_t;t))_{t\ge 0}$ είναι martingale.

7.5 Έστω $B = (B^{(1)}, B^{(2)})$ διδιάστατη τυπική κίνηση Brown και $a \ne 0$. Θέτουμε $T_a := \inf\{s \ge 0 : B^{(1)}(s) = a\}$. Να δειχθεί ότι η τυχαία μεταβλητή $B^{(2)}(T_a)$ έχει την κατανομή Cauchy με παράμετρο κλίμακας a. Δηλαδή έχει πυκνότητα $f(x) = \pi^{-1}|a|/(x^2 + a^2)$ και χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi(t) = e^{-|a||t|}$.

7.6* (Νόμος τόξου ημιτόνου) (α) Έστω $r > 0$ και $d_r := \inf\{s \ge r : B(s) = 0\}$. Να δειχθεί ότι $d_r \stackrel{d}{=} r + T^W_{B(r)}$, όπου B, W είναι δυό ανεξάρτητες τυπικές κινήσεις Brown και $T^W_a = \inf\{s \ge 0 : W(s) = a\}$. Έπειτα να δειχθεί ότι $T^W_{B(r)} \stackrel{d}{=} r(B(T^W_1))^2 \stackrel{d}{=} rC^2$ όπου η C ακολουθεί την κατανομή Cauchy με παράμετρο κλίμακας 1.
(β) Έστω $X := \sup\{t \in [0,1] : B(t) = 0\}$. Να δειχθεί ότι η X έχει πυκνότητα $(\pi\sqrt{x(1-x)})^{-1}\mathbf{1}_{x\in(0,1)}$.
[Υπόδειξη: $\{X < r\} = \{d_r > 1\}$.]

8

Αναλυτικές ιδιότητες

8.1 Βαθμός συνέχειας*

Ξέρουμε ότι η κίνηση Brown είναι συνεχής και θα δείξουμε αργότερα ότι είναι πουθενά διαφορίσιμη. Πόσο ομαλή είναι λοιπόν; Μια ασθενέστερη μορφή ομαλότητας είναι η a-Hölder συνέχεια για κάποιο $a \leq 1$.

Στόχος αυτής της παραγράφου είναι να δείξουμε ότι η κίνηση Brown είναι τοπικά a-Hölder συνεχής για κάθε $a \in (0, 1/2)$ και όχι για $a = 1/2$. Δείχνουμε πρώτα κάποια πιο ακριβή αποτελέσματα που έχουν ενδιαφέρον από μόνα τους.

Θεώρημα 8.1. *Έστω B τυπική κίνηση Brown. Υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ έτσι ώστε με πιθανότητα 1, υπάρχει $h_0 := h_0(\omega) \in (0, 1)$ ώστε για κάθε $h \in (0, h_0]$ και για όλα τα $t \in [0, 1-h]$ να ισχύει*

$$|B(t+h) - B(t)| \leq C\sqrt{h \log \frac{1}{h}}. \tag{8.1}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε την κατασκευή της κίνησης Brown που έγινε στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.5 στο Παράρτημα Γ′ . Για $t, t+h \in [0, 1]$, η (Γ′.3) δίνει

$$|B(t+h) - B(t)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |F_k(t+h) - F_k(t)| \text{ για κάθε } t \in [0, 1-h]. \tag{8.2}$$

Από τη σχέση (Γ′.2), υπάρχει ένας τυχαίος φυσικός k_0 ώστε για $k > k_0$ να έχουμε

$$\|F_k\|_\infty < C_1 \sqrt{k}\, 2^{-k/2}, \tag{8.3}$$

με C_1 μια απόλυτη σταθερά (μπορούμε να επιλέξουμε $C_1 = 2$). Αυτό συνεπάγεται και ένα φράγμα για την $\|F_k'\|_\infty$. Γιατί η F_k είναι γραμμική μεταξύ σημείων που έχουν απόσταση 2^{-k} και άρα

$$\|F_k'\|_\infty \leq 2\|F_k\|_\infty / 2^{-k} \leq 2C_1 \sqrt{k}\, 2^{k/2} \text{ για κάθε } k > k_0. \tag{8.4}$$

Τώρα κάθε προσθετέος στην (8.2) φράσσεται ως εξής

$$|F_k(t+h) - F_k(t)| = |\int_t^{t+h} F_k'(s)\, ds| \leq \|F_k'\|_\infty h,$$

γιατί η F_k είναι συνεχής παντού και διαφορίσιμη εκτός σε πεπερασμένα το πλήθος σημεία. Δηλαδή η F_k είναι Lipschitz με σταθερά το πολύ $\|F_k'\|_\infty$. Έπειτα παρατηρούμε ότι το φράγμα που δίνει η (8.4) για τη σταθερά Lipschitz της F_k μεγαλώνει καθώς το k μεγαλώνει. Άρα δίνει χρήσιμο φράγμα για τη διαφορά $|F_k(t+h) - F_k(t)|$ μέχρι ένα k. Για τα μεγαλύτερα k η διαφορά $|F_k(t+h) - F_k(t)|$ θα είναι μικρή όχι επειδή το h είναι μικρό και η $\|F_k'\|_\infty$ ελεγχόμενου μεγέθους, αλλά επειδή καθεμία από τις ποσότητες $F_k(t+h), F_k(t)$ είναι πολύ μικρές, όπως λέει η (8.3). Με βάση αυτό το σκεπτικό, σταθεροποιούμε $n > k_0$

και φράσσουμε το δεξί μέλος της (8.2) ως εξής:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}|F_k(t+h)-F_k(t)| &\le h\sum_{k=0}^{k_0}\|F_k'\|_\infty + h\sum_{k=k_0}^{n-1}\|F_k'\|_\infty + \sum_{k=n}^{\infty}2\|F_k\|_\infty\\ &\le h\sum_{k=0}^{k_0}\|F_k'\|_\infty + 2C_1h\sum_{k=k_0}^{n-1}\sqrt{k}\,2^{k/2} + 2C_1\sum_{k=n}^{\infty}\sqrt{k}\,2^{-k/2}\\ &\le h\sum_{k=0}^{k_0}\|F_k'\|_\infty + 2C_1h\sqrt{n}\,2^{n/2}4 + 2C_1\sqrt{n}\,2^{-n/2}2\\ &= h\sum_{k=0}^{k_0}\|F_k'\|_\infty + 8C_1h\sqrt{n}\,2^{n/2} + 4C_1\sqrt{n}\,2^{-n/2}. \end{aligned}\tag{8.5}$$

Υπάρχει (τυχαίο) $h(k_0)$ ώστε $h\sum_{k=0}^{k_0}\|F_k'\|_\infty < \sqrt{h\log(1/h)}$ για $h\in[0,h(k_0))$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $h(k_0) < 1/2^{k_0}$. Τώρα, για $h\in(0,h(k_0))$ υπάρχει μοναδικό $n>k_0$ ώστε $2^{-n-1}<h<2^{-n}$. Τότε $n<(1/\log 2)\log(1/h), 2^n<1/h, 2^{-n}<2h$. Επικαλούμαστε το πιο πάνω φράγμα για αυτό το n. Και το φράγμα που παίρνουμε είναι

$$|B(t+h)-B(t)| \le \sqrt{h\log\frac{1}{h}}\left(1+\frac{8C_1}{\sqrt{\log 2}}+\frac{4\sqrt{2}C_1}{\sqrt{\log 2}}\right) = C\sqrt{h\log\frac{1}{h}},$$

με τη C επίσης απόλυτη σταθερά (π.χ., η επιλογή $C=20$ δουλεύει). Έτσι προκύπτει το ζητούμενο. ■

Σχόλιο. Στην προηγούμενη απόδειξη, για δεδομένο h, πώς βρήκαμε το n για το οποίο εφαρμόσαμε την (8.5); Αγνοώντας τις σταθερές, εξισώσαμε τους δύο τελευταίους όρους. Δηλαδή θέσαμε $h\sqrt{n}\,2^{n/2} = \sqrt{n}\,2^{-n/2}$. Και αυτό γιατί, καθώς το n αυξάνει, ο τελευταίος όρος μειώνεται αλλά ο πρώτος αυξάνει. Ο πρώτος είναι μικρός λόγω της παρουσίας του h. Βρίσκουμε λοιπον το n στο οποίο οι όροι είναι της ίδιας τάξης. Είναι ανώφελο να κάνουμε τον τελευταίο όρο πολύ μικρό αν ο άλλος αυξάνει.

Ισχύει το εξής αποτέλεσμα, το οποίο δεν θα αποδείξουμε. Με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\lim_{h\to 0^+}\sup_{t\in[0,1-h]}\frac{|B(t+h)-B(t)|}{\sqrt{2h\log\frac{1}{h}}} = 1.$$

Άρα το φράγμα που δίνει το δεξί μέλος της (8.1) δεν μπορεί να βελτιωθεί ουσιαστικά, δηλαδή να αντικατασταθεί με συνάρτηση που τείνει στο 0 καθώς $h\to 0^+$ πιό σύντομα από την $\sqrt{h\log(1/h)}$.

Ορισμός 8.2. Έστω $f: A\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με πεδίο ορισμού $A\subset\mathbb{R}$. Για $\alpha\in[0,\infty)$ και $x_0\in A$, η f λέγεται τοπικά α-Hölder συνεχής στο x_0 αν υπάρχουν $\delta>0$ και $C\in\mathbb{R}$ ώστε

$$|f(x)-f(x_0)| \le C|x-x_0|^\alpha$$

για όλα τα $x\in A$ με $|x-x_0|<\delta$.

Το φράγμα $\sqrt{h\log(1/h)}$ του πιο πάνω θεωρήματος δίνει εύκολα την α-Hölder συνέχεια για $\alpha<1/2$. Το αποδεικνύουμε τυπικά.

Πόρισμα 8.3. *Έστω $\alpha\in[0,1/2)$. Με πιθανότητα 1, η κίνηση Brown είναι τοπικά α-Hölder συνεχής.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 8.1 για καθεμία από τις τυπικές κινήσεις Brown $B^{(k)}(t)=B(k+t)-B(k), t\ge 0$. Υπάρχουν τυχαία $h_k=h_k(\omega)\in(0,1), k\in\mathbb{N}$, ώστε

$$|B(t+h)-B(t)| \le C\sqrt{h\log\frac{1}{h}}$$

για κάθε $t \in [k, k+1)$, και $h \in (0, h_k \wedge ((k+1) - t))$.

Έστω $\alpha \in (0, 1/2)$. Θέτουμε $C_\alpha := \sup_{h \in (0,1)} h^{1/2-\alpha} \sqrt{\log(1/h)} \in (0, \infty)$. Το τελευταίο sup είναι πεπερασμένο γιατί $\lim_{h \to 0^+} h^{1/2-\alpha} \sqrt{\log(1/h)} = 0$ αφού $a < 1/2$.

Για $t \in (k, k+1)$ με $k \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $|B(t+h) - B(t)| \le |h|^\alpha C C_\alpha$ για κάθε h με $|h| < h_k \wedge (t-k) \wedge ((k+1) - t) =: \delta_t$. Ο αριθμός δ_t είναι θετικός. Άρα η B είναι α-Hölder συνεχής στο t. Η περίπτωση που ο $t \in \mathbb{N}$ αφήνεται στον αναγνώστη. ∎

8.2 Μη διαφορισιμότητα*

Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, με $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ και $C \in (0, \infty)$. Λέμε ότι η f είναι **Lipschtz στο** x_0 **με σταθερά** C αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| \le C|x - x_0|$. Προφανώς αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη (με πεπερασμένη παράγωγο) σε ένα σημείο x_0 εσωτερικό του πεδίου ορισμού της, τότε είναι Lipschtz στο x_0 με σταθερά $|f'(x_0)| + 1$.

Θεώρημα 8.4. *Με πιθανότητα 1, η κίνηση Brown δεν είναι διαφορίσιμη σε κανένα σημείο του* $[0, \infty)$.

Απόδειξη. Για $n \ge 1$ και $C \in (0, \infty)$ θέτουμε

$$A_n(C) := \{\omega : \text{ υπάρχει } s \in [0,1] \text{ ώστε } |B(t) - B(s)| \le C|t - s| \text{ για } t \in [s - (3/n), s + (3/n)] \cap [0,1]\}.$$

Τότε η $A_n(C)$ είναι αύξουσα ακολουθία συνόλων με ένωση το σύνολο

$$A(C) := \{\omega : \text{η } B \text{ είναι Lipschitz με σταθερά } C \text{ σε κάποιο } s \in [0,1]\}.$$

Επομένως $\mathbf{P}(A(C)) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n(C))$. Θα δείξουμε ότι αυτό το όριο ισούται με 0.
Για $k \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$, θέτουμε

$$X_{n,k} = \max\left\{\left|B\left(\frac{k+j}{n}\right) - B\left(\frac{k+j-1}{n}\right)\right| : j = 0, 1, 2\right\}$$

και τέλος $B_n(C) := \cup_{k=1}^{n-2}\{X_{n,k} \le 5C/n\}$.
Ισχυρισμός: $A_n(C) \subset B_n(C)$.

Για $\omega \in A_n(C)$, έστω s το σημείο που δίνεται στον ορισμό του $A_n(C)$. Το s θα βρίσκεται μέσα σε ένα διάστημα μήκους $3/n$ της μορφής $[(k-1)/n, (k+2)/n]$ για κάποιο $k \in \{1, \ldots, n-2\}$. Ας υποθέσουμε ότι το s βρίσκεται στο δεξιό τρίτο του διαστήματος, δηλαδή στο $[(k+1)/n, (k+2)/n]$. Τότε

$$\begin{aligned}\left|B\left(\frac{k}{n}\right) - B\left(\frac{k-1}{n}\right)\right| &\le \left|B\left(\frac{k}{n}\right) - B(s)\right| + \left|B(s) - B\left(\frac{k-1}{n}\right)\right| \\ &\le C\left|\frac{k}{n} - s\right| + C\left|s - \frac{k-1}{n}\right| \le C\frac{2}{n} + C\frac{3}{n} = C\frac{5}{n}.\end{aligned}$$

Όμοια δείχνουμε ότι $|B((k+1)/n) - B(k/n)| \le 3C/n$, $|B((k+2)/n) - B((k+1)/n)| \le 2C/n$, οπότε $X_{n,k} \le 5C/n$. Αν βέβαια το s δεν ανήκει στα διαστήματα $[0, 1/n], [(n-1)/n, 1]$, τότε επιλέγουμε ένα k ώστε το s να ανήκει στο $[k/n, (k+1)/n]$ και τότε θα παίρναμε φράγμα $X_{n,k} \le 3C/n$.

Οι τυχαίες μεταβλητές $\{X_{n,k} : k = 1, 2, \ldots, n-2\}$ έχουν την ίδια κατανομή. Άρα

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_n(C)) &\le \mathbf{P}(B_n(C)) \le (n-2)\,\mathbf{P}(X_{n,1} \le 5C/n) \\ &= n\,\mathbf{P}\left(\left|B\left(\frac{1}{n}\right) - B(0)\right| \le \frac{5C}{n}, \left|B\left(\frac{2}{n}\right) - B\left(\frac{1}{n}\right)\right| \le \frac{5C}{n}, \left|B\left(\frac{3}{n}\right) - B\left(\frac{2}{n}\right)\right| \le \frac{5C}{n}\right) \\ &= n\,\mathbf{P}\left(\left|B\left(\frac{1}{n}\right)\right| \le \frac{5C}{n}\right)^3 = n\left(\mathbf{P}\left(|B(1)| \le 5C/\sqrt{n}\right)\right)^3 \le n\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{5C}{\sqrt{n}}\right)^3 = \frac{C'}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Άρα προκύπτει ότι[1] $\mathbf{P}(A(C)) = 0$. Τέλος, επειδή

$$\{\omega : \text{η } B \text{ είναι Lipschitz σε κάποιο } s \in [0,1]\} = \cup_{r=1}^{\infty} A(r),$$

το σύνολο στο αριστερό μέλος έχει πιθανότητα 0. Το αποτέλεσμα για το $[0,\infty)$ προκύπτει με προφανή τρόπο από το αποτέλεσμα στο $[0,1]$. ■

8.3 Κύμανση και τετραγωνική κύμανση

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και $p > 0$. Για κάθε διαμέριση $\Delta := \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ του $[a,b]$, ορίζουμε την p-**κύμανση** της f ως προς τη Δ ως

$$V_p(f,\Delta) := \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|^p$$

και την **κύμανση** της f ως

$$V_1(f,[a,b]) := \sup\{V_1(f,\Delta) : \Delta \text{ διαμέριση του } [a,b]\}.$$

Στην ανάλυση ορίζεται επίσης η τετραγωνική κύμανση $V_2(f,[a,b])$ της f στο $[a,b]$ ως το supremum της $V_2(f,\Delta)$ πάνω σε όλες τις διαμερίσεις Δ του $[a,b]$. Στη θεωρία των στοχαστικών ανελίξεων ο όρος τετραγωνική κύμανση αναφέρεται σε άλλο αντικείμενο το οποίο θα δούμε αμέσως.

Για μια διαμέριση $\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b\}$ ενός διαστήματος $[a,b]$, ορίζουμε τη λεπτότητά της ως

$$\|\Delta\| = \max\{|t_i - t_{i-1}| : i = 1,2,\dots,k\}.$$

Ορισμός 8.5. Έστω $(X_t)_{t\geq 0}$ στοχαστική ανέλιξη και $[a,b] \subset [0,\infty)$. Αν υπάρχει τυχαία μεταβλητή Y ώστε για κάθε ακολουθία διαμερίσεων $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ με $\|\Delta_n\| \to 0$ η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών

$$\big(V_2(X,\Delta_n)\big)_{n\geq 1}$$

συγκλίνει κατά πιθανότητα στην Y, τότε ονομάζουμε την Y **τετραγωνική κύμανση** της X στο $[a,b]$ και τη συμβολίζουμε με $\langle X, X\rangle_{[a,b]}$.

Διατυπώνουμε χωρίς απόδειξη το εξής αποτέλεσμα για την τετραγωνική κύμανση συνεχών martingales. Θα το χρειαστούμε μόνο για την Άσκηση 11.1. Η απόδειξή του δίνεται στο Revuz and Yor (1999) (Πρόταση 1.12 του Κεφαλαίου IV).

Πρόταση 8.6. *Έστω $(X_t)_{t\geq 0}$ martingale με συνεχη μονοπάτια και $\mathbf{E}(X_t^2) < \infty$ για κάθε $t \geq 0$ το οποίο έχει τετραγωνική κύμανση $\langle X, X\rangle_{[0,t]} = 0$ για κάθε $t > 0$. Τότε με πιθανότητα 1 ισχύει $X_t = X_0$ για κάθε $t \geq 0$.*

Συμβολισμός: Στο εξής, για την κίνηση Brown, αντί $B(t)$ θα γράφουμε B_t.

Θεώρημα 8.7. *Για κάθε $0 \leq a < b$, η τετραγωνική κύμανση της κίνησης Brown στο διάστημα $[a,b]$ ισούται με $b - a$. Επιπλέον:*

(i) Για οποιοδήποτε ακολουθία διαμερίσεων $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ με $\|\Delta_n\| \to 0$ ισχύει

$$V_2(B,\Delta_n) \to b - a \text{ στον } L^2$$

καθώς $n \to \infty$.

[1] Δείξαμε και κάτι παραπάνω. Δηλαδή ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας $(\mathbf{P}(A_n(C)))_{n\geq 1}$ ισούνται με 0 γιατί αυτή είναι μη αρνητική, αύξουσα, και τείνει στο μηδέν.

(ii) *Για κάθε ακολουθία διαμερίσεων* $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ *με* $\sum_{n=1}^{\infty} \|\Delta_n\| < \infty$ *ισχύει*

$$V_2(B, \Delta_n) \to b - a \text{ με πιθανότητα } 1$$

καθώς $n \to \infty$.

Απόδειξη. Έστω $\Delta := \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$. Θέτουμε $Y_i := (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})$ για $i = 1, 2, \ldots, k$. Τότε

$$\{V_2(B, \Delta) - (b - a)\}^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} Y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} Y_i^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq k} Y_i Y_j.$$

Οι τυχαίες μεταβλητές $\{Y_i : 1 \leq i \leq k\}$ είναι ανεξάρτητες με $\mathbf{E}(Y_i) = \mathbf{E}\{(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2\} - (t_i - t_{i-1}) = 0$ και

$$\mathbf{E}(Y_i^2) = \mathbf{E}\{(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^4\} - 2(t_i - t_{i-1})\,\mathbf{E}\{(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2\} + (t_i - t_{i-1})^2 = (t_i - t_{i-1})^2\,\mathbf{E}(Z^4) - (t_i - t_{i-1})^2$$

με $Z \sim N(0, 1)$. Όμως $\mathbf{E}(Z^4) = 3$ από το Λήμμα Α΄.1, οπότε $\mathbf{E}(Y_i^2) = 2(t_i - t_{i-1})^2$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, βρίσκουμε

$$\mathbf{E}\{V_2(B, \Delta) - (b - a)\}^2 = \sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1})^2 \leq (b - a)\|\Delta\|. \tag{8.6}$$

Έτσι ο ισχυρισμός (i) έπεται αμέσως. Για τον (ii) θέτουμε $U_n := V_2(B, \Delta_n) - b - a$. Από την προηγούμενη σχέση και την υπόθεση, $\mathbf{E}(\sum_{n=1}^{\infty} U_n^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(U_n^2) < \infty$. Άρα με πιθανότητα 1 έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} U_n^2 < \infty$ και επομένως $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$. ∎

Μια συνηθισμένη ακολουθία διαμερίσεων του $[a, b]$ που ικανοποιεί την υπόθεση του (ii) είναι αυτή που έχει

$$\Delta_n := \left\{a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{2^n}^{(n)} = b\right\} \text{ με } t_j^{(n)} = a + j\frac{(b - a)}{2^n}$$

για κάθε $j = 0, 1, \ldots, 2^n$.

Το προηγούμενο θεώρημα δίνει εύκολα ότι, με πιθανότητα 1, η κίνηση Brown δεν είναι φραγμένης κύμανσης και θα το δούμε αμέσως. Αυτό βέβαια έπεται και από το Θεώρημα 8.4 γιατί μια συνάρτηση φραγμένης κύμανσης είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού. Ο τελευταίος ισχυρισμός όμως είναι ένα αρκετά δύσκολο θεώρημα (δες Κουμουλλής Γ. και Νεγρεπόντης Σ (1991), Θεώρημα 14.8).

Πόρισμα 8.8. *Με πιθανοτητα 1, σε οποιοδήποτε υποδιάστημα του* $[0, \infty)$ *η κίνηση Brown έχει άπειρη κύμανση.*

Απόδειξη. Έστω $0 \leq a < b$ με a, b ρητούς. Θεωρούμε ακολουθία διαμερίσεων $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ του $[a, b]$ με $\sum_{n=1}^{\infty} \|\Delta_n\| < \infty$. Έστω $\Delta_n := \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{k(n)}^{(n)} = t\}$. Υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $\Omega_0(a, b) \subset \Omega$ με πιθανότητα 1 ώστε για κάθε ω σε αυτό το σύνολο να ισχύει $\lim_{n\to\infty} V_2(B, \Delta_n) = b - a$ και η $B(= B^{\omega})$ να είναι συνεχής. Ισχύει

$$V_2(B, \Delta_n) \leq \sup_{1\leq j\leq k(n)} |B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}}| V_1(B, \Delta_n).$$

Έστω $\omega \in \Omega_0(a, b)$. Για $n \to \infty$, το αριστερό μέλος της σχέσης συγκλίνει στο $b - a$ και το

$$\sup_{1\leq j\leq k(n)} |B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}}| \to 0$$

αφού η συγκεκριμένη πραγματοποίηση της B είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$ ως συνεχής. Έπεται ότι $V_1(B, \Delta_n) \to \infty$. Άρα στο $\Omega_0(a, b)$ ισχύει

$$V_1(B, [a, b]) \geq \lim_{n\to\infty} V_1(B, \Delta_n) = \infty.$$

Τώρα το σύνολο $\Omega_0 := \cap_{\substack{0\le a<b\\ a,b\in\mathbb{Q}}} \Omega_0(a,b)$ έχει πιθανότητα 1, και για $\omega \in \Omega_0$ και $0 \le a < b$ βρίσκουμε ρητούς p, q με $a < p < q < b$, και άρα $V_1(B, [a, b]) \ge V_1(B, [p, q]) = \infty$.

■

Πρόταση 8.9. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, $t > 0$, και για κάθε $n \ge 1$, $\Delta_n := \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{k(n)}^{(n)} = t\}$ διαμέριση του $[0, t]$ ώστε $\|\Delta_n\| \to 0$. Τότε*

$$\sum_{j=1}^{k(n)} f(B_{t_{j-1}^{(n)}})(B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}})^2 \to \int_0^t f(B_s)\, ds \tag{8.7}$$

κατά πιθανότητα καθώς $n \to \infty$.

Η απόδειξη δίνεται στο Παράρτημα Γ΄.

Παρατήρηση 8.10. Εξαιτίας της (8.7), έχουμε για τα διαφορικά τη σχέση

$$(dB_s)^2 = ds. \tag{8.8}$$

Αυτό γιατί αν ακολουθούσαμε τις συμβάσεις συμβολισμού της ολοκλήρωσης Stieljes, θα έπρεπε να συμβολίζουμε το όριο του αριστερού μέλους της (8.7) με $\int_0^t f(B_s)\,(dB_s)^2$.

Κατανοούμε διαισθητικά την (8.8) σαν να λέει ότι το τετράγωνο της μεταβολής της κίνησης Brown σε ένα διάστημα απειροστού μήκους ds ισούται με το μήκος του διαστήματος. Στην καρδιά αυτή της σχέσης βρίσκεται το ότι για $s, \Delta s > 0$, η $(B_{s+\Delta s} - B_s)^2$ έχει μέση τιμή Δs.

Παρατήρηση 8.11 (Ιδιότητες με πιθανότητα 1)**.** Είναι βολικό, όταν μια ιδιότητα A ισχύει με πιθανότητα 1 να γράφουμε «με πιθανότητα 1 ισχύει το A» αντί να γράφουμε «$\mathbf{P}(A) = 1$». Αυτό κάναμε για παράδειγμα στη διατύπωση των Θεωρημάτων 8.1, 8.4. Χρειάζεται όμως να προσέχουμε πού γράφουμε το «με πιθανότητα 1». Για παράδειγμα, οι φράσεις

- Με πιθανότητα 1, για κάθε $t \ge 0$ η B δεν είναι διαφορίσιμη στο t.
- Για κάθε $t \ge 0$, με πιθανότητα 1 η B δεν είναι διαφορίσιμη στο t.

σημαίνουν κάτι διαφορετικό. Και, αν τις γράφαμε τυπικά, αυτό θα ήταν σαφές, γιατί γράφονται

- $\mathbf{P}$(για κάθε $t \ge 0$ η B δεν είναι διαφορίσιμη στο t) = 1.
- Για κάθε $t \ge 0$, $\mathbf{P}$(η B δεν είναι διαφορίσιμη στο t) = 1.

Η πρώτη συνεπάγεται τη δεύτερη, και, όπως ξέρουμε, η πρώτη είναι αληθής (Θεώρημα 8.4). Φυσιολογικά, η απόδειξη της είναι πιο δύσκολη από αυτήν της δεύτερης (Άσκηση 5.10).

Ας δούμε όμως δύο άλλες αντίστοιχες φράσεις.

- Με πιθανότητα 1, για κάθε $t \ge 0$ η B δεν έχει τοπικό μέγιστο στο t.
- Για κάθε $t \ge 0$, με πιθανότητα 1 η B δεν έχει τοπικό μέγιστο στο t.

Η δεύτερη είναι σωστή (Άσκηση 5.9), ενώ η πρώτη είναι λάθος. Γιατί κάθε μονοπάτι (πραγματοποίηση) της B είναι μια συνεχής και μη μονότονη συνάρτηση (Άσκηση 8.1), άρα θα έχει σημεία τοπικού μεγίστου.

Η τυπική περιγραφή του φαινομένου αυτού είναι ως εξής. Έστω A_t ένα γεγονός που αφορά την συμπεριφορά της κίνησης Brown στο σημείο $t \ge 0$. Τότε

$$\mathbf{P}(\cap_{t\ge0} A_t) = 1 \text{ συνεπάγεται ότι για κάθε } r \ge 0 \text{ ισχύει } \mathbf{P}(A_r) = 1. \tag{8.9}$$

Αυτό ισχύει γιατί για οποιοδήποτε $r \ge 0$ έχουμε $\cap_{t\ge0} A_t \subset A_r$, το αντίστροφο όμως της (8.9) δεν προκύπτει τυπικά γιατί η $\cap_{t\ge0} A_t$ είναι *υπεραριθμήσιμη* τομή συνόλων με πιθανότητα 1, και η ίδια δεν είναι απαραίτητο να έχει πιθανότητα 1.

Ασκήσεις

8.1 Να δειχθεί ότι, με πιθανότητα 1, για οποιοδήποτε υποδιάστημα I του $[0,\infty)$ με θετικό μήκος, η κίνηση Brown δεν είναι μονότονη στο I.

8.2 Έστω $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία διαμερίσεων του $[0,t]$, με $\Delta_n := \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{k(n)}^{(n)} = t\}$ για κάθε $n \geq 1$, ώστε $\|\Delta_n\| \to 0$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ να δειχθεί ότι

$$\sum_{j=1}^{k(n)} (B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}})^{2+\varepsilon} \to 0 \tag{8.10}$$

στον $L^2(\mathbf{P})$ καθώς $n \to \infty$.

8.3 Η άσκηση αυτή αναφέρεται στην απόδειξη της Πρότασης 8.9 στο Παράρτημα Γ΄. Με τις υποθέσεις της Πρότασης 8.9, αν έχουμε επιπλέον ότι υπάρχει σταθερά $C \in \mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{E}(f(B_s)^2) \leq C$ για κάθε $s \in [0,t]$, να δειχθεί ότι η μέση τιμή του τετραγώνου της (Γ΄.10) φράσσεται από

$$2C \sum_{j=1}^{k(n)} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)})^2.$$

Άρα σε αυτή την περίπτωση, η σύγκλιση στην (8.7) ισχύει στον $L^2(\mathbf{P})$.

8.4 (Άπειρη κύμανση) Έστω $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία διαμερίσεων του $[0,t]$, με $\Delta_n := \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{k(n)}^{(n)} = t\}$ για κάθε $n \geq 1$, ώστε $\|\Delta_n\| \to 0$. Θέτουμε $A := \mathbf{E}(|B_1|) = \sqrt{2/\pi}$, και για κάθε $n \geq 1$,

$$L_n := \sum_{j=1}^{k(n)} |B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}}|$$

(α) Να δειχθεί ότι $\mathbf{E}(L_n) \geq At/\|\Delta_n\|^{1/2}$.

(β) Να δειχθεί ότι $\mathrm{Var}(L_n) = (1 - A^2)t$.

(γ) Με χρήση της ανισότητας Chebyshev, να βρεθεί άνω φράγμα για την πιθανότητα

$$\mathbf{P}\left(L_n < \frac{1}{2}\mathbf{E}(L_n)\right).$$

(δ) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \|\Delta_n\| < \infty$, να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1, $L_n \to \infty$ καθώς $n \to \infty$.

8.5 Έστω ανελίξεις $(X_t)_{t\geq 0}, (Y_t)_{t\geq 0}$ οι οποίες με πιθανότητα 1 έχουν συνεχή μονοπάτια και σε κάθε πεπερασμένο διάστημα η X έχει φραγμένη κύμανση, ενώ η Y έχει τετραγωνική κύμανση (πεπερασμένη ή άπειρη). Να δειχθεί ότι η $X + Y$ έχει τετραγωνική κύμανση

$$\langle X+Y, X+Y\rangle_{[0,t]} = \langle Y, Y\rangle_{[0,t]}$$

για κάθε $t > 0$.

8.6 Έστω $u : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση ώστε με πιθανότητα 1 να ισχύει

$$\int_0^t |u(s,\omega)|\, ds < \infty$$

για κάθε $t > 0$. Θεωρούμε την ανέλιξη X με

$$X_t := \int_0^t u(s,\omega)\, ds$$

για κάθε $(t,\omega) \in [0,\infty) \times \Omega$. Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 η X έχει πεπερασμένη κύμανση σε κάθε πεπερασμένο διάστημα.

Μέρος III

Το ολοκλήρωμα Itô

9

Κατασκευή του ολοκληρώματος

Σε αυτό το κεφάλαιο δουλεύουμε σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ στον οποίο είναι ορισμένη μια μονοδιάστατη κίνηση Brown, όχι απαραίτητα τυπική. Αυτή η κίνηση ορίζει τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ μέσω της σχέσης (7.1).

Επίσης, θα βλέπουμε μια ανέλιξη $(X_t)_{t\in I}$ στον Ω ως συνάρτηση $X : I\times\Omega \to \mathbb{R}$. Το I είναι αυθαίρετο σύνολο δεικτών. Στόχος μας είναι να ορίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty X(s,\omega)\,dB_s$$

για μια ευρεία κλάση ανελίξεων X.

Η πρώτη παράγραφος του κεφαλαίου δεν χρησιμοποιείται κάπου, αλλά εξηγεί πως οδηγείται κανείς στο στοχαστικό ολοκλήρωμα, καθώς και τη βασική δυσκολία που υπάρχει για τον ορισμό του. Έτσι γίνεται περισσότερο κατανοητή η πορεία που θα ακολουθήσουμε για τον ορισμό στις επόμενες παραγράφους.

9.1 Η κίνηση Brown ως ολοκληρωτής. Μια θεμελιώδης δυσκολία

Ας υποθέσουμε ότι η κίνηση Brown $(B_t)_{t\geq 0}$ μοντελοποιεί την εξέλιξη της αξίας μιας εταιρείας στον χρόνο ($B_t < 0$ σημαίνει ότι η εταιρεία έχει χρέη τον χρόνο t). Ένας επενδυτής που τον χρόνο s κρατάει ποσοστό $f(s)$ της εταιρείας, σε ένα μικρό χρονικό διάστημα $[s, s+ds]$ θα κερδίσει $f(s)\{B_{s+ds} - B_s\}$. Έστω $t > 0$ δεδομένο. Υποθέτουμε ότι συναλλαγές γίνονται πολύ συχνά, σχεδόν σε συνεχή χρόνο, και ότι ο επενδυτής αλλάζει το ποσοστό συμμετοχής του στην εταιρεία τις χρονικές στιγμές $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$. Το κέρδος που του αποφέρει η μεταβολή της αξίας της εταιρείας είναι

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Αν η διαμέριση $\Delta := \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ του $[0,t]$ έχει μικρό πάχος, αυτό το άθροισμα μοιάζει να προσεγγίζει το ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes[1]

$$\int_0^t f(s)\,dB_s. \tag{9.1}$$

Σε αυτό το ολοκλήρωμα οδηγείται κανείς από το πιο πάνω σενάριο αλλά και από άλλες εφαρμογες. Το πρόβλημα όμως είναι ότι το (9.1) δεν μπορεί να οριστεί με χρήση της θεωρίας του ολοκληρώματος Riemann-Stieltjes, γιατί αυτή εξασφαλίζει την ύπαρξη του (9.1) για όλες τις συνεχείς f μόνο για ολοκληρωτές B που είναι συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης. Όμως με πιθανότητα 1 το μονοπάτι της κίνησης Brown έχει άπειρη κύμανση σε οποιοδήποτε διάστημα (Πόρισμα 8.8 του Κεφαλαίου 8).

Η διαδικασία ορισμού του ολοκληρώματος (9.1) θα ήταν να πάρουμε μια οποιαδήποτε ακολουθία $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ διαμερίσεων του $[0,t]$, έστω $\Delta_n := \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{k(n)}^{(n)} = t\}$, με $\|\Delta_n\| \to 0$, να κάνουμε

[1] Μερικά στοιχεία για το ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes δίνονται στο Παράρτημα Β′.

μια επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\Xi_n := \{\xi_j^{(n)} : j = 1, 2, \ldots, k_n\}$ με $\xi_j^{(n)} \in [t_{j-1}^{(n)}, t_j^{(n)}]$, να ορίσουμε τα αθροίσματα Riemann-Stieltjes

$$S(f, B, \Delta_n, \Xi_n) = \sum_{j=1}^{k_n} f(\xi_j^{(n)})(B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}}), \tag{9.2}$$

και να πάρουμε το όριο $\lim_{n\to\infty} S(f, B, \Delta_n, \Xi_n)$ ελπίζοντας ότι αυτό υπάρχει. Επειδή αυτή η διαδικασία αποτυχαίνει να πραγματοποιηθεί σημειακά (δηλαδή για κάθε δεδομένο $\omega \in \Omega$), θα αρκεστούμε να ζητήσουμε τη σύγκλιση της ακολουθίας (9.2) στον $L^2(\mathbf{P})$ ή κατά πιθανότητα. Και αυτό το όριο θα είναι το στοχαστικό ολοκλήρωμα.

9.2 Ολοκλήρωση απλών μετρήσιμων ανελίξεων

Ορισμός 9.1. Μια ανέλιξη $X : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ λέγεται **μετρήσιμη** αν είναι μετρήσιμη ως προς τη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{F}$.

Όπως είπαμε και πιο πάνω, θεωρούμε στο χώρο πιθανότητας τη διήθηση που παράγει η κίνηση Brown [σχέση (7.1)].

Ορισμός 9.2. Ονομάζουμε $\mathcal{H}^2$ το σύνολο όλων των μετρήσιμων και προσαρμοσμένων ανελίξεων X που ικανοποιούν

$$\|X\|^2_{L^2(\lambda\times\mathbf{P})} := \mathbf{E}\left(\int_0^\infty X(s, \omega)^2 \, ds\right) < \infty. \tag{9.3}$$

Η $\|\cdot\|_{L^2(\lambda\times\mathbf{P})}$ είναι η L^2 νόρμα στον χώρο $L^2([0, \infty) \times \Omega, \mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{F}, \lambda \times \mathbf{P})$, όπου λ είναι το μέτρο Lebesgue. Πιο κάτω θα χρησιμοποιήσουμε και την L^2 νόρμα στον χώρο $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και, κατά ανάλογο τρόπο, θα την συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_{L^2(\mathbf{P})}$

Ορισμός 9.3. Ονομάζουμε $\mathcal{H}_0^2$ το σύνολο των ανελίξεων της μορφής

$$X(t, \omega) = \sum_{i=1}^{k} A_i(\omega) \, \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \tag{9.4}$$

με $k \in \mathbb{N}^+, 0 \le t_1 < \cdots < t_{k+1}$, την A_i να είναι $\mathcal{F}_{t_i}$-μετρήσιμη, και $\mathbf{E}(A_i^2) < \infty$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$.

Ισχύει $\mathcal{H}_0^2 \subset \mathcal{H}^2$ γιατί μία X όπως στην (9.4) ικανοποιεί την (9.3), είναι προσαρμοσμένη, και τέλος είναι μετρήσιμη γιατί για κάθε $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει

$$X^{-1}(C) = \cup_{i=1}^{k} (t_i, t_{i+1}] \times A_i^{-1}(C) \in \mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{F}.$$

Ορισμός 9.4. Για $X \in \mathcal{H}_0^2$ όπως στην (9.4), ορίζουμε το ολοκλήρωμα της X ως προς την κίνηση Brown ως

$$I(X) := \sum_{i=1}^{k} A_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}). \tag{9.5}$$

Το $I(X)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή στον Ω και συνήθως το γράφουμε ως

$$\int_0^\infty X(s, \omega) \, dB_s.$$

Όπως κάνουμε γενικά με τις τυχαίες μεταβλητές, έτσι και εδώ, για την τιμή της $I(X)$ σε ένα $\omega \in \Omega$ δεν χρησιμοποιούμε τον πλήρη συμβολισμό $I(X)(\omega)$.
Θα χρησιμοποιήσουμε πολλές φορές πιο κάτω ότι για $0 \le s < t$,

$$\text{η } B_t - B_s \text{ είναι ανεξάρτητη από τη σ-άλγεβρα } \mathcal{F}_s, \tag{9.6}$$

το οποίο έχουμε ήδη σχολιάσει στην Παρατήρηση 5.12.

Πρόταση 9.5. *Έστω $X, Y \in \mathcal{H}_0^2$, και $a \in \mathbb{R}$. Τότε*

(i) $I(aX + Y) = aI(X) + I(Y)$.

(ii) $\mathbf{E}(I(X)) = 0$.

Απόδειξη. (i) Αρκεί να το δείξει κανείς για $Y = 0$ και για $a = 1$. Αν η X γράφεται όπως στην (9.4), τότε η aX έχει παρόμοια γραφή με μόνη διαφορά ότι τη θέση της $A_i(\omega)$ έχει η $aA_i(\omega)$. Έτσι ο ορισμός της I δίνει $I(aX) = aI(X)$. Για να δείξουμε την $I(X + Y) = I(X) + I(Y)$ γράφουμε τις X, Y στη μορφή (9.4) και έπειτα φέρνουμε και τη $X + Y$ στην ίδια μορφή. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

(ii) Έστω ότι η X γράφεται όπως στην (9.4). Οι $A_i, B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ είναι ανεξάρτητες γιατί η A_i είναι $\mathcal{F}_{t_i}$-μετρήσιμη, ενώ η $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}_{t_i}$, όπως σημειώσαμε στην (9.6). Έπεται ότι $\mathbf{E}\left\{A_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right\} = 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$ και άρα $\mathbf{E}(I(X)) = 0$. ■

Λήμμα 9.6 (Ισομετρία Itô στον $\mathcal{H}_0^2$). *Αν $X \in \mathcal{H}_0^2$, τότε*

$$\mathbf{E}\left\{\left(\int_0^\infty X(s,\omega)\,dB_s\right)^2\right\} = \mathbf{E}\left(\int_0^\infty X(s,\omega)^2\,ds\right). \tag{9.7}$$

Απόδειξη. Έστω ότι η X είναι όπως στην (9.4). Τότε

$$X(s,\omega)^2 = \sum_{i=1}^k A_i^2(\omega)\,\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(s)$$

για κάθε $s \geq 0$ και το δεξί μέλος της (9.7) ισούται με

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{E}\{A_i^2(\omega)\}(t_{i+1} - t_i).$$

Ο υπολογισμός του αριστερού μέλους της (9.7) γίνεται ακριβώς όπως στην Άσκηση 2.12. Παίρνουμε το τετράγωνο της έκφρασης (9.5) και παρατηρούμε ότι για $i < j$ η τυχαία μεταβλητή

$$A_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})A_j(\omega)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$$

έχει μέση τιμή μηδέν. Αυτό γιατί η $B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$ έχει μέση τιμή 0 και είναι ανεξάρτητη από την $A_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})A_j(\omega)$ γιατί η τελευταία είναι $\mathcal{F}_{t_j}$-μετρήσιμη, ενώ η $B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$ είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}_{t_j}$. Άρα

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(I(X)^2) &= \sum_{i=1}^k \mathbf{E}\{A_i^2(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2\} = \sum_{i=1}^k \mathbf{E}\{A_i^2(\omega)\}\,\mathbf{E}\{(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2\} \\ &= \sum_{i=1}^k \mathbf{E}\{A_i^2(\omega)\}(t_{i+1} - t_i).\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία των $A_i^2(\omega), B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ και το ότι η δεύτερη ροπή της $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ είναι $t_{i+1} - t_i$. Ο ισχυρισμός μας αποδείχθηκε. ■

9.3 Επέκταση σε μετρήσιμες ανελίξεις

Σε αυτή την παράγραφο θα επεκτείνουμε τον ορισμό του $I(X)$ ώστε να έχει νόημα για κάθε X στοιχείο του $\mathcal{H}^2$. Για την επέκταση υπάρχει μία φυσιολογική επιλογή αφού, όπως θα δείξουμε, ο $\mathcal{H}_0^2$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathcal{H}^2$.

Λήμμα 9.7. *Ο $\mathcal{H}_0^2$ είναι πυκνός υπόχωρος του $\mathcal{H}^2$*

Η απόδειξη του λήμματος δίνεται στο Παράρτημα Δ′. Είναι θέμα ανάλυσης.

Θεώρημα 9.8. *Για $X \in \mathcal{H}^2$ και ακολουθία $(X_n)_{n\ge1}$ στον $\mathcal{H}_0^2$ με $\|X - X_n\|_{L^2(\lambda\times\mathbf{P})} \to 0$,*

(i) Η ακολουθία $(I(X_n))_{n\ge1}$ συγκλίνει στον $L^2(\mathbf{P})$.

(ii) Το όριο δεν εξαρτάται από την επιλογή της ακολουθίας $(X_n)_{n\ge1}$.

Απόδειξη. (i) Για $m, n \ge 1$, χρησιμοποιώντας ότι η I είναι γραμμική και ισομετρία στο $\mathcal{H}_0^2$ (Πρόταση 9.5 και Λήμμα 9.6), έχουμε

$$\|I(X_n) - I(X_m)\|_{L^2(\mathbf{P})} = \|I(X_n - X_m)\|_{L^2(\mathbf{P})} = \|X_n - X_m\|_{L^2(\lambda\times\mathbf{P})}.$$

Η τελευταία ποσότητα τείνει στο 0 για $m, n \to \infty$ αφού η $(X_n)_{n\ge1}$ συγκλίνει. Άρα η $(I(X_n))_{n\ge1}$ είναι βασική ακολουθία στον $L^2(P)$, ο οποίος είναι πλήρης. Άρα συγκλίνει.

(ii) Αυτο έπεται άμεσα από το (i). Έστω δύο ακολουθίες $(X_n)_{n\ge1}, (Y_n)_{n\ge1}$ στον $\mathcal{H}_0^2$ οι οποίες συγκλίνουν στη X ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_{L^2(\lambda\times\mathbf{P})}$. Τότε και η ακολουθία $(Z_n)_{n\ge1}$ που ορίζεται ως $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ συγκλίνει στη X και, επομένως, από το (i), η $(I(Z_n))_{n\ge1}$ συκλίνει. Άρα

$$\lim_{n\to\infty} I(X_n) = \lim_{n\to\infty} I(Z_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} I(Z_{2n}) = \lim_{n\to\infty} I(Y_n).$$

■

Το προηγούμενο λήμμα επιτρέπει να διατυπώσουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 9.9. Για $X \in \mathcal{H}^2$, ορίζουμε

$$I(X) := \lim_{n\to\infty} I(X_n),$$

όπου $(X_n)_{n\ge1}$ είναι μια οποιαδήποτε ακολουθία στον $\mathcal{H}_0^2$ με $\|X - X_n\|_{L^2(\lambda\times\mathbf{P})} \to 0$.

Πάλι, για το $I(X)$, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$\int_0^\infty X(s,\omega)\, dB_s.$$

Πρόταση 9.10. *Έστω $X, Y \in \mathcal{H}^2$, και $a \in \mathbb{R}$. Τότε:*

(i) $I(aX + Y) = aI(X) + I(Y)$.

(ii) $\mathbf{E}(I(X)) = 0$.

Απόδειξη. (i) Παίρνουμε ακολουθίες $(X_n)_{n\ge1}, (Y_n)_{n\ge1}$ που συγκλίνουν στις X, Y αντίστοιχα. Τότε $aX_n + Y_n \to aX + Y$ στον $L^2(\lambda\times\mathbf{P})$, οπότε

$$I(aX + Y) = \lim_{n\to\infty} I(aX_n + Y_n) = \lim_{n\to\infty} aI(X_n) + I(Y_n) = aI(X) + I(Y).$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από τη γραμμικότητα της I στον $\mathcal{H}_0^2$ (Πρόταση 9.5).

(ii) Τώρα, για $X \in \mathcal{H}^2$ θεωρούμε ακολουθία $(X_n)_{n\ge1}$ όπως στο Θεώρημα 9.8. Η $(I(X_n))_{n\ge1}$ συγκλίνει στην $I(X)$ στον $L^2(\mathbf{P})$, άρα και στον $L^1(\mathbf{P})$. Κατά συνέπεια $\mathbf{E}(I(X_n)) \to \mathbf{E}(I(X))$ και το συμπέρασμα έπεται. ■

Η απεικόνιση του στοχαστικού ολοκληρώματος

$$I : \mathcal{H}^2 \to L^2(\mathbf{P})$$

με βάση το (i) της προηγούμενης πρότασης είναι γραμμική. Θα δείξουμε επιπλέον ότι είναι συνεχής και μάλιστα ισομετρία.

Πόρισμα 9.11 (Ισομετρία Itô στον $\mathcal{H}^2$)**.** *Αν $X \in \mathcal{H}^2$, τότε*

$$\|I(X)\|_{L^2(\mathbf{P})} = \|X\|_{L^2(\lambda\times\mathbf{P})}.$$

Δηλαδή

$$\mathbf{E}\left\{\left(\int_0^\infty X(s,\omega)\,dB_s\right)^2\right\} = \mathbf{E}\left(\int_0^\infty X(s,\omega)^2\,ds\right). \tag{9.8}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε ακολουθία $(X_n)_{n\geq 1}$ στον $\mathcal{H}_0^2$ με $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_{L^2(\lambda\times\mathbf{P})}$. Έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} I(X_n) = I(X)$ στη $\|\cdot\|_{L^2(\mathbf{P})}$ νόρμα και

$$\|I(X_n)\|_{L^2(\mathbf{P})} = \|X_n\|_{L^2(\lambda\times\mathbf{P})}$$

για κάθε $n \geq 1$. Επειδή σε ένα χώρο με νόρμα η συνάρτηση νόρμα είναι συνεχής (έπεται από την$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$), για $n \to \infty$, η τελευταία ισότητα δίνει το ζητούμενο. ∎

Το επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε το ολοκλήρωμα για ανέλιξη με σύνολο δεικτών ένα υποδιάστημα $[a,b] \subset [0,\infty)$.

Θα ορίσουμε πρώτα κάποιους χώρους ανελίξεων. Μια ανέλιξη $X : [a,b]\times\Omega \to \mathbb{R}$ λέγεται μετρήσιμη αν είναι μετρήσιμη ως προς τη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}([a,b])\otimes\mathcal{F}$. Ο χώρος $\mathcal{H}^2[a,b]$ περιέχει ακριβώς τις μετρήσιμες προσαρμοσμένες $X : [a,b]\times\Omega \to \mathbb{R}$ με

$$\mathbf{E}\left(\int_a^b X(s,\omega)^2\,ds\right) < \infty,$$

ενώ ο $\mathcal{H}_0^2[a,b]$ περιέχει τις $X : [a,b]\times\Omega \to \mathbb{R}$ της μορφής

$$X(t,\omega) = \sum_{i=1}^k A_i(\omega)\,\mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t) \text{ για κάθε } (t,\omega) \in [a,b]\times\Omega, \tag{9.9}$$

με $k \in \mathbb{N}^+, a \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_{k+1} \leq b$, την A_i να είναι $\mathcal{F}_{t_i}$-μετρήσιμη, και $\mathbf{E}(A_i^2) < \infty$ για κάθε $i = 1,2,\ldots,k$.

Για μια $X \in \mathcal{H}^2[a,b]$ θεωρούμε την επέκταση $\hat{X} : [0,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R}$ της X με

$$\hat{X}(t,\omega) = \begin{cases} X(t,\omega) & \text{αν } t \in [a,b], \\ 0 & \text{αν } t \in [0,\infty)\backslash[a,b], \end{cases}$$

η οποία είναι στοιχείο του $\mathcal{H}^2$ και ορίζουμε

$$\int_a^b X(s,\omega)\,dB_s := I(\hat{X}) = \int_0^\infty \hat{X}(s,\omega)\,dB_s.$$

Ειδικά για το ολοκλήρωμα $\int_0^t X(s,\omega)\,dB(s)$ χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $I_t(X)$.

Βέβαια το $I(\hat{X})$ είναι το όριο $\lim_{n\to\infty} I(X_n)$ στον L^2 όπου $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι μια ακολουθία στον $\mathcal{H}_0^2$ με $\|\hat{X} - X_n\|_{L^2(\lambda\times\mathbf{P})} \to 0$, η ύπαρξη της οποίας εξασφαλίζεται από το Λήμμα 9.7. Από την απόδειξη του λήμματος προκύπτει ότι για τη $(X_n)_{n\geq 1}$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $X_n(t,\omega) = 0$ αν $t \in [0,\infty)\backslash[a,b]$ και άρα υπάρχει $Y_n \in \mathcal{H}_0^2[a,b]$ ώστε $X_n = \hat{Y}_n$.

Πρόταση 9.12. *Για $0 \leq a < c < b$ και $X \in \mathcal{H}^2[a,b]$ έχουμε:*

(i) Η $\int_a^b X(s,\omega)\,dB_s$ είναι $\mathcal{F}_b$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή.

(ii) Με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\int_a^b X(s,\omega)\,dB_s = \int_a^c X(s,\omega)\,dB_s + \int_c^b X(s,\omega)\,dB_s.$$

(iii) Με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\mathbf{E}\left\{\int_a^b X(s,\omega)\,dB_s \middle| \mathcal{F}_a\right\} = 0.$$

(iv) (Ισομετρία Itô με δέσμευση) Με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\mathbf{E}\left\{\left(\int_a^b X(s,\omega)\,dB_s\right)^2 \middle| \mathcal{F}_a\right\} = \mathbf{E}\left\{\int_a^b X(s,\omega)^2\,ds \middle| \mathcal{F}_a\right\}.$$

Η ακριβής διατύπωση της (i) είναι ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^b X(s,\omega)\,dB_s$ ως στοιχείο του $L^2(\mathbf{P})$ έχει αντιπρόσωπο τυχαία μεταβλητή που είναι $\mathcal{F}_b$-μετρήσιμη.

Απόδειξη. (i) Έστω $\hat{X}$ η ανέλιξη που ορίστηκε πιο πάνω. Από το Λήμμα 9.7, υπάρχει $(X_n)_{n\geq 1}$ στον $\mathcal{H}_0^2$ με $\lim_{n\to\infty} X_n = \hat{X}$ στη νόρμα $\|\cdot\|_{L^2(\lambda\times\mathbf{P})}$. Όπως παρατηρήσαμε πριν τη διατύπωση της πρότασης, μπορούμε να έχουμε ότι κάθε X_n ισούται με μια $\hat{Y}_n$ με την $Y_n \in \mathcal{H}_0^2[a,b]$. Τότε κάθε $I(X_n)$, είναι $\mathcal{F}_b$-μετρήσιμη. Επειδή $\lim_{n\to\infty} I(X_n) = I(\hat{X})$ στη $\|\cdot\|_{L^2(\mathbf{P})}$ νόρμα, έπεται ότι υπάρχει υπακολουθία της $I(X_n)$ που συγκλίνει στην $I(\hat{X})$ σχεδόν παντού. Μπορούμε μάλιστα να υποθέσουμε ότι η ίδια η $I(X_n)$ συγκλίνει (αλλιώς, την αντικαθιστούμε με μια συγκλίνουσα υπακολουθία της σε ό,τι ακολουθεί). Έστω $A := \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} I(X_n) \text{ υπάρχει }\}$. Εύκολα δείχνουμε ότι $A \in \mathcal{F}_b$. Θέτοντας

$$Z(\omega) := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} I(X_n) & \text{αν } \omega \in A, \\ 0 & \text{αν } \omega \in \Omega\backslash A, \end{cases}$$

έχουμε ότι η Z είναι $\mathcal{F}_b$-μετρήσιμη και, επειδή $\mathbf{P}(\Omega\backslash A) = 0$, ανήκει στην κλάση του $I(\hat{X})$. Η Z είναι ο αντιπρόσωπος που ζητάμε.

(ii) Έστω $\hat{X}$ όπως ορίστηκε πιο πάνω και

$$X_1(t,\omega) = \hat{X}(t,\omega)\mathbf{1}_{t\leq c},$$
$$X_2(t,\omega) = \hat{X}(t,\omega)\mathbf{1}_{t> c}$$

για κάθε $(t,\omega) \in \Omega \times [0,\infty)$. Τότε το αριστερό μέλος της ζητούμενης ισότητας ισούται με $I(\hat{X})$, ενώ το δεξί με $I(X_1) + I(X_2)$, τα οποία ισούνται λόγω του ότι $\hat{X} = X_1 + X_2$ και της γραμμικότητας της I (Πρόταση 9.10).

(iii) Υποθέτουμε πρώτα ότι η $X \in \mathcal{H}_0^2[a,b]$ και γράφεται όπως στην (9.9). Τότε

$$\mathbf{E}\left\{\sum_{i=1}^k A_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \middle| \mathcal{F}_a\right\} = \sum_{i=1}^k \mathbf{E}\left\{A_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \middle| \mathcal{F}_a\right\}.$$

Για $1 \leq i \leq k$, η $\mathcal{F}_a \subset \mathcal{F}_{t_i}$ συνεπάγεται ότι ο i όρος του τελευταίου αθροίσματος ισούται με

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{A_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right\} \middle| \mathcal{F}_a\right\} = \mathbf{E}\left\{A_i(\omega)\,\mathbf{E}\left\{(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right\} \middle| \mathcal{F}_a\right\} \\
&= \mathbf{E}\left\{A_i(\omega)\,\mathbf{E}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \middle| \mathcal{F}_a\right\} = 0
\end{aligned}$$

αφού η $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_{t_i}$. Τώρα για τη γενική περίπτωση, υπάρχει ακολουθία $(X_n)_{n\geq 1}$ στον $\mathcal{H}_0^2[a,b]$ ώστε $\|\hat{X} - \hat{X}_n\|_{L^2(\lambda\times\mathbf{P})} \to 0$. Επειδή για κάθε X_n έχουμε δείξει την πρόταση, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left\{\int_a^b X(s,\omega)\,dB_s\middle|\mathcal{F}_a\right\}\right)^2 = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left\{\int_a^b \Big(X(s,\omega) - X_n(s,\omega)\Big)\,dB_s\middle|\mathcal{F}_a\right\}\right)^2\\
&\leq \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left\{\left(\int_a^b \Big(X(s,\omega) - X_n(s,\omega)\Big)\,dB_s\right)^2\middle|\mathcal{F}_a\right\}\right) = \mathbf{E}\left\{\left(\int_a^b \Big(X(s,\omega) - X_n(s,\omega)\Big)\,dB_s\right)^2\right\}\\
&= \mathbf{E}(\{I(\hat{X}) - I(\hat{X}_n)\}^2) = \|\hat{X} - \hat{X}_n\|^2_{L^2(\lambda\times\mathbf{P})}.
\end{aligned}$$

Η ανισότητα στη δεύτερη γραμμή προκύπτει από την ανισότητα Jensen για τη δεσμευμένη μέση τιμή. Η πρώτη ισότητα στην τελευταία γραμμή είναι απλώς ο ορισμός των ολοκληρωμάτων της προηγούμενης γραμμής. Η επόμενη ισότητα προκύπτει από τη γραμμικότητα της I και την ισομετρία Itô . Η ποσότητα στην οποία καταλήξαμε τείνει στο 0 για $n \to \infty$ και ο ισχυρισμός μας αποδείχθηκε.

(iv) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $A \in \mathcal{F}_a$ ισχύει

$$\mathbf{E}\left\{\mathbf{1}_A\left(\int_a^b X(s,\omega)\,dB_s\right)^2\right\} = \mathbf{E}\left\{\mathbf{1}_A\int_a^b X(s,\omega)^2\,ds\right\}.$$

Αυτό όμως προκύπτει από την εφαρμογή της ισομετρίας του Itô στην ανέλιξη

$$X_1(t,\omega) = \begin{cases} 1_A(\omega)X(t,\omega) & t \in [a,b],\\ 0 & t \in [0,\infty)\backslash[a,b].\end{cases}$$

η οποία είναι μετρήσιμη και προσαρμοσμένη γιατί $A \in \mathcal{F}_a$. ■

9.4 Υπολογισμοί κάποιων ολοκληρωμάτων

Παράδειγμα 9.13. Για B τυπική κίνηση Brown και $t > 0$,

$$\int_0^t B_s\,dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t. \tag{9.10}$$

Απόδειξη. Ο ολοκληρωτέος δεν είναι στοιχείο του $\mathcal{H}_0^2$ αλλά του $\mathcal{H}^2$, οπότε βρίσκουμε ακολουθία στοιχείων του $\mathcal{H}_0^2$ που τον προσεγγίζουν.

Για $n \in \mathbb{N}^+$ και $0 \leq j \leq 2^n$ θέτουμε $t_j^{(n)} := jt/2^n$. Και έπειτα, για $(s,\omega) \in [0,\infty)\times\Omega$ και $n \in \mathbb{N}^+$,

$$\begin{aligned}
X(s,\omega) &:= B_s\mathbf{1}_{s\in[0,t]},\\
X_n(s,\omega) &:= \sum_{j=0}^{2^n-1} B_{t_j^{(n)}}\mathbf{1}_{(t_j^{(n)},t_{j+1}^{(n)}]}(s).
\end{aligned}$$

Για την απόσταση των δύο αυτών ανελίξεων στον $\mathcal{H}^2$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\|X - X_n\|^2_{L^2(\lambda\times\mathbf{P})} &= \mathbf{E}\left(\int_0^t \{X(s,\omega) - X_n(s,\omega)\}^2\,ds\right) = \mathbf{E}\left(\sum_{j=0}^{2^n-1}\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}} (B_s - B_{t_j^{(n)}})^2\,ds\right)\\
&= \sum_{j=0}^{2^n-1}\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}} \mathbf{E}(B_s - B_{t_j^{(n)}})^2\,ds = \sum_{j=0}^{2^n-1}\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}} (s - t_j^{(n)})\,ds\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2^n-1}(t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)})^2 = \frac{1}{2}2^n\frac{t^2}{2^{2n}} = \frac{t^2}{2^{n+1}},
\end{aligned}$$

που τείνει στο 0 για $n \to \infty$.

Έπειτα, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $2x(y-x) = y^2 - x^2 - (y-x)^2$ για $x, y \in \mathbb{R}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} I(X_n) &= \sum_{j=0}^{2^n-1} B_{t_j^{(n)}}(B_{t_{j+1}^{(n)}} - B_{t_j^{(n)}}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{2^n-1}(B^2_{t_{j+1}^{(n)}} - B^2_{t_j^{(n)}}) - \sum_{j=0}^{2^n-1}(B_{t_{j+1}^{(n)}} - B_{t_j^{(n)}})^2\right) \\ &= \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2^n-1}(B^2_{t_{j+1}^{(n)}} - B^2_{t_j^{(n)}})^2 \to \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{t}{2} \end{aligned}$$

στον $L^2(\mathbf{P})$ για $n \to \infty$ λόγω του Θεωρήματος 8.7. Μάλιστα το ίδιο θεώρημα δίνει ότι $I(X_n) \to (B_t^2 - t)/2$ με πιθανότητα 1 εξαιτίας της επιλογής των σημείων $t_j^{(n)}$. ■

Παράδειγμα 9.14. Για B τυπική κίνηση Brown και $t > 0$,

$$\int_0^t B_s^2 \, dB_s = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_s \, ds.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε τα $t_j^{(n)}$ όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Και για $(s, \omega) \in [0, \infty) \times \Omega$,

$$\begin{aligned} Y(s,\omega) &:= B_s^2, \\ Y_n(s,\omega) &:= \sum_{j=0}^{2^n-1} B^2_{t_j^{(n)}} \mathbf{1}_{(t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}]}(s). \end{aligned}$$

Μπορεί να δεί κανείς ότι $\lim_{n\to\infty} \|Y - Y_n\|^2_{L^2(\lambda\times\mathbf{P})} = 0$. Για την εύρεση του ορίου της

$$I(Y_n) = \sum_{j=0}^{2^n-1} B^2_{t_j^{(n)}}(B_{t_{j+1}^{(n)}} - B_{t_j^{(n)}}),$$

παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} B^3_{t_{j+1}^{(n)}} &= (B_{t_j^{(n)}} + B_{t_{j+1}^{(n)}} - B_{t_j^{(n)}})^3 \\ &= B^3_{t_j^{(n)}} + 3B^2_{t_j^{(n)}}(B_{t_{j+1}^{(n)}} - B_{t_j^{(n)}}) + 3B_{t_j^{(n)}}(B_{t_{j+1}^{(n)}} - B_{t_j^{(n)}})^2 + (B_{t_{j+1}^{(n)}} - B_{t_j^{(n)}})^3. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας αυτές τις ισότητες για $j = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$ παίρνουμε

$$B_t^3 = 3I(Y_n) + 3\sum_{j=0}^{2^n-1} B_{t_j^{(n)}}(B_{t_{j+1}^{(n)}} - B_{t_j^{(n)}})^2 + \sum_{j=0}^{2^n-1}(B_{t_{j+1}^{(n)}} - B_{t_j^{(n)}})^3.$$

Το πρώτο άθροισμα συγκλίνει στον $L^2(\mathbf{P})$ στο $3\int_0^t B_s \, ds$ ενώ το δεύτερο στο 0 (Ασκήσεις 8.3, 8.2). Και το συμπέρασμα έπεται. ■

Ασκήσεις

Στις ασκήσεις πιο κάτω, B είναι μια τυπική κίνηση Brown.

9.1 Έστω $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής. Να δειχθεί ότι

(i) Για κάθε Cauchy (βασική) ακολουθία $(x_n)_{n\geq1}$ στο $\mathbb{Q}$, η ακολουθία $(f(x_n))_{n\geq1}$ είναι Cauchy.

(ii) Η f έχει μοναδική συνεχή επέκταση $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

9.2 Για $a \in \mathbb{R}$ να δειχθεί ότι η ανέλιξη X με $X(t,\omega) := e^{aB_t}$ για κάθε $(t,\omega) \in [0,\infty) \times \Omega$ δεν είναι στοιχείο του $\mathcal{H}^2$, αλλά ο περιορισμός της στο $[0,1] \times \Omega$ είναι στοιχείο του $\mathcal{H}^2[0,1]$. Έπειτα να υπολογιστεί η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $I(a) := \int_0^1 e^{aB_t} \, dB_t$.

9.3 Για $a \in \mathbb{R}$, θεωρούμε την ανέλιξη X με $X(t,\omega) := e^{aB_t^2}$ για κάθε $(t,\omega) \in [0,1] \times \Omega$. Να βρεθεί για ποια a είναι η X στοιχείο του $\mathcal{H}^2[0,1]$ και να υπολογιστεί η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $J(a) := \int_0^1 e^{aB_t^2}\, dB_t$.

9.4 Αν $f, g \in \mathcal{H}^2$, τότε

$$\mathbf{E}(I(f)I(g)) = \int_0^\infty \mathbf{E}\{f(t,\omega)g(t,\omega)\}\, dt.$$

9.5 Να δειχθεί ότι για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\int_0^t s\, dB_s = tB_t - \int_0^t B_s\, ds.$$

9.6 Στο Παράδειγμα 9.13 είδαμε ότι για κάθε $t > 0$, για $n \to \infty$, έχουμε στον $L^2(\mathbf{P})$ τη σύγκλιση

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} B_{t_j^{(n)}}(B_{t_{j+1}^{(n)}} - B_{t_j^{(n)}}) \to \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{t}{2}.$$

Να δειχθεί ότι έχουμε επίσης τις συγκλίσεις

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} B_{t_{j+1}^{(n)}}(B_{t_{j+1}^{(n)}} - B_{t_j^{(n)}}) \to \frac{1}{2}B_t^2 + \frac{t}{2},$$

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} B_{(t_j^{(n)}+t_{j+1}^{(n)})/2}(B_{t_{j+1}^{(n)}} - B_{t_j^{(n)}}) \to \frac{1}{2}B_t^2$$

στον $L^2(\mathbf{P})$ καθώς $n \to \infty$.

9.7 Για $0 \le a < b$ και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμη με $\int_a^b f^2(t)\, dt < \infty$, να δειχθεί ότι η τυχαία μεταβλητή

$$Z := \int_a^b f(t) dB_t$$

ακολουθεί την κατανομή $N(0,\sigma^2)$ με $\sigma^2 = \int_a^b f^2(t)dt$.
Η άσκηση λέει ότι το ολοκλήρωμα Itô κάθε μη τυχαίας συνάρτησης, εφόσον αυτό μπορεί να οριστεί, ακολουθεί την κανονική κατανομή. Αυτό όμως δεν ισχύει για το ολοκλήρωμα Itô όλων των ανελίξεων. Για παράδειγμα, το ολοκλήρωμα στην (9.10) ακολουθεί μια κατανομή με στήριγμα το $[-t/2, \infty)$ την οποία μπορούμε να προσδιορίσουμε εύκολα και σαφώς δεν είναι κανονική.

9.8 Στο Παράδειγμα 9.14, να δειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} \|Y - Y_n\|^2_{L^2(\lambda \times \mathbf{P})} = 0$.

10

Το ολοκλήρωμα ως ανέλιξη

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ορίσαμε για $X \in \mathcal{H}^2$ και κάθε $t \geq 0$ το ολοκλήρωμα $I_t(X) := \int_0^t X(s, \omega)\, dB_s$. Τώρα θέλουμε να μελετήσουμε την εξέλιξη αυτών των τυχαίων μεταβλητών $\{I_t(X) : t \geq 0\}$ καθώς το t μεταβάλλεται. Δηλαδή να τις δούμε ως μέλη μιας ανέλιξης. Τα σημαντικότερα αποτελέσματα του κεφαλαίου περιέχονται στην Παράγραφο 10.1. Η Παράγραφος 10.2 είναι τεχνική. Δίνει ένα αποτέλεσμα που θα χρειαστεί στο επόμενο κεφάλαιο για μια επιπλέον επέκταση του ολοκληρώματος.

10.1 Συνεχής εκδοχή

Όταν $X \in \mathcal{H}_0^2$, τότε τα πράγματα είναι απλά. Για κάθε $\omega \in \Omega$ και $t > 0$, η τυχαία μεταβλητή $I_t(X)$ είναι μονοσήμαντα ορισμένη. Δεν χρειάζεται να τη δούμε ως στοιχείο του $L^2(\mathbf{P})$. Επομένως, για κάθε $\omega \in \Omega$, η συνάρτηση $t \mapsto X(\omega, t)$ είναι καλά ορισμένη. Έχουμε τότε το εξής αποτέλεσμα.

Πρόταση 10.1. *Έστω $X \in \mathcal{H}_0^2$. Τότε η ανέλιξη $(I_t(X))_{t\geq 0}$ είναι ένα συνεχές martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.*

Απόδειξη. Πρώτα αποδεικνύουμε ότι είναι martingale. Το ότι είναι προσαρμοσμένη προκύπτει από την Πρόταση 9.12(i). Το ότι κάθε $I_t(X) \in L^1(\mathbf{P})$ προκύπτει γιατί από τον ορισμό του ολοκληρώματος Itô ισχύει $I_t(X) \in L^2(\mathbf{P})$ για κάθε $X \in \mathcal{H}_0^2$ και $L^2(\mathbf{P}) \subset L^1(\mathbf{P})$. Έπειτα για $0 \leq s < t$,

$$\mathbf{E}(I_t(X) \,|\, \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}\left(I_s(X) + \int_s^t X_r\, dB_r \middle| \mathcal{F}_s\right) = I_s(X) + 0 = I_s(X)$$

χρησιμοποιώντας τα (i), (ii), (iii) από την Πρόταση 9.12.

Δείχνουμε τώρα ότι η $(I_t(X))_{t\geq 0}$ είναι συνεχής. Έστω ότι η X γράφεται όπως στη σχέση (9.4). Για $r \in \{1, \ldots, k\}$ και $t \in [t_r, t_{r+1})$, έχουμε

$$X\mathbf{1}_{[0,t]}(s) = \sum_{i=1}^{r-1} A_i(\omega)\mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]} + A_r(\omega)\mathbf{1}_{(t_r, t]}.$$

Άρα για αυτό το t, με βάση τον Ορισμό 9.4,

$$I_t(X) = \sum_{i=0}^{r-1} A_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + A_r(\omega)(B_t - B_{t_r}).$$

Επίσης $I_t(X) = 0$ για $t < t_0$, και $I_t(X) = \sum_{i=1}^{k} A_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ για $t \geq t_{k+1}$. Επειδή η B είναι συνεχής, οι εκφράσεις αυτές δίνουν το ζητούμενο. ■

Θέλουμε να έχουμε το αποτέλεσμα της προηγούμενης πρότασης για $X \in \mathcal{H}^2$. Υπάρχει όμως ένα σοβαρό πρόβλημα. Η ανέλιξη $(I_t(X))_{t\geq 0}$ δεν είναι καλά ορισμένη ως απεικόνιση $f : \Omega \to \mathbb{R}^{[0,\infty)}$ της οποίας η εικόνα στο $\omega \in \Omega$ είναι η συνάρτηση $f(\omega)(t) = I_t(X)$.

Για να το δούμε αυτό, ας προσπαθήσουμε να την ορίσουμε. Επειδή κάθε $I_t(X)$ είναι ορισμένη ως στοιχείο του $L^2(\mathbf{P})$, επιλέγουμε έναν αντιπρόσωπο από την κλάση της (δηλαδή μια εκδοχή της), ας τον συμβολίσουμε με $I_t^{(1)}(X)$, και έχουμε έτσι μια ανέλιξη $(I_t^{(1)}(X))_{t\geq 0}$ καλώς ορισμένη στο $[0, \infty) \times \Omega$.

Ονομάζουμε αυτή την ανέλιξη **εκδοχή** της $(I_t(X))_{t\geq 0}$. Αν πάρουμε όμως άλλους αντιπροσώπους θα έχουμε μια άλλη ανέλιξη $(I_t^{(2)}(X))_{t\geq 0}$. Θα θέλαμε αυτές οι δύο ανελίξεις να είναι μη διακρίσιμες (Ορισμός 4.4, ώστε η ανέλιξη $(I_t(X))_{t\geq 0}$ να είναι ουσιαστικά μοναδικά ορισμένη). Δηλαδή να υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $\Omega_0 \subset \Omega$ με πιθανότητα 1 ώστε για $\omega \in \Omega_0$ οι συναρτήσεις $(t \mapsto I_t^{(1)}(X)), (t \mapsto I_t^{(2)}(X))$ να ταυτίζονται. Τότε για κάθε $t \geq 0$ θα ισχύει

$$\Omega_0 \subset \{I_t^{(1)}(X) = I_t^{(2)}(X)\} =: C_t.$$

Και επομένως οποιαδήποτε επιλογή Ω_0 θα είναι υποσύνολο της τομής $\cap_{t\geq 0} C_t$. Επειδή κάθε C_t έχει πιθανότητα 1, η τομή θα είχε και αυτή πιθανότητα 1 αν ήταν πάνω σε αριθμήσιμο πλήθος από C_t. Επειδή όμως είναι πάνω σε υπεραριθμήσιμο πλήθος από C_t, δεν είναι σαφές καν αν είναι μη κενή. Εκ των προτέρων δηλαδή τίποτα δεν αποκλείει η τομή να έχει πιθανότητα 0 και τότε και το Ω_0 θα έχει πιθανότητα 0.

Συμπερασματικά, υπάρχει πρόβλημα ορισμού γιατί υπάρχει μεγάλη αυθαιρεσία στη διαδικασία ορισμού του συνόλου των τυχαίων μεταβλητών $\{I_t(X) : t \geq 0\}$.

Εμείς θα επιδιώξουμε να κατασκευάσουμε μια ανέλιξη όπως την $I_t^{(1)}(X)$ πιο πάνω, δηλαδή μια *εκδοχή* της $(I_t(X))_{t\geq 0}$, με τον επιπλέον περιορισμό η συνάρτηση $t \mapsto I_t(X)$ να είναι συνεχής με πιθανότητα 1.

Θεώρημα 10.2 (Συνεχής εκδοχή του ολοκληρώματος)**.** *Έστω ότι η ανέλιξη $(X_t)_{t\geq 0}$ είναι μετρήσιμη, προσαρμοσμένη, και*

$$\mathbf{E}\left(\int_0^t X^2(s,\omega)\,ds\right) < \infty \qquad \text{για κάθε } t \geq 0. \tag{10.1}$$

Τότε υπάρχει μια εκδοχή της

$$\left(\int_0^t X(s,\omega)\,dB_s\right)_{t\geq 0}$$

η οποία με πιθανότητα 1 είναι συνεχής συνάρτηση του t. Επιπλέον, αυτή η εκδοχή είναι martingale.

Η απόδειξη του θεωρήματος δίνεται στο Παράρτημα Γ΄.

Η συνεχής εκδοχή της $(I_t(X))_{t\geq 0}$, η ύπαρξη της οποίας εξασφαλίζεται από το προηγούμενο θεώρημα, είναι ουσιαστικά η μοναδική συνεχής εκδοχή. Δηλαδή οποιαδήποτε άλλη συνεχής εκδοχή είναι μηδιακεκρινόμενη από αυτήν (Πρόταση 4.6). Συμβολίζουμε αυτή την ανέλιξη με $X \bullet B$, και ο συμβολισμός είναι ανάλογος με τη διακριτή περίπτωση της Παραγράφου 3.3.

Στο εξής, όποτε θεωρούμε την ανέλιξη $\left(\int_0^t X(s,\omega)\,dB_s\right)_{t\geq 0}$, θα υποθέτουμε ότι παίρνουμε τη συνεχή εκδοχή της.

10.2 Τοπικότητα του ολοκληρώματος

Ας σκεφτούμε το εξής ερώτημα: Έστω $X \in \mathcal{H}^2$ και $t > 0$. Θέτουμε

$$A := \{\omega \in \Omega : X(s,\omega) = 0 \text{ για κάθε } s \in [0,t]\}.$$

Το A ενδεχομένως να είναι ένα σύνολο με πιθανότητα > 0 και < 1, δηλαδή μη τετριμμένο.
Ισχύει $\int_0^t X(s,\omega)\,dB_s = 0$ για κάθε $\omega \in A$;

Όταν η $X \in \mathcal{H}_0^2$, τότε αυτό ισχύει και είναι άμεσο γιατί το ολοκλήρωμα ορίστηκε με ξεκάθαρο τύπο για κάθε δεδομένο ω (τύπος 9.5). Όμως για $X \in \mathcal{H}^2$ το ολοκλήρωμα ορίστηκε ως ένα όριο στον $L^2(\mathbf{P})$ και δεν είναι σαφές αν η απάντηση στο ερώτημα είναι καταφατική [για περισσότερα, δες τη συζήτηση στην Παράγραφο 6.5 του Steele (2001)]. Η διαίσθησή μας λέει ότι το ίδιο θα ισχύει και στον $\mathcal{H}^2$, αλλά πρέπει να το αποδείξουμε περνώντας μέσα από τον «περίεργο» ορισμό του ολοκληρώματος. Στην παράγραφο αυτή θα μας απασχολήσει μια γενικότερη μορφή αυτού του ερωτήματος.

Αν T είναι χρόνος διακοπής και X ανέλιξη όπως στο Θεώρημα 10.2, θα δείξουμε ότι η σταματημένη ανέλιξη $(X \bullet B)^T$ προκύπτει και αυτή από ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα. Πιο συγκεκριμένα, ισούται με την ανέλιξη $(X\mathbf{1}_{[0,T]}) \bullet B$. Δηλαδή,

$$(X \bullet B)^T = (X\mathbf{1}_{[0,T]}) \bullet B.$$

Κατ' αρχάς, οφείλουμε να δείξουμε ότι η ανέλιξη $X\mathbf{1}_{[0,T]}$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 10.2 ώστε η $(X\mathbf{1}_{[0,T]}) \bullet B$ να ορίζεται. Έστω λοιπόν $Y(t,\omega) = X(t,\omega)\mathbf{1}_{[0,T]}(t)$.
(i) Η Y είναι μετρήσιμη. Πρώτα παρατηρούμε ότι το $U := \{(t,\omega) : t \leq T(\omega)\} \in \mathcal{B}([0,\infty)) \otimes \mathcal{F}$ γιατί είναι η αντίστροφη εικόνα του συνόλου Borel $\{(x,y) : 0 \leq x \leq y\}$ μέσω της απεικόνισης $r(t,\omega) = (t, T(\omega))$. Για να δείξουμε ότι η τελευταία είναι μετρήσιμη, παρατηρούμε ότι για $0 \leq a \leq b$ και $c \leq d$ ισχύει $r^{-1}([a,b] \times [c,d]) = [a,b] \times T^{-1}([c,d]) \in \mathcal{B}([0,\infty)) \otimes \mathcal{F}$ αφού η T είναι μετρήσιμη. Τώρα, για $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, έχουμε

$$\begin{aligned} Y^{-1}(A) &= \{(t,\omega) : Y(t,\omega) \in A, T(\omega) \geq t\} \cup \{(t,\omega) : Y(t,\omega) \in A, T(\omega) < t\} \\ &= (X^{-1}(A) \cap U) \cup V, \end{aligned}$$

όπου $V = U^c$ αν $0 \in A$, ενώ $V = \emptyset$ αν $0 \notin A$. Σε κάθε περίπτωση, το $Y^{-1}(A) \in \mathcal{B}([0,\infty)) \otimes \mathcal{F}$.
(ii) Η Y είναι προσαρμοσμένη. Αρκεί να το δείξουμε για την $\mathbf{1}_{[0,T]}(t)$. Για $t \geq 0$, η $\mathbf{1}_{[0,T]}(t)$ είναι η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου $\{\omega \in \Omega : t \leq T(\omega)\} = \Omega \setminus \{T < t\}$ και το τελευταίο σύνολο είναι στοιχείο της $\mathcal{F}_t$ με βάση την Άσκηση 4.6. Φαίνεται εδώ η σημασία να είναι ο T χρόνος διακοπής.
(iii) Τέλος, για κάθε $t > 0$,

$$\mathbf{E}\left(\int_0^t X_s^2 \mathbf{1}_{[0,T]}(s)\, ds\right) \leq \mathbf{E}\left(\int_0^t X_s^2\, ds\right) < \infty.$$

Το αποτέλεσμα που μας ενδιαφέρει λοιπόν είναι το εξής.

Πρόταση 10.3. *Έστω T χρόνος διακοπής. Με πιθανότητα 1 ισχύει*

$$\int_0^{t\wedge T} X_s\, dB_s = \int_0^t X_s \mathbf{1}_{[0,T]}(s)\, dB_s \tag{10.2}$$

για κάθε $t > 0$.

Η απόδειξη της πρότασης δίνεται στο Παράρτημα Δ'. Άμεση συνέπειά της είναι το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο απαντάει στην ερώτηση που τέθηκε στην αρχή της παραγράφου και το οποίο θα χρειαστούμε για την επέκταση του ολοκληρώματος σε ανελίξεις έξω από το σύνολο $\mathcal{H}^2$.

Πρόταση 10.4. *Έστω $X \in \mathcal{H}^2$ και T χρόνος διακοπής ώστε για κάθε $s \geq 0$ να ισχύει $X(s,\omega) = 0$ σχεδόν παντού στο $\{\omega \in \Omega : T(\omega) \geq s\}$. Τότε για κάθε $t \geq 0$ έχουμε*

$$\int_0^t X(s,\omega)\, dB_s = 0$$

σχεδόν παντού στο $\{\omega \in \Omega : T(\omega) \geq t\}$.

Απόδειξη. Για το δεδομένο t, έχουμε με πιθανότητα 1

$$\int_0^{t\wedge T} X_s\, dB_s = \int_0^t X_s \mathbf{1}_{[0,T]}(s)\, dB_s. \tag{10.3}$$

Το δεξί μέλος της ισότητας αυτής ισούται με 0 με πιθανότητα 1 γιατί με χρήση του τύπου του Itô η δεύτερή του ροπή είναι

$$\mathbf{E}\left(\int_0^t X_s^2 \mathbf{1}_{[0,T]}(s)\, ds\right) = \int_0^t \mathbf{E}\{X_s^2 \mathbf{1}_{[0,T]}(s)\}\, ds = 0.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί για δεδομένο $s \in [0,t]$, η δείκτρια $\mathbf{1}_{[0,T]}(s)$ είναι $\neq 0$ μόνο στο $\{\omega \in \Omega : T(\omega) \geq s\}$, στο οποίο όμως $X_s = 0$ με πιθανότητα 1.

Τέλος, το αριστερό μέλος της (10.3) ισούται με $\int_0^t X_s \, dB_s$ στο $\{\omega \in \Omega : T(\omega) \geq t\}$. Και η πρόταση έπεται. ∎

Ασκήσεις

10.1 Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $(x_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στον X ώστε να υπάρχει σταθερά $c \in (0,1)$ με

$$\rho(x_n, x_{n+1}) < c^n$$

για κάθε $n \geq 1$. Να δειχθεί ότι η $(x_n)_{n\geq 1}$ είναι Cauchy.

10.2 Έστω ανέλιξη X όπως στο Θεώρημα 10.2. Να δειχθεί ότι η ανέλιξη $(Y_t)_{t\geq 0}$ με

$$Y_t := \left(\int_0^t X(r,\omega) \, dB_r \right)^2 - \int_0^t X(r,\omega)^2 \, dr$$

για κάθε $t \geq 0$ είναι ένα συνεχές martingale. (Για την ακρίβεια, είναι συνεχές με πιθανότητα 1.)

11

Επεκτάσεις του ολοκληρώματος

Στη γενική θεωρία στοχαστικής ολοκλήρωσης δίνεται νόημα στο ολοκλήρωμα

$$\int_a^b X dM$$

για αρκετές ανελίξεις M και X, χωρίς να είναι απαραίτητο η M να είναι κίνηση Brown ούτε η X να ανήκει σε ένα σύνολο τόσο περιορισμένο όπως το $\mathcal{H}^2$. Σε αυτό το κεφάλαιο θα κάνουμε δύο επεκτάσεις. Στην πρώτη θα κρατήσουμε ως M την κίνηση Brown και θα επιτρέψουμε περισσότερες X από ό,τι έχουμε κάνει ως τώρα, ενώ στη δεύτερη θα επιτρέψουμε περισσότερες M. Η δεύτερη είναι απλώς θέμα επέκτασης του συμβολισμού και δεν απαιτεί κάποια δουλειά.

11.1 Περισσότεροι ολοκληρωτέοι

Θα περίμενε κανείς ότι αν η $X : [0,t] \times \Omega \to \mathbb{R}$, με $0 < t < \infty$, έχει την ιδιότητα η $X(\cdot, \omega)$ να είναι συνεχής για κάθε $\omega \in \Omega$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_0^t X(s,\omega)\, dB_s$ θα ορίζεται. Αυτό όμως δεν ισχύει απαραίτητα. Αν πάρουμε $X(s,\omega) = e^{B_s^2}$ (με B τυπική κίνηση Brown), τότε

$$\mathbf{E}\left(\int_0^t X(s,\omega)^2\, ds\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^t e^{2B_s^2}\, ds\right) = \int_0^t \mathbf{E}(e^{2B_s^2})\, ds = \int_0^t \mathbf{E}(e^{2sZ^2})\, ds,$$

με $Z \sim N(0,1)$. Όμως

$$\mathbf{E}(e^{2sZ^2}) = \int_{\mathbb{R}} e^{2sx^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{(2s-\frac{1}{2})x^2}\, dx,$$

το οποίο είναι πεπερασμένο μόνο για $s < 1/4$. Άρα για $t > 1/4$, έχουμε ότι $X \notin \mathcal{H}^2[0,t]$ και το ολοκλήρωμα δεν μπορεί να οριστεί με τη διαδικασία του προηγούμενου κεφαλαίου.

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα για περισσότερες X αντικαθιστώντας την απαίτηση $\mathbf{E}\left(\int_0^t X^2(s,\omega)\, ds\right) < \infty$, που όριζε τον $\mathcal{H}^2([0,t])$, με την ασθενέστερη απαίτηση

$$\mathbf{P}\left(\int_0^t X^2(s,\omega)\, ds < \infty\right) = 1. \tag{11.1}$$

Και για μια X όπως στην αρχή της παραγράφου, το ολοκλήρωμα θα ορίζεται.

Όπως και πριν, θα δουλέψουμε με διάστημα ολοκλήρωσης το $[0,\infty)$, και εύκολα θα οριστεί μέσω αυτού το ολοκλήρωμα σε κάθε φραγμένο διάστημα $[0,t]$. Θέτουμε

$$\mathcal{H}^2_{LOC} := \left\{ X : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} X \text{ μετρήσιμη, προσαρμοσμένη, και για κάθε } t > 0 \\ \text{ισχύει } \int_0^t X^2(s,\omega)\, ds < \infty \text{ με πιθανότητα 1.} \end{array} \right\}$$

Για X σε αυτό το σύνολο, ορίζεται κατάλληλα το ολοκλήρωμα $I_t(X)$ για κάθε $t \geq 0$. Το συμβολίζουμε με $\int_0^t X(s,\omega)\, dB_s$. Ο ακριβής τρόπος ορισμού περιγράφεται στην επόμενη υποπαράγραφο αλλά δεν θα μας χρειαστεί παρακάτω, οπότε ο αναγνώστης μπορεί να συνεχίσει με την υποπαράγραφο 11.1.2.

11.1.1 Ο ορισμός της επέκτασης

Πιο κάτω, για $X : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ και $\tau : \Omega \to [0,\infty)$, θα συμβολίζουμε με $X^{(\tau)}$ την ανέλιξη που ορίζεται ως
$$X^{(\tau)}(t,\omega) = X(t,\omega)\mathbf{1}_{t\le\tau(\omega)}$$
για κάθε $(t,\omega) \in [0,\infty) \times \Omega$. Προσοχή. Ο ορισμός είναι διαφορετικός από αυτόν της σταματημένης στοχαστικής ανέλιξης που είδαμε στην Παράγραφο 3.5.

Ορισμός 11.1. Έστω $X : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$. Μια ακολουθία χρόνων διακοπής $(\tau_n)_{n\ge1}$ λέγεται $\mathcal{H}^2$**-τοπικοποιούσα** για τη X αν:

(i) Η $(\tau_n)_{n\ge1}$ είναι αύξουσα με πιθανότητα 1.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$ με πιθανότητα 1.

(iii) $X^{(\tau_n)} \in \mathcal{H}^2$ για κάθε $n \ge 1$.

Για κάθε $X \in \mathcal{H}^2_{LOC}$ υπάρχει $\mathcal{H}^2$-τοπικοποιούσα ακολουθία. Πράγματι, αν ορίσουμε
$$\tau_n := n \wedge \inf\left\{t > 0 : \int_0^t X^2(s,\omega)\,ds \ge n\right\}$$
με τη σύμβαση ότι $\inf\emptyset = \infty$, τότε η $(\tau_n)_{n\ge1}$ είναι αύξουσα, με όριο το ∞, και τέλος
$$E\left(\int_0^\infty (X^{(\tau_n)})^2(t,\omega)\,dt\right) = E\left(\int_0^{\tau_n} X^2(t,\omega)\,dt\right) \le n < \infty.$$
Τώρα, παίρνουμε μια τοπικοποιούσα ακολουθία $(\tau_n)_{n\ge1}$ χρόνων διακοπής και για κάθε $t > 0$ ορίζουμε
$$I_t(X) := I_t(X^{(\tau_n)}) \text{ στο } \{\omega \in \Omega : t \le \tau_n(\omega)\}. \tag{11.2}$$
Έστω $A_n := \{\omega \in \Omega : t \le \tau_n(\omega)\}$ για κάθε $n \ge 1$. Έχουμε $\mathbf{P}(\cup_{n=1}^\infty A_n) = 1$ αφού $\lim_{n\to\infty} \tau_n(\omega) = \infty$ με πιθανότητα 1. Επομένως η $I_t(X)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή που ορίζεται σε όλο τον Ω, εκτός ενδεχομένως από ένα σύνολο με πιθανότητα 0. Ένα πρόβλημα όμως είναι ότι επειδή η ακολουθία $(A_n)_{n\ge1}$ είναι αύξουσα, για δεδομένο $\omega \in \Omega$, η $I_t(X)$ ορίζεται πολλές φορές! Δηλαδή την ορίζουμε ως $I_t(X^{(\tau_n)})$ για όλα τα n με $\tau_n(\omega) \ge t$. Θα δείξουμε αμέσως τώρα ότι το σύνολο των σημείων ω στο οποίο έχουμε σύγκρουση πολλαπλών ορισμών έχει πιθανότητα 0. Και άρα η $I_t(X)$ είναι καλά ορισμένη, εκτός από ένα σύνολο με πιθανότητα 0.

Πρόταση 11.2. *Για $t > 0$ σταθερό, η τυχαία μεταβλητή $I_t(X)$ ορίζεται μονοσήμαντα με πιθανότητα 1 και δεν εξαρτάται από την επιλογή της τοπικοποιούσας ακολουθίας τ.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα το εξής. Αν σ, τ είναι χρόνοι διακοπής που ικανοποιούν τη $\sigma \le \tau$ στον Ω και $X^{(\sigma)}, X^{(\tau)} \in \mathcal{H}^2$, τότε
$$I_t(X^{(\sigma)}) = I_t(X^{(\tau)}) \tag{11.3}$$
σχεδόν παντού στο $\{\omega : \sigma(\omega) \ge t\}$. Πράγματι, για την $Y := X^{(\tau)} - X^{(\sigma)}$, έχουμε ότι $Y \in \mathcal{H}^2$ και για κάθε $\omega \in \Omega$ ισχύει $Y(\omega, s) = 0$ για $s \in [0, \sigma(\omega)]$. Με βάση την Πρόταση 10.4, έπεται ότι σχεδόν παντού στο $\{\omega : \sigma(\omega) \ge t\}$ ισχύει $I_t(Y) = 0$, δηλαδή $I_t(X^{(\sigma)}) = I_t(X^{(\tau)})$.

Τώρα εφαρμόζοντας την (11.3) για τους χρόνους τ_m, τ_n για $m < n$, έπεται ότι το σύνολο
$$C_{m,n} := \{\omega \in \Omega : t \le \tau_m(\omega), I_t(X^{(\tau_m)}) \ne I_t(X^{(\tau_n)})\}$$
έχει πιθανότητα 0. Άρα το ίδιο ισχύει και για το $\cup_{1\le m<n} C_{m,n}$. Αυτό αποδεικνύει τον πρώτο ισχυρισμό της πρότασης.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό, παίρνουμε και μια άλλη τοπικοποιούσα ακολουθία $(\sigma_n)_{n\ge1}$, εφαρμόζουμε την (11.3) για τα ζευγάρια χρόνων $\{\tau_n \wedge \sigma_n, \tau_n\}$, $\{\tau_n \wedge \sigma_n, \sigma_n\}$ και έχουμε ότι
$$I_t(X^{(\tau_n)}) = I_t(X^{(\tau_n\wedge\sigma_n)}) = I_t(X^{(\sigma_n)})$$
σχεδόν παντού στο $D_n = \{\omega \in \Omega : \sigma_n \wedge \tau_n \ge t\}$. Επειδή $\mathbf{P}(\cup_{n=1}^\infty D_n) = 1$, έπεται το συμπέρασμα. ∎

11.1.2 Ιδιότητες του επεκτεταμένου ολοκληρώματος

. Στο υπόλοιπο της παραγράφου θα δούμε σημαντικές ιδιότητες του νέου ολοκληρώματος που ορίσαμε στην (11.2). Κατ' αρχάς, έχει και αυτό συνεχή τροποποίηση.

Πρόταση 11.3. *Για $X \in \mathcal{H}^2_{LOC}$, η ανέλιξη $(I_t(X))_{t\geq 0}$ έχει συνεχή τροποποίηση.*

Απόδειξη. Έστω ότι ορίζουμε την $(I_t(X))_{t\geq 0}$ μέσω μιας τοπικοποιούσας ακολουθίας $(\tau_n)_{n\geq 1}$. Για κάθε $n \geq 1$, η $(I_t(X^{(\tau_n)}))_{t\geq 0}$ έχει συνεχή τροποποίηση, έστω $(Z_{n,t})_{t\geq 0}$. Ορίζουμε $I_t(X) = Z_{n,t}$ για όλα τα $\{\omega \in \Omega : \tau_n \geq t > \tau_{n-1}\}$. ■

Σύμβαση: Στο εξής, όποτε δουλεύουμε με μια ανέλιξη $\left(\int_0^t X\, dB\right)_{t\geq 0}$ με $X \in \mathcal{H}^2_{LOC}$, θα θεωρούμε ότι παίρνουμε τη συνεχή έκδοχή της.

Όμοια όπως πριν, για $0 \leq a < b$, ορίζεται ο χώρος $\mathcal{H}^2_{LOC}[a,b]$ και το ολοκλήρωμα $\int_a^b X(s,\omega)\, dB(s)$ για X σε αυτόν τον χώρο. Για το νέο ολοκλήρωμα ισχύουν οι ιδιότητες της Πρότασης 9.10 (i) και της Πρότασης 9.12 (i), (ii). Τώρα όμως το ολοκλήρωμα δεν έχει μέση τιμή 0. Μάλιστα ενδέχεται η μέση του τιμή να μην μπορεί να οριστεί ή να είναι ∞ ή $-\infty$. Συνέπεια αυτού είναι ότι η ανέλιξη $(I_t(X))_{t\geq 0}$ δεν είναι απαραίτητα martingale. Είναι όμως local martingale (Ορισμός 4.17).

Πρόταση 11.4. *Για $X \in \mathcal{H}^2_{LOC}$, η ανέλιξη $(I_t(X))_{t\geq 0}$ είναι local martingale.*

Απόδειξη. Έστω $(\tau_n)_{n\geq 1}$ μια τοπικοποιούσα ακολουθία για τη X. Τότε για κάθε $n \geq 1$ έχουμε $I_{t\wedge\tau_n}(X) = I_t(X^{(\tau_n)})$ για κάθε t σε όλον τον Ω (από την Πρόταση 10.3). Όμως η $(I_t(X^{(\tau_n)}))_{t\geq 0}$ είναι martingale αφού $X^{(\tau_n)} \in \mathcal{H}^2$ και το συμπέρασμα έπεται. ■

Υπό κάποιες προϋποθέσεις, ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα μπορεί να παρασταθεί ως όριο αθροισμάτων Riemann. Για τα αποτελέσματα που ακολουθούν, θα χρειαστούμε μια πολύ ειδική περίπτωση που αυτό συμβαίνει.

Πρόταση 11.5 (Προσέγγιση από αθροίσματα Riemann)**.** *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, $t > 0$, και για κάθε $n \geq 1$, $\Delta_n := \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{k(n)}^{(n)} = t\}$ διαμέριση του $[0,t]$, ώστε $\|\Delta_n\| \to 0$. Τότε*

$$\int_0^t f(B_s)\, dB_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k(n)} f(B_{t_{j-1}^{(n)}})(B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}}) \tag{11.4}$$

κατά πιθανότητα.

Η απόδειξη της πρότασης δίνεται στο Παράρτημα Γ'.

Παρατήρηση 11.6. Στην πιο πάνω πρόταση, κατά τον σχηματισμό του αθροίσματος Riemann, για κάθε διάστημα $[t_{j-1}^{(n)}, t_j^{(n)}]$ επιλέξαμε να υπολογίσουμε την τιμή της f στο αριστερό άκρο του διαστήματος. Αν επιλέξουμε κάποιο άλλο σημείο του διαστήματος, τότε το άθροισμα ενδεχομένως να μην συγκλίνει στο ολοκλήρωμα Itô. Το έχουμε δει αυτό στην Άσκηση 9.6.

11.2 Περισσότεροι ολοκληρωτές

Για την τιμή $X(t,\omega)$ μιας ανέλιξης $X : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$, στο εξής θα χρησιμοποιούμε επίσης τον συμβολισμό $X_t(\omega)$ ή και απλώς X_t.

Έστω χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ στον οποίο ορίζεται μια m-διάστατη κίνηση Brown B και $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ η διήθηση που αυτή παράγει.

Ορισμός 11.7. Ανέλιξη Itô σε αυτό τον χώρο με τιμές στο $\mathbb{R}$ λέμε κάθε ανέλιξη $X : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ που γράφεται ως

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega) ds + \int_0^t v(s,\omega) \cdot dB_s \tag{11.5}$$

για κάθε $t > 0$, με πιθανότητα 1, όπου υποθέτουμε ότι:

(i) Η X_0 είναι $\mathcal{F}_0$ προσαρμοσμένη.

(ii) Οι $u(t,\omega), v(t,\omega) = (v^{(i)}(t,\omega))_{1\le i\le m}$ είναι μετρήσιμες προσαρμοσμένες ανελίξεις με τιμές στον $\mathbb{R}$ και στον $\mathbb{R}^m$ αντίστοιχα.

(iii) Για κάθε $t > 0$ και $i = 1, \dots, m$, με πιθανότητα 1, ισχύει

$$\int_0^t |u(s,\omega)|\, ds < \infty, \int_0^t v^{(i)}(s,\omega)^2\, ds < \infty.$$

Οι συνθήκες είναι ακριβώς αυτές ώστε τα ολοκληρώματα να μπορούν να οριστούν και επιπλέον η X_t να είναι προσαρμοσμένη (αυτός είναι ο λόγος που ζητάμε και από την u να είναι προσαρμοσμένη, ενώ για να οριστεί το ολοκλήρωμα (Riemann) που την εμπλέκει, αυτό δεν είναι απαραίτητο). Πιο εύχρηστη είναι η γραφή μιας ανέλιξης Itô σε διαφορικό συμβολισμό, δηλαδή

$$dX_t = u(t,\omega)dt + v(t,\omega)\cdot dB_t = u(t,\omega)dt + \sum_{i=1}^m v^{(i)}(t,\omega)dB_t^{(i)}.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα στην (11.5) είναι άθροισμα m στοχαστικών ολοκληρωμάτων, και με βάση τη σύμβαση που έχουμε κάνει αμέσως μετά την Πρόταση 11.3, είναι με πιθανότητα 1 συνεχής συνάρτηση του t, οπότε η X έχει συνεχή μονοπάτια με πιθανότητα 1.
Επεκτείνουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος επιτρέποντας ο ολοκληρωτής να είναι ανέλιξη Itô όπως πιο πάνω. Θέτουμε

$$\begin{aligned}\int_0^t Y(s,\omega)\, dX_s &:= \int_0^t Y(s,\omega)u(s,\omega)\, ds + \int_0^t Y(s,\omega)v(s,\omega)\cdot dB_s \\ &= \int_0^t Y(s,\omega)u(s,\omega)\, ds + \sum_{i=1}^m \int_0^t Y(s,\omega)v^{(i)}(s,\omega)\, dB_s^{(i)}.\end{aligned}$$

Οι ανελίξεις Y για τις οποίες ορίζεται το ολοκλήρωμα είναι ακριβώς αυτές για τις οποίες έχουν νόημα τα ολοκληρώματα του δεξιού μέλους της τελευταίας ισότητας.

Ασκήσεις

11.1 Έστω $(u(t,\omega))_{t\ge0}, (v(t,\omega))_{t\ge0}$ μετρήσιμες προσαρμοσμένες ανελίξεις με τιμές στο $\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $t \ge 0$ να ισχύει $v \in \mathcal{H}^2[0,t]$ και, με πιθανότητα 1, $\int_0^t |u(s,\omega)|\, ds < \infty$. Θεωρούμε την ανέλιξη X που ορίζεται ως

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)ds + \int_0^t v(s,\omega)\, dB_s,$$

με X_0 κάποια τυχαία μεταβλητή. Αν με πιθανότητα 1 έχουμε $X_t = 0$ για κάθε $t \ge 0$, τότε με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\begin{aligned} X_0 &= 0 \\ u(t,\omega) &= 0 \quad \lambda\text{-σχεδόν για κάθε } t \ge 0, \\ v(t,\omega) &= 0 \quad \lambda\text{-σχεδόν για κάθε } t \ge 0. \end{aligned}$$

12

Ο τύπος του Itô

Για συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο, έχουμε $df(s) = f'(s)\,ds$ που σε ολοκληρωτική μορφή σημαίνει

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(s)\,ds \tag{12.1}$$

για κάθε $a < b$. Αν επιπλέον και η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο, οι προηγούμενες σχέσεις για την $f \circ g$ γράφονται $d(f(g(s))) = f'(g(s))g'(s)\,ds = f'(g(s))\,dg(s)$, και για $a < b$,

$$f(g(b)) - f(g(a)) = \int_a^b f'(g(s))\,dg(s). \tag{12.2}$$

Όταν η g είναι η κίνηση Brown (και άρα όχι διαφορίσιμη), τη θέση αυτής της ισότητας παίρνει ο τύπος του Itô. Το αριστερό μέλος της (12.2) γράφεται ως άθροισμα δύο ολοκληρωμάτων. Ενός Riemann και ενός στοχαστικού (δες σχέση (12.3) πιό κάτω).

Παντού σε αυτό το κεφάλαιο, εκτός αν δηλώνεται διαφορετικά, B είναι μια μονοδιάστατη κίνηση Brown, όχι απαραίτητα τυπική.

12.1 Τύπος Itô. Η απλούστερη μορφή

Θεώρημα 12.1 (Τύπος Itô. Έκδοση I)**.** *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δυό φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Τότε με πιθανότητα 1, ισχύει*

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\,ds \tag{12.3}$$

για κάθε $t > 0$.

Η απόδειξη δίνεται στο Παράρτημα Γ′. Εδώ θα δούμε χοντρικά γιατί ισχύει το αποτέλεσμα. Το περίεργο στην (12.3) σε σχέση με την (12.2) είναι η παρουσία του όρου $(1/2)\int_0^t f''(B_s)\,ds$.

Η ιδέα της απόδειξης: Η μεταβολή της $f(B_s)$ σε ένα μικρό διάστημα $[s, s+\Delta s]$ είναι

$$f(B_{s+\Delta s}) - f(B_s) \approx f'(B_s)(B_{s+\Delta s} - B_s) + \frac{1}{2}f''(B_s)(B_{s+\Delta s} - B_s)^2. \tag{12.4}$$

Αυτό είναι μέρος του αναπτύγματος Taylor. Αγνοούμε τους μετέπειτα όρους. Η (12.4) με τη βοήθεια διαφορικών κωδικοποιείται ως

$$df(B_s) \approx f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}f''(B_s)(dB_s)^2 \tag{12.5}$$

$$= f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}f''(B_s)\,ds \tag{12.6}$$

Το ότι $(dB_s)^2 = ds$ το έχουμε δει στην Παράγραφο 8.3 (δες Παρατήρηση 8.10). Η (12.3) θα προκύψει αθροίζοντας τις μεταβολές της $f(B_s)$ σε όλο το διάστημα $[0, t]$. Δηλαδή παίρνουμε διαμέριση του $[0, t]$ σε n διαστήματα, καθένα πάχους $\Delta s = t/n$, αθροίζουμε τις μεταβολές, και τέλος παίρνουμε $n \to \infty$.

Για τη μεταβολή της $f(B_s)$ σε κάθε διάστημα παραλείπουμε όρους που συνολικά είναι της τάξης $(dB_s)^3 = (ds)^{3/2} \approx (t/n)^{3/2}$. Το άθροισμα αυτών των λαθών σε όλα τα n διαστήματα είναι της τάξης $n(t/n)^{3/2} = t^{3/2}n^{-1/2}$ και τείνει στο 0 καθώς $n \to \infty$. Έτσι η (12.3) βγαίνει ακριβώς.

Η (12.1) μπορεί να αποδειχθεί με τη βοήθεια του αναπτύγματος Taylor όπως και ο τύπος του Itô. Η διαφορά είναι ότι το υπόλοιπο Taylor δεύτερης τάξης στο ανάπτυγμα της $f(s + ds)$ γύρω από το s είναι της τάξης $(ds)^2$ και το άθροισμα όλων των υπολοίπων πάνω στα σημεία μιας διαμέρισης του $[a, b]$ τείνει στο 0 καθώς το πάχος της διαμέρισης τείνει στο 0, όπως για παράδειγμα τείνει στο μηδέν το άθροισμα $\sum_{k=1}^{n} 1/n^2$ αφού ισούται με $1/n$.

Παράδειγμα 12.2. Θα δούμε μια άλλη απόδειξη του τύπου

$$\int_0^t B_s\,dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$$

για B τυπική κίνηση Brown και $t > 0$, τον οποίο έχουμε ήδη δει στο Παράδειγμα 9.13. Ο τύπος του Itô για τη συνάρτηση $f(x) = x^2$ δίνει

$$B_t^2 = \int_0^t 2B_s\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2\,dt = 2\int_0^t B_s\,dB_s + t,$$

που είναι η ζητούμενη.

12.2 Τύπος Itô. Μια μικρή γενίκευση

Θεώρημα 12.3 (Τύπος Itô. Έκδοση II)**.** *Έστω $f \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$. Τότε με πιθανότητα 1, ισχύει*

$$f(B_t, t) = f(B_0, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(B_s, s)\,ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(B_s, s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B_s, s)\,ds \tag{12.7}$$

για κάθε $t > 0$.

Το σύνολο $C^{2,1}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ περιέχει ακριβώς τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, με όρισμα έστω (x, t), για τις οποίες υπάρχουν παντού οι μερικές παράγωγοι $\partial^2 f/\partial x^2, \partial f/\partial t$ και είναι συνεχείς.

Η απόδειξη και αυτού του θεωρήματος δίνεται στο Παράρτημα Γ′. Πρέπει κανείς να αυστηροποιήσει το εξής επιχείρημα. Το ανάπτυγμα Taylor της f κοντά στο (B_s, s) είναι

$$f(B_{s+\Delta s}, s + \Delta s) - f(B_s, s) \approx \frac{\partial f}{\partial s}(B_s, s)\,\Delta s + \frac{\partial f}{\partial x}(B_s, s)(B_{s+\Delta s} - B_s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B_s, s)(B_{s+\Delta s} - B_s)^2,$$

που με χρήση διαφορικών γράφεται

$$\begin{aligned} df(B_s, s) &= \frac{\partial f}{\partial s}(B_s, s)\,ds + \frac{\partial f}{\partial x}(B_s, s)dB_s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B_s, s)(dB_s)^2 \\ &= \frac{\partial f}{\partial s}(B_s, s)\,ds + \frac{\partial f}{\partial x}(B_s, s)dB_s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B_s, s)ds. \end{aligned}$$

Στο ανάπτυγμα Taylor, οι όροι που αφορούν δεύτερες παραγώγους και τους οποίους παραλείψαμε είναι οι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(B_s, s)(ds)^2, \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial x}(B_s, s)dB_s ds.$$

Αυτοί δίνουν και την τάξη του υπολοίπου Taylor. Είναι όμως τόσο μικροί ώστε, ακόμα και αθροιζόμενοι σε όλα τα υποδιαστήματα μιας διαμέρισης, δίνουν μηδενική συνεισφορά στο όριο.

Παράδειγμα 12.4. Για $\lambda \in \mathbb{R}$ και B τυπική κίνηση Brown, η ανέλιξη $X_t := e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2}, t \geq 0$ είναι martingale, όπως είδαμε στο Θεώρημα 7.1. Θα δούμε εδώ μια άλλη απόδειξη. Εφαρμόζουμε τον τύπο του Itô για τη συνάρτηση $f(x,t) = e^{\lambda x - \lambda^2 t/2}$. Με πιθανότητα 1, ισχύει για κάθε $t \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
X_t = f(B_t, t) &= 1 - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t f(B_s, s)\, ds + \lambda \int_0^t f(B_s, s)\, dB_s + \frac{1}{2}\lambda^2 \int_0^t f(B_s, s)\, ds \\
&= 1 + \lambda \int_0^t f(B_s, s)\, dB_s.
\end{aligned}
$$

Από το Θεώρημα 10.2, προκύπτει ότι η ανέλιξη που ορίζει το τελευταίο στοχαστικό ολοκλήρωμα είναι martingale αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιεί την (10.1). Πράγματι

$$
\mathbf{E}\left(\int_0^t f(B_s, s)^2\, ds \right) = \int_0^t \mathbf{E}(e^{2\lambda B_s - \lambda^2 s})\, ds = \int_0^t e^{-\lambda^2 s} e^{4\lambda^2 s}\, ds = \int_0^t e^{3\lambda^2 s}\, ds < \infty.
$$

12.3 Τύπος Itô στις πολλές διαστάσεις

Για $f : \mathbb{R}^d \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ υπενθυμίζουμε τους συμβολισμούς

$$
\begin{aligned}
\nabla_x f(x,t) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x,t), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x,t), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d}(x,t) \right) \\
\Delta_x f(x,t) &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x,t)
\end{aligned}
$$

που είναι το διάνυσμα κλίσης και η Λαπλασιανή της f όταν θεωρείται μόνο ως συνάρτηση του x.

Θεώρημα 12.5 (Τύπος Itô. Έκδοση III)**.** *Έστω $f \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))$ και $B = (B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(d)})$ μια d-διάστατη κίνηση Brown. Τότε με πιθανότητα 1, ισχύει*

$$
f(B_t, t) = f(B_0, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(B_s, s)\, ds + \int_0^t \nabla_x f(B_s, s)\, dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta_x f(B_s, s)\, ds \tag{12.8}
$$

για κάθε $t > 0$.

Ένα σχέδιο απόδειξης του θεωρήματος δίνεται στο Παράρτημα Γ΄. Όπως και στις προηγούμενες εκδόσεις του τύπου, η απόδειξη βασίζεται στο ανάπτυγμα Taylor της $f(B_t, t)$.

Παρατήρηση 12.6. Ο τύπος του Itô είναι πιο εύχρηστος στη διατύπωσή του με διαφορικό συμβολισμό. Δηλαδή,

$$
df(B_s, s) = \frac{\partial f}{\partial s}(B_s, s)\, ds + \nabla_x f(B_s, s) \cdot dB_s + \frac{1}{2} \Delta_x f(B_s, s)\, ds.
$$

Παρατήρηση 12.7. Προκύπτει από το παραπάνω θεώρημα ότι, αν μια $f \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))$ ικανοποιεί την

$$
\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) + \frac{1}{2} \Delta_x f(x,t) = 0 \tag{12.9}
$$

στο $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ και B είναι μια d-διάστατη κίνηση Brown, τότε η $M_t := f(B_t, t), t \geq 0$ είναι local martingale γιατί ο τύπος του Itô δίνει

$$
df(B_s, s) = \frac{\partial f}{\partial s}(B_s, s)\, ds + \nabla_x f(B_s, s)\, dB_s + \frac{1}{2} \Delta_x f(B_s, s)\, ds = \nabla_x f(B_s, s)\, dB_s.
$$

Βέβαια η M_t είναι martingale αν μπορούμε να δείξουμε ότι $\nabla_x f(B_s, s) \in \mathcal{H}^2[0, t]$ για κάθε $t \geq 0$.

Μια αξιοσημείωτη περίπτωση είναι εκείνη κατά την οποία η f είναι συνάρτηση μόνο του x, έστω $f(x,t) = u(x)$, οπότε η (12.9) ζητάει $\Delta u = 0$, δηλαδή η u είναι αρμονική.

Παράδειγμα 12.8. Έστω $B = (B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(d)})$ μια d-διάστατη κίνηση Brown και η συνάρτηση $f(x) := (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 + 1)^{1/2}$. Γράφουμε $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ και $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2}$. Η f έχει

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \frac{x_i}{\sqrt{|x|^2 + 1}},\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) &= \frac{1 + |x|^2 - x_i^2}{(|x|^2 + 1)^{3/2}}\end{aligned}$$

για κάθε $i = 1, 2, \ldots, d$ και ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 12.5. Άρα για την ανέλιξη $X_t := f(B_t)$ έχουμε

$$dX_t = \frac{1}{\sqrt{|B_t|^2 + 1}} \sum_{i=1}^{d} B_t^{(i)}\, dB_t^{(i)} + \frac{d + (d-1)|B_t|^2}{2(|B_t|^2 + 1)^{3/2}}\, dt.$$

12.4 Τύπος Itô για ανελίξεις Itô

Επεκτείνουμε τον ορισμό της ανέλιξης Itô για ανελίξεις με τιμές στον $\mathbb{R}^d$, με d θετικό ακέραιο.

Έστω χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ στον οποίο ορίζεται μια m-διάστατη κίνηση Brown B και $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ η διήθηση που αυτή παράγει.

Ορισμός 12.9. **Ανέλιξη Itô** σε αυτό τον χώρο με τιμές στον $\mathbb{R}^d$ λέμε κάθε ανέλιξη $X : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ που γράφεται ως

$$X_t = X_0 + \int_0^t U(s, \omega) ds + \int_0^t V(s, \omega) \cdot dB_s \tag{12.10}$$

για κάθε $t > 0$, με πιθανότητα 1, όπου υποθέτουμε ότι:

(i) Η X_0 είναι $\mathcal{F}_0$ προσαρμοσμένη.

(ii) Οι $U(t, \omega) = (u^{(i)}(t, \omega))_{1\leq i\leq d}$, $V(t, \omega) = (v_{i,j}(t, \omega))_{\substack{1\leq i\leq d\\ 1\leq j\leq m}}$ είναι μετρήσιμες προσαρμοσμένες ανελίξεις με τιμές στον στον $\mathbb{R}^d$ και στον $\mathbb{R}^{d\times m}$ αντίστοιχα.

(iii) Για κάθε $t > 0$ και $i = 1, \ldots, d$, $j = 1, \ldots, m$, με πιθανότητα 1, ισχύει

$$\int_0^t |u^{(i)}(s, \omega)|\, ds < \infty, \int_0^t v_{i,j}(s, \omega)^2\, ds < \infty.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα στην (12.10) το λέμε **τμήμα τάσης** της ανέλιξης, ενώ το δεύτερο **τμήμα διάχυσης**. Πιο εύχρηστη είναι η γραφή μιας ανέλιξης Itô σε διαφορικό συμβολισμό, δηλαδή

$$dX_t = \underbrace{U(t, \omega)\, dt}_{\text{τμήμα τάσης}} + \underbrace{V(t, \omega)\, dB_t}_{\text{τμήμα διάχυσης}},$$

και πιο αναλυτικά

$$\begin{pmatrix} dX_t^{(1)} \\ \vdots \\ dX_t^{(d)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{(1)}(t, \omega) \\ \vdots \\ u^{(d)}(t, \omega) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} v_{1,1}(t, \omega) & \cdots & v_{1,m}(t, \omega) \\ \vdots & & \vdots \\ v_{d,1}(t, \omega) & \cdots & v_{d,m}(t, \omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_t^{(1)} \\ \vdots \\ dB_t^{(m)} \end{pmatrix}. \tag{12.11}$$

Προφανώς, η ίδια η B είναι ανέλιξη Itô. Συμβαίνει λοιπόν και για ανελίξεις Itô να υπάρχει έκδοση του τύπου του Itô, την οποία θα παραθέσουμε χωρίς απόδειξη αφού είναι ανάλογη με τις αποδείξεις των προηγούμενων εκδόσεων.

Θεώρημα 12.10 (Τύπος Itô. Έκδοση IV). *Έστω $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ και X μια d-διάστατη ανέλιξη Itô. Τότε, με πιθανότητα 1, ισχύει*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \nabla f(X_s) \cdot dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s)\, dX_s^{(i)} dX_s^{(j)} \tag{12.12}$$

για κάθε $t > 0$.

Υπάρχει κάτι όμως που πρέπει να εξηγήσουμε. Τι σημαίνει το γινόμενο $dX_s^{(i)} dX_s^{(j)}$ στον πιο πάνω τύπο; Στη θέση της ποσότητας $dX_s^{(i)} dX_s^{(j)}$ τοποθετούμε το αποτέλεσμα που προκύπτει αν στο γινόμενο των διαφορικών χρησιμοποιήσουμε τις εκφράσεις για αυτά που δίνει η (12.11), εφαρμόσουμε επιμεριστική ιδιότητα, και τέλος χρησιμοποιήσουμε τις συμβάσεις

$$\begin{aligned} dtdt &= 0 \\ dB_t^{(i)} dt &= 0 \qquad \text{για κάθε } i = 1, \dots, m. \\ dB_t^{(i)} dB_t^{(i)} &= dt \qquad \text{για κάθε } i = 1, \dots, m. \\ dB_t^{(i)} dB_t^{(j)} &= 0 \qquad \text{για κάθε } i, j = 1, \dots, m \text{ με } i \neq j. \end{aligned} \tag{12.13}$$

Δηλαδή οι μόνοι όροι που συνεισφέρουν είναι διαφορικά που αφορούν την ίδια (μονοδιάστατη) κίνηση Brown, δίνουν διαφορικό dt, και έτσι το δεύτερο ολοκλήρωμα στην (12.12) είναι Riemann και όχι στοχαστικό.

$\cdot$	dt	$dB_t^{(i)}$	$dB_t^{(j)}$
dt	0	0	0
$dB_t^{(i)}$	0	dt	0
$dB_t^{(j)}$	0	0	dt

Πίνακας 12.1: Πολλαπλασιασμός διαφορικών. $B^{(i)}, B^{(j)}$ είναι δύο ανεξάρτητες μονοδιάστατες κινήσεις Brown.

Παρατήρηση 12.11. Αυτό που λέει ο τύπος Itô σε όλες του τις μορφές είναι το εξής

$$\left.\begin{array}{l} X_t \text{ ανέλιξη Itô,} \\ f \text{ αρκετά λεία} \end{array}\right\} \Rightarrow f(X_t) \text{ ανέλιξη Itô.}$$

Επιπλέον, ο τύπος προσδιορίζει το τμήμα τάσης και το τμήμα διάχυσης της ανέλιξης $f(X_t)$.

Πολύ χρήσιμος είναι ο πιο κάτω τύπος που δίνει το διαφορικό γινομένου ανελίξεων Itô. Εναλλακτικά, είναι ο τύπος ολοκλήρωσης κατά μέρη για στοχαστικά ολοκληρώματα.

Πρόταση 12.12. *Έστω $(X_t)_{t\geq 0}, (Y_t)_{t\geq 0}$ δυό μονοδιάστατες ανελίξεις Itô. Τότε ισχύει*

$$d(X_t Y_t) = Y_t dX_t + X_t dY_t + dX_t dY_t. \tag{12.14}$$

Η αυστηρή γραφή του τύπου είναι η ολοκληρωτική,

$$X_t Y_t - X_0 Y_0 = \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t dX_s dY_s,$$

όπου τα δύο πρώτα ολοκληρώματα είναι ολοκληρώματα ως προς ανελίξεις Itô και έχουν οριστεί στην Παράγραφο 11.2, ενώ το τελευταίο ολοκλήρωμα, με χρήση των συμβάσεων (12.13), δίνει ένα ολοκλήρωμα Riemann. Μια συνέπεια του τύπου (12.14) είναι ότι η $X_t Y_t$ είναι ανέλιξη Itô.

Απόδειξη. Η ανέλιξη

$$Z_t = \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix}$$

είναι διδιάστατη ανέλιξη Itô (θα το δείξουμε στο τέλος). Εφαρμόζοντας τον τύπο του Itô για τη συνάρτηση $f(x, y) = xy$ (που έχει μερικές παραγώγους $f_x = y, f_y = x, f_{x,y} = 1, f_{x,x} = f_{y,y} = 0$) παίρνουμε

$$d(X_tY_t) = df(Z_t) = Y_tdX_t + X_tdY_t + \frac{1}{2}(dX_tdY_t + dY_tdX_t)$$

που είναι η ζητούμενη. Τώρα θα δείξουμε ότι η Z είναι πράγματι διδιάστατη ανέλιξη Itô. Από την υπόθεση, για τις X, Y έχουμε

$$\begin{aligned} dX_t &= u(t, \omega)dt + V(t, \omega) \cdot dB_t \\ dY_t &= \tilde{u}(t, \omega)dt + \tilde{V}(t, \omega) \cdot dB_t, \end{aligned}$$

όπου B είναι η m-διάστατη κίνηση Brown με βάση την οποία ορίζουμε την έννοια της ανέλιξης Itô στον συγκεκριμένο χώρο πιθανότητας. Οι ανελίξεις $u, \tilde{u}$ παίρνουν τιμές στο $\mathbb{R}$ και οι $V, \tilde{V}$ στο $\mathbb{R}^{1\times m}$. Άρα

$$dZ_t = \begin{pmatrix} u(t, \omega) \\ \tilde{u}(t, \omega) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} V(t, \omega) \\ \tilde{V}(t, \omega) \end{pmatrix} \cdot dB_t.$$

■

Παράδειγμα 12.13. (Εκθετικά martingales) Έστω μετρήσιμη και προσαρμοσμένη ανέλιξη $(R_t)_{t\geq 0}$ ώστε για κάθε $t > 0$ να ισχύει $\int_0^t R_s^2 ds < \infty$ με πιθανότητα 1. Θέτουμε για κάθε $t \geq 0$,

$$Z_t := e^{\int_0^t R_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t R_s^2 ds}.$$

Θα δείξουμε ότι η Z είναι local martingale.
Θεωρούμε την ανέλιξη X που ορίζεται σε κάθε $t \geq 0$ ως

$$X_t := \int_0^t R_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t R_s^2 ds$$

και τη συνάρτηση $f(x) = e^x$. Τότε, η X είναι ανέλιξη Itô (Άσκηση) και $Z_t = f(X_t)$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} dX_t &= R_t\, dB_t - \frac{1}{2}R_t^2\, dt, \\ (dX_t)^2 &= R_t^2 dt. \end{aligned}$$

Έτσι ο τύπος του Itô (έκδοση IV) δίνει

$$\begin{aligned} dZ_t &= f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)(dX_t)^2 \\ &= Z_tR_tdB_t - \frac{1}{2}Z_tR_t^2dt + \frac{1}{2}Z_tR_t^2dt = Z_tR_tdB_t. \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $t \geq 0$ έχουμε

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_sR_sdB_s,$$

και το συμπέρασμα έπεται από την Πρόταση 11.4.
Παρατηρούμε επιπλέον τα εξής δύο.

- Αν έχουμε $ZR \in \mathcal{H}^2[0, t]$ για κάθε $t \geq 0$, τότε η Z είναι martingale.

- Αν η ανέλιξη R είναι σταθερή συνάρτηση στο $[0,\infty)\times\Omega$ και ίση με έναν αριθμό λ, τότε η Z είναι το martingale που είδαμε στο Θεώρημα 7.1(iii).

Παράδειγμα 12.14. Έστω ότι η $u = u(x,t) : \mathbb{R}^d \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ είναι στοιχείο του $C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))$, είναι φραγμένη σε κάθε σύνολο της μορφής $\mathbb{R}^d \times [0,T]$ με $T > 0$, και ικανοποιεί

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta_x u \qquad \text{στο } \mathbb{R}^d \times (0,\infty), \tag{12.15}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \tag{12.16}$$

όπου f είναι μιά δεδομένη συνεχής, φραγμένη συνάρτηση. Άν B είναι μια d-διάστατη κίνηση Brown, τότε για $t > 0$ σταθερό έχουμε:

(α) Η $(M_s)_{s\in[0,t]}$ με $M_s := u(B_s, t-s)$ για κάθε $s \in [0,t]$ είναι martingale.

(β) $u(x,t) = \mathbf{E}_x\{f(B_t)\}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$.

(α) Πράγματι, η $X_s = \begin{pmatrix} B_s \\ t-s \end{pmatrix}$ είναι μια ανέλιξη Itô αφού

$$dX_s = \begin{pmatrix} dB_s \\ -ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ 0 \end{pmatrix} dB_s.$$

Συμβολίσαμε με $\mathbf{1}$ το διάνυσμα $(1,1,\dots,1)^t$ του $\mathbb{R}^d$. Ο τύπος Itô δίνει για $s \in [0,t]$

$$\begin{aligned} dM_s &= -\frac{\partial u}{\partial s}(B_s, t-s)\,ds + \nabla_x u(B_s, t-s)\,dB_s + \frac{1}{2}\Delta_x u(B_s, t-s)\,ds \\ &= \nabla_x u(B_s, t-s)\,dB_s \end{aligned}$$

Άρα η M είναι local martingale. Από την άλλη, είναι φραγμένη (από υπόθεση για την u), άρα είναι martingale (Πρόταση 4.19).

(β) Θεωρούμε τώρα μια κίνηση Brown B που να ξεκινάει από το δεδομένο x. Το ότι η M είναι martingale συνεπάγεται ότι $\mathbf{E}_x(M_t) = \mathbf{E}_x(M_0)$. Δηλαδή $\mathbf{E}_x\{u(B_t,0)\} = \mathbf{E}_x\{u(x,t)\}$. Και έτσι λόγω της (12.16) παίρνουμε $\mathbf{E}_x\{f(B_t)\} = u(x,t)$.

Άρα, αν η εξίσωση θερμότητας (12.15), (12.16) έχει λύση η οποία είναι φραγμένη σε κάθε λωρίδα $\mathbb{R}^d \times [0,T]$ με $T > 0$, τότε αυτή η λύση δίνεται από τη σχέση

$$u(x,t) := \mathbf{E}_x\{f(B_t)\}. \tag{12.17}$$

Αυτή είναι μια πιθανοτική αναπαράσταση μιας λύσης.

Για περισσότερα σχετικά με εφαρμογές του στοχαστικού λογισμού στη λύση μερικών διαφορικών εξισώσεων, συνιστάται το Κεφάλαιο 4 του Durrett (1996) και το Κεφάλαιο 4 του Karatzas and Shreve (1991).

12.5 Ο τύπος Itô σε γενικά χωρία

Αν X_t είναι μια ανέλιξη Itô στον $\mathbb{R}^d$ με $X_0 = x_0$ και f είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα ανοιχτό σύνολο $U \subsetneq \mathbb{R}^d$ με $x_0 \in D$ (για παράδειγμα, $x_0 = 0, f(x) = \log(1-|x|), U = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\}$), τι μπορούμε να πούμε για την ανέλιξη $f(X_t)$; Ο τύπος Itô που έχουμε δει δεν εφαρμόζεται. Για τέτοιες περιπτώσεις θα δούμε μια ακόμα έκδοση του τύπου.

Για ένα $A \subset \mathbb{R}^d$, θα γράφουμε A^c για το συμπλήρωμα του και

$$\tau_A := \inf\{t \ge 0 : X_t \in A^c\}$$

για τον χρόνο εξόδου από το A.

Αν η $f : U \to \mathbb{R}$ είναι δυό φορές διαφορίσιμη, θα μας φανεί χρήσιμη η εξής προσέγγιση. Παίρνουμε $(K_n)_{n\geq 1}$ αύξουσα ακολουθία συμπαγών συνόλων υποσυνόλων του U που έχουν ένωση το U και επιπλέον ικανοποιούν $K_n \subset K_{n+1}^\circ$ (π.χ., $K_n := \{x \in U : |x| \leq n, \mathrm{dist}(x, U^c) \geq 1/n\}$). Υπάρχουν C^∞ συναρτήσεις $g_n : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ με $g_n = 1$ στο K_n και $g = 0$ στο $(K_{n+1}^\circ)^c$. Επεκτείνουμε την f στο $\mathbb{R}^d$ θέτοντας την ίση με 0 στο U^c. Τότε η $f_n := fg_n \in C^2(\mathbb{R}^d)$ και η ίδια καθώς και οι παράγωγοι της πρώτης και δεύτερης τάξης ταυτίζονται με τις αντίστοιχες της f στο K_n. Επίσης $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ σημειακά στο U.

Θεώρημα 12.15 (Τύπος Itô. Έκδοση V)**.** *Έστω $U \subset \mathbb{R}^d$ ανοιχτό σύνολο, $f \in C^2(U)$, και X μια d-διάστατη ανέλιξη Itô με $X_0 \in U$. Τότε με πιθανότητα 1, ισχύει*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \nabla f(X_s) \cdot dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s)\, dX_s^{(i)} dX_s^{(j)} \tag{12.18}$$

για κάθε $0 \leq t < \tau_U$.

Απόδειξη. Ο τύπος Itô για τις συναρτήσεις $f_n := fg_n$ δίνει ότι με πιθανότητα 1 ισχύει

$$f_n(X_t) = f_n(X_0) + \int_0^t \nabla_x f_n(X_s) \cdot dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_i \partial x_j}(X_s)\, dX_s^{(i)} dX_s^{(j)}$$

για κάθε $t \geq 0$ και για κάθε $n \geq 1$. Τώρα επειδή $\tau_{K_n} \to \tau_U$, αν $t < \tau_U$, υπάρχει n με $t < T_n$. Επειδή για $s < \tau_n$ το $X_s \in K_n$ όπου οι f, f_n καθώς και οι μερικές παράγωγοι τους πρώτης και δεύτερης τάξης ταυτίζονται, το Λήμμα Γ΄.1 δίνει ότι η προηγούμενη σχέση μετασχηματίζεται στην (12.12). ∎

Ασκήσεις

12.1 Για κάθε $n \geq 1$ και $t > 0$, ισχύει

$$\int_0^t B_s^n\, dB_s = \frac{1}{n+1} B_t^{n+1} - \frac{1}{2} n \int_0^t B_s^{n-1}\, ds.$$

12.2 Για $k \in \mathbb{N}$ και $t > 0$, θέτουμε $a_k(t) := \mathbf{E}(B_t^k)$. Να δειχθεί ότι για $k \in \mathbb{N}$ με $k \geq 2$ και $t > 0$, ισχύει

$$a_k(t) = \frac{1}{2} k(k-1) \int_0^t a_{k-2}(s) ds,$$

και άρα

$$a_{2k}(t) = \frac{(2k)!}{k! 2^k}\, t^k$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

12.3 Έστω $t > 0$ και $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία διαμερίσεων του διαστήματος $[0, t]$ όπως στην Πρόταση 8.9. Έστω επίσης B, W δύο ανεξάρτητες κινήσεις Brown. Να δειχθεί ότι η ακολουθία

$$R_n := \sum_{i=1}^{k(n)} (B_{t_i^{(n)}} - B_{t_{i-1}^{(n)}})(W_{t_i^{(n)}} - W_{t_{i-1}^{(n)}})$$

συγκλίνει στο 0 στον L^2 καθώς $n \to \infty$. Αυτό το αποτέλεσμα είναι χρήσιμο για να δικαιολογήσει κανείς τη σύμβαση $dW\, dB = 0$.

12.4 Έστω B, W ανεξάρτητες (μονοδιάστατες) κινήσεις Brown. Να υπολογιστεί το διαφορικό $d(\cos\{B_t W_t\})$.

12.5 Να αποδειχθεί ότι η έκδοση IV του τύπου του Itô περιέχει τις τρείς προηγούμενες.

12.6 Έστω $u, g : \mathbb{R}^d \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ φραγμένες σε κάθε σύνολο της μορφής $\mathbb{R}^d \times [0, T]$ με $T > 0$, με την g συνεχή και την $u = u(x, t)$ στοιχείο του $C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))$, που επιπλέον ικανοποιούν

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2}\Delta_x u + g \qquad && \text{στο } \mathbb{R}^d \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= f(x) && \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

όπου f είναι μια δεδομένη φραγμένη, συνεχής συνάρτηση. Να δειχθεί ότι, για B μια d-διάστατη κίνηση Brown και $t > 0$ σταθερό, έχουμε:

(α) Η $(M_s)_{s\in[0,t]}$ με

$$M_s := u(B_s, t - s) + \int_0^s g(B_r, t - r)\, dr$$

για κάθε $s \in [0, t]$ είναι martingale.

(β)

$$u(x, t) = \mathbf{E}_x \left\{ f(B_t) + \int_0^t g(B_s, t - s)\, ds \right\}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$.

Μέρος IV

Εφαρμογές

13

Εφαρμογές στην κίνηση Brown

Σε αυτό το κεφάλαιο θέλουμε να κάνουμε για την πολυδιάστατη κίνηση Brown κάτι ανάλογο με αυτό που κάναμε στην Παράγραφο 7.2 για τη μονοδιάστατη κίνηση Brown. Δηλαδή να μελετήσουμε το πρόβλημα της εξόδου από έναν δακτύλιο $\{x \in \mathbb{R}^d : r < |x| < R\}$. Η τακτική είναι η ίδια. Πρέπει πρώτα να βρούμε ένα κατάλληλο martingale και μετά να εφαρμόσουμε το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής.

Για την εύρεση martingale έχουμε τώρα ένα ακόμα εργαλείο, τον τύπο του Itô. Συνέπεια της τρίτης έκδοσης του τύπου ήταν ότι αν η u είναι αρμονική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^d$ και η B είναι d-διάστατη κίνηση Brown, τότε το $(u(B_t))_{t\geq 0}$ είναι local martingale. Και αν ξέρουμε για αυτό ότι είναι φραγμένο ή ότι $\nabla u(B_s) \in \mathcal{H}^2[0,t]$ για κάθε $t \geq 0$, τότε είναι martingale (Πρόταση 4.19 για τον πρώτο ισχυρισμό). Αυτό είναι το σημείο εκκίνησης.

13.1 Αρμονικές συναρτήσεις και το πρόβλημα εξόδου

Για να λειτουργήσει το σχέδιο μας, χρειαζόμαστε αρμονική συνάρτηση που να είναι σταθερή σε κάθε σφαιρικό φλοιό $\{x \in \mathbb{R}^d : |x| = R\}$, δηλαδή ακτινικά συμμετρική. Ουσιαστικά, για κάθε διάσταση d, υπάρχει μόνο μία τέτοια μη σταθερή αρμονική συνάρτηση. Την ορίζουμε αμέσως.

Για κάθε $d \in \mathbb{N}$ με $d \geq 2$, ορίζουμε τη συνάρτηση $u_d : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned} u_2(x) &:= \log|x| = \log\sqrt{x_1^2 + x_2^2} && \text{αν } d = 2, \\ u_d(x) &:= |x|^{2-d} = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{(2-d)/2} && \text{αν } d \geq 3 \end{aligned} \tag{13.1}$$

για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Καθεμία από αυτές τις συναρτήσεις είναι αρμονική στο πεδίο ορισμού της.

Λήμμα 13.1. *Για κάθε $d \in \mathbb{N}$ με $d \geq 2$, ισχύει*

$$\Delta u_d(x) = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Απόδειξη. Αφήνουμε την περίπτωση $d = 2$ για άσκηση. Υποθέτουμε $d \geq 3$. Τότε

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_d}{\partial x_1}(x) &= \left(1 - \frac{d}{2}\right)(x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{-d/2} 2x_1 = (2-d)(x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{-d/2} x_1, \\ \frac{\partial^2 u_d}{\partial x_1^2}(x) &= (2-d)|x|^{-d} - (2-d)(-d/2)|x|^{-(d+2)} 2x_1^2 = (2-d)\{|x|^{-d} - d x_1^2 |x|^{-(d+2)}\} \end{aligned}$$

Οι εκφράσεις για τις παραγώγους ως προς τα άλλα x_i είναι ανάλογες. Οπότε προσθέτοντας βρίσκουμε

$$\Delta u_d(x) = (2-d)\{d|x|^{-d} - d|x|^2|x|^{-d-2}\} = 0.$$

∎

Υπενθυμίζουμε ότι οταν θεωρούμε μια κίνηση Brown με $B_0 = x \in \mathbb{R}^d$, μια κίνηση, δηλαδή, που ξεκινάει από το x, χρησιμοποιούμε για την πιθανότητα και τη μέση τιμή ως προς τη B τα σύμβολα $\mathbf{P}_x, \mathbf{E}_x$.

Πρόταση 13.2. *Έστω $d \geq 2$ και $U \subset \mathbb{R}^d$ ανοικτό φραγμένο σύνολο, $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ με $\Delta u = 0$ στο U, και $\tau_U := \inf\{s \geq 0 : B_s \notin U\}$. Τότε*

$$u(x) = \mathbf{E}_x\{u(B_{\tau_U})\}$$

για κάθε $x \in U$.

Απόδειξη. Έστω $R = \sup\{\|x - y\|_\infty : x, y \in U\}$, όπου για $z \in \mathbb{R}^d$ θέτουμε $\|z\|_\infty := \max\{|z_1|, |z_2|, \dots, |z_d|\}$. O τ_U είναι πεπερασμένος με πιθανότητα 1 γιατί είναι μικρότερος από τον χρόνο που χρειάζεται ώσπου η πρώτη συντεταγμένη της B να βγει από το διάστημα $[-R, R]$ και αυτός είναι πεπερασμένος με βάση την Πρόταση 7.2.

Έστω $(K_n)_{n\geq1}$ και $(g_n)_{n\geq1}$ όπως στην Παράγραφο 12.5. O τύπος Itô από την ίδια παράγραφο δίνει ότι με πιθανότητα 1, για κάθε $t \geq 0$, ισχύει

$$u(B_{t\wedge\tau_{K_n}}) = u(B_0) + \int_0^{t\wedge\tau_{K_n}} \nabla u(B_s) \cdot dX_s + \frac{1}{2} \int_0^{t\wedge\tau_{K_n}} \Delta u(B_s)\, ds. \tag{13.2}$$

Επειδή $\Delta u = 0$, με χρήση του Λήμματος Γ′.1, η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$u(B_{t\wedge\tau_{K_n}}) = u(x) + \int_0^{t\wedge\tau_{K_n}} \nabla u(B_s) \cdot dB_s. \tag{13.3}$$

Επεκτείνουμε την u στο $\mathbb{R}^d$ ορίζοντας την ίση με 0 στο U^c. Τότε

$$\int_0^{t\wedge\tau_{K_n}} \nabla u(B_s) \cdot dB_s = \int_0^{t\wedge\tau_{K_n}} \nabla(g_n u)(B_s) \cdot dB_s = X_{t\wedge\tau_{K_n}}$$

όπου

$$X_t := \int_0^t \nabla(g_n u)(B_s) \cdot dB_s$$

για κάθε $t \geq 0$. H $(X_t)_{t\geq0}$ είναι συνεχές martingale (γιατί από τις υποθέσεις προκύπτει ότι η $\nabla(g_n u)$ είναι φραγμένη) και επειδή ο τ_{K_n} είναι χρόνος διακοπής, το Θεώρημα 4.14 δίνει ότι είναι martingale και η $(X_{t\wedge\tau_{K_n}})_{t\geq0}$. Άρα η μέση του τιμή ισούται με $\mathbf{E}_x(X_0) = 0$ και έτσι η (13.3) δίνει

$$u(x) = \mathbf{E}_x\{u(B_{t\wedge\tau_{K_n}})\}.$$

Τώρα εφαρμόζουμε το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης στο δεξί μέλος της τελευταίας σχέχης παίρνοντας $t \to \infty$ και έπειτα $n \to \infty$. ■

13.2 Έξοδος από δακτύλιο και επαναληπτικότητα

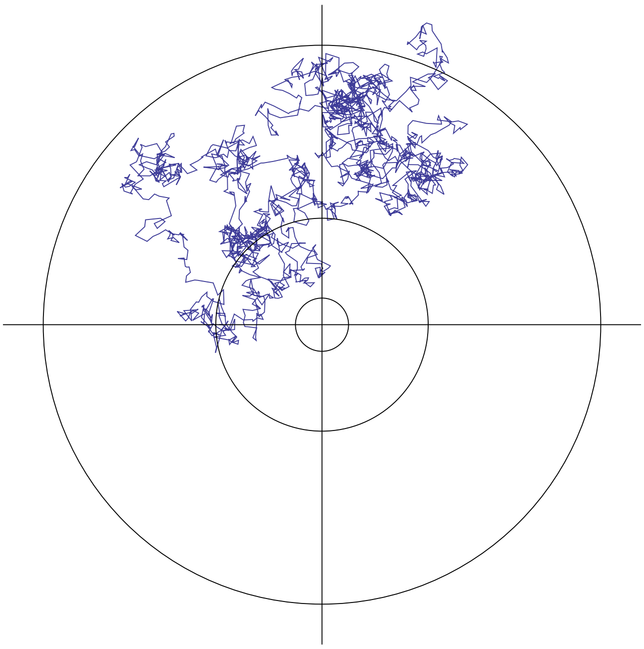
Παίρνουμε την κίνηση Brown B στο $\mathbb{R}^d$ που ξεκινάει από ένα σημείο $x \neq 0$ και θεωρούμε δύο σφαίρες (κύκλους αν $d = 2$) ακτίνας r και R αντίστοιχα, όπου τα r, R ικανοποιούν $r < |x| < R$. H κίνηση θα βγει κάποια στιγμή από τον δακτύλιο $\{w \in \mathbb{R}^d : r < |w| < R\}$. H πιθανότητα η έξοδος να γίνει από το κέλυφος $\{w : |w| = r\}$ δίνεται από μια πολύ απλή έκφραση, την οποία θα υπολογίσουμε. Για τα παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό

$$\tau_a = \inf\{s \geq 0 : |B_s| = a\}$$

όπου $a \geq 0$. Είναι δηλαδή ο πρώτος χρόνος που η κίνηση συναντά την περιφέρεια ακτίνας a.
Επίσης, καθεμία από τις u_d της (13.1) είναι ακτινικά συμμετρική και γράφεται ως $u_d(x) = f_d(|x|)$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της u_d, όπου η $f_d : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως

$$\begin{aligned} f_2(r) &:= \log r \quad \text{αν } d = 2, \\ f_d(r) &:= r^{2-d} \quad \text{αν } d \geq 3, \end{aligned} \tag{13.4}$$

για κάθε $r > 0$.



Σχήμα 13.1: Πήραμε $r = 0.1, R = 1, |x| = 0.4$, συγκεκριμένα $x = (-0.4/\sqrt{2}, 0.4/\sqrt{2})$ και τρέξαμε την κίνηση Brown για χρόνο 1. Σε αυτή την πραγματοποίηση, η κίνηση Brown βγήκε από την εξωτερική περιφέρεια.

Πρόταση 13.3. *Για $0 < r < R$ και $x \in \mathbb{R}^d$ με $r < |x| < R$, ισχύει*

$$\mathbf{P}_x(\tau_r < \tau_R) = \frac{f_d(R) - f_d(|x|)}{f_d(R) - f_d(r)}.$$

Απόδειξη. Έφαρμόζουμε την Πρόταση 13.2 για το σύνολο $G_{r,R} := \{x \in \mathbb{R}^d : r < |x| < R\}$ και τη συνάρτηση u_d. Ο χρόνος τ εξόδου από το $G_{r,R}$ ισούται με $\tau_r \wedge \tau_R$. Άρα

$$\begin{aligned} f_d(|x|) = u_d(x) = \mathbf{E}_x\{u_d(B_\tau)\} &= \mathbf{E}_x\{u_d(B_\tau)\mathbf{1}_{\tau_r<\tau_R} + u_d(B_\tau)\mathbf{1}_{\tau_R<\tau_r}\} = \mathbf{E}_x\{f_d(r)\mathbf{1}_{\tau_r<\tau_R} + f_d(R)\mathbf{1}_{\tau_R<\tau_r}\} \\ &= f_d(r)\,\mathbf{P}_x(\tau_r < \tau_R) + f_d(R)\,\mathbf{P}_x(\tau_R < \tau_r), \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο. ∎

Για ένα Borel σύνολο $A \subset \mathbb{R}^d$ θέτουμε

$$T_A := \inf\{s \geq 0 : B_s \in A\},$$

τον πρώτο χρόνο που η κίνηση Brown χτυπάει το A. Επίσης, για $x \in \mathbb{R}^d$ και $r > 0$, θέτουμε

$$D(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^d : |x - y| \leq r\},$$

την κλειστή σφαίρα με κέντρο x και ακτίνα r, όπου $|\cdot|$ είναι η Ευκλείδεια νόρμα.

Πόρισμα 13.4. *Έστω B μια d-διάστατη κίνηση Brown, τότε για κάθε $r > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ με $|x| > r$ ισχύει*

$$\mathbf{P}_x(T_{D(0,r)} < \infty) = \begin{cases} 1 & \text{αν } d = 2, \\ \left(\frac{r}{|x|}\right)^{d-2} < 1 & \text{αν } d \geq 3. \end{cases}$$

Απόδειξη. Επειδή η κίνηση Brown έχει συνεχή μονοπάτια και ξεκινάει εκτός του $D(0, r)$, θα ισχύει $T_{D(0,r)} = \tau_r$. Πάλι η συνέχεια των μονοπατιών δίνει $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$. Τότε $\{\tau_r < \infty\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{\tau_r < \tau_n\}$, η ένωση είναι πάνω σε αύξουσα ακολουθία συνόλων και άρα $\mathbf{P}_x(\tau_r < \infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_x(\tau_r < \tau_n)$.

Αν $d = 2$, για $r < |x| < n$ έχουμε

$$\mathbf{P}_x(\tau_r < \tau_n) = \frac{\log n - \log |x|}{\log n - \log r} \overset{n\to\infty}{\to} 1.$$

Αν $d \geq 3$, για $r < |x| < n$ έχουμε

$$\mathbf{P}_x(\tau_r < \tau_n) = \frac{n^{2-d} - |x|^{2-d}}{n^{2-d} - r^{2-d}} \overset{n\to\infty}{\to} \left(\frac{r}{|x|}\right)^{d-2}$$

αφού $\lim_{n\to\infty} n^{2-d} = 0$. ∎

Το προηγούμενο πόρισμα έχει την εξής συνέπεια.

Πόρισμα 13.5. *Έστω B μια d-διάστατη κίνηση Brown με $B_0 = x \in \mathbb{R}^d$.*
(α) Αν $d = 2$, τότε για κάθε ανοιχτό $U \subset \mathbb{R}^2$, με πιθανότητα 1, υπάρχει ακολουθία χρόνων $(t_n)_{n\geq 1}$ με $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ και $B_{t_n} \in U$ για κάθε $n \geq 1$.
(β) Αν $d \geq 3$, τότε $\lim_{t\to\infty} |B_t| = \infty$ με πιθανότητα 1.

Απόδειξη. (α) Αρκεί να δείξουμε τον ισχυρισμό για $U = D(0, r)$ όπου $r > 0$ δεδομένο γιατί, για οποιαδήποτε άλλη σφαίρα $D(x_0, r)$, η $B_t \in D(x_0, r)$ αν και μόνο αν $W_t \in D(0, r)$ όπου $W_t := B_t - x_0$ είναι κίνηση Brown με $W_0 = x - x_0$. Θέτουμε

$$\begin{aligned} t_1 &= \inf\{s > 0 : |B_s| = r/2\}, \\ \sigma_{k+1} &= \inf\{s > t_{k+1} : |B_s| = r + 1\} && \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}, \\ t_{k+1} &= \inf\{s > \sigma_k : |B_s| = r/2\} && \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}, k \geq 1. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την ισχυρή ιδιότητα Markov (Θεώρημα 6.1) και το Πόρισμα 13.4, είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι με πιθανότητα 1 όλοι οι χρόνοι σ_k, t_k είναι πεπερασμένοι και $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$. Βέβαια $B_{t_k} \in U$ για κάθε $k \geq 1$.

(β) Για κάθε $n \geq 1$, θέτουμε $\tau_n := \inf\{s \geq 0 : |B_s| = n^3\}$ και $A_n := \{|B_t| > n \text{ για κάθε } t \geq \tau_n\}$. Ο τ_n είναι χρόνος διακοπής και με πιθανότητα 1 είναι πεπερασμένος. Εφαρμόζοντας την ισχυρή ιδιότητα Markov για τον τ_n υπολογίζουμε

$$\mathbf{P}_x(A_n^c) = \mathbf{E}_x\, \mathbf{E}_x(\mathbf{1}_{A_n^c} \,|\, \mathcal{F}_{\tau_n}) = \mathbf{E}_x\{\mathbf{P}_{B_{\tau_n}}(A_n^c)\} = \mathbf{E}_x\{\mathbf{P}_{B_{\tau_n}}(T_{D(0,n)} < \infty)\} = \left(\frac{n}{n^3}\right)^{d-2} = \frac{1}{n^{2(d-2)}}.$$

Άρα $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}_x(A_n^c) < \infty$ και το συμπέρασμα έπεται από το πρώτο Λήμμα Borel-Cantelli. ∎

Με την ορολογία της γενικής θεωρίας των στοχαστικών ανελίξεων, το προηγούμενο πόρισμα λέει ότι η κίνηση Brown είναι *επαναληπτική* για $d = 2$ και *παροδική* για $d \geq 3$.

Το Πόρισμα 13.4 λέει ότι η διδιάστατη κίνηση Brown επισκέπτεται με πιθανότητα 1 οποιαδήποτε περιοχή του 0. Επισκέπτεται άραγε το 0 το ίδιο; Η απάντηση είναι όχι και το αποδεικνύουμε αμέσως.

Πόρισμα 13.6. *Για $d \geq 2$, η d-διάστατη κίνηση Brown ικανοποιεί*

$$\mathbf{P}_x(\textit{υπάρχει } t \geq 0 \textit{ με } B_t = 0) = \mathbf{P}_x(T_{\{0\}} < \infty) = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Απόδειξη. Επειδή η B ξεκινάει από το x, για κάθε $n \geq 1$ φυσικό με $1/n < |x|$, έχουμε $\tau_{1/n} < \tau_0$, άρα για $R > |x|$ ισχύει

$$\mathbf{P}_x(\tau_0 < \tau_R) \leq \mathbf{P}_x(\tau_{1/n} < \tau_R).$$

Με χρήση της Πρότασης 13.3 παίρνουμε ότι η τελευταία ποσότητα τείνει στο 0 για $n \to \infty$ (απλώς παρατηρούμε ότι $\lim_{n\to\infty} |f_d(1/n)| = \infty$ για κάθε $d \geq 2$). Άρα $\mathbf{P}_x(\tau_0 < \tau_R) = 0$ για κάθε $R > |x|$. Όμοια όπως πιο πάνω, αυτό δίνει ότι $\mathbf{P}_x(\tau_0 < \infty) = \lim_{R\to\infty} \mathbf{P}_x(\tau_0 < \tau_R) = 0$. ∎

Η συμπεριφορά της μονοδιάστατης κίνησης Brown είναι πιο εύκολο να μελετηθεί. Χτυπάει κάθε πραγματικό αριθμό για οσοδήποτε μεγάλους χρόνους θέλουμε (προκύπτει από την Πρόταση 5.15). Δηλαδή είναι η «πιο επαναληπτική» από όλες τις κινήσεις Brown.

Παράδειγμα 13.7 (Ένα local martingale που δεν είναι martingale)**.** Έστω $B = (B^{(1)}, B^{(2)})$ μια διδιάστατη κίνηση Brown με $B_0 \neq 0$ και η συνάρτηση $f(x) := (1/2)\log(x_1^2 + x_2^2)$ που ορίζεται στο $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Γράφουμε $x = (x_1, x_2)$ και $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Η f έχει

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{x_1^2 + x_2^2}, \quad i = 1, 2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

και ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 12.15. Άρα για την ανέλιξη $X_t := f(B_t)$ έχουμε

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{B_t^{(1)}}{|B_t|^2}\, dB_t^{(1)} + \frac{B_t^{(2)}}{|B_t|^2}\, dB_t^{(2)} + \frac{1}{2}\frac{(B_t^{(2)})^2 - (B_t^{(1)})^2}{|B_t|^4}\, dt + \frac{1}{2}\frac{(B_t^{(1)})^2 - (B_t^{(2)})^2}{|B_t|^4}\, dt \\ &= \frac{B_t^{(1)}}{|B_t|^2}\, dB_t^{(1)} + \frac{B_t^{(2)}}{|B_t|^2}\, dB_t^{(2)} \end{aligned}$$

για κάθε $t < \tau_U$. Όμως το $\tau_U = \infty$ λόγω του Πορισματος 13.6. Επειδή λοιπόν η X_t είναι ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα ως προς την κίνηση Brown, έπεται από την Πρόταση 11.4 ότι είναι local martingale. Αποδεικνύεται με χρήση του θεωρήματος σύγκλισης των martingales ότι η X δεν είναι martingale.

Επίσης, αποδεικνύεται ότι αν η B είναι d-διάστατη κίνηση Brown με $B_0 \neq 0$, τότε η $X_t = |B_t|^{2-d}$ είναι local martingale (Άσκηση) αλλά όχι martingale.

14

Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις

14.1 Γενικά

Στοχαστική διαφορική εξίσωση λέμε μια εξίσωση της μορφής

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t, \\ X_0 &= x_0, \end{aligned} \tag{14.1}$$

με $\mu, \sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις, $x_0 \in \mathbb{R}$, και B (μονοδιάστατη) κίνηση Brown. Όταν $\sigma \equiv 0$, η (14.1) είναι η γενική μορφή της συνήθους διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης.

Θεωρούμε τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ που παράγεται από την κίνηση Brown. Δηλαδή $\mathcal{F}_t := \sigma(\{B_s : s \in [0,t]\})$ για κάθε $t \ge 0$. Λύση της (14.1) λέμε κάθε ανέλιξη $(X_t)_{t\ge 0}$ που

- έχει συνεχή μονοπάτια
- είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$
- για κάθε $t > 0$, με πιθανότητα 1, ισχύει

$$\int_0^t |\mu(s, X_s)|\, ds < \infty, \quad \int_0^t \sigma^2(s, X_s)\, ds < \infty$$

- με πιθανότητα 1 ισχύει

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s \text{ για κάθε } t > 0. \tag{14.2}$$

Θα σχολιάσουμε τώρα τη σημασία των συναρτήσεων μ, σ. Ας υποθέσουμε ότι είναι και οι δύο τους φραγμένες και συνεχείς συναρτήσεις. Με χρήση της (14.2), παίρνουμε

$$\mathbf{E}(X_{t+h} - X_t \,|\, \mathcal{F}_t) = \int_t^{t+h} \mathbf{E}(\mu(s, X_s) \,|\, \mathcal{F}_t)\, ds \approx h\mu(t, X_t),$$

δηλαδή η $\mu(t, x)$ δίνει το ρυθμό της μέσης μεταβολής της X τον χρόνο t δεδομένου του παρελθόντος $\mathcal{F}_t$ αν $X_t = x$. Για την ερμηνεία της σ, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X_{t+h} - X_t \,|\, \mathcal{F}_t) &= \mathbf{E}\left(\{X_{t+h} - X_t - \mathbf{E}(X_{t+h} - X_t \,|\, \mathcal{F}_t)\}^2 \,|\, \mathcal{F}_t\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\left\{\int_t^{t+h} \{\mu(s, X_s) - \mathbf{E}(\mu(s, X_s) \,|\, \mathcal{F}_t)\}\, ds + \int_t^{t+h} \sigma(s, X_s)\, dB_s\right\}^2 \middle|\, \mathcal{F}_t\right) \\ &= o(h) + \mathbf{E}\left(\left\{\int_t^{t+h} \sigma(s, X_s)\, dB_s\right\}^2 \middle|\, \mathcal{F}_t\right) = \mathbf{E}\left(\int_t^{t+h} \sigma^2(s, X_s)\, ds \middle|\, \mathcal{F}_t\right) + o(h) \\ &\approx h\sigma^2(t, X_t). \end{aligned}$$

Με $o(h)$ συμβολίζουμε μια συνάρτηση $g(h)$ που έχει την ιδιότητα $\lim_{h\to 0} g(h)/h = 0$. Άρα, ξέροντας ότι $X_t = x$, για μικρό h, η διασπορά της μεταβολής $X_{t+h} - X_t$ δεδομένου του παρελθόντος $\mathcal{F}_t$ είναι ανάλογη του h και η $\sigma^2(t, x)$ είναι η σταθερά αναλογίας.

14.2 Χρήση στη μοντελοποίηση

Οι στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις συνήθως προκύπτουν στις εφαρμογές όταν σε ένα φαινόμενο που μοντελοποιείται από μια συνήθη διαφορική εξίσωση θέλουμε να συνυπολογίσουμε την επίδραση παραγόντων τυχαιότητας/αβεβαιότητας.

Για παράδειγμα, αν «εκτοξεύσουμε» μέσα σε ένα δοχείο με υγρό σε ηρεμία (π.χ. νερό) ένα μικρό σωματίδιο μάζας m με δεδομένη ταχύτητα v_0, πειραματικές μετρήσεις έχουν δείξει ότι πάνω του ασκείται δύναμη αντίστασης από το υγρό, η οποία έχει φορά αντίθετη από αυτή της ταχύτητας και μέτρο ανάλογο της ταχύτητας. Και η βαρυτική δύναμη έχει αμελητέα επίδραση. Έτσι, μένοντας σε αυτό το επίπεδο λεπτομέρειας, παίρνουμε από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα την εξής εξίσωση για την ταχύτητα του σωματιδίου

$$m\frac{dv}{dt} = -Cv.$$

Η σταθερά $C > 0$ εξαρτάται από το ιξώδες του υγρού και το μέγεθος του σωματιδίου. Δηλαδή, σε μικρό χρονικό διάστημα dt, για τη μεταβολή στην ορμή του σωματιδίου έχουμε

$$mdv_t = -Cv_t dt.$$

Κοιτώντας το φαινόμενο πιο προσεκτικά, βλέπουμε ότι πολλά μόρια νερού, που κινούνται τυχαία, προσκρούουν στο σωματίδιο από όλες τις κατευθύνσεις. Κάθε χρονική στιγμή η επίδρασή τους στην ορμή του σωματιδίου είναι αυξητική ή μειωτική και αλλάζει από στιγμή σε στιγμή. Αυτό το συνυπολογίζουμε συμπληρώνοντας την πιο πάνω διαφορική εξίσωση ως εξής

$$mdv_t = -Cv_t dt + \sigma dB_t.$$

Το σ είναι μια θετική σταθερά και ο νέος όρος, σdB_t, έχει μέση τιμή 0 και διασπορά σdt. Η εξίσωση στην οποία καταλήξαμε λέγεται εξίσωση Ornstein-Uhlenbeck και θα την λύσουμε πιο κάτω. Αν θα την κρατήσουμε τελικά για τη μοντελοποίηση του φαινομένου εξαρτάται από το πόσο συμφωνούν οι συνέπειές της με πειραματικές μετρήσεις.

14.3 Παραδείγματα

Όπως συμβαίνει με τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, έτσι και με τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις (ΣΔΕ στο εξής), υπάρχουν μέθοδοι επίλυσης μόνο για μερικές από αυτές, που έχουν ειδική μορφή. Περισσότερα θα πούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Για τώρα, θα λύσουμε τρείς απλές ΣΔΕ και στο τέλος του κεφαλαίου θα αναφέρουμε ένα θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης. Πολύ χρήσιμος στη διαδικασία επίλυσης είναι ο τύπος του Itô.

Παράδειγμα 14.1 (Η γεωμετρική κίνηση Brown)**.** Η πρώτη εξίσωση που θα δούμε είναι αυτή που ορίζει τη γεωμετρική κίνηση Brown και είναι η

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t\, dt + \sigma X_t\, dB_t, \\ X_0 &= x_0, \end{aligned}$$

όπου $x_0 > 0, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, και B είναι μια τυπική κίνηση Brown.

Θέτουμε $Y_t := \log X_t$. Ο τύπος του Itô (έκδοση IV) δίνει

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2}\frac{1}{X_t^2}(dX_t)^2 = \mu\, dt + \sigma\, dB_t - \frac{1}{2X_t^2} X_t^2 \sigma^2 dt \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma\, dB_t. \end{aligned}$$

Επομένως

$$Y_t - Y_0 = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t,$$

και άρα

$$X_t = x_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t} \tag{14.3}$$

για κάθε $t > 0$.
Πιο πάνω, κάποια βήματά μας δεν τα δικαιολογήσαμε. Για παράδειγμα, δεν είναι σαφές αν η X_t είναι πάντοτε θετική ώστε να ορίζεται η Y_t. Τώρα που μαντέψαμε μια λύση, επιστρέφουμε και με τη χρήση του τύπου του Itô επιβεβαιώνουμε ότι πράγματι είναι λύση. Αυτή τη φορά, όλα τα βήματα μπορούν να δικαιολογηθούν.
Για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της X έχουμε τα εξής:

(i). Αν $\mu < \sigma^2/2$, τότε $\lim_{t\to\infty} X_t = 0$.

(ii). Αν $\mu > \sigma^2/2$, τότε $\lim_{t\to\infty} X_t = \infty$.

(iii). Αν $\mu = \sigma^2/2$, τότε $\underline{\lim}_{t\to\infty} X_t = 0, \overline{\lim}_{t\to\infty} X_t = \infty$.

Αυτοί οι ισχυρισμοί προκύπτουν από τον τύπο (14.3) για τη X και το νόμο επαναλαμβανόμενου λογαρίθμου [σχέσεις (5.5). Για τις (i), (ii) αρκεί η (5.2)]. Είναι αξιοπρόσεκτο ότι για $\mu \in (0, \sigma^2/2)$, το οποίο είναι θετικό και επομένως προκαλεί σταθερή ντετερμινιστική σχετική αύξηση στη X, η X συγκλίνει στο 0. Οι διακυμάνσεις της κίνησης Brown είναι αρκετά ισχυρές (λόγω του μεγάλου σ) ώστε συνεχώς να οδηγούν τη X σε μικρές τιμές.

Παράδειγμα 14.2 (Η ανέλιξη Ornstein-Uhlenbeck)**.** Θεωρούμε τώρα τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} dX_t &= -aX_t\,dt + \sigma\,dB_t, \\ X_0 &= x_0, \end{aligned}$$

όπου $x_0 \in \mathbb{R}, a, \sigma > 0$, και B είναι μια τυπική κίνηση Brown.

Για $c \in \mathbb{R}$ υπολογίζουμε το διαφορικό της $e^{ct}X_t$ χρησιμοποιώντας την Πρόταση 12.12.

$$\begin{aligned} d(e^{ct}X_t) &= d(e^{ct})X_t + e^{ct}dX_t + d(e^{ct})(dX_t) = ce^{ct}X_t\,dt - ae^{ct}X_t\,dt + \sigma e^{ct}dB_t \\ &= (c-a)e^{ct}X_t\,dt + \sigma e^{ct}dB_t. \end{aligned}$$

Άρα επιλέγοντας $c = a$, έχουμε $d(e^{at}X_t) = \sigma e^{at}dB_t$, δηλαδή $e^{at}X_t - X_0 = \sigma \int_0^t e^{as}\,dB_s$ και άρα

$$X_t = x_0 e^{-at} + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}dB_s \tag{14.4}$$

για κάθε $t \geq 0$. Αυτή είναι η ανέλιξη Ornstein-Uhlenbeck και, μιας και τη συναντήσαμε, να παρατηρήσουμε κάποιες ιδιότητές της.

Το στοχαστικό ολοκλήρωμα στην (14.4) είναι μια τυχαία μεταβλητή με κατανομή $N(0, s(t))$ (Άσκηση 9.7) όπου

$$s(t) = \sigma^2 e^{-2at}\,\mathbf{E}\left(\int_0^t e^{2as}\,ds\right) = \sigma^2\frac{1-e^{-2at}}{2a}.$$

Και από αυτή την παρατήρηση προκύπτουν τα εξής:

A. Η X_t συγκλίνει κατά κατανομή σε τυχαία μεταβλητή $Y \sim N(0, \sigma^2/2a)$. Αυτό προκύπτει από το ότι $\lim_{t\to\infty}\sigma(t) = \sigma^2/2a$ και από την Πρόταση Α΄.10.

B. Αν η αρχική τιμή της X δεν είναι σταθερή αλλά είναι μια τυχαία μεταβλητή $X_0 \sim N(0, \sigma^2/2a)$ ανεξάρτητη από την κίνηση Brown, τότε για κάθε $t > 0$ ισχύει επίσης

$$X_t \sim N(0, \sigma^2/2a).$$

Αυτό γιατί η X_t ως άθροισμα δύο ανεξάρτητων κανονικών είναι και αυτή κανονική με μέση τιμή 0 και διασπορά

$$\frac{\sigma^2}{2a}e^{-2at} + \sigma^2\frac{1-e^{-2at}}{2a} = \frac{\sigma^2}{2a}.$$

Η X είναι μια διαδικασία Markov (δεν το δικαιολογούμε αυτό) και η κατανομή $N(0, \sigma^2/2a)$ είναι η στάσιμη κατανομή της. Τα **A, B** θυμίζουν αποτελέσματα που ενδεχομένως ο αναγνώστης έχει δει σε μάθημα αλυσίδων Markov σε διακριτό χώρο και χρόνο.

Οι πιο πάνω εξισώσεις έχουν λύσεις που ορίζονται σε όλο τον χρονικό ορίζοντα $[0, \infty)$. Τώρα θα δούμε και μια εξίσωση για την οποία αυτό δεν συμβαίνει.

Παράδειγμα 14.3. Θεωρούμε τη ΣΔΕ

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t^3\,dt + X_t^2\,dB_t, \\ X_0 &= a, \end{aligned}$$

με $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και B μια τυπική κίνηση Brown.

Αντίστοιχα με το προηγούμενο παράδειγμα, πειραματιζόμαστε υπολογίζοντας το $d(f(X_t))$ για συνάρτηση f της μορφής $f(x) = x^r$. Προκύπτει ότι το κατάλληλο r είναι το $r = -1$. Υπολογίζουμε λοιπόν το διαφορικό της $Y_t = 1/X_t$.

$$dY_t = -\frac{1}{X_t^2}dX_t + \frac{1}{2}\frac{2}{X_t^3}(dX_t)^2 = -X_t\,dt - dB_t + (X_t)^{-3}X_t^4 dt = -dB_t.$$

Άρα $Y_t - Y_0 = -B_t$, δηλαδή $X_t^{-1} - a^{-1} = -B_t$ και άρα

$$X_t = \frac{1}{a^{-1} - B_t}.$$

Τώρα, σε πεπερασμένο χρόνο, η κίνηση Brown θα χτυπήσει το a^{-1} (Πρόταση 7.3) και λύση δεν μπορεί να υπάρχει από εκείνο το χρόνο και μετά.

14.4 Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης

Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη το εξής θεώρημα σχετικά με την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης της ΣΔΕ (14.1).

Θεώρημα 14.4. *Έστω $T > 0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $K > 0$ ώστε*

$$|\mu(t,x) - \mu(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \le K|x-y|, \tag{14.5}$$
$$|\mu(t,x)| + |\sigma(t,x)| \le K(1+|x|), \tag{14.6}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}, t \in [0,T]$. Τότε υπάρχει λύση της (14.1) στο διάστημα $[0,T]$ και οποιεσδήποτε δύο λύσεις X, Y είναι μη διακρινόμενες στο $[0,T]$. Δηλαδή $\mathbf{P}(X_t = Y_t \text{ για κάθε } t \in [0,T]) = 1$.

Η απόδειξη του θεωρήματος δίνεται, για παράδειγμα, στην Παράγραφο 5.2 του Øksendal (2003).

Η (14.5) λέει ότι για κάθε t σταθερό οι $\mu(t,\cdot), \sigma(t,\cdot)$ είναι Lipschitz σε όλο το $\mathbb{R}$. Η (14.6) λέει ότι οι μ, σ αυξάνουν το πολύ γραμμικά ως προς x και επιπλέον έχουν γραμμικό άνω φράγμα το οποίο δεν εξαρτάται από το $t \in [0,T]$.

Το θεώρημα έχει την εξής άμεση συνέπεια που αφορά ύπαρξη και μοναδικότητα στον άπειρο χρονικό ορίζοντα $[0, \infty)$.

Πόρισμα 14.5. *Υποθέτουμε ότι για κάθε $T > 0$ υπάρχει $K_T > 0$ ώστε*

$$|\mu(t,x) - \mu(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \le K_T|x-y|, \tag{14.7}$$
$$|\mu(t,x)| + |\sigma(t,x)| \le K_T(1+|x|) \tag{14.8}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}, t \in [0,T]$. Τότε υπάρχει λύση της (14.1) στο διάστημα $[0,\infty)$ και οποιεσδήποτε δύο λύσεις X, Y είναι μη διακρινόμενες στο $[0,\infty)$. Δηλαδή $\mathbf{P}(X_t = Y_t$ για κάθε $t \in [0,\infty)) = 1$.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα για $T = n \in \mathbb{N}^+$ και έχουμε ότι υπάρχει λύση $X^{(n)}$ της (14.1) στο $[0,n]$. Για $j,k \in \mathbb{N}^+$ με $j < k$ θέτουμε

$$A_{j,k} := \{\omega \in \Omega : X_t^{(j)} \ne X_t^{(k)} \text{ για κάποιο } t \in [0,j]\},$$

το οποίο λόγω του προηγούμενου θεωρήματος έχει πιθανότητα 0. Τότε και το $A := \cup_{1\le j<k} A_{j,k}$ έχει πιθανότητα 0. Θέτουμε $X_t := X_t^{(n)}$ για κάθε $t \in [n-1,n)$ και $n \in \mathbb{N}^+$. Για $\omega \in \Omega \backslash A$ ισχύει $X_t = X_t^{(n)}$ για κάθε $t \in [0,n]$, οπότε η X είναι λύση της (14.1) στο $[0,n]$. Και επειδή το n είναι αυθαίρετο και $\mathbf{P}(A) = 0$, έχουμε ότι η X είναι λύση της (14.1) στο $[0,\infty)$.

Αν X, Y είναι δύο λύσεις, τότε, με βάση το προηγούμενο θεώρημα, για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ το σύνολο $C_n := \{\omega \in \Omega : X_t \ne Y_t \text{ για κάποιο } t \in [0,n]\}$ έχει πιθανότητα 0. Άρα και το $\{\omega \in \Omega : X_t \ne Y_t \text{ για κάποιο } t \in [0,\infty)\}$ έχει πιθανότητα 0 ως υποσύνολο του $\cup_{n=1}^{\infty} C_n$. ∎

Επιστρέφοντας στα Παραδείγματα 14.1, 14.2, παρατηρούμε ότι οι ΣΔΕ που μελετήσαμε εκεί ικανοποιούν τις υποθέσεις του Πορίσματος 14.7. Άρα οι λύσεις που βρήκαμε είναι και μοναδικές. Αντίθετα, η ΣΔΕ του Παραδείγματος (14.3) δεν ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 14.4 σε κανένα πεπερασμένο υποδιάστημα $[0,T]$. Έτσι δεν είναι περίεργο ότι δεν έχει λύση που να ορίζεται σε όλο το $[0,\infty)$. Στην Άσκηση 14.2 συναντούμε μια ΣΔΕ η οποία έχει πάνω από μία λύση.

Ασκήσεις

Στις ασκήσεις πιο κάτω, B είναι μια τυπική κίνηση Brown.

14.1 Να λυθεί στο $[0,1)$ η ΣΔΕ

$$\begin{aligned} dX_t &= -\frac{X_t}{1-t}\,dt + dB_t, \\ X_0 &= 0. \end{aligned}$$

[Υπόδειξη: Υπολογίστε πρώτα το διαφορικό της ανέλιξης $Y_t := X_t/(1-t)$.]

14.2 Για $a > 0$ δεδομένο, θέτουμε $f(x) = (x-a)^3 \mathbf{1}_{x\ge a}$ και θεωρούμε την ανέλιξη $X_t := f(B_t)$. Να δειχθεί ότι η X λύνει τη ΣΔΕ

$$\begin{aligned} dX_t &= 3X_t^{1/3}\,dt + 3X_t^{2/3} dB_t, \\ X_0 &= 0. \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Κάθε a δίνει και άλλη λύση. Επομένως αυτή η ΣΔΕ έχει άπειρες λύσεις.

14.3 Να βρεθεί μια λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$\begin{aligned} dX_t &= dt + 2\sqrt{X_t}\,dB_t, \\ X_0 &= 1. \end{aligned}$$

[Υπόδειξη: Αναζητήστε λύση της μορφής $X_t = f(B_t)$. Η λύση δεν μπορεί να οριστεί σε όλο το $[0,\infty)$.]

15

Επίλυση ειδικών μορφών ΣΔΕ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε κάποιες ειδικές μορφές ΣΔΕ για τις οποίες υπάρχει μέθοδος επίλυσης. Περισσότερες μπορεί να δει κανείς στο Kloeden and Platen (1992), §4.2-4.4.

15.1 Συντελεστές γραμμικοί ως προς X

Θα λύσουμε τη ΣΔΕ

$$\begin{aligned} dX_t &= \{\mu_1(t)X_t + \mu_2(t)\}\,dt + \{\sigma_1(t)X_t + \sigma_2(t)\}\,dB_t, \\ X_0 &= x_0, \end{aligned} \tag{15.1}$$

όπου οι ανελίξεις $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ είναι μετρήσιμες, προσαρμοσμένες, και με πιθανότητα 1 τοπικά φραγμένες.

Θεωρούμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα Y_t^{-1} όπου η Y_t λύνει λύνει την «αυστηρά γραμμική» εξίσωση

$$\begin{aligned} dY_t &= Y_t\mu_1(t)\,dt + Y_t\sigma_1(t)\,dB_t, \\ Y_0 &= 1. \end{aligned} \tag{15.2}$$

Με την ίδια διαδικασία όπως στο Παράδειγμα 14.1, βρίσκουμε ότι μια Y που ικανοποιεί την (15.2) είναι η

$$Y_t = \exp\left\{\int_0^t \left(\mu_1(s) - \frac{1}{2}\sigma_1^2(s)\right) ds + \int_0^t \sigma_1(s)\,dB_s\right\}. \tag{15.3}$$

Μάλιστα προκύπτει από το Θεώρημα 14.4 ότι αυτή είναι η μοναδική λύση της (15.2).
Θέτουμε $Z_t = Y_t^{-1}X_t$ για κάθε $t \geq 0$ και θα δείξουμε ότι η Z ικανοποιεί μια ΣΔΕ που λύνεται αμέσως. Υπολογίζουμε ότι

$$d(Y_t^{-1}) = -\frac{1}{Y_t^2}dY_t + \frac{1}{2}2Y_t^{-3}(dY_t)^2 = -Y_t^{-1}(\mu_1(t)\,dt + \sigma_1(t)\,dB_t) + Y_t^{-1}\sigma_1^2(t)\,dt, \tag{15.4}$$

οπότε

$$dZ_t = d(Y_t^{-1})X_t + Y_t^{-1}dX_t + d(Y_t^{-1})dX_t = \ldots = Y_t^{-1}\{\mu_2(t) - \sigma_1(t)\sigma_2(t)\}\,dt + Y_t^{-1}\sigma_2(t)\,dB_t.$$

Χρησιμοποιήσαμε τις εκφράσεις (15.1), (15.4). Άρα

$$Z_t = x_0 + \int_0^t Y_s^{-1}\{\mu_2(s) - \sigma_1(s)\sigma_2(s)\}\,ds + \int_0^t Y_s^{-1}\sigma_2(s)\,dB_s.$$

Μπορούμε τώρα να ελέγξουμε ότι η $X_t := Y_tZ_t$, με την Y όπως στην (15.3) και τη Z όπως στην προηγούμενη σχέση, λύνει την (15.1) (Άσκηση).

15.2 Συντελεστής διάχυσης γραμμικός ως προς X

Μέθοδος λύσης υπάρχει και για τις ΣΔΕ της μορφής

$$\begin{aligned} dX_t &= f(t, X_t)\,dt + \sigma(t)X_t dB_t, \\ X_0 &= x_0, \end{aligned} \tag{15.5}$$

με τις f, σ συνεχείς (ντετερμινιστικες) συναρτήσεις με κατάλληλα πεδία ορισμού.

Ακολουθούμε παρόμοια διαδικασία όπως στην προηγούμενη παράγραφο. Ολοκληρωτικός παράγοντας είναι ο Y_t^{-1}, όπου η Y λύνει την

$$\begin{aligned} dY_t &= \sigma(t) Y_t \, dB_t, \\ Y_0 &= 1. \end{aligned} \tag{15.6}$$

Βρίσκουμε όπως πριν ότι μοναδική λύση αυτής της ΣΔΕ είναι η

$$Y_t := \exp\left\{ \int_0^t \sigma(s)\, dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s)\, ds \right\}.$$

Έπειτα

$$d(Y_t^{-1}) = Y_t^{-1} \{ -\sigma(t) dB_t + \sigma^2(t)\, dt \},$$

και άρα

$$\begin{aligned} d(Y_t^{-1} X_t) &= X_t dY_t^{-1} + Y_t^{-1} dX_t + dY_t^{-1} dX_t \\ &= X_t Y_t^{-1} \{ -\sigma(t) dB_t + \sigma^2(t)\, dt \} + Y_t^{-1} \{ f(t, X_t)\, dt + \sigma(t) X_t dB_t \} - Y_t^{-1} \sigma^2(t) X_t\, dt \\ &= Y_t^{-1} f(t, X_t)\, dt. \end{aligned}$$

Δηλαδή ο ολοκληρωτικός παράγοντας κατάφερε να εξαλείψει τον όρο διάχυσης. Θέτουμε $Z_t := Y_t^{-1} X_t$. Η Z ικανοποιεί την

$$dZ_t = Y_t^{-1} f(t, Y_t Z_t)\, dt, \tag{15.7}$$

η οποία για κάθε σταθερό ω στον χώρο πιθανότητας είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση. Αν είμαστε τυχεροί, αυτή θα λύνεται και έπειτα η $X_t := Y_t Z_t$ θα λύνει την αρχική εξίσωση.

Για την επίλυση της (15.7), σημειώνουμε ότι η Z_t είναι διαφορίσιμη με συνεχή παράγωγο. Αυτό γιατί σαφώς η Z_t από τον ορισμό της είναι συνεχής (για κάθε σταθερό ω) και έπειτα επειδή και οι f, Y είναι συνεχείς, γράφοντας την (15.7) σε ολοκληρωτική μορφή, έχουμε το ζητούμενο. Άρα, για κάθε g συνεχώς παραγωγίσιμη, θα έχουμε $dg(Z_t) = g'(Z_t) dZ_t$. Δεν χρειάζεται να επικαλεστούμε τον τύπο του Itô για τον υπολογισμό του $dg(Z_t)$.

Παράδειγμα 15.1. Θα λύσουμε τη ΣΔΕ

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t^\gamma\, dt + a X_t\, dB_t, \\ X_0 &= x_0, \end{aligned} \tag{15.8}$$

όπου $x_0 > 0, a, \gamma \in \mathbb{R}$, και B είναι τυπική κίνηση Brown.
Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι ο

$$Y_t^{-1} = e^{-aB_t + \frac{1}{2} a^2 t},$$

οπότε η $Z_t := X_t Y_t^{-1}$ ικανοποιεί την

$$\begin{aligned} dZ_t &= Y_t^{-1} (Y_t Z_t)^\gamma\, dt = Y_t^{\gamma-1} Z_t^\gamma\, dt, \\ Z_0 &= x_0. \end{aligned} \tag{15.9}$$

Η πρώτη εξίσωση είναι η $Z_t^{-\gamma}\, dZ_t = Y_t^{\gamma-1}\, dt$ και, με βάση τα σχόλια πριν το παράδειγμα, αυτή μπορεί να γραφτεί ως

$$d(Z_t^{1-\gamma}) = (1-\gamma) Y_t^{\gamma-1}\, dt \tag{15.10}$$

όταν $\gamma \neq 1$ και ως $d(\log Z_t) = dt$ όταν $\gamma = 1$.
Διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις.

(i) $\gamma < 1$. Τότε ολοκληρώνοντας την (15.10) παίρνουμε

$$Z_t^{1-\gamma} - x_0^{1-\gamma} = (1-\gamma)\int_0^t Y_s^{\gamma-1}\,ds,$$

και άρα

$$X_t = Y_t Z_t = Y_t\left(x_0^{1-\gamma} + (1-\gamma)\int_0^t Y_s^{\gamma-1}\,ds\right)^{1/(1-\gamma)}. \tag{15.11}$$

Ο εκθέτης έξω από την παρένθεση είναι θετικός, όπως και η ποσότητα μέσα. Οπότε η λύση ορίζεται για κάθε $t \geq 0$.

(ii) $\gamma > 1$. Όμοια όπως πριν, φτάνουμε στην

$$Z_t^{1-\gamma} = x_0^{1-\gamma} - (\gamma-1)\int_0^t Y_s^{\gamma-1}\,ds.$$

Ο εκθέτης $1-\gamma$ είναι αρνητικός. Το δεξί μέλος της ισότητας είναι θετικό για μικρά t, αλλά είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του t. Με θετική πιθανότητα παίρνει την τιμή 0 για κάποιο πεπερασμένο χρόνο $t_0(\omega)$. Αυτό γιατί η ποσότητα μέσα στο ολοκλήρωμα είναι

$$e^{(\gamma-1)aB_s-\frac{1}{2}(\gamma-1)a^2 s},$$

και έτσι, αν η aB_s πάρει μεγάλες τιμές για κάποιους χρόνους, θα δώσει στο ολοκλήρωμα τιμή $> x_0^{1-\gamma}/(\gamma-1)$. Αυτό σημαίνει ότι η Z, άρα και η X, εκρήγνυται (απειρίζεται) τον πεπερασμένο χρόνο $t_0(\omega)$. Σε αυτή την περίπτωση, λύση υπάρχει μόνο στο διάστημα $[0, t_0(\omega))$ και δίνεται πάλι από τη σχέση (15.11).

(iii) $\gamma = 1$. Όμοια βρίσκουμε ότι

$$X_t = x_0 e^t Y_t$$

για κάθε $t \geq 0$.

15.3 Λύση της μορφής $f(t, B_t)$

Αν η ΣΔΕ

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dB_t, \\ X_0 &= x_0 \end{aligned} \tag{15.12}$$

έχει λύση της μορφής $X_t = f(t, B_t)$, τότε ένας τρόπος να βρούμε την f είναι ο εξής. Με βάση τον τύπο του Itô, η $Y_t := f(t, B_t)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$dY_t = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}(t, B_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, B_t)\right\}dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, B_t)\,dB_t,$$

η οποία ταυτίζεται με την πρώτη από τις (15.12) αν μπορούμε να έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = \mu(t, f(t, x)), \tag{15.13}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \sigma(t, f(t, x)). \tag{15.14}$$

Η δεύτερη ισότητα προσφέρεται για άμεση ολοκλήρωση αν την γράψουμε ως

$$\frac{1}{\sigma(t, f(t, x))}\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 1.$$

Γιατί αν η $g(t, y)$ είναι μια αρχική της $1/\sigma(t, y)$ ως προς την παράμετρο y, τότε η τελευταία σχέση γράφεται

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t, f(t, x)) = 1.$$

Άρα $g(t, f(t, x)) = x + c(t)$ με c κάποια συνάρτηση. Από εδώ ελπίζουμε, αντιστρέφοντας την $y \mapsto g(t, y)$, να βρούμε μια έκφραση για την f. Θέλουμε αυτή η έκφραση να ικανοποιεί την (15.13) και αυτή η απαίτηση, αν μπορεί να εκπληρωθεί, δίνει πληροφορία για τη c. Τέλος, η ικανοποίηση του της αρχικής συνθήκης $X_0 = x_0$ αντιμετωπίζεται εύκολα.

Αν η δεδομένη διαφορική εξίσωση δεν έχει λύση της μορφής $f(t, B_t)$ (όπως συμβαίνει με την Ornstein-Uhlenbeck, Παράδειγμα 14.2), τότε η διαδικασία που περιγράψαμε θα παρουσιάζει κάποιο πρόβλημα και δεν θα μπορεί να περατωθεί.

Παράδειγμα 15.2. Θα λύσουμε με την παραπάνω μεθοδολογία τη ΣΔΕ

$$dX_t = \left(\sqrt{1 + X_t^2} + \frac{1}{2}X_t\right) dt + \sqrt{1 + X_t^2} dB_t, \tag{15.15}$$

$$X_0 = 0. \tag{15.16}$$

B είναι μια τυπική κίνηση Brown. Με βάση τα όσα είπαμε, ζητάμε μια συνάρτηση f ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = \sqrt{1 + f^2(t, x)} + \frac{1}{2}f(t, x), \tag{15.17}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \sqrt{1 + f^2(t, x)}. \tag{15.18}$$

Η $1/\sqrt{1 + y^2}$ έχει ως μια αρχική την $a(y) = \log(y + \sqrt{1 + y^2})$ η οποία είναι 1-1 και επί του $\mathbb{R}$ με αντίστροφη τη sinh. Οπότε η (15.18) γράφεται

$$\frac{\partial f}{\partial x} a(f(t, x)) = 1.$$

Άρα $a(f(t, x)) = x + c(t)$, δηλαδή, $f(t, x) = a^{-1}(x + c(t)) = \sinh(x + c(t))$. Για αυτή την f, το αριστερό μέλος της (15.17) ισούται με

$$\cosh(x + c(t))\, c'(t) + \frac{1}{2}\sinh(x + c(t)) = \sqrt{1 + f^2(t, x)}\, c'(t) + \frac{1}{2}f(t, x),$$

το οποίο συμφωνεί με το δεξί της μέλος αν έχουμε $c'(t) = 1$. Άρα $c(t) = t + c_0$ για κάποια σταθερά c_0 και έτσι

$$f(t, x) = \sinh(x + t + c_0).$$

Τα παραπάνω εξασφαλίζουν ότι η $X_t := f(t, B_t)$ ικανοποιεί την (15.15). Τέλος, η συνθήκη $X_0 = 0$ ικανοποιείται αν επιλέξουμε $c_0 = 0$. Έτσι, η $X_t := \sinh(B_t + t)$ λύνει το αρχικό πρόβλημα.

Ασκήσεις

15.1 Να βρεθεί μια λύση της ΣΔΕ

$$dX_t = aX_t\, dt + e^{-t} dB_t,$$
$$X_0 = 1.$$

B είναι μια τυπική κίνηση Brown. Είναι η λύση μοναδική; Ποια η κατανομή του X_t; Να δειχθεί ότι για $a < 0$ και $t \to \infty$, η X_t συγκλίνει κατά κατανομή στη σταθερή τυχαία μεταβλητή 0.

15.2 Έστω g διαφορίσιμη και θετική συνάρτηση και $a, x_0 \in \mathbb{R}$. Με τη μέθοδο της Παραγράφου 15.3 «ανακαλύψτε» ότι μια λύση της ΣΔΕ

$$\begin{aligned} dX_t &= \left(ag(X_t) + \frac{1}{2}g(X_t)g'(X_t)\right) dt + g(X_t)dB_t, \\ X_0 &= x_0 \end{aligned}$$

δίνεται από τον τύπο

$$X_t = h^{-1}(B_t + at + h(x_0)),$$

όπου h είναι μια αρχική της $1/g$.

15.3 Να βρεθεί μια λύση της ΣΔΕ

$$\begin{aligned} dX_t &= (3 + X_t)(1 + X_t^2)\, dt + (1 + X_t^2)dB_t, \\ X_0 &= 1. \end{aligned}$$

15.4 (α) Έστω $a \in \mathbb{R}$, και $f, g : [0, 1) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες με συνεχή παράγωγο και με $f(t) \neq 0$ για κάθε $t \in [0, 1)$. Θεωρούμε την ανέλιξη

$$X_t := f(t) \left\{ a + \int_0^t g(s)\, dB_s \right\}, \ t \in [0, 1).$$

Να δειχθεί ότι

$$dX_t = \frac{f'(t)}{f(t)} X_t\, dt + f(t)g(t)\, dB_t.$$

(β) Για $k > 0$, να λυθεί η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} dX_t &= -\frac{k}{1-t} X_t\, dt + dB_t \ \text{ για } t \in [0, 1), \\ X_0 &= 0. \end{aligned}$$

(γ) Για τη λύση X από το προηγούμενο ερώτημα, να υπολογιστεί η $\mathrm{Var}(X_t)$ για $t \in [0, 1)$.

16

Χαρτοφυλάκια και arbitrage

16.1 Αγορές μετοχών

Ποια είναι η χρήση και η σημασία των μετοχών μιας εταιρείας; Κατά τη σύστασή της ή σε άλλες στιγμές του χρόνου ύπαρξής της χρειάζεται να συγκεντρώσει κεφάλαιο για να προβεί σε κινήσεις που θα την μεγαλώσουν. Π.χ., αν θέλει να ανοίξει ένα νέο εργοστάσιο. Ζητάει λοιπόν κεφάλαιο από επενδυτές και σε αντάλλαγμα δίνει μετοχές. μια μετοχή είναι απλώς ένα έγγραφο και βεβαιώνει ότι στον κάτοχό της ανήκει ένα συγκεκριμένο ποσοστό της εταιρείας. Συνήθως, σε τακτά χρονικά διαστήματα, και ιδιαίτερα όταν η εταιρεία έχει κέρδη, δίνει κάποια από αυτά στους μετόχους της (αυτά λέγονται μερίσματα). Είναι πιθανόν βέβαια η διοίκηση να διαχειριστεί την εταιρεία με λάθος τρόπο, ακόμη και να την οδηγήσει σε χρεοκοπία. Τότε το αρχικό ποσό που έδωσε ο επενδυτής χάνεται. Η μετοχή δεν του δίνει δικαίωμα σε κάτι.

Η μετοχή μετά την αρχική πώλησή της μπορεί να ξαναπουληθεί. Αυτό γίνεται στο χρηματιστήριο. Ένας επενδυτής που κατέχει μετοχές μιας εταιρείας Α δηλώνει με τι τιμή προτίθεται να πουλήσει κάθε μετοχή της Α που έχει. Αν κάποιος άλλος επενδυτής θεωρεί συμφέρουσα την προσφορά, προχωρεί σε συμφωνία και αγοράζει όσες μετοχές της Α θέλει από τον πρώτο επενδυτή. Αν η τιμή θεωρείται υψηλή από όλους, ο επενδυτής τη μειώνει αν θέλει να πουλήσει τη μετοχή. Στο τέλος συμβαίνει να πουλιέται μια μετοχή από όλους τους κατόχους της σχεδόν με την ίδια τιμή. Αυτή η τιμή αντικατοπτρίζει την άποψη της αγοράς για τη μελλοντική κερδοφορία της εταιρείας. Και η τιμή της μεταβάλεται με τον χρόνο, καθώς γίνονται γνωστές πληροφορίες για την επίδοση της εταιρείας και οι επενδυτές αλλάζουν γνώμη για αυτήν.

Αν συμβολίσουμε με X_t την τιμή μιας μετοχής της εταιρείας Α κατά τον χρόνο t, τότε η υπόθεση που θα κάνουμε είναι ότι η $(X_t)_{t\geq 0}$ είναι μια στοχαστική ανέλιξη, δηλαδή κάθε X_t είναι μια τυχαία μεταβλητή. Αυτό αντικατοπτρίζει την αδυναμία μας να ξέρουμε την τιμή X_t πριν τον χρόνο t.

16.2 Το επιτόκιο της τράπεζας

Μια επιλογή επένδυσης που υπάρχει πάντα είναι να τοποθετήσουμε ένα ποσό F στην τράπεζα. Αυτή η επένδυση θεωρείται ότι δεν έχει καθόλου ρίσκο. Αν το ετήσιο επιτόκιο της τράπεζας είναι r, αυτό σημαίνει ότι σε ένα χρόνο το ποσό F έχει γίνει $(1 + r)F$ (λέμε επίσης ότι το ετήσιο επιτόκιο είναι $100r\%$). Η τράπεζα αυτόματα τοποθετεί στο λογαριασμό μας το επιπλέον ποσό rF στο τέλος του χρόνου. Βέβαια η τράπεζα κάνει αυτή τη διαδικασία πολύ πιο συχνά, ώστε για οσοδήποτε μικρό χρονικό διάστημα τοποθετήσουμε ένα ποσό σε λογαριασμό, το ποσό να παίρνει το επιτόκιο που αναλογεί σε εκείνο το διάστημα. Ένας τρόπος να το κάνει αυτό είναι ο εξής. Χωρίζει έναν χρόνο σε n ίσα διαστήματα και σε καθένα από αυτά τα διαστήματα δίνει στο ποσό επιτόκιο r/n. Έτσι, ένα ποσό που στην αρχή της χρονιάς ήταν F, μετά από 4 διαστήματα έχει γίνει $(1 + \frac{r}{n})^4 F$. Μια χρονική στιγμή $t = j/n$ χρόνια μετά την αρχική κατάθεση, το ποσό έχει γίνει

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^j F = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} F \approx e^{rt} F$$

για n μεγάλο. Το $n \to \infty$ όριο αυτής της διαδικασίας δίνει αυτό που λέμε **συνεχή ανατοκισμό** με ρυθμό r. Ένα ποσό F_0 που τοποθετείται στην τράπεζα τη χρονική στιγμή 0 αυξάνει σε $F_t = F_0 e^{rt}$ τη χρονική στιγμή $t > 0$. Αυτό ισοδυναμεί με το ότι η στιγμιαία σχετική μεταβολή του F_t ισούται με rdt. Δηλαδή, $dF_t/F_t = rdt$. Υπό συνεχή ανατοκισμό με ρυθμό r το ετήσιο επιτόκιο δεν ισούται με r αλλά με $e^r - 1$ που είναι περισσότερο από το r (για r μικρό, είναι πολύ κοντά).

16.3 Ανοιχτή πώληση

Ας υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής ως τώρα δεν είχε καμία μετοχή μιας εταιρείας Α. Διάφορα στοιχεία τον οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η τιμή της μετοχής της Α θα αυξηθεί. Μπορεί να αξιοποιήσει αυτή την πεποίθηση αγοράζοντας έναν αριθμό μετοχών της Α. Αν όμως συμπεράνει ότι η τιμή της μετοχής θα μειωθεί, πώς μπορεί να το εκμεταλευτεί; Δεν έχει μετοχές της Α να πουλήσει. Για αυτό το σκοπό υπάρχει η διαδικασία της ανοιχτής πώλησης, κατά την οποία κάποιος πουλάει μετοχές που δεν έχει.

Η διαδικασία δουλεύει ως εξής. Ο επενδυτής E_1 έχει λογαριασμό σε έναν χρηματιστή, ο οποίος διαχειρίζεται το χαρτοφυλάκιό του. Εκτελεί τις εντολές του πρώτου για αγορές ή πωλήσεις μετοχών. Ο E_1 ζητάει από τον χρηματιστή να πουλήσει, ας πούμε, 100 μετοχές της Α. Ο χρηματιστής παίρνει αυτές τις μετοχές από τον λογαριασμό άλλου πελάτη E_2, που τις έχει, και τις πουλάει. Τα έσοδα πάνε στον λογαριασμό του E_1, ο οποίος θα τα εκμεταλευτεί όπως νομίζει. Κάποια στιγμή ο E_1 πρέπει να επιστρέψει τις μετοχές στον λογαριασμό του E_2 (τότε λέμε ότι κλείνει τη θέση του). Η ιδέα είναι να κλείσει τη θέση του κάποια στιγμή αργότερα, όταν η τιμή της μετοχής θα έχει πέσει. Και ενώ νωρίτερα εισέπραξε, π.χ., 20 € κατά την πώληση της μετοχής, έπειτα, για να την επιστρέψει, την αγοράζει στη χαμηλότερη τιμή 10 €. Κλείνει τη θέση του και έχει αποκομίσει κέρδος από τη διαδικασία. Ο χρόνος που θα το κάνει αυτό είναι γενικά δική του επιλογή. Σε κάποιες περιπτώσεις απλώς ενδέχεται να τον αναγκάσει ο χρηματιστής να το κάνει. Αν, για παράδειγμα, ο χρηματιστής δεν έχει καθόλου μετοχές της Α και ο E_2 του ζητήσει να πουλήσει τις δικές του μετοχές (οι οποίες βέβαια λείπουν). Σε ένα τέτοιο σενάριο ο E_1 αναγκαστικά πρέπει να κλείσει την θέση του ακόμα και αν δεν τον συμφέρει αυτό.

Επίσης, από τη στιγμή που ο E_1 δανείζεται τις μετοχές από τον E_2, υποχρεούται παρέχει στον λογαριασμό του E_2 οποιαδήποτε έσοδα προκύπτουν από την κατοχή των μετοχών (π.χ. μερίσματα). Πρακτικά, ο E_2 δεν αντιλαμβάνεται ότι οι μετοχές του έχουν πουληθεί.

16.4 Αυτοχρηματοδοτούμενα χαρτοφυλάκια

Σε αυτό το κεφάλαιο, υποθέτουμε ότι έχουμε μια αγορά στην οποία υπάρχουν N εταιρείες τις οποίες αριθμούμε ως $1, 2, \ldots, N$. Ονομάζουμε $S_t^{(i)}$ την τιμή μιάς μετοχής της εταιρείας i τη χρονική στιγμή t, και

$$S_t := (S_t^{(1)}, S_t^{(2)}, \ldots, S_t^{(N)})$$

το διάνυσμα των τιμών όλων των μετοχών. Επίσης θεωρούμε τη διήθηση $(\mathcal{F}_t^S)_{t\geq 0}$ με

$$\mathcal{F}_t^S := \sigma(S_s^{(i)} : s \in [0,t], i = 1, \ldots, N\}$$

για κάθε $t \geq 0$.

Σε μη τεχνική γλώσσα, χαρτοφυλάκιο λέμε ένα υποσύνολο των υπαρχόντων χρηματιστηριακών προϊόντων σε μια αγορά. Συνήθως, είναι οι μετοχές ή συμβόλαια άλλου τύπου (θα δούμε τέτοια παρακάτω) που έχει στην κατοχή του ένας συγκεκριμένος επενδυτής. Στην αγορά των N τύπων μετοχών που θεωρούμε, ένα χαρτοφυλάκιο καθορίζεται από ένα διάνυσμα $(h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(N)})$ πραγματικών αριθμών, όπου το $h^{(i)}$ δηλώνει πόσες μονάδες της μετοχής i περιέχει το χαρτοφυλάκιο. Αρνητικό $h^{(i)}$ δηλώνει ότι ο επενδυτής οφείλει $|h^{(i)}|$ μετοχές τύπου i ή οφείλει $|h^{(i)}|$€ στην τράπεζα. Στην πρώτη περίπτωση, αυτό έχει γίνει με τη διαδικασία της ανοιχτής πώλησης, που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Ένας επενδυτής, ξεκινώντας με χαρτοφυλάκιο $(h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(N)})$ πραγματοποιεί αγορές και πωλήσεις, με αποτέλεσμα η σύσταση του χαρτοφυλακίου να αλλάζει συνεχώς στον χρόνο. Ας καλέσουμε λοιπόν $h_t := (h_t^{(1)}, \ldots, h_t^{(n)})$ τη σύσταση του χαρτοφυλακίου κατά τον χρόνο t. Η τιμή του κατά τον χρόνο t ισούται με

$$V_t^h := \sum_{i=1}^{N} h_t^{(i)} S_t^{(i)} = h_t \cdot S_t.$$

Ο μαθηματικός ορισμός του χαρτοφυλακίου είναι ο εξής.

Ορισμός 16.1. (i) **Χαρτοφυλάκιο** λέμε κάθε $\mathcal{F}_t^S$-προσαρμοσμένη N-διάστατη στοχαστική ανέλιξη $h = \{h_t : t \geq 0\}$.

(ii) Ένα χαρτοφυλάκιο h λέγεται **αυτοχρηματοδοτούμενο** αν η διαδικασία τιμής του ικανοποιεί την

$$dV_t^h = \sum_{i=1}^{N} h_t^{(i)} dS_t^{(i)} = h_t \cdot dS_t. \tag{16.1}$$

Ένα χαρτοφυλάκιο $\{h_t : t \geq 0\}$ το λέμε επίσης και στρατηγική συναλλαγών.

Για να είμαστε ακριβείς, υποθέτουμε ότι η $(S_t)_{t\geq 0}$ είναι N-διάστατη ανέλιξη Itô, η αυστηρή διατύπωση της (16.1) είναι η ολοκληρωτική της μορφή και οι ανελίξεις $(h_t^{(i)})_{t\geq 0}$ είναι κατάλληλες ώστε τα στοχαστικά ολοκληρώματα που υπονοούνται στην (16.1) να ορίζονται.

Το να είναι ένα χαρτοφυλάκιο αυτοχρηματοδοτούμενο σημαίνει ότι η αξία του μεταβάλλεται μόνο επειδή αλλάζει η αξία των συστατικών του. Δεν γίνεται σε αυτό εισροή χρήματος από άλλες πηγές (π.χ., δωρεές) ούτε εκροή (π.χ., χρήση κεφαλαίου για καταναλωτικές ανάγκες). Ας δούμε τώρα γιατί η (16.1) εκφράζει πράγματι αυτή τη συνθήκη. Έστω ότι συναλλαγές συμβαίνουν μόνο κατά πολλαπλάσια μιας χρονικής μονάδας Δt και έστω t ένα τέτοιο πολλαπλάσιο. Κατά τον χρόνο t το χαρτοφυλάκιο έχει σύνθεση h_t ενώ κατά τη χρονική περίοδο $(t, t + \Delta t)$ δεν γίνονται συναλλαγές. Στο τέλος της περιόδου, το χαρτοφυλάκιο έχει την ίδια σύνθεση αλλά οι μετοχές έχουν αλλάξει τιμή, ενώ δεν έγινε εισροή ή εκροή κεφαλαίων. Άρα η αξία του χαρτοφυλακίου έχει μεταβληθεί κατά $\sum_{i=1}^{N} h_t^{(i)}(S_{t+\Delta t}^{(i)} - S_t^{(i)})$. Τώρα για $0 < a < b$ πολλαπλάσια του Δt, προσθέτοντας αυτές τις μεταβολές για όλους τους χρόνους $t_i = a + i\Delta t$ με $i = 0, \ldots, (b - a - 1)/(\Delta t)$ και θεωρώντας $\Delta t \to 0$, υπό κατάλληλες προϋποθέσεις στην h, παίρνουμε ότι

$$V_b^h - V_a^h = \int_a^b h_t \cdot dS_t,$$

που είναι η ολοκληρωτική μορφή της (16.1). Υπενθυμίζουμε την Πρόταση 11.5 και τη βασική συνθήκη που ορίζει τις απλές συναρτήσεις (Ορισμός 9.3). Ότι δηλαδή η τιμή μιας τέτοιας συνάρτησης σε ένα διάστημα $(t_i, t_{i+1}]$ είναι $\mathcal{F}_{t_i}$ μετρήσιμη.

16.5 Arbitrage

Η ύπαρξη arbitrage σε μια οικονομία σημαίνει ότι υπάρχει τρόπος να αποκομίσει κανείς κέρδος ντετερμινιστικά χωρίς καθόλου ρίσκο.

Παράδειγμα 16.2. (Ξεκάθαρη δυνατότητα arbitrage) Μια εταιρεία πουλάει πετρέλαιο με κόστος 100 δολάρια το βαρέλι, ενώ μια άλλη αγοράζει με 102 δολάρια το βαρέλι. Μπορούμε να αγοράσουμε από την πρώτη και να πουλήσουμε στη δεύτερη μια μεγάλη ποσότητα και να έχουμε κέρδος χωρίς να ρισκάρουμε τίποτα. Επειδή αυτό θα έκανε ο καθένας που θα το αντιλαμβανόταν, τέτοια ευκαιρία δεν είναι δυνατόν να υπάρξει.

Ορισμός 16.3. Δυνατότητα arbitrage σε μια οικονομία λέμε ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο h που ικανοποιεί τις

$$V_0^h = 0, \tag{16.2}$$

$$\mathbf{P}(V_T^h \geq 0) = 1, \tag{16.3}$$

$$\mathbf{P}(V_T^h > 0) > 0. \tag{16.4}$$

Δηλαδή, αν υπάρχει τέτοια δυνατότητα, ένας επενδυτής έχει θετική πιθανότητα να έχει κέρδος χωρίς να κινδυνέψει καθόλου να έχει ζημιά. Μια τέτοια ευκαιρία δεν είναι δυνατόν να υπάρξει σε κανονικές συνθήκες. Στο εξής λοιπόν υποθέτουμε ότι δυνατότητα arbitrage δεν υπάρχει στην αγορά που αποτελείται από τις μετοχές $1, 2, \dots, N$.

Υπάρχουν παραδείγματα αγορών και αυτοχρηματοδοτούμενων χαρτοφυλακίων σε αυτές με αρχικό κεφάλαιο δεδομένο, ας πούμε 1, και τελική τιμή δεδομένο αριθμό οσοδήποτε μεγάλο θέλουμε. Αυτά συνιστούν arbitrage. Μια ιδέα πώς γίνεται αυτό δίνει το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 16.4 (Στρατηγική διπλασιασμού)**.** Ας υποθέσουμε ότι σε ένα καζίνο ποντάρουμε ένα ποσό A σε ένα τυχερό παιχνίδι που έχει πιθανότητα επιτυχίας $p \in (0, 1]$ και αν κερδίσουμε, παίρνουμε A, ενώ αν χάσουμε, χάνουμε όλο το ποσό A. Ένας παίκτης μπορεί να κάνει το εξής. Ξεκινάει ποντάροντας ποσό M. Αν χάσει, ποντάρει ποσό $2M$. Αν χάσει πάλι, ποντάρει ποσό $4M$. Δηλαδή, εφόσον συνεχίζει να χάνει, διπλασιάζει το ποσό που ποντάρει. Μόλις κερδίσει μια φορά, αποσύρεται από το παιχνίδι. Για παράδειγμα, αν κερδίσει για πρώτη φορά την 5η φορά που παίζει, τότε το συνολικό του κέρδος θα είναι $-M - 2M - 4M - 8M + 16M = M$. Επειδή κάποια στιγμή θα κερδίσει, τελικά θα έχει καταφέρει να κερδίσει M. Έπειτα, μπορεί να επαναλάβει τη διαδικασία.

Η στρατηγική του προηγούμενου παραδείγματος, υπό ορισμένες προϋποθέσεις, μπορεί να μεταφερθεί και στο πλαίσιο μιας αγοράς μετοχών που η τιμή τους είναι στοχαστική ανέλιξη συνεχούς χρόνου και να δώσει παράδειγμα arbitrage (δες Steele (2001) §14.5). Στα πραγματικά καζίνο αυτή η στρατηγική εμποδίζεται από περιορισμούς στο μέγεθος των πονταρισμάτων ή στο ποσό του χρέους το οποίο αφήνεται να επωμιστεί ο παίκτης ή στο πλήθος των φορών που μπορεί να παίξει.

Ετσι, και σε κάθε δεδομένη οικονομία στην οποία δεν υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage, υπάρχουν περιορισμοί στα χαρτοφυλάκια που μπορεί να δημιουργήσει κανείς. Θα ονομάζουμε **αποδεκτά** τα χαρτοφυλάκια τα οποία επιτρέπεται να δημιουργηθούν. Δεν δίνουμε μαθηματική περιγραφή τους γιατί είναι πολύ τεχνική (δες Steele (2001), §14.5, 14.6). Στην αγορά των μετοχών $1, 2, \dots, N$, που μας απασχολεί, αυτά αποτελούν διανυσματικό χώρο θεωρούμενα ως ανελίξεις στον $\mathbb{R}^N$.

16.6 Παράγωγα προϊόντα και αναπαράγοντα χαρτοφυλάκια

Παράγωγο προϊόν λέμε ένα συμβόλαιο το οποίο κάποια στιγμή αποφέρει ένα κέρδος το οποίο εξαρτάται από τη συμπεριφορά της τιμής άλλων συμβολαίων/προϊόντων που προϋπάρχουν στην αγορά και συνήθως είναι «βασικότερα» από αυτό. Για παράδειγμα, ένα συμβόλαιο που σε ένα μήνα από τώρα δίνει στον κάτοχό του ένα ποσό που ισούται με τη μέγιστη τιμή που είχε η τιμή της μετοχής της IBM αυτό τον μήνα.

Σε αυτές τις σημειώσεις θα μας απασχολήσουν παράγωγα προϊόντα ενός πολύ συγκεκριμένου τύπου.

Ορισμός 16.5. Συμβόλαιο Ευρωπαϊκού τύπου (ή και Ευρωπαϊκό συμβόλαιο) με **ημερομηνία λήξης** $T > 0$ λέμε κάθε $\mathcal{F}_T^S$ μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή X. Ο κάτοχός του παίρνει το (τυχαίο) ποσό X τη μέρα T. Ένα τέτοιο συμβόλαιο λέγεται **απλό** αν έχει τη μορφή $X = g(S_T)$ για μια δεδομένη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Παράγωγα προϊόντα χρησιμοποιούνται ήδη από τον 17ο αιώνα. Στην Ολλανδία, υπήρξε μεγάλη αγορά για δικαιώματα αγοράς και δικαιώματα πώλησης (έννοιες που θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο) στην τιμή της τουλίπας. Αργότερα επεκτάθηκαν και σε άλλες μετοχές/προϊόντα. Η τιμολόγηση ενός παράγωγου προϊόντος δεν είναι γενικά προφανής. Επιστημονικός τρόπος για την τιμολόγησή τους εμφανίστηκε για πρώτη φορά το 1973 με τη δουλειά των Black και Scholes, στοιχεία από την οποία θα δούμε στο Κεφάλαιο 18.

Στη διαδικασία της τιμολόγησης ενός παράγωγου προϊόντος, η έννοια του αναπαράγοντος χαρτοφυλακίου είναι θεμελιώδης.

Ορισμός 16.6. Το χαρτοφυλάκιο $h = \{h_t : t \in [0, T]\}$ λέγεται **αναπαράγον** για το συμβόλαιο Ευρωπαϊκού τύπου X αν είναι αυτοχρηματοδοτούμενο και ικανοποιεί την

$$V_T^h = X.$$

Το χαρτοφυλάκιο αυτό είναι ένας τρόπος να παραχθεί αξία X από αρχικό κεφάλαιο V_0^h.

Από άποψη εσόδων, το να έχει κανείς ένα αποδεκτό αναπαράγον χαρτοφυλάκιο ή το συμβόλαιο X είναι το ίδιο πράγμα. Επομένως, τη στιγμή 0, κατά την οποία εκδίδεται, πρέπει η τιμή του συμβολαίου να ισούται με την τιμή V_0^h που έχει το χαρτοφυλάκιο τότε. Για τη στήριξη αυτού του ισχυρισμού πρέπει να δικαιολογήσουμε δύο πράγματα.

(i) Αν για το συμβόλαιο X υπαρχουν δύο αποδεκτά αναπαράγοντα χαρτοφυλάκια $h, \tilde{h}$, τότε $V_0^h = V_0^{\tilde{h}}$. Πράγματι, αν για παράδειγμα $V_0^h > V_0^{\tilde{h}}$, τότε φτιάχνουμε το χαρτοφυλάκιο $\tilde{h} - h$, το οποίο είναι αποδεκτό. Δηλαδή αγοράζουμε το $\tilde{h}$ και πουλάμε το h. Αυτό ενδεχομένως να εμπλέκει επιπλέον ανοιχτή πώληση, είναι όμως κάτι που γίνεται. Αυτό μας αποφέρει θετικό κέρδος $V_0^h - V_0^{\tilde{h}} > 0$. Τον χρόνο T χρωστάμε X λόγω του $-h$, αλλά έχουμε και X λόγω του $\tilde{h}$. Άρα η τελική αξία του $\tilde{h} - h$ είναι 0, μας έχει αποφέρει όμως κέρδος στην αρχή.

(ii) Η σωστή τιμή για το συμβόλαιο είναι V_0^h. Με όμοιο τρόπο όπως πριν, επιβάλλεται και αυτό από την απουσία arbitrage.

Η ύπαρξη ενός αποδεκτού αναπαράγοντος χαρτοφυλακίου καθορίζει/επιβάλλει τη σωστή τιμή ενός συμβολαίου με πρακτικό τρόπο. Δηλαδή αν κάποιος θεωρεί άλλη τιμή ως σωστή, μπορούμε χρησιμοποιώντας αυτό το χαρτοφυλάκιο να δημιουργήσουμε arbitrage και να τον αναγκάσουμε σε ζημιά.

Αν κάποια στιμή $t \in (0, T)$, δηλαδή μετά την έκδοση και πριν τη λήξη του συμβολαίου X, ο κάτοχός του θέλει να το πουλήσει, τότε η σωστή τιμή πώλησης είναι V_t^h, όπου h είναι ένα οποιοδήποτε αποδεκτό αναπαράγον χαρτοφυλάκιο για το X. Αυτό αποδεικνύεται ανάλογα όπως πριν.

17

Ευρωπαϊκά παράγωγα

17.1 Ευρωπαϊκά δικαιώματα

Ορισμός 17.1. 1) **Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς** σε μία μετοχή είναι ένα συμβόλαιο που δίνει στον κάτοχό του το *δικαίωμα* να *αγοράσει* μία μετοχή από τον εκδότη του συμβολαίου ένα δεδομένο χρόνο T σε δεδομένη τιμή K.

2) **Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης** σε μία μετοχή είναι ένα συμβόλαιο που δίνει στον κάτοχό του το *δικαίωμα* να *πουλήσει* μία μετοχή στον εκδότη του συμβολαίου ένα δεδομένο χρόνο T σε δεδομένη τιμή K.

Ο χρόνος T λέγεται **ημερομηνία λήξης** και η τιμή K λέγεται **τιμή άσκησης** του δικαιώματος. Ο κάτοχος ενός από τα δύο πιο πάνω συμβόλαια δεν είναι υποχρωμένος να κάνει τη συναλλαγή που του επιτρέπεται. Την κάνει μόνο αν τη θεωρεί συμφέρουσα. Και η συναλλαγή είναι δυνατόν να γίνει μόνο κατά τον χρόνο T. Αν αυτός ο χρόνος περάσει, το συμβόλαιο είναι άχρηστο.

Τα δύο πιο πάνω παράγωγα είναι απλά Ευρωπαϊκά παράγωγα σύμφωνα με τον Ορισμό 16.5. Πράγματι, ας δούμε αναλυτικά το κέρδος που αποφέρουν τον χρόνο της άσκησης. Για το δικαίωμα αγοράς, αν τον χρόνο T η τιμή S_T της μετοχής στην αγορά είναι γνήσια μεγαλύτερη από K, τότε ο κάτοχος του δικαιώματος το ασκεί και αγοράζει μία μετοχή με τιμή K. Αμέσως την πουλάει στην αγορά σε τιμή S_T και έχει κέρδος $S_T - K$. Αν όμως ισχύει $S_T \leq K$, προφανώς δεν ασκεί το δικαίωμα. Γιατί να αγοράσει μια μετοχή σε τιμή K αν μπορεί να την βρεί στην αγορά πιό φθηνά; Άρα το κέρδος είναι $(S_T - K)^+$ σε κάθε περίπτωση και επομένως το παράγωγο έχει τη μορφή $g_c(S_T)$ με $g_c(x) = (x-K)^+$.

Για το δικαίωμα πώλησης, ο κάτοχός του ασκεί το δικαίωμα που έχει μόνο αν $S_T < K$, οπότε αγοράζει από την αγορά μία μετοχή με τιμή S_T και την πουλάει στον εκδότη του δικαιώματος στη συμφωνημένη τιμή K. Έτσι έχει κέρδος $K - S_T$. Το κέρδος είναι $(K - S_T)^+$ σε κάθε περίπτωση και επομένως το παράγωγο έχει τη μορφή $g_p(S_T)$ με $g_p(x) = (K - x)^+$.

Ποιος ενδιαφέρεται να αγοράσει ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς; Ένας επενδυτής που πιστεύει ότι η τιμή της μετοχής θα ανέβει πολύ. Γιατί τότε αγοράζοντας φθηνά και πουλώντας στην τιμή αγοράς θα κερδίσει τη διαφορά. Αντίστοιχα, Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης αγοράζει ένας που πιστεύει ότι η τιμή της μετοχής θα πέσει.

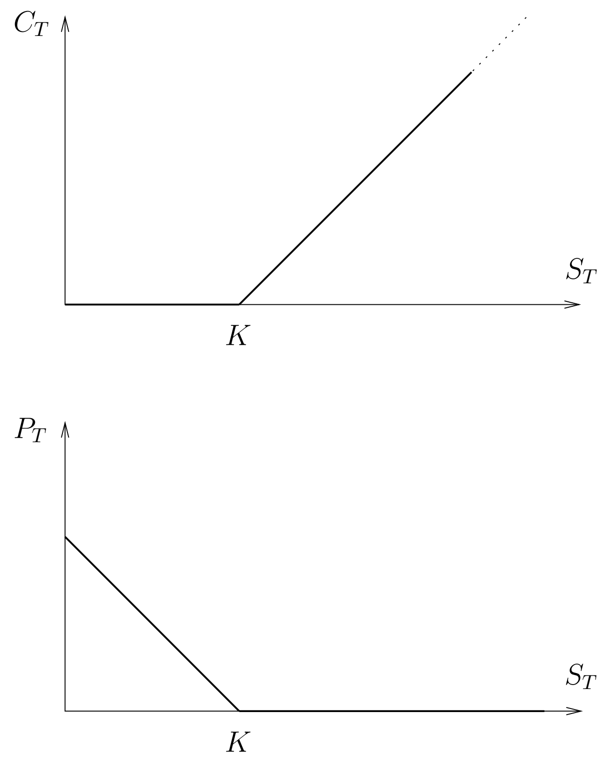
Αν όμως ένας επενδυτής πιστεύει ότι η τιμή της μετοχής θα ανέβει, γιατί δεν αγοράζει την ίδια τη μετοχή; Στο επόμενο παράδειγμα φαίνεται ότι η αγορά ενός Ευρωπαϊκού δικαίωμα αγοράς είναι κίνηση που έχει περισσότερο ρίσκο αλλά και δυνατότητα για πολύ μεγαλύτερα κέρδη.

Παράδειγμα 17.2. Ας θεωρήσουμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς στη μετοχή της Xerox με $T = 20$ Ιουλίου 2012 και $K = 40$€. Υποθέτουμε ότι σήμερα είναι 10 Ιουνίου 2012 και η τιμή της μετοχής είναι 36€. Αγοράζει αυτό το συμβόλαιο κάποιος που πιστεύει ότι η μετοχή στις 20 Ιουλίου θα έχει τιμή πάνω από 40 Ευρώ. Γιατί όμως δεν αγοράζει τη μετοχή την ίδια σήμερα;

Έστω ότι γνωρίζουμε ότι κατά τον χρόνο T μπορεί να συμβεί ένα από τα εξής σενάρια:

A : Η τιμή της μετοχής είναι 30€,

B : Η τιμή της μετοχής είναι 42€,



Σχήμα 17.1: Η συνάρτηση πληρωμής κατά τον χρόνο άσκησης T για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (πάνω) και ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης (κάτω) με κοινή τιμή άσκησης K.

και ότι το πρώτο σενάριο έχει πιθανότητα 1/3, ενώ το δεύτερο 2/3. Ένας κάτοχος του συμβολαίου θα έχει κέρδος 0€ στο σενάριο Α (δεν θα το χρησιμοποιήσει) και κέρδος 2€ στο σενάριο Β. Μπορεί να αποδειχθεί ότι η σωστή τιμή του συμβολαίου είναι 1€. Έστω λοιπόν ότι ένας επενδυτής έχει 360€. Ας μελετήσουμε τις εξής δύο επιλογές:

1 : Ο επενδυτής αγοράζει 10 μετοχές της Xerox.

2 : Ο επενδυτής αγοράζει 360 Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς.

Κάθε επιλογή κοστίζει 360€. Αν συμβεί το σενάριο Α, τότε η επιλογή 1 δίνει ζημιά 60€ , ενώ η επιλογή 2 ζημιά 360€. Αν συμβεί το σενάριο Β, η επιλογή 1 δίνει κέρδος 60€ , ενώ η επιλογή 2 δίνει κέρδος $2 \times 360 - 360 = 360$€. Δηλαδή η επιλογή 1 προσφέρει ή ζημιά 16.6% ή κέρδος 16.6% επί του αρχικού κεφαλαίου, ενώ η επιλογή 2 προσφέρει ή ζημιά 100% ή κέρδος 100% επί του αρχικού κεφαλαίου. Η επιλογή Β είναι πιο επιθετική. Σε ευνοϊκή περίπτωση τριπλασιάζει κανείς το κεφάλαιό του. Η επιλογή Α είναι πιο συντηρητική.

Ανάλογες παρατηρήσεις με τις παραπάνω μπορούμε να κάνουμε και για τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα πώλησης.

Συμβόλαια όπως αυτά του Ορισμού 17.1 μπορούν να αφορούν ένα μέγεθος διαφορετικό από την τιμή μιας μετοχής, π.χ., την τιμή του χρυσού ή του σιταριού.

Η χρήση των παραγώγων δεν είναι πάντοτε κερδοσκοπική. Μια άλλη τους χρήση είναι στην αντιστάθμιση κινδύνου. Για παράδειγμα, μια εταιρία ενδέχεται να θέλει να εξαλείψει την αβεβαιότητα στην τιμή μιας πρώτης ύλης που χρειάζεται. Έστω ότι αυτή η πρώτη ύλη είναι το πετρέλαιο. Αγοράζει λοιπόν έναν αριθμό Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς με τιμή, π.χ., 1.5€ το λίτρο, και είναι σίγουρη ότι τη δεδομένη ημερομηνία στο μέλλον δεν χρειάζεται να ανησυχεί για την τιμή του πετρελαίου. Θα της κοστίσει το πολύ 1.5€ το λίτρο.

17.2 Σχέση μεταξύ τιμών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης

Θεωρούμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς και ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης πάνω σε μια μετοχή που έχουν και τα δύο την ίδια ημερομηνία λήξης T και την ίδια τιμή άσκησης K. Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t \leq T$ οι τιμές τους είναι C_t, P_t ενώ η τιμή της μετοχής είναι S_t. Ένα επιχείρημα βασισμένο στην έλλειψη arbitrage δίνει μια απλή σχέση που ικανοποιούν οι τιμές C_t, P_t.

Πρόταση 17.3. *Αν το επιτόκιο της τράπεζας είναι σταθερό, ίσο με r, και δεν υπάρχει δυνατότητα arbitrage, τότε για κάθε $t \leq T$ ισχύει*

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}. \tag{17.1}$$

Απόδειξη. Η σχέση ισχύει για $t = T$, γιατί το αριστερό μέλος της ισότητας ισούται με $(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = (S_T - K)^+ - (S_T - K)^- = S_T - K$, που συμπίπτει με το το δεξί μέλος.

Για $t < T$, τον χρόνο t κάνουμε το εξής. Αγοράζουμε ένα δικαίωμα πώλησης και μία μετοχή και πουλάμε ένα δικαίωμα αγοράς. Για την αγορά αυτού του χαρτοφυλακίου ξοδεύουμε

$$P_t + S_t - C_t.$$

Αυτό το χαρτοφυλάκιο αποφέρει τη χρονική στιγμή T ποσό K. Γιατί τότε η αξία του θα είναι

$$(K - S_T)^+ - (S_T - K)^+ + S_T = (K - S_T)^+ - (K - S_T)^- + S_T = (K - S_T) + S_T = K.$$

Να το δούμε και πρακτικά πως θα δουλέψει. Τον χρόνο T, αν ισχύει $S_T < K$, ασκούμε το δικαίωμα πώλησης. Δηλαδή παίρνουμε τη μετοχή που έχουμε και την πουλάμε στον εκδότη του δικαιώματος πώλησης στην τιμή K. Αν ισχύει $S_T \geq K$, τότε θα έρθει το άτομο στο οποίο έχουμε πουλήσει το δικαίωμα αγοράς για να αγοράσει μία μετοχή στην τιμή K. Του δίνουμε λοιπόν την μία μετοχή που έχουμε και παίρνουμε K.

Άρα το αρχικό χαρτοφυλάκιο δίνει ντετερμινιστικά το ποσό K τον χρόνο T (είναι αναπαράγον για το ποσό K τη χρονική στιγμή T). Το ίδιο κάνει και η τράπεζα αν καταθέσουμε τον χρόνο t το ποσό $Ke^{-r(T-t)}$. Πρέπει λοιπόν οι δύο επιλογές

$$A_1 : \text{δικαίωμα πώλησης} - \text{δικαίωμα αγοράς} + \text{μετοχή},$$
$$A_2 : \text{ποσό } Ke^{-r(T-t)} \text{ στην τράπεζα τον χρόνο } t,$$

να έχουν την ίδια αξία τη χρονική στιγμή t, γιατί διαφορετικά έχουμε arbitrage. Και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Αλλά ας δούμε αναλυτικά πώς εμφανίζεται arbitrage αν δεν ισχύει η ισότητα. Για παράδειγμα, αν

$$P_t + S_t - C_t > Ke^{-r(T-t)},$$

τότε πουλάμε την επιλογή A_1 και αγοράζουμε την επιλογή A_2. Πιο συγκεκριμένα, πουλάμε ένα δικαίωμα πώλησης, αγοράζουμε ένα δικαίωμα αγοράς και κάνουμε ανοιχτή πώληση σε μία μετοχή. Τέλος, βάζουμε στην τράπεζα ποσό $Ke^{-r(T-t)}$. Ό,τι και να γίνει τον χρόνο T, οι υποχρεώσεις μας θα έχουν κόστος K, αλλά το ποσό που είχαμε βάλει στην τράπεζα έχει γίνει πλέον K και τις καλύπτει ακριβώς. Όμως εμείς στην αρχή κερδίσαμε το ποσό $P_t + S_t - C_t - Ke^{-r(T-t)} > 0$. Αυτό είναι arbitrage. Όμοια δείχνουμε ότι και η $P_t + S_t - C_t < Ke^{-r(T-t)}$ οδηγεί σε arbitrage, και η πρόταση αποδείχθηκε. ∎

17.3 Άλλα είδη δικαιωμάτων

Έστω $(S_t)_{t\geq 0}$ η ανέλιξη της τιμής μιας συγκεκριμένης μετοχής. Ορίζονται με βάση αυτή την τιμή κάποια άλλα είδη δικαιωμάτων. Για την περιγραφή τους θα χρειαστούμε τις εξής ανελίξεις:

$$\underline{S}_t := \inf\{S_s : s \in [0, t]\}, \tag{17.2}$$
$$\overline{S}_t := \sup\{S_s : s \in [0, t]\} \tag{17.3}$$

για κάθε $t \geq 0$. Αυτές λέγονται το τρέχον ελάχιστο και τρέχον μέγιστο αντίστοιχα της S.

Ασιατικά δικαιώματα. Ένα τέτοιο δικαίωμα δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα τη στιγμή της λήξης T να πάρει ένα ποσό που είναι συνάρτηση του μέσου όρου

$$\frac{1}{T}\int_0^T S_t\,dt$$

της τιμής της μετοχής. Έτσι, ένα Ασιατικό δικαίωμα αγοράς με τιμή άσκησης K και χρόνο λήξης T δίνει το ποσό

$$\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t\,dt - K\right)^+.$$

Ένα Ασιατικό δικαίωμα πώλησης με τιμή άσκησης K και χρόνο λήξης T δίνει στον κάτοχό του τον χρόνο T το ποσό $(K - T^{-1}\int_0^T S_t\,dt)^+$.

Δικαιώματα με φράγματα. Στον ορισμό αυτών εμπλέκεται μια παράμετρος $c > 0$ (το φραγμα) η οποία συμφωνείται κατά την αγορά τους. Δύο είναι τα είδη αυτών των δικαιωμάτων, τα εντός και τα εκτός. Ένα δικαίωμα εντός λήγει με αξία μηδέν εκτός αν η ανέλιξη S κατά το χρονικό διάστημα $[0, T]$ επισκεφτεί και τα δύο διαστήματα $[0, c], [c, \infty)$ (δηλαδή διασχίσει το φράγμα c). Ενώ ένα δικαίωμα εκτός λήγει με αξία μηδέν αν η ανέλιξη S κατά το χρονικό διάστημα $[0, T]$ επισκεφτεί και τα δύο διαστήματα $[0, c], [c, \infty)$.

Τώρα, ανάλογα με την αρχική τιμή S_0 έχουμε τα εξής είδη.

- Άνω και εντός. Αν $S_0 < c$ και το δικαίωμα ενεργοποιείται μόνο αν $\overline{S}_T \geq c$. Δηλαδή πρέπει κάποια στιγμή κατά το διάστημα $[0, T]$ η τιμή της μετοχής να ξεπεράσει το φράγμα c, διαφορετικά το δικαίωμα δεν δίνει τίποτα κατά τον χρόνο άσκησης.
- Κάτω και εντός. Αν $S_0 > c$ και το δικαίωμα ενεργοποιείται μόνο αν $\underline{S}_T \leq c$.
- Άνω και εκτός. Αν $S_0 < c$ και το δικαίωμα απενεργοποιείται αν $\overline{S}_T \geq c$.
- Κάτω και εκτός. Αν $S_0 > c$ και το δικαίωμα απενεργοποιείται αν $\underline{S}_T \leq c$.

Για παράδειγμα, ένα κάτω και εκτός δικαίωμα αγοράς με τιμή άσκησης K, χρόνο άσκησης T και φράγμα c δίνει τον χρόνο T το ποσό $(S_T - K)^+$ αν καθ' όλο το διάστημα $[0, T]$ η μετοχή είχε πάντοτε αξία μεγαλύτερη του c. Διαφορετικά, το δικαίωμα δίνει ποσό 0.

Lookback δικαιώματα. Ένα lookback δικαίωμα αγοράς δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα να αγοράσει μία μετοχή τη χρονική στιγμή T στην τιμή $\underline{S}_T$. Αυτή η τιμή είναι σίγουρα χαμηλότερη από την τρέχουσα, επομένως το δικαίωμα ασκείται πάντοτε και δίνει κέρδος $S_T - \underline{S}_T$ αφού ο κάτοχός του μετά την αγορά πουλάει τη μετοχή αμέσως στην τιμή S_T.

Ένα lookback δικαίωμα πώλησης δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα να πουλήσει μία μετοχή τη χρονική στιγμή T στην τιμή $\overline{S}_T$. Επομένως έχει συνάρτηση πληρωμής $\overline{S}_T - S_T$.

Αμερικανικά δικαιώματα. Αυτά είναι δικαιώματα που έχουν δεδομένο χρόνο ζωής $[0, T]$ αλλά μπορούν να ασκηθούν οποιαδήποτε στιγμή του διαστήματος $[0, T]$ θελήσει ο κάτοχός τους.

Για παράδειγμα, ένα Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης με λήξη T και τιμή άσκησης K δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα να πουλήσει, οποιαδήποτε στιγμή στο $[0, T]$, στον εκδότη του δικαιώματος μία μετοχή στην τιμή K. Ένα τέτοιο δικαίωμα δίνει περισσότερες επιλογές από το αντίστοιχο Ευρωπαϊκό. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $t < T$ συμβαίνει $S_t < K$ αλλά τη στιγμή λήξης ισχύει $S_T > K$. Σε ένα τέτοιο σενάριο, ο κάτοχος ενός Αμερικανικού δικαιώματος αγοράς, αν ασκήσει το δικαίωμα του τον χρόνο t, θα έχει κέρδος, ενώ ο κάτοχος ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης δεν θα κερδίσει τίποτα.

Παρατηρήστε ότι όλα τα δικαιώματα που περιγράψαμε πιο πάνω ήταν Ευρωπαϊκά.

Ασκήσεις

17.1 Έστω δύο Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς σε μία μετοχή με κοινό χρόνο λήξης T και τιμή άσκησης K_1 και K_2 αντίστοιχα. Ονομάζουμε $C_1(t), C_2(t)$ την αξία τους τον χρόνο $t \in [0, T]$. Υποθέτουμε ότι $K_1 < K_2$. Να δειχθεί ότι αν στην αγορά δεν υπάρχει δυνατότητα arbitrage, τότε ισχύει

$$0 \leq C_1(t) - C_2(t) \leq (K_2 - K_1)e^{-r(T-t)}$$

για κάθε $t \in [0, T]$. r είναι το επιτόκιο της τράπεζας.

18

Η εξίσωση Black-Scholes

18.1 Μια απλή αγορά

Θεωρούμε ότι έχουμε μια αγορά που έχει μόνο δύο προϊόντα. Το ένα είναι η δυνατότητα κατάθεσης σε μια τράπεζα (ισοδύναμα, αγορά ομολόγων της τράπεζας) και το άλλο είναι μετοχές μιας εταιρίας. Συμβολίζουμε την τιμή της μονάδας για καθένα από αυτά τη χρονική στιγμή t με β_t και S_t αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι οι τιμές αυτές εξελίσσονται ως εξής

$$d\beta_t = r\beta_t dt, \tag{18.1}$$

$$dS_t = S_t\mu dt + S_t\sigma dB_t, \tag{18.2}$$

όπου $r, \mu, \sigma > 0$ δεδομένες σταθερές. Για την τιμή του ομολόγου μπορούμε να γράψουμε αμέσως $\beta_t = \beta_0 e^{rt}$ για κάθε $t \geq 0$. Δηλαδή το ποσό β_0 ανατοκίζεται με συνεχή και σταθερό ρυθμό ανατοκισμού r. Κατανοούμε τον τρόπο εξέλιξης της τιμής της μετοχής αν γράψουμε

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t.$$

Η σχετική αλλαγή της τιμής S_t σε ένα μικρό χρονικό διάστημα $[t, t + dt]$ προέρχεται από μια ντετερμινιστική αύξηση κατά μdt στην οποία προστίθεται μια τυχαία μεταβολή την οποία δεν ξέρουμε ακόμα τη χρονική στιμή t. Ξέρουμε απλώς ότι έχει κατανομή $N(0, \sigma^2 dt)$.

Βέβαια, έχουμε λύσει πλήρως τη ΣΔΕ (18.2) στο Παράδειγμα 14.1 και η λύση της είναι η γεωμετρική κίνηση Brown. Σημειώνουμε ότι από τη μορφή της λύσης προκύπτει ότι η S_t είναι θετική για όλους τους χρόνους t (εφόσον $S_0 > 0$), πράγμα που δεν είναι προφανές από τη ΣΔΕ γιατί η εξίσωση εμπλέκει τον παράγοντα dB_t, ο οποίος παίρνει και αρνητικές τιμές. Και αυτό είναι πολύ λογικό. Μια μετοχή το πολύ να μηδενιστεί, ποτέ όμως δεν θα πάρει αρνητική τιμή.

18.2 Παραγωγή της εξίσωσης

Έστω ότι έχουμε ένα απλό συμβόλαιο Ευρωπαϊκού τύπου. Δηλαδή μια δεδομένη μελοντική χρονική στιγμή T δίνει το ποσό $g(S_T)$ στον κάτοχό του. Κάνοντας κάποιες παραδοχές, θα προσδιορίσουμε τη σωστή τιμή του συμβολαίου οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t \in [0, T]$.

Θεώρημα 18.1. *Έστω $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία υπάρχουν θετικές σταθερές c_1, c_2 και $\rho < 2$ ώστε*

$$|g(x)| \leq c_1 e^{c_2 |\log x|^\rho} \tag{18.3}$$

για κάθε $x > 0$. Τότε η σωστή τιμή του Ευρωπαικού συμβολαίου $g(S_T)$ με ημερομηνία λήξης T κατά οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t \in [0, T]$ ισούται με $V(S_t, t)$, όπου $V : [0, \infty) \times [0, T] \to \mathbb{R}$ είναι η μοναδική λύση του προβλήματος

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x, t) + rx\frac{\partial V}{\partial x}(x, t) - rV(x, t) = 0 \qquad \text{στο } (0, \infty) \times (0, T), \tag{18.4}$$

$$V(x, T) = g(x) \quad \text{στο } [0, \infty) \tag{18.5}$$

που επιπλέον ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\text{υπάρχουν } C_1, C_2 > 0 \text{ ώστε } |V(x,t)| \le C_1 e^{C_2(\log x)^2} \text{ για κάθε } (x,t) \in [0,\infty) \times [0,T]. \tag{18.6}$$

Δεδομένου ότι δεν έχουμε δώσει ακριβή περιγραφή των αποδεκτών χαρτοφυλακίων, θα μπορέσουμε να δώσουμε μόνο ένα σχέδιο της απόδειξης. Πριν αρχίσουμε, θα πειραματιστούμε. Έστω X_t η σωστή τιμή του συμβολαίου τον χρόνο t. Βέβαια η τιμή θα εξαρτάται από τις πληροφορίες που είναι γνωστές ως τότε, δηλαδή θα είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη συνάρτηση. Θα υποθέσουμε όμως επιπλέον ότι:

- $X_t = V(S_t, t)$ για κάποια συνάρτηση $V : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R}$.
- $V \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times [0,T])$.

Δηλαδή η τιμή του συμβολαίου τη στιγμή t εξαρτάται μόνο από την τιμή της μετοχής τη χρονική στιμή t (η προηγούμενη ιστορία της τιμής είναι αδιάφορη) και βέβαια από τον χρόνο t. Και αυτή η εξάρτηση είναι αρκετά λεία. Στόχος μας είναι να βρούμε τη συνάρτηση V.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα αποδεκτό χαρτοφυλάκιο που είναι αναπαράγον για το συμβόλαιο και έστω ότι η σύνθεση του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιμή t είναι (a_t, b_t), δηλαδή περιέχει a_t μετοχές και b_t ομόλογα. Από τα σχόλια που ακολουθούν τον Ορισμό 16.6 έπεται ότι για κάθε χρονική στιγμή $t \in [0,T]$ η τιμή του χαρτοφυλακίου ισούται με την τιμή του συμβολαίου εκείνη τη στιγμή. Δηλαδή

$$a_t S_t + b_t \beta_t = V(S_t, t). \tag{18.7}$$

Επειδή το χαρτοφυλάκιο είναι αυτοχρηματοδοτούμενο, θα πρέπει

$$dV(S_t, t) = a_t dS_t + b_t d\beta_t. \tag{18.8}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Itô και την έκφραση (18.2) για το dS_t, γράφουμε το αριστερό μέλος της προηγούμενης σχέσης ως

$$\frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial x} dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} (dS_t)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial x} dB_t,$$

και το δεξί ως

$$(a_t \mu S_t + r b_t \beta_t) dt + a_t \sigma S_t \, dB_t.$$

Θα ισχύει η (18.8) αν έχουμε

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{\partial V}{\partial x}, \\ a_t \mu S_t + r b_t \beta_t &= \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε τώρα στην τελευταία σχέση την τιμή του a_t και την τιμή του b_t που δίνει η (18.7), δηλαδή

$$b_t = (V(S_t, t) - a_t S_t)/\beta_t,$$

και παίρνουμε

$$\frac{\partial V}{\partial x}\mu S_t + r\left(V - S_t \frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

δηλαδή

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + r S_t \frac{\partial V}{\partial x} - rV = 0.$$

Στις τελευταίες σχέσεις παραλείψαμε το όρισμα της V, το οποίο είναι το (S_t, t). Επομένως, αν η V ικανοποιεί τις (18.4), (18.5), θα έχουμε ότι το $(a_t, b_t)_{t\in[0,T]}$ είναι αυτοχρηματοδοτούμενο και αναπαράγον [Η επιλογή του a_t και η (18.4) εξασφαλίζουν ότι είναι αυτοχρηματοδοτούμενο, ενώ η επιλογή του b_t και η (18.5) εξασφαλίζουν ότι είναι αναπαράγον]. Αν το χαρτοφυλάκιο είναι και επιτρεπτό, έπεται ότι η σωστή τιμή του συμβολαίου τη χρονική στιγμή t θα είναι $X_t = V(S_t, t)$.

Σχέδιο απόδειξης του Θεωρήματος 18.1. Θα δείξουμε στην Παράγραφο 18.4 ότι το πρόβλημα (18.4), (18.5) έχει μοναδική λύση f που να ικανοποιεί την (18.6). Για τώρα, υποθέτουμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας τη μοναδική αυτή λύση. Θεωρούμε το χαρτοφυλάκιο $(a_t, b_t)_{t\in[0,T]}$ που ορίζεται ως εξής για κάθε $t \in [0, T]$:

$$a_t := \frac{\partial f}{\partial x}(S_t, t), \tag{18.9}$$

$$b_t := \frac{f(S_t, t) - a_t S_t}{\beta_t}. \tag{18.10}$$

Η αξία του κάθε στιγμή t είναι $f(S_t, t)$.

Ισχυρισμός 1: Το χαρτοφυλάκιο είναι αναπαράγον.

Πράγματι, αφού $f(S_T, T) = g(S_T)$ λόγω της (18.5).

Ισχυρισμός 2: Το χαρτοφυλάκιο είναι αυτοχρηματοδοτούμενο.

Αυτό πρέπει να είναι σαφές από τον τρόπο που καταλήξαμε στην (18.4). Θα το ξανακάνουμε όμως. Για $t \in [0, T)$, υπολογίζουμε από τον τύπο του Itô,

$$\begin{aligned} df(S_t, t) &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) dt + \sigma S_t \frac{\partial f}{\partial x}\, dB_t \\ &= \left(rf - rS_t \frac{\partial f}{\partial x} + \mu S_t \frac{\partial f}{\partial x}\right) dt + \sigma S_t \frac{\partial f}{\partial x}\, dB_t \\ &= r(f - a_t S_t)\, dt + a_t S_t(\sigma\, dB_t + \mu\, dt) \\ &= r b_t \beta_t\, dt + a_t dS_t = a_t dS_t + b_t d\beta_t \end{aligned}$$

Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι η f ικανοποιεί τη (18.4), στην τρίτη ισότητα τον τύπο (18.9) για το a_t, και στην τέταρτη ισότητα τους τύπους (18.10), (18.1) για τα b_t, dS_t. Άρα

$$f(S_t, t) - f(S_0, 0) = \int_0^t a_s dS_s + \int_0^t b_s d\beta_s$$

για κάθε $t \in [0, T)$. Επειδή και τα δύο μέλη είναι συνεχείς συναρτήσεις του t έπεται ότι η ισότητα ισχύει και για $t = T$. Και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Αποδεικνύεται επίσης ότι το χαρτοφυλάκιο είναι αποδεκτό, οπότε, με βάση όσα είπαμε στην Παράγραφο 16.6, η σωστή τιμή του συμβολαίου κάθε χρονική στιμή $t \in [0, T]$ ισούται με $f(S_t, t)$. ■

18.3 Η εξίσωση θερμότητας

Εξίσωση θερμότητας λέμε τη μερική διαφορική εξίσωση

$$u_t = \Delta u,$$

με $u : U \times I \to \mathbb{R}$, όπου $U \subset \mathbb{R}^d$ είναι ένα ανοικτό σύνολο και $I \subset [0, \infty)$ ένα διάστημα. Ο τελεστής Δ είναι η Λαπλασιανή του $\mathbb{R}^d$, δηλαδή

$$\Delta f(x) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ και f συνάρτηση με πραγματικές τιμές που ορίζεται σε περιοχή του x και έχει δεύτερες παραγώγους στο x.

Σε αυτές τις σημειώσεις, μας ενδιαφέρει η περίπτωση $d = 1$ και $U \times I = \mathbb{R} \times [0, T]$ για κάποιο $T > 0$. Τότε η u είναι συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών (x, t) και η εξίσωση γράφεται

$$u_t = u_{xx}.$$

Βέβαια, πάντοτε την εξίσωση συνοδεύουν και κατάλληλες αρχικές/συνοριακές συνθήκες.

Για αυτή την εξίσωση θα διατυπώσουμε χωρίς απόδειξη δύο βασικά θεωρήματα. Το ένα δίνει μια έκφραση για μια λύση της και το άλλο εξασφαλίζει τη μοναδικότητα αυτής της λύσης μέσα σε μια αρκετά ευρεία κλάση συναρτήσεων. Τις αποδείξεις μπορεί να δει κανείς στις Παραγράφους (a), (b) του Κεφαλαίου 7 του John (1982) όπως και σε άλλα βιβλία μερικών διαφορικών εξισώσεων.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $R : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με

$$R(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$$

για $x \in \mathbb{R}, t > 0$. Για σταθερό t, η συνάρτηση $x \mapsto R(x, t)$ είναι η πυκνότητα της κατανομής $N(0, 2t)$.

Θεώρημα 18.2. *Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία υπάρχουν σταθερές $C_1, C_2 > 0$ και $\rho < 2$ ώστε*

$$|g(x)| \le C_1 e^{C_2|x|^\rho} \tag{18.11}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε η συνάρτηση $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με

$$u(x, t) := \int_{\mathbb{R}} g(y)R(x - y, t)\, dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} g(y)\, e^{-(x-y)^2/4t}\, dy \tag{18.12}$$

$x \in \mathbb{R}, t > 0$ ικανοποιεί τα εξής:

(i) $u \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, \infty))$.

(ii) $u_t = u_{xx}$ *στο* $\mathbb{R} \times (0, \infty)$.

(iii) $\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\ x\in\mathbb{R}, t>0}} u(x, t) = g(x_0)$ *για κάθε* $x_0 \in \mathbb{R}$.

Το (iii) λέει ότι η u επεκτείνεται μοναδικά στο σύνορο του $\mathbb{R}\times(0, \infty)$ και οι τιμές της εκεί συμπίπτουν με την g. Συμβολίζουμε και την επέκταση με u. Η u πλέον λύνει το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$u_t - u_{xx} = 0 \qquad \text{στο } \mathbb{R} \times (0, \infty), \tag{18.13}$$

$$u(x, 0) = g(x) \qquad \text{στο } \mathbb{R}. \tag{18.14}$$

Σημειώνουμε ότι η (18.12) γράφεται επίσης ως $u(x, t) = \mathbf{E}_x\, g(B_{2t})$ (η μέση τιμή αφορά την κίνηση Brown B η οποία έχει σημείο εκκίνησης $B_0 = x$) αφού η B_{2t} έχει πυκνότητα $y \mapsto R(y - x)$. Με μικρές διαφορές στις υποθέσεις από τις οποίες προκύπτει, αυτός είναι ο ίδιος με τον τύπο (12.17) στο Παράδειγμα 12.14.

Η εξίσωση θερμότητας σε ένα χωρίο της μορφής $\mathbb{R} \times [0, T]$ με $T > 0$ ή της μορφής $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, αν έχει τουλάχιστον μία λύση, τότε έχει άπειρες λύσεις όσο καλή και να είναι η αρχική συνθήκη g (δες Κεφάλαιο 7 του John (1982), σχέσεις 1.19, 1.20). Από όλες όμως τις λύσεις το πολύ μία έχει ελεγχόμενο μέγεθος για μεγάλα $|x|$.

Θεώρημα 18.3. *Έστω $u \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, T))$ και συνεχής στο $\mathbb{R} \times [0, T]$ για την οποία υπάρχουν σταθερές $C_1, C_2 > 0$ ώστε*

$$|u(x, t)| \le C_1 e^{C_2 x^2} \tag{18.15}$$

για κάθε $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T]$. *Αν*

$$u_t - u_{xx} = 0 \qquad \textit{στο } \mathbb{R}\times(0,T), \tag{18.16}$$
$$u(x,0) = 0 \qquad \textit{στο } \mathbb{R}, \tag{18.17}$$

τότε $u \equiv 0$.

Αν δύο συναρτήσεις $u^{(1)}, u^{(2)} : \mathbb{R}\times[0,T] \to \mathbb{R}$ ικανοποιούν τις (18.16), (18.14), (18.15), τότε για τη διαφορά τους εφαρμόζεται το προηγούμενο θεώρημα και δίνει ότι $u^{(1)} \equiv u^{(2)}$. Δηλαδή το πρόβλημα των (18.16), (18.14) έχει το πολύ μιά λύση που ικανοποιεί την (18.15). Από την άλλη, σημειώνουμε ότι για g που ικανοποεί την (18.11), η συνάρτηση u που δίνεται από τη (18.12) ικανοποιεί τη (18.15) για κάθε $T > 0$.

18.4 Λύση της εξίσωσης Black-Scholes

Θεώρημα 18.4. *Έστω g όπως στο Θεώρημα 18.1. Υπάρχει μοναδική λύση του προβλήματος (18.4), (18.5) που ικανοποιεί την (18.6), και δίνεται από τη σχέση*

$$V(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} g(xe^{(T-t)(r-\frac{\sigma^2}{2})+z\sigma\sqrt{T-t}})\, e^{-z^2/2}\, dz \tag{18.18}$$

για κάθε $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,T]$.

Απόδειξη. Με κατάλληλους μετασχηματισμούς, θα αναγάγουμε την εξίσωση Black-Scholes στην εξίσωση θερμότητας. Εισάγουμε νέες μεταβλητές, τις τ, y με

$$\tau := (T-t)\frac{\sigma^2}{2}, \qquad y := \log x, \tag{18.19}$$

ως προς τις οποίες οι παλιές δίνονται από τις εκφράσεις

$$t = T - \frac{\tau}{\sigma^2/2}, \qquad x = e^y, \tag{18.20}$$

και τη συνάρτηση

$$v(y,\tau) = V(x,t) = V\left(e^y,\, T - \frac{\tau}{\sigma^2/2}\right)$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}$ και $\tau \in [0, T\sigma^2/2]$. Ένας υπολογισμός δίνει

$$\begin{aligned} v_\tau &= v_{yy} + (\lambda-1)v_y - \lambda v \quad && \text{στο } \mathbb{R}\times(0,T\sigma^2/2),\\ v(y,0) &= g(e^y) && \text{στο } \mathbb{R}, \end{aligned}$$

με $\lambda := r/(\sigma^2/2)$. Έπειτα εισάγουμε τη συνάρτηση $u : \mathbb{R}\times[0,T\sigma^2/2] \to \mathbb{R}$ με

$$v(y,\tau) = e^{-\frac{1}{2}(\lambda-1)y - \frac{1}{4}(\lambda+1)^2\tau} u(y,\tau).$$

Τότε η u ικανοποιεί

$$\begin{aligned} u_\tau &= u_{yy} \quad && \text{στο } \mathbb{R}\times(0,T\sigma^2/2),\\ u(y,0) &= e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)y} g(e^y) && \text{στο } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Η συνθήκη (18.3) σε συνδυασμό με τα Θεωρήματα 18.2, 18.3 δίνει ότι η μοναδική λύση του τελευταίου προβλήματος που ικανοποιεί την (18.6) δίνεται από τη σχέση

$$u(y,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\mathbb{R}} u(w,0) e^{-\frac{(y-w)^2}{4\tau}}\, dw.$$

Άρα,

$$V(x,t) = e^{-\frac{1}{2}(\lambda-1)y-\frac{1}{4}(\lambda+1)^2\tau}\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\int_{\mathbb{R}} u(w,0)e^{-\frac{(y-w)^2}{4\tau}}\,dw$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}e^{-\frac{1}{2}(\lambda-1)y-\frac{1}{4}(\lambda+1)^2\tau}\int_{\mathbb{R}} g(e^w)e^{\frac{1}{2}(\lambda-1)w}e^{-\frac{(y-w)^2}{4\tau}}\,dw. \tag{18.21}$$

Ο εκθέτης μέσα στο τελευταίο ολοκλήρωμα είναι

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\lambda-1)w - \frac{(y-w)^2}{4\tau} &= -\frac{1}{4\tau}\{w^2-2wy-2\tau(\lambda-1)w+y^2\}\\ &= -\frac{1}{4\tau}\{w-(y+\tau(\lambda-1))\}^2 - \frac{1}{4\tau}y^2 + \frac{1}{4\tau}\{y+\tau(\lambda-1)\}^2\\ &= -\frac{1}{4\tau}\{w-(y+\tau(\lambda-1))\}^2 + \frac{1}{4\tau}\{\tau^2(\lambda-1)^2+2y\tau(\lambda-1)\}.\end{aligned}$$

Προσθέτοντας σε αυτή την ποσότητα τον εκθέτη έξω από το ολοκλήρωμα, παίρνουμε

$$-\frac{1}{4\tau}\{w-(y+\tau(\lambda-1))\}^2 + \frac{1}{4}\tau(\lambda-1)^2 - \frac{1}{4}(\lambda+1)^2\tau = -\frac{1}{4\tau}\{w-(y+\tau(\lambda-1))\}^2 - \lambda\tau.$$

Παρατηρούμε ότι $\lambda\tau = r(T-t)$. Κάνουμε στο ολοκλήρωμα την αλλαγή μεταβλητής

$$z := \frac{w-(y+\tau(\lambda-1))}{\sqrt{2\tau}}.$$

Τότε

$$e^w = e^y e^{(\lambda-1)\tau+z\sqrt{2\tau}} = xe^{(T-t)(r-\frac{\sigma^2}{2})+z\sigma\sqrt{T-t}},$$

και επομένως ο τύπος (18.21) για τη V συμπίπτει με αυτόν στη διατύπωση του θεωρήματος. ∎

18.5 Ειδική περίπτωση. Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς

Θα εφαρμόσουμε τον τύπο του προηγούμενου θεωρήματος στην περίπτωση που $g(x) = (x-K)^+$ για κάποιο $K > 0$. Αυτό θα δώσει την τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με τιμή άσκησης K.

Πρόταση 18.5. *Η τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με τιμή άσκησης K για τη μετοχή S στην αγορά (18.1), (18.2) ισούται με $C(S_t,t)$, όπου για $x>0$ και $t\in[0,T)$,*

$$C(x,t) := x\Phi(d_1(x,t)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2(x,t)),$$

με Φ τη συνάρτηση κατανομής της $N(0,1)$ και

$$d_1(x,t) := \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left\{\log\frac{x}{K} + \left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right\},$$
$$d_2(x,t) := \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left\{\log\frac{x}{K} + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right\}.$$

Απόδειξη. Η $g(x) = (x-K)^+$ ικανοποιεί την (18.3). Θέτουμε

$$\begin{aligned}A &:= (T-t)\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right),\\ B &:= \sigma\sqrt{T-t},\\ L &:= \frac{1}{B}\left(\log\frac{K}{x} - A\right) = -d_2(x,t).\end{aligned}$$

Ο τύπος (18.18) δίνει

$$\begin{aligned} C(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} (xe^{A+zB} - K)^+ \, e^{-z^2/2}\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-r(T-t)} \int_L^\infty (xe^{A+zB} - K)\, e^{-z^2/2}\, dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, xe^{-r(T-t)+A} \int_L^\infty e^{zB - z^2/2}\, dz - K\, e^{-r(T-t)}(1 - \Phi(L)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, xe^{-r(T-t)+A+B^2/2} \int_L^\infty e^{-(z-B)^2/2}\, dz - K\, e^{-r(T-t)}\Phi(-L). \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα στην τελευταία γραμμή ισούται με $\sqrt{2\pi}\{1 - \Phi(L - B)\} = \sqrt{2\pi}\Phi(B - L)$. Όμως $B - L = d_1(x,t), -L = d_2(x,t)$ και $-r(T - t) + A + B^2/2 = 0$. Έτσι προκύπτει η ζητούμενη σχέση. ■

Ασκήσεις

18.1 Στο ίδιο πλαίσιο και συμβολισμό όπως στην Πρόταση 18.5, να δειχθεί ότι η σωστή τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης με τιμή άσκησης K ισούται με $P(S_t, t)$, όπου για $x > 0$ και $t \in [0, T)$,

$$P(x,t) := Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2(x,t)) - x\Phi(-d_1(x,t)).$$

Παραρτήματα

Α′

Πιθανότητες

Α′.1 Γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές

′

Λήμμα Α′.1. *Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή την κανονική $N(0,1)$. Η ροπογεννήτρια M_X της X δίνεται από τη σχέση*

$$M_X(t) := \mathbf{E}(e^{tX}) = e^{\frac{1}{2}t^2}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Και άρα

$$\mathbf{E}(X^{2k}) = 1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1) = \frac{(2k)!}{k!2^k}, \tag{Α′.1}$$

$$\mathbf{E}(X^{2k+1}) = 0 \tag{Α′.2}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Για $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{E}(e^{tX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{tx} e^{-x^2/2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} e^{t^2/2}\, dx = e^{t^2/2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}\, dx = e^{t^2/2}.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί στο τελευταίο ολοκλήρωμα ο ολοκληρωτέος είναι η πυκνότητα της κατανομής $N(t,1)$.

∎

Λήμμα Α′.2. *Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή την κανονική $N(0,1)$. Για κάθε $x > 0$ ισχύει*

$$\frac{x}{x^2+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \le \mathbf{P}(X > x) \le \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Απόδειξη. Το άνω φράγμα για την πιθανότητα αποδεικνύεται ως εξής.

$$\mathbf{P}(X > x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2}\, dt < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \frac{t}{x} e^{-t^2/2}\, dt = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty (-e^{-t^2/2})'\, dt = \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Για το κάτω φράγμα, θέτουμε $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2}\, dt - \frac{x}{x^2+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

για κάθε $x \ge 0$. Η h έχει παράγωγο

$$h'(x) = -\frac{2}{(1+x^2)^2} e^{-x^2/2} < 0,$$

οπότε είναι γνησίως φθίνουσα, και επειδή $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$, είναι παντού θετική. ∎

Έστω d θετικός ακέραιος. Για μια τυχαία μεταβλητή X με τιμές στο $\mathbb{R}^d$, η χαρακτηριστική της συνάρτηση $\phi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ ορίζεται ως $\phi_X(u) := \mathbf{E}(e^{i\langle u,X\rangle})$ για κάθε $u \in \mathbb{R}^d$. Αποδεικνύεται ότι η ϕ_X χαρακτηρίζει την κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής. Δηλαδή, αν X, Y είναι τυχαίες μεταβλητές και $\phi_X(u) = \phi_Y(u)$ *για κάθε* $u \in \mathbb{R}^d$, τότε οι X, Y έχουν την ίδια κατανομή.

Ορισμός Α΄.3. Έστω $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)^t$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στον $\mathbb{R}^d$.

(1) Λέμε ότι η X είναι d-διάστατη τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή αν οι $X_1, X_2, \dots, X_d$ είναι ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές.

(2) Λέμε ότι η X είναι Γκαουσιανή αν υπάρχουν $m \in \mathbb{N}^+$, $A \in \mathbb{R}^{d\times n}$, $b \in \mathbb{R}^d$, και Y d-διάστατη τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή ώστε

$$X = AY + b. \tag{Α΄.3}$$

Με άλλα λόγια, ένα διάνυσμα είναι Γκαουσιανό αν υπάρχουν ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές $Y_1, Y_2, \dots, Y_d$ ώστε κάθε συντεταγμένη του διανύσματος να είναι γραμμικός συνδυασμός απο αυτές τις κανονικές μαζί με μια μετατόπιση.

Θεώρημα Α΄.4. *Μια τυχαία μεταβλητή X με τιμές στον $\mathbb{R}^d$ είναι Γκαουσιανή αν και μόνο αν η χαρακτηριστική της συνάρτηση δίνεται από τον τύπο*

$$\phi_X(u) := \mathbf{E}(e^{i\langle u,X\rangle}) = \exp\left\{ i\langle u, b\rangle - \frac{1}{2}\langle u, Cu\rangle \right\} \tag{Α΄.4}$$

για κάθε $u \in \mathbb{R}^d$, όπου $b \in \mathbb{R}^d$ και $C \in \mathbb{R}^{d\times d}$ συμμετρικός θετικά ημιορισμένος πίνακας.

Απόδειξη. Για $1 \le j \le d$ έχουμε

$$X_j := \sum_{k=1}^{m} a_{j,k} Y_k + b_j, \tag{Α΄.5}$$

οπότε

$$\langle u, X\rangle = \sum_{j=1}^{d} u_j X_j = \sum_{k=1}^{m} Y_k \left(\sum_{j=1}^{d} a_{j,k} u_j \right) + \sum_{j=1}^{d} u_i b_i$$

και

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(e^{i\langle u,X\rangle}) &= e^{i\langle u,b\rangle} \prod_{k=1}^{m} \mathbf{E}\left(e^{iY_k \sum_{j=1}^{d} a_{j,k} u_j} \right) = e^{i\langle u,b\rangle} \prod_{k=1}^{m} e^{-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{d} a_{j,k}u_j\right)^2} \\ &= e^{i\langle u,b\rangle} e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{d} a_{j,k}u_j\right)^2}.\end{aligned}$$

Ο τελευταίος εκθέτης ισούται με

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j_1,j_2=1}^{d} a_{j_1,k} a_{j_2,k} u_{j_1} u_{j_2} = \sum_{j_1,j_2=1}^{d} u_{j_1} u_{j_2} \sum_{k=1}^{m} a_{j_1,k} a_{j_2,k} = \sum_{j_1,j_2=1}^{d} u_{j_1} u_{j_2} (AA^t)_{j_1,j_2} = \langle AA^t u, u\rangle,$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο με $C = AA^t$. Ο C προφανώς είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος αφού για κάθε $u \in \mathbb{R}^d$ έχουμε $\langle AA^t u, u\rangle = \langle A^t u, A^t u\rangle = \|A^t u\|^2 \ge 0$.

Αντίστροφα, έστω X τυχαία μεταβλητή με χαρακτηριστική συνάρτηση όπως στην (Α΄.4). Υποθέτουμε ότι $b = 0$, αφού η γενική περίπτωση προκύπτει έπειτα θεωρώντας το διάνυσμα $X - b$. Επειδή ο C είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος, υπάρχουν ορθογώνιος πίνακας $V \in \mathbb{R}^{d\times d}$ και διαγώνιος πίνακας $\Lambda \in \mathbb{R}^{d\times d}$ με μη αρνητικά στοιχεία στη διαγώνιο ώστε $C = V\Lambda V^t$. Έστω $\lambda_i = \Lambda_{i,i}$ για $i = 1, \dots, d$ τα διαγώνια στοιχεία του Λ. Η χαρακτηριστική συνάρτηση του διανύσματος $V^t X$

υπολογισμένη στο $u \in \mathbb{R}^d$ ισούται με

$$\phi_{V^t X}(u) = \mathbf{E}(e^{i\langle u, V^t X\rangle}) = \mathbf{E}(e^{i\langle Vu, X\rangle}) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle Vu, CVu\rangle\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle u, V^t CVu\rangle\right\}$$
$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle u, \Lambda u\rangle\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \lambda_i u_i^2\right\}.$$

Έπεται ότι οι συντεταγμένες του $V^t X$ είναι ανεξάρτητες κανονικές με $(V^t X)_i \sim N(0, \lambda_i)$. Έστω $\Delta \in \mathbb{R}^d$ ο διαγώνιος πίνακας με $\Delta_{i,i} = \sqrt{\lambda_i}$ για $1 \le i \le d$. Θεωρούμε το διάνυσμα $\tilde{Y} \in \mathbb{R}^d$ με $\tilde{Y}_i = (V^t X)_i / \sqrt{\lambda_i} \sim N(0, 1)$ αν $\lambda_i \neq 0$ και $\tilde{Y}_i = 0$ αν $\lambda_i = 0$. Αν τα λ_i που είναι μη μηδενικά έχουν πλήθος r, τότε ονομάζουμε $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_r)$ το διάνυσμα που περιέχει τις $\tilde{Y}$ που αντιστοιχούν σε αυτά τα λ_i. Υπάρχει τότε πίνακας $B \in \mathbb{R}^{d\times r}$ με στοιχεία 0 και 1 ώστε $\tilde{Y} = BY$. Η Y είναι d-διάστατη τυπική κανονική και

$$V^t X = \Delta\tilde{Y} = \Delta BY.$$

Η πρώτη ισότητα έπεται από τον ορισμό του Y. Άρα $X = V\Delta BY$ και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε με $A = V\Delta B$. ■

Αν έχουμε ένα Γκαουσιανό διάνυσμα όπως στην (Α΄.3), παρατηρούμε τα εξής.

(1) Κάθε X_j ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή b_j.

(2) Για $1 \le j_1, j_2 \le d$ ισχύει

$$\mathrm{Cov}(X_{j_1}, X_{j_2}) = C_{j_1, j_2}.$$

Το (1) προκύπτει από την (Α΄.5) και γνωστές ιδιότητες ανεξάρτητων κανονικών τυχαίων μεταβλητών. Η (2) προκύπτει πάλι από την (Α΄.5), τη διγραμμικότητα της συνδιακύμανσης, και το ότι $C = AA^t$.

Επομένως, αν ένα διάνυσμα είναι Γκαουσιανό, η χαρακτηριστική του συνάρτηση, και άρα η κατανομή του, καθορίζεται πλήρως από τις μέσες τιμές b των συνιστωσών και τον πίνακα συνδιακύμανσης C.

Για δεδομένα $b \in \mathbb{R}^d$ και $C \in \mathbb{R}^{d\times d}$ με C θετικά ορισμένο, συμβολίζουμε με $N(b, C)$ την κατανομή με χαρακτηριστική συνάρτηση την (Α΄.4) και τη λέμε κανονική κατανομή με διάνυσμα μέσων τιμών b και πίνακα συνδιακύμανσης C.

Συνέπεια της πιο πάνω παρατήρησης είναι το εξής πόρισμα.

Πόρισμα Α΄.5. *Αν οι συνιστώσες ενός Γκαουσιανού διανύσματος είναι ασυσχέτιστες, τότε είναι και ανεξάρτητες.*

Απόδειξη. Έστω $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ το διάνυσμα. Η υπόθεση δίνει ότι ο πίνακας συνδιακύμανσης είναι διαγώνιος με μη αρνητικά στοιχεία στη διαγώνιο, αφού είναι θετικά ημιορισμένος. Επομένως, η χαρακτηριστική συνάρτηση του X είναι της μορφής

$$\phi_X(u) = e^{i\langle u,b\rangle} e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} C_{j,j} u_j^2} \text{ για κάθε } u \in \mathbb{R}^d.$$

Όμως αυτή είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του διανύσματος $(b_j + C_{j,j}^{1/2} Y_j)_{1\le j\le d}$ με τις $Y_1, Y_2, \dots, Y_d$ ανεξάρτητες τυπικές κανονικές (εύκολος υπολογισμός από τις στοιχειώδεις πιθανότητες). Επειδή η χαρακτηριστική συνάρτηση καθορίζει μονοσήμαντα την κατανομή, έπεται το συμπέρασμα. ■

Κατά την κατασκευή της κίνησης Brown χρησιμοποιούμε το εξής αποτέλεσμα.

Πρόταση Α΄.6. *Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες μονοδιάστατες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία με κατανομή την $N(0, 1)$, τότε οι*

$$X - Y,\ X + Y$$

είναι ανεξάρτητες, καθεμία με κατανομή την $N(0, 2)$.

Απόδειξη. Το ότι καθεμία από τις $X-Y, X+Y$ ακολουθεί την κατανομή $N(0,2)$ προκύπτει από γνώσεις στοιχειωδών πιθανοτήτων. Θα δείξουμε την ανεξαρτησία. Το διάνυσμα $(X-Y, X+Y)$ είναι Γκαουσιανο αφού παράγεται γραμμικά από τις X, Y που είναι ανεξάρτητες $N(0,1)$. Συγκεκριμένα

$$\begin{pmatrix} X-Y \\ X+Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Άρα η ανεξαρτησία θα προκύψει από τη μη συσχέτιση. Ένας απλός υπολογισμός δίνει ότι $\mathrm{Cov}(X-Y, X+Y) = 0$, που είναι το ζητούμενο. ∎

Α′.2 Σύγκλιση κατά κατανομή

Σε αυτή την παράγραφο ασχολούμαστε με την έννοια της σύγκλισης κατά κατανομή. Είναι ένα είδος συγκλισης που δεν εμφανίζεται πουθενά στη θεωρία αυτών των σημειώσεων αλλά μόνο σε μερικές ασκήσεις.

Έστω ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\geq 1}$, με τη X_n να ορίζεται στον χώρο πιθανότητας $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}_n)$ και μια τυχαία μεταβλητή X ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ (όλες οι τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$). Συμβολίζουμε με $\mathbf{E}_n$ τη μέση τιμή που αντιστοιχεί στο μέτρο $\mathbf{P}_n$ και με $\mathbf{E}$ τη μέση τιμή που αντιστοιχεί στο $\mathbf{P}$.

Ορισμός Α′.7. Λέμε ότι η ακολουθία $(X_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει κατά κατανομή στη X αν για κάθε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχή και φραγμένη ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_n\{f(X_n)\} = \mathbf{E}\{f(X)\}. \tag{Α′.6}$$

Συνήθεις συμβολισμοί για τη σύγκλιση κατά κατανομή είναι οι $X_n \Rightarrow X$, $X_n \xrightarrow{d} X$, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Αν ονομάσουμε F_n και F τις συναρτήσεις κατανομής των X_n και X αντίστοιχα, τότε αποδεικνύεται ότι ο προηγούμενος ορισμός είναι ισοδύναμος με τη συνθήκη

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

σε κάθε σημείο $x \in \mathbb{R}$ που η F είναι συνεχής. Αυτός είναι ο ορισμός της σύγκλισης κατά κατανομή που συναντά κανείς σε εισαγωγικά μαθήματα πιθανοτήτων.

Επισημαίνουμε ότι δεν είναι απαραίτητο οι τυχαίες μεταβλητές $\{X_n : n \geq 1\}, X$ να ορίζονται στον ίδιο χώρο πιθανότητας. Σε πολλές περιπτώσεις όμως ορίζονται στον ίδιο χώρο και τότε έχει νόημα να εξετάσουμε τη σχέση αυτού του είδους σύγκλισης με τα υπόλοιπα βασικά είδη σύγκλισης της θεωρίας πιθανοτήτων. Αυτό που ισχύει είναι ότι η σύγκλιση κατά κατανομή είναι ασθενέστερη από όλα.

Πρόταση Α′.8. *Έστω $(X_n)_{n\geq 1}, X$ τυχαίες μεταβλητές ορισμένες σε κοινό χώρο πιθανοτητας. Τότε η $(X_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει στην X κατά κατανομή αν ένα από τα εξής συμβαίνει.*

(i) Η $(X_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει στη X με πιθανότητα 1.

(ii) Η $(X_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει στη X κατά πιθανότητα.

(iii) Η $(X_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει στη X στον L^p για κάποιο $p \geq 1$.

Απόδειξη. (i) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και φραγμένη. Λόγω συνέχειας θα ισχύει $\lim_{n\to\infty} f(X_n) = f(X)$ με πιθανότητα 1 και από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης έπεται η (Α′.6).

(ii) Έστω ότι για μια f δεν ισχύει η (Α′.6). Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ και γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών $(n_k)_{k\geq 1}$ έτσι ώστε

$$|\mathbf{E}\{f(X_{n_k})\} - \mathbf{E}\{f(X)\}| \geq \varepsilon \text{ για κάθε } k \geq 1. \tag{Α′.7}$$

Η ακολουθία $(X_{n_k})_{k\geq 1}$ συγκλίνει κατά πιθανότητα στη X και επομένως, με βάση γνωστή πρόταση, έχει μια υπακολουθία $(X_{n_{k_\ell}})_{\ell\geq 1}$ που συγκλίνει στη X με πιθανότητα 1. Από το προηγούμενο μέρος θα ισχύει $\lim_{\ell\to\infty} \mathbf{E}\{f(X_{n_{k_\ell}})\} = \mathbf{E}\{f(X)\}$. Άτοπο λόγω της (Α΄.7).

(iii) Σύγκλιση στον L^p συνεπάγεται σύγκλιση κατά πιθανότητα, οπότε το συμπέρασμα έπεται από το προηγούμενο μέρος της πρότασης. ∎

Πολύ χρήσιμος είναι ο χαρακτηρισμός της σύγκλισης κατά κατανομή μέσω χαρακτηριστικών συναρτήσεων. Για μια τυχαία μεταβλητή X σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, η χαρακτηριστική της συνάρτηση $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ορίζεται ως

$$\phi_X(t) = \mathbf{E}(e^{itX}) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Παραθέτουμε χωρίς απόδειξη το εξής πολύ σημαντικό θεώρημα [Durrett (2010), Θεώρημα 3.3.6].

Θεώρημα Α΄.9 (Θεώρημα συνέχειας του Lévy)**.** *Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών.*

(i) Αν $X_n \Rightarrow X$, τότε $\phi_{X_n}(t) \to \phi_X(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Αν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ώστε $\phi_{X_n}(t) \to f(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής στο 0, τότε υπάρχει τυχαία μεταβλητή X με χαρακτηριστική συνάρτηση την f και $X_n \Rightarrow X$ καθώς $n \to \infty$.

Ο ισχυρισμός (i) έπεται αμέσως από τον ορισμό της σύγκλισης κατά κατανομή γιατί οι συναρτήσεις $x \mapsto \cos(tx), x \mapsto \sin(tx)$ είναι συνεχείς και φραγμένες. Ο ισχυρισμός (ii) είναι ισχυρότερος από το αντίστροφο του (i). Δηλαδή από αυτόν συνεπάγεται ότι το αντίστροφο του (i) ισχύει. Είναι πιο απαιτητικός στην απόδειξή του και πιο χρήσιμος. Μια εφαρμογή του θα δούμε τώρα αμέσως.

Πρόταση Α΄.10. *Έστω ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\geq 1}$ με $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$ και ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu \in \mathbb{R},$$
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = \sigma^2 \in [0, \infty).$$

Τότε η $(X_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια τυχαία μεταβλητή με κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$.

Απόδειξη. Για $t \in \mathbb{R}$, οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις των $\{X_n : n \geq 1\}$ ικανοποιούν

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{X_n}(t) = \lim_{n\to\infty} e^{i\mu_n t - \frac{1}{2}\sigma_n^2 t} = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Η τελευταία έκφραση είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής με κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$. Το συμπέρασμα έπεται από το μέρος (ii) του προηγούμενου θεωρήματος. ∎

B′

Ανάλυση

B′.1 Χώροι Hilbert

Καταγράφουμε σε αυτή την παράγραφο τη βασική ορολογία από τη θεωρία των χώρων Hilbert που χρειαζόμαστε. Για περισσότερα μπορεί να ανατρέξει κανείς στις τελευταίες σελίδες του Κεφαλαίου 3 στο Νεγρεπόντης Σ., Ζαχαριάδης Θ., Καλαμίδας Ν., Φαρμάκη Β (1988) ή σε άλλα κλασικά βιβλία ανάλυσης (π.χ., Rudin, Folland).

Ορισμός B′.1. Ένας διανυσματικός χώρος H (πάνω στο $\mathbb{R}$) εφοδιασμένος με μια συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ λέγεται **χώρος με εσωτερικό γινόμενο** αν ισχύουν τα εξής:

(i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$.

(ii) Αν $\langle x, x \rangle = 0$ τότε $x = 0$.

(iii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ για κάθε $x, y \in H$.

(iv) $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$ για κάθε $x, y, z \in H$ και $a, b \in \mathbb{R}$.

Το εσωτερικό γινόμενο ορίζει στον H τη νόρμα $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ για κάθε $x \in H$ και τη μετρική $d(x, y) = \|x - y\|$ για κάθε $x, y \in H$.

Ορισμός B′.2. Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, λέγεται **χώρος Hilbert** αν ο μετρικός χώρος (H, d) είναι πλήρης.

Παράδειγμα B′.3. (i) Ο $\mathbb{R}^n$ με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο είναι χώρος Hilbert αφού η μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο είναι η Ευκλείδεια.

(ii) Έστω χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Ο $L^2(\mathbf{P})$ (δες Παράγραφο 1.4 για τον ορισμό του) εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle X, Y \rangle = \mathbf{E}(XY)$$

για κάθε $X, Y \in L^2(\mathbf{P})$ είναι χώρος Hilbert λόγω του Θεωρήματος 1.11.

Σε ένα χώρο H με εσωτερικό γινόμενο λέμε ότι τα $x, y \in H$ **είναι κάθετα**, και γράφουμε $x \perp y$, αν $\langle x, y \rangle = 0$. Για κάθε $A \subset H$ θέτουμε

$$A^{\perp} := \{y \in H : y \perp x \text{ για κάθε } x \in A\},$$

το ορθογώνιο σύνολο στο A.

Πρόταση B′.4. *Έστω H χώρος Hilbert και $F \subset H$ κλειστός γραμμικός υπόχωρός του. Τότε για κάθε $x \in F$ υπάρχει μοναδικό $y \in F$ τέτοιο ώστε $x - y \in F^{\perp}$.*

Κάθε $x \in H$ γράφεται μοναδικά ως $x = y + z$ με $y \in F$ και $z \in F^{\perp}$. Έτσι ορίζεται η απεικόνιση $\mathrm{P}_F : H \to F$ με $\mathrm{P}_F(x) = y$, η οποία ονομάζεται **ορθογώνια προβολή** του H στον F.

Β΄.2 Το ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes

$$\int_a^b f(x)\, dg(x)$$

όπου $[a, b]$ είναι ένα πεπερασμένο κλειστό διάστημα και $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις. Θα αναφέρουμε επίσης κάποιες ιδιότητές του. Για λεπτομερειακή έκθεση της θεωρίας αυτού του ολοκληρώματος παραπέμπουμε τον αναγνώστη σε βιβλία ανάλυσης, π.χ., στα Νεγρεπόντης Σ., Γιωτόπουλος Σ., Γιαννακούλιας Ε (1992) Κεφάλαιο 15 και Apostol (1974) Κεφάλαιο 7.
Έστω λοιπόν $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Διαμέριση του $[a, b]$ λέμε ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο $P \subset [a, b]$ περιέχει τα a, b. Γράφουμε $P := \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ όπου $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$. Για δυό διαμερίσεις P_1, P_1 του $[a, b]$ λέμε ότι η P_2 είναι *λεπτότερη* της P_1 αν $P_1 \subset P_2$, δηλαδή η P_2 περιέχει τουλάχιστον τα σημεία της P_1.

Για δεδομένη διαμέριση P του $[a, b]$ όπως πιο πάνω, επιλογή ενδιάμεσων σημείων για την P λέμε οποιοδήποτε πεπερασμένο σύνολο k σημείων $E = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ με $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, k$.

Άθροισμα Riemann-Stieltjes για την f ως προς την g που αντιστοιχεί στη διαμέριση P και στην επιλογή ενδιάμεσων σημείων E λέμε το άθροισμα

$$S(f, g, P, E) := \sum_{i=1}^{k} f(t_i)\{g(x_i) - g(x_{i-1})\}. \tag{Β΄.1}$$

Ορισμός Β΄.5. Λέμε ότι η f είναι Riemann-Stieltjes ολοκληρώσιμη ως προς την g στο $[a, b]$ αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός A ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ να υπάρχει διαμέριση P_ε του $[a, b]$ με την ιδιότητα: για κάθε διαμέριση P λεπτότερη από την P_ε και επιλογή ενδιάμεσων σημείων E για την P ισχύει

$$|S(f, g, P, E) - A| < \varepsilon.$$

Ο αριθμός A στον ορισμό σαφώς είναι μοναδικός, τον συμβολίζουμε με $\int_a^b f(x)\, dg(x)$ και τον ονομάζουμε ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes της f ως προς την g. Η g ονομάζεται ολοκληρωτής και η f ολοκληρωτέος.

Όταν $g(x) = x$, το άθροισμα (Β΄.1) είναι ένα άθροισμα Riemann και το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\, dg(x)$ είναι το ολοκλήρωμα Riemann. Επίσης, όταν η f είναι συνεχής και η g παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο τότε

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x) g'(x)\, dx,$$

όπου το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της τελευταίας ισότητας είναι ολοκλήρωμα Riemann. Δεν το αποδεικνύουμε εδώ, απλώς παρατηρούμε ότι για δεδομένη διαμέριση P, μπορούμε να γράψουμε $g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ για κάποιο $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, k$. Οπότε, αν πάρουμε ως επιλογή ενδιάμεσων σημείων E το $\{\xi_i : i = 1, \dots, k\}$, το άθροισμα $S(f, g, P, E)$ είναι ένα άθροισμα Riemann για την $f(x)g'(x)$ στο $[a, b]$.

Παράδειγμα Β΄.6. Έστω $a := a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 =: b$ και $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με τιμές $g(x) = G_i$ για κάθε $x \in [a_{i-1}, a_i)$ με $i = 1, 2, 3, 4$ και $g(b) = G_4$. Οι G_1, G_2, G_3, G_4 είναι δεδομένες σταθερές. Έστω και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στα a_1, a_2, a_3, δηλαδή στα σημεία ασυνέχειας της g. Τότε

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \sum_{i=1}^{3} f(a_i)\{g(a_i+) - g(a_i-)\}.$$

$g(x+), g(x-)$ είναι τα όρια της g δεξιά και αριστερά του x αντίστοιχα. Η απόδειξη της σχέσης αφήνεται ως άσκηση.

Η σημαντικότερη περίπτωση Riemann-Stieltjes ολοκληρώματος είναι αυτή κατά την οποία η g είναι αύξουσα (ή φθίνουσα). Τότε αποδεικνύεται το εξής θεώρημα.

Θεώρημα Β΄.7. *Αν η g είναι αύξουσα και η f συνεχής, τότε η f είναι Riemann-Stieltjes ολοκληρώσιμη ως προς την g.*

Κάθε συνάρτηση φραγμένη κύμανσης στο $[a, b]$ γράφεται ως διαφορά δύο αυξουσών συναρτήσεων [Θεώρημα 15.31 στο Νεγρεπόντης Σ., Γιωτόπουλος Σ., Γιαννακούλιας Ε (1992)]. Έτσι έπεται άμεσα ότι το προηγούμενο θεώρημα ισχύει και με την υπόθεση ότι η g είναι φραγμένης κύμανσης γιατί αν $g = g_1 - g_2$ με τις g_1, g_2 αύξουσες, τότε μπορούμε να δείξουμε ότι το $\int_a^b f(x)\,dg(x)$ ορίζεται και ισούται με

$$\int_a^b f(x)\,dg_1(x) - \int_a^b f(x)\,dg_2(x).$$

Γ′

Τεχνικά αποτελέσματα Ι

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.5

Απόδειξη. Θα κατασκευάσουμε την κίνηση Brown πρώτα στο $[0,1]$, δηλαδή ως τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbf{C}[0,1]$, και η επέκταση στο $[0,\infty)$ θα είναι άμεση.

Βήμα 1. Κατασκευή.

Έστω

$$\mathcal{D}_n := \left\{ \frac{k}{2^n} : 0 \le k \le 2^n \right\} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

και

$$\mathcal{D} := \cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n$$

το σύνολο των δυαδικών αριθμών στο $[0,1]$. Θεωρούμε έναν χώρο πιθανότητας στον οποίο ορίζεται ένα σύνολο $\{Z_t : t \in \mathcal{D}\}$ ανεξάρτητων τυπικών κανονικών τυχαίων μεταβλητών (τέτοιος χώρος υπάρχει).

Θέτουμε $B(0) = 0, B(1) = Z_1$, και έτσι έχουμε ορίσει τη B στο $\mathcal{D}_0$. Αν για κάποιο $n \ge 1$ η B έχει ήδη οριστεί στο $\mathcal{D}_{n-1}$, την ορίζουμε σε κάθε σημείο $d \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}$ ως

$$B(d) = \frac{B(d-2^{-n}) + B(d+2^{-n})}{2} + \frac{Z_d}{2^{(n+1)/2}}. \tag{Γ′.1}$$

Ορίζουμε τις συνεχείς συναρτήσεις $F_n : [0,1] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ ως εξής.

$$F_0(t) = \begin{cases} Z_1 & \text{για } t = 1, \\ 0 & \text{για } t = 0, \\ \text{γραμμική} & \text{στο } (0,1), \end{cases}$$

και για $n \ge 1$,

$$F_n(t) = \begin{cases} Z_t/2^{(n+1)/2} & \text{για } t \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}, \\ 0 & \text{για } t \in \mathcal{D}_{n-1}, \\ \text{γραμμική} & \text{ανάμεσα σε διαδοχικά σημεία του } \mathcal{D}_n \end{cases}$$

Για $t \in \mathcal{D}_n$ ισχύει

$$B(t) = \sum_{k=0}^{n} F_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(t).$$

Η απόδειξη της πρώτης ισότητας γίνεται επαγωγικά και αφήνεται ως άσκηση. Η δεύτερη ισότητα ισχύει γιατί για κάθε $k \ge n+1$ η F_k είναι 0 στο $\mathcal{D}_{k-1}$ και άρα και στο $\mathcal{D}_n$, το οποίο είναι υποσύνολο του $\mathcal{D}_{k-1}$.

Ισχυρισμός: Με πιθανότητα 1 η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} F_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

Ισχύει $\|F_n\|_\infty = \max\{Z_d/2^{(n+1)/2} : d \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}\}$. Άρα

$$\mathbf{P}(\|F_n\|_\infty \ge 2\sqrt{n}2^{-(n+1)/2}) \le \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \mathbf{P}(|Z_d| \ge 2\sqrt{n}) \le (2^n+1)e^{-2n} < e^{-n}.$$

Στην προτελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το Λήμμα Α′.2 από το Παράρτημα Α′.1. Το πρώτο λήμμα Borel-Cantelli δίνει ότι με πιθανότητα 1 ισχύει τελικά

$$\|F_n\|_\infty < 2\sqrt{n}2^{-(n+1)/2}. \tag{Γ′.2}$$

Έτσι ο ισχυρισμός έπεται από το κριτήριο Weierstrass για ομοιόμορφη σύγκλιση σειράς συναρτήσεων. Ορίζουμε τη B στο $[0,1]$ ως

$$B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(t) \text{ για κάθε } t \in [0,1]. \tag{Γ′.3}$$

Επειδή κάθε F_k είναι συνεχής, ο ισχυρισμός συνεπάγεται ότι η B είναι συνεχής με πιθανότητα 1.

Βήμα 2. Απόδειξη ιδιοτήτων.

Σε αυτό το βήμα θα δείξουμε ότι η B που ορίσαμε στο προηγούμενο βήμα ικανοποιεί τις ιδιότητες (i) και (ii) του Ορισμού 5.1 [η (iii) αποδείχθηκε πιο πάνω]. Θα δείξουμε αρχικά ότι για σταθερό $n \ge 0$, οι (i) και (ii) ισχύουν για χρόνους t_i, s, t στοιχεία του $\mathcal{D}_n$.

Για $n = 0$ ο ισχυρισμός αυτός ισχύει εξαιτίας της επιλογής του $B(1)$ αφού $\mathcal{D}_0 = \{0,1\}$ και $B(1) - B(0) = Z_1 - Z_0 = Z_1 \sim N(0,1)$.

Έστω ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ οι (i) και (ii) ισχύουν για στοιχεία του $\mathcal{D}_n$. Παρατηρούμε πρώτα το εξής.

Ισχυρισμός 1: Για $n \ge 1$ και $d \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}$ οι $B(d) - B(d-2^{-n})$, $B(d+2^{-n}) - B(d)$ είναι ανεξάρτητες και καθεμία έχει κατανομή $N(0, 2^{-n})$.

Πράγματι, από τον ορισμό της $B(d)$ στην (Γ′.1) οι δύο αυτές τυχαίες μεταβλητές ισούνται με

$$\frac{B(d+2^{-n}) - B(d-2^{-n})}{2} + \frac{Z_d}{2^{(n+1)/2}}, \quad \frac{B(d+2^{-n}) - B(d-2^{-n})}{2} - \frac{Z_d}{2^{(n+1)/2}}, \tag{Γ′.4}$$

δηλαδή με $X+Y, X-Y$ όπου η X είναι το πρώτο κλάσμα και $Y := Z_d/2^{(n+1)/2}$. Οι X, Y είναι ανεξάρτητες από την κατασκευή της B γιατί η X έχει κατασκευαστεί από τις $\{Z_t : t \in \mathcal{D}_{n-1}\}$, ενώ η Z_d έχει $d \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}$. Επίσης, από την επαγωγική υπόθεση, η X έχει κατανομή $N(0, 2^{-(n+1)})$ και την ίδια κατανομή έχει η Y από γνωστές ιδιότητες της κανονικής κατανομής. Από την Πρόταση Α′.6 του Παραρτήματος Α′.1 έχουμε ότι οι $X+Y$, $X-Y$ είναι ανεξάρτητες, καθεμία με κατανομή $N(0, 2^{-n})$.

Έπειτα δείχνουμε το εξής.

Ισχυρισμός 2: Οι τυχαίες μεταβλητές $\{B(d) - B(d-2^{-n}) : d \in \mathcal{D}_n \setminus \{0\}\}$ είναι ανεξάρτητες.

Το διάνυσμα $(B(d) - B(d-2^{-n}) : d \in \mathcal{D}_n \setminus \{0\})$ είναι Γκαουσιανό γιατί κάθε συντεταγμένη του είναι γραμμικός συνδυασμός από τις ανεξάρτητες κανονικές $\{Z_t : t \in \mathcal{D}_n\}$ (δες στο Παράρτημα Α′ σχετικά με Γκαουσιανά διανύσματα). Άρα αρκεί να δείξουμε ότι οι συντεταγμένες του είναι ανά δύο ανεξάρτητες. Παίρνουμε λοιπον δύο στοιχεία

$$B(x) - B(x-2^{-n}),\ B(y) - B(y-2^{-n})$$

από αυτό το διάνυσμα, με $0 < x < y$ στοιχεία του $\mathcal{D}_n$ και θεωρούμε τις δύο δυνατές περιπτώσεις.

(1) $x = y - 2^{-n} = d \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{D}_{n-1}$. Τότε η ανεξαρτησία αποδείχθηκε στην παρατήρηση πιο πάνω.

(2) Υπάρχει κάποιο $d \in \mathcal{D}_{n-1}$ με

$$x \le d \le y - 2^{-n}. \tag{Γ′.5}$$

Έστω j ο ελάχιστος φυσικός για τον οποίο υπάρχει $d \in \mathcal{D}_j$ που να ικανοποιεί την (Γ′.5). Αυτό το d είναι στοιχείο του $\mathcal{D}_j \setminus \mathcal{D}_{j-1}$. Επίσης $j \le n-1$ και

$$[x-2^{-n}, x] \subset [d-2^{-j}, d], [y-2^{-n}, y] \subset [d, d+2^{-j}],$$

γιατί διαφορετικά ένα από τα $d-2^{-j}$, $d+2^{-j}$ θα ήταν ανάμεσα στους $x, y-2^{-n}$ και θα ανήκε στο $\mathcal{D}_{j-1}$, το οποίο είναι άτοπο από την επιλογή του j. Από την επαγωγική υπόθεση, οι

$$B(d) - B(d-2^{-j}),\ B(d+2^{-j}) - B(d)$$

είναι ανεξάρτητες. Έπειτα, κάθε προσαύξηση της B σε δεδομένο υποδιάστημα του $[d-2^{-j}, d]$ με άκρα σημεία του $\mathcal{D}_n$ κατασκευάζεται ως συνάρτηση της προσαύξησης $B(d) - B(d-2^{-j})$ και ενός συνόλου ανεξάρτητων από αυτήν τυχαίων μεταβλητών $I_1 := \{Z_t : t \in \mathcal{D}_n, d-2^{-j} < t < d\}$. Αυτό προκύπτει επαγωγικά με χρήση των εκφράσεων (Γ΄.4). Και όμοια, κάθε προσαύξηση της B σε δεδομένο υποδιάστημα του $[d, d+2^{-j}]$ με άκρα σημεία του $\mathcal{D}_n$ κατασκευάζεται ως συνάρτηση της προσαύξησης $B(d+2^{-j}) - B(d)$ και ενός συνόλου $I_2 = \{Z_t : t \in \mathcal{D}_n, d < t < d+2^{-j}\}$. Όμως όλες οι τυχαίες μεταβλητές του συνόλου $\{B(d) - B(d-2^{-j}),\ B(d+2^{-j}) - B(d)\} \cup I_1 \cup I_2$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και έτσι έπεται το συμπέρασμα και στην περίπτωση του σεναρίου (2).

Με χρήση των πιο πάνω ισχυρισμών 1 και 2 δείχνουμε εύκολα ότι $B(t) - B(s) \sim N(0, t-s)$ για $s, t \in \mathcal{D}_n$. Μένει να δείξουμε τις (i) και (ii) για στοιχεία του $[0, 1]$. Έστω $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Επειδή για κάθε $k \in \mathbb{N}$ το $\mathcal{D}_k$ είναι ένα πλέγμα πάχους 2^{-k} στο $[0, 1]$, έπεται ότι για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$ υπάρχει ακολουθία $(t_j^k)_{k\geq 1}$ που να συγκλίνει στο t_j και $t_j^k \in \mathcal{D}_k$, καθώς και $0 \leq t_1^k \leq t_2^k \leq \cdots \leq t_n^k$ για κάθε $k \geq 1$.

Έστω $\phi(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}, t \in \mathbb{R}$ η χαρακτηριστική συνάρτηση της $N(0, 1)$. Από αυτά που δείξαμε πιο πάνω έπεται ότι η τιμή της χαρακτηριστικής συνάρτησης του διανύσματος

$$Y^k := (B(t_2^k) - B(t_1^k), B(t_3^k) - B(t_2^k), \ldots, B(t_n^k) - B(t_{n-1}^k))$$

στο $u := (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ είναι

$$\phi_{Y^k}(u) = \phi((t_2^k - t_1^k)^{1/2} u_1)\phi((t_3^k - t_2^k)^{1/2} u_1) \cdots \phi((t_n^k - t_{n-1}^k)^{1/2} u_n)$$

Έστω και

$$Y := (B(t_2) - B(t_1), B(t_3) - B(t_2), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1})).$$

Τότε,

$$\phi_Y(u) := \mathbf{E}(e^{i\langle u, Y\rangle}) = \lim_{k\to\infty} \phi_{Y_k}(u) = \phi((t_2 - t_1)^{1/2} u_1)\phi((t_3 - t_2)^{1/2} u_1) \cdots \phi((t_n - t_{n-1})^{1/2} u_n).$$

Η δεύτερη ισότητα έπεται από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης αφού $\lim_{k\to\infty} Y^k = Y$ και η $v \mapsto e^{i\langle u, v\rangle}$ είναι φραγμένη. Η τρίτη ισότητα έπεται από τη συνέχεια της συνάρτησης ϕ και της σύγκλιση καθεμίας ακολουθίας $(t_j^k)_{k\geq 1}$ στο t_j καθώς $k \to \infty$. Από τη μορφή της χαρακτηριστικής συνάρτησης του διανύσματος Y που μόλις είδαμε έπεται ότι οι συντεταγμένες του Y ικανοποιούν τις (i) και (ii) του ορισμού της κίνησης Brown.

Βήμα 3. Επέκταση στο $[0, \infty)$.

Θεωρούμε μια ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $(B_k)_{k\geq 0}$καθεμία με τιμές στο $\mathbf{C}[0, 1]$ και κατανομή αυτήν της B που κατασκευάστηκε πιο πάνω. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή B με τιμές στον χώρο $\mathbf{C}[0, \infty)$ ως

$$B(t) := B_n(t-n) + \sum_{k=0}^{n-1} B_k(1)$$

για κάθε $t \in [n, n+1)$ και n θετικό ακέραιο. Δηλαδή το γράφημά της προκύπτει αν συγκολλήσουμε διαδοχικά τα γραφήματα των B_k. Από τα παραπάνω προκύπτει εύκολα ότι η τυχαία μεταβλητή B είναι τυπική κίνηση Brown. ■

Απόδειξη της Πρότασης 5.7(ii)

(ii) Θέλουμε να δείξουμε ότι οι σ-άλγεβρες $\sigma(\{B(s) : s \in [0, t_0]\}), \sigma(\{X(s) : s \geq 0\})$ είναι ανεξάρτητες. Οι δυό τους παράγονται αντίστοιχα από τις οικογένειες

$$C_1 := \{(B(s_1), B(s_2), \ldots, B(s_m)) \in A\} : m \in \mathbb{N}^+, s_1, s_2, \ldots, s_m \in [0, t_0], A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\},$$
$$C_2 := \{(X(r_1), X(r_2), \ldots, X(r_n)) \in \Gamma\} : n \in \mathbb{N}^+, r_1, r_2, \ldots, r_n \in [0, \infty), \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\},$$

οι οποίες είναι κλειστές ως προς τις πεπερασμένες τομές. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι οι C_1, C_2 είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους [Πόρισμα 13.4 στο Κουμουλλής Γ. και Νεγρεπόντης Σ (1991)]. Αυτό ισοδυναμεί με το ότι για m, n θετικούς ακεραίους και $0 \le s_1 < s_2 < \cdots < s_m \le t_0$, $0 \le r_1 < \cdots < r_n$, η m-διάστατη τυχαία μεταβλητή

$$U := (B(s_1), B(s_2), \ldots, B(s_m))$$

είναι ανεξάρτητη από την

$$\begin{aligned} V &:= (X(r_1), X(r_2), \ldots, X(r_n)) \\ &= (B(t_0 + r_1) - B(t_0), B(t_0 + r_2) - B(t_0), \ldots, B(t_0 + r_n) - B(t_0)). \end{aligned}$$

Αυτό όμως ισχύει γιατί, από το (i) του Ορισμού 5.1, οι τυχαίες μεταβλητές

$$\begin{aligned} &B(s_1), B(s_2) - B(s_1), \ldots, B(s_m) - B(s_{m-1}), \\ &B(t_0 + r_1) - B(t_0), B(t_0 + r_2) - B(t_0 + r_1), \ldots, B(t_0 + r_n) - B(t_0 + r_{n-1}) \end{aligned}$$

είναι (πλήρως) ανεξάρτητες μεταξύ τους και η U προκύπτει ως (μετρήσιμη) συνάρτηση των πρώτων m από αυτές, ενώ η V ως (μετρήσιμη) συνάρτηση των υπόλοιπων n.

Απόδειξη της Πρότασης 5.11

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι οι X, B έχουν τις ίδιες κατανομές πεπερασμένης διάστασης και συνεχή μονοπάτια και το συμπέρασμα θα προκύψει από το Θεώρημα 4.8.

(α) Έστω $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Η τυχαία μεταβλητή $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ είναι Γκαουσιανή ως γραμμικός μετασχηματισμός της $(B(1/t_1), B(1/t_2), \ldots, B(1/t_n))$. Η μέση τιμή κάθε συνιστώσας της είναι μηδέν, ενώ ο πίνακας συνδιακύμανσής της είναι $C_{i,j} := \mathrm{Cov}(X(t_i), X(t_j)) = t_i t_j \{(1/t_i) \wedge (1/t_j)\} = t_i \wedge t_j$. Από τις ιδιότητες των Γκαουσιανών διανυσμάτων (Παράρτημα Α΄.1) έπεται ότι η $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ έχει την ίδια κατανομή με την $(B(t_1), B(t_2), \ldots, B(t_n))$.

(β) Η X είναι συνεχής στο $(0, \infty)$ και μένει να αποδείξουμε ότι είναι συνεχής στο 0. Το $A := \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$ είναι αριθμήσιμο και έτσι από το (α) οι $X|A$, $B|A$ έχουν την ίδια κατανομή. Άρα $\lim_{t \to 0, t \in A} X(t) = \lim_{t \to 0, t \in A} B(t) = 0$. Και επειδή η $X|(0, \infty)$ είναι συνεχής και το A πυκνό στο $(0, \infty)$, έπεται ότι $\lim_{t \to 0} X(t) = 0 = X(0)$. ∎

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1

Έστω $\hat{B}$ η ανέλιξη με $\hat{B}(t) = B(T + t) - B(T)$ για κάθε $t \ge 0$ και W μια τυπική d-διάστατη κίνηση Brown.

Βήμα 1. Υποθέτουμε ότι ο T παίρνει τιμές σε ένα σύνολο $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ όπου $(a_n)_{n \ge 1}$ είναι αύξουσα ακολουθία με $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$. Έστω B^n η ανέλιξη με $B^n(t) = B(a_n + t) - B(a_n)$ για κάθε $t \ge 0$. Για $A \in \mathcal{B}([0, \infty))$ και $C \in \mathcal{F}_T$ έχουμε

$$\mathbf{P}(\{\hat{B} \in A\} \cap C) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\{\hat{B} \in A\} \cap C \cap \{T = a_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\{B^n \in A\} \cap C \cap \{T = a_n\}) \tag{Γ΄.6}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\{B^n \in A\}) \mathbf{P}(C \cap \{T = a_n\}) \tag{Γ΄.7}$$

$$= \mathbf{P}(\{W \in A\}) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(C \cap \{T = a_n\}) = \mathbf{P}(W \in A) \mathbf{P}(C). \tag{Γ΄.8}$$

Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $C \cap \{T = a_n\} \in \mathcal{F}_{a_n}$ και την ανεξαρτησία της B^n από την $\mathcal{F}_{a_n}$ (Πρόταση 5.7 για την πολυδιάστατη κίνηση Brown). Στην τέταρτη ισότητα ότι η B^n είναι τυπική κίνηση Brown.

Για $C = \Omega$ παίρνουμε ότι $\mathbf{P}(\{\hat{B} \in A\}) = \mathbf{P}(W \in A)$. Άρα η $\hat{B}$ είναι τυπική κίνηση Brown και η $\mathbf{P}(\{\hat{B} \in A\} \cap C) = \mathbf{P}(\{\hat{B} \in A\}) \mathbf{P}(C)$ δίνει την ανεξαρτησία.

Βήμα 2. Θεωρούμε T χρόνο διακοπής με τιμές στο $[0, \infty)$. Έστω T_n η ακολουθία χρόνων διακοπής που ορίζεται ως $T_n = [2^n T + 1]/2^n$ (δες Άσκηση 4.5).

Δείχνουμε ότι η $\hat{B}$ είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_T$. Η σ-άλγεβρα $\sigma(\hat{B})$ παράγεται από την οικογένεια

$$\{(\hat{B}(s_1), \hat{B}(s_2), \dots, \hat{B}(s_m)) \in A\} : m \in \mathbb{N}^+, s_1, s_2, \dots, s_m \in [0, \infty), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\},$$

η οποία είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές. Αυτή η οικογένεια είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_T$, γιατί για $m \in \mathbb{N}^+, s_1, s_2, \dots, s_m \in [0, \infty)$, και $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ έχουμε

$$(\hat{B}(s_1), \hat{B}(s_2), \dots, \hat{B}(s_m)) = \lim_{n\to\infty}(B(T_n + s_1) - B(T_n), B(T_n + s_2) - B(T_n), \dots, B(T_n + s_m) - B(T_n)) \qquad (\Gamma'.9)$$

και για κάθε $n \geq 1$, λόγω του βήματος 1, η ανέλιξη $(B(T_n + t) - B(T_n))_{t\geq 0}$ είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_{T_n}$, η οποία περιέχει την $\mathcal{F}_T$. Το συμπέρασμα έπεται από το Πόρισμα 13.4 στο Κουμουλλής Γ. και Νεγρεπόντης Σ (1991).

Το ότι η $\hat{B}$ είναι κίνηση Brown προκύπτει με χρήση του βήματος 1 και της (Γ′.9).

Απόδειξη της Πρότασης 8.9

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι φραγμένη από μια σταθερά $M \in (0, \infty)$. Επειδή

$$\sum_{j=1}^{k(n)} f(B_{t_{j-1}^{(n)}})(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \to \int_0^t f(B_s)\,ds$$

με πιθανότητα 1 και άρα και κατά πιθανότητα, αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία

$$\sum_{j=1}^{k(n)} f(B_{t_{j-1}^{(n)}})\{(B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}})^2 - t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}\} \qquad (\Gamma'.10)$$

συγκλίνει στο 0 κατά πιθανότητα. Θα δείξουμε κάτι ισχυρότερο. Ότι συγκλίνει στο 0 στον $L^2(\mathbf{P})$. Έστω V_j ο j όρος του τελευταίου αθροίσματος. Τότε για $1 \leq i < j \leq k(n)$, θα έχουμε

$$\mathbf{E}(V_i V_j) = \mathbf{E}\{V_i f(B_{t_{j-1}^{(n)}})\,\mathbf{E}((B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}})^2 - t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)} \,|\, \mathcal{F}_{t_{j-1}^{(n)}})\} = 0.$$

Χρησιμοποιήσαμε γνωστές ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής σε συνδυασμό με το ότι η τυχαία μεταβλητή $V_i f(B_{t_{j-1}^{(n)}})$ είναι $\mathcal{F}_{t_{j-1}^{(n)}}$-μετρήσιμη, ενώ η $(B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}})^2 - t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}$ είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}_{t_{j-1}^{(n)}}$, και έχει μέση τιμή 0. Επομένως η μέση τιμή του τετραγώνου της (Γ′.10) ισούται με

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k(n)} \mathbf{E}(V_j^2) &\leq M^2 \sum_{j=1}^{k(n)} \mathbf{E}\left\{(B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}})^2 - t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}\right\}^2 \\ &= M^2 \sum_{j=1}^{k(n)} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)})^2 \leq M^2 t \|\Delta_n\| \to 0\end{aligned}$$

καθώς $n \to \infty$. Χρησιμοποιήσαμε την $\mathbf{E}\{(B_y - B_x)^2 - (y - x)\}^2 = 2(y - x)^2$ για $0 \leq x < y$, την οποία είδαμε κατά την απόδειξη του Θεωρήματος 8.7.

Τώρα για τη γενική περίπτωση, ένα σχόλιο για το σκεπτικό της απόδειξης. Η f ως συνεχής είναι φραγμένη σε κάθε συμπαγές, αλλά η κίνηση Brown που εμφανίζεται ως όρισμα της f στις εκφράσεις $f(B_{t_{j-1}})$ έχει τη δυνατότητα να βρεθεί πολύ μακριά στο πεδίο ορισμού της f και να ανακαλύψει πολύ μεγάλες τιμές της f (αν η f είναι π.χ. η $f(x) = x^2$). Η απόδειξη που ακολουθεί δείχνει ότι αυτό δεν πρέπει να μας φοβίζει. Με μεγάλη πιθανότητα, η κίνηση Brown στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ δεν προλαβαίνει να πάει πολύ μακριά, οπότε ουσιαστικά εξερευνά μόνο ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Σε αυτό το υποσύνολο η f είναι φραγμένη και αναγόμαστε στην περίπτωση που αποδείξαμε πριν.

Έστω $r > 0$ και $\tau_r := \inf\{s > 0 : |B_s| > r\}$. Για οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, καλούμε $J_n(f), J(f)$ το αριστερό και το δεξί μέλος της (8.7) αντίστοιχα. Έστω και $g_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ισούται με 1 στο $[-r, r]$ και με 0 στο $\mathbb{R} \setminus [-r-1, r+1]$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|J_n(f) - J(f)| > \varepsilon) &= \mathbf{P}(|J_n(f) - J(f)| > \varepsilon, \tau_r > t) + \mathbf{P}(|J_n(f) - J(f)| > \varepsilon, \tau_r \leq t) \\ &\leq \mathbf{P}(|J_n(fg_r) - J(fg_r)| > \varepsilon, \tau_r > t) + \mathbf{P}(|J_n(f) - J(f)| > \varepsilon, \tau_r \leq t) \\ &\leq \mathbf{P}(|J_n(fg_r) - J(fg_r)| > \varepsilon) + \mathbf{P}(\tau_r \leq t).\end{aligned}$$

Για την fg_r έχουμε ήδη δείξει το θεώρημα, οπότε για κάθε $r > 0$ έχουμε

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbf{P}(|J_n(f) - J(f)| > \varepsilon) \leq \mathbf{P}(\tau_r \leq t) = \mathbf{P}(\tau_1 \leq t/r^2).$$

Η ισότητα έπεται από την Παρατήρηση 5.10 του Κεφαλαίου 5. Το όριο της τελευταίας ποσότητας για $r \to \infty$ είναι $\mathbf{P}(\tau_1 = 0)$ το οποίο ισούται με 0 αφού η B είναι συνεχής με $B_0 = 0$. Έτσι η πρόταση αποδείχθηκε και στη γενική περίπτωση. ■

Απόδειξη του Θεωρήματος 10.2

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι αυτό μπορεί να γίνει σε κάθε διάστημα $[0, T]$ με $T > 0$ σταθερό. Για την ανέλιξη $\hat{X}$ με $\hat{X}(\omega, t) = X(\omega, t)\mathbf{1}_{[0,T]}(t)$, υπάρχει ακολουθία $(X_n)_{n\geq 1}$ στον $\mathcal{H}_0^2$ ώστε $\|X_n - \hat{X}\|_{L^2(\lambda\times\mathbf{P})} \to 0$ για $n \to \infty$. Για κάθε $n \geq 1$ ορίζουμε την ανέλιξη M_n ως $M_n(t) := I_t(X_n)$ για κάθε $t \geq 0$. Με βάση την Πρόταση 10.1, κάθε M_n είναι συνεχές martingale. Για φυσικούς $1 \leq m \leq n$, η ανέλιξη $(M_n - M_m)^2$ είναι συνεχής submartingale, οπότε η Ανισότητα Doob (Θεώρημα 4.16) δίνει ότι

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(\sup_{0\leq t\leq T} |M_n(t) - M_m(t)| \geq \varepsilon\Big) &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{E}(\{M_n(T) - M_m(T)\}^2) = \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{E}(\{I_T(X_n - X_m)\}^2) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \|X_n - X_m\|^2_{L^2(\lambda\times\mathbf{P})}\end{aligned}$$

Η τελευταία ποσότητα τείνει στο 0 για $m, n \to \infty$. Άρα υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $(n_k)_{k\geq 1}$ φυσικών, ώστε για κάθε $k \geq 1$ και $m, n \geq n_k$ να ισχύει $\|X_n - X_m\|^2_{L^2(\lambda\times\mathbf{P})} \leq 2^{-4k}$. Άρα για κάθε $k \geq 1$ έχουμε

$$\mathbf{P}\Big(\sup_{0\leq t\leq T} |M_{n_{k+1}}(t) - M_{n_k}(t)| \geq \frac{1}{2^k}\Big) \leq \frac{1}{2^{2k}}.$$

Έστω $A_k := \{\sup_{0\leq t\leq T} |M_{n_{k+1}}(t) - M_{n_k}(t)| \geq 2^{-k}\}$ για $k \in \mathbb{N}^+$. Το σύνολο $\Omega_0 := \Omega \setminus \limsup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ ανήκει στην $\mathcal{F}_T$ και από το πρώτο Λήμμα Borel-Cantelli έχει πιθανότητα 1. Για κάθε $\omega \in \Omega_0$, υπάρχει $N(\omega) \in \mathbb{N}$ με

$$\sup_{0\leq t\leq T} |M_{n_{k+1}}(t) - M_{n_k}(t)| < \frac{1}{2^k}$$

για κάθε $k \geq N(\omega)$. Άρα για κάθε σταθερό $\omega \in \Omega_0$ η ακολουθία συναρτήσεων $(M_{n_k})_{k\geq 1}$ είναι βασική στον χώρο $(C[0, T], \|\cdot\|_\infty)$ των συνεχών συναρτήσεων στο $[0, T]$ με τη supremum μετρική. Αυτός ο χώρος είναι πλήρης, οπότε η ακολουθία συγκλίνει (ομοιόμορφα) σε ένα στοιχείο, έστω M, του $C[0, T]$ (Πρόταση 27.11 στο Νεγρεπόντης Σ., Γιωτόπουλος Σ., Γιαννακούλιας Ε (1992), τόμος II). Για $\omega \in \Omega \setminus \Omega_0$, ορίζουμε $M(t)(\omega) = 0$ για κάθε $t \in [0, T]$. Για σταθερό t, το όριο $M(t)$ είναι $\mathcal{F}_t$ μετρήσιμη και άρα είναι τυχαία μεταβλητή.

Ισχυρισμος. Η M είναι εκδοχή της $(I_t(X))_{t\in[0,T]}$.

Έστω $t > 0$ σταθερό. Αρκεί να δείξουμε ότι η τυχαία μεταβλητή $M(t)$ είναι επίσης το όριο της $(M_t(X_{n_k}))_{k\geq 1}$ στον $L^2(\mathbf{P})$ και άρα ανήκει στην κλάση $I_t(X)$. Αυτό προκύπτει γιατί η $(M_t(X_{n_k}))_{k\geq 1}$ είναι Cauchy στον $L^2(\mathbf{P})$ (από το ότι η $(X_{n_k})_{k\geq 1}$ είναι Cauchy στον $L^2(\lambda \times \mathbf{P})$ και την ισομετρία Itô) και εύκολα δείχνει κανείς ότι οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή στην οποία συγκλίνει η $(M_t(X_{n_k}))_{k\geq 1}$ στον $L^2(\mathbf{P})$ είναι σχεδόν παντού ίδια με το σημειακό της όριο $M(t)$.

Το ότι η M είναι martingale προκύπτει από την Πρόταση 9.12(iii). ■

Απόδειξη της Πρότασης 11.5

Θα χρειαστούμε το εξής τεχνικό αποτέλεσμα που έχει και από μόνο του ενδιαφέρον.

Λήμμα Γ′.1 (Τοπικότητα στον $\mathcal{H}^2_{LOC}$)**.** *Έστω $X, Y \in \mathcal{H}^2_{LOC}$, T χρόνος διακοπής ώστε για κάθε $s \geq 0$ να ισχύει $X(s,\omega) = Y(s,\omega)$ σχεδόν παντού στο $\{\omega \in \Omega : T(\omega) \geq s\}$. Τότε για κάθε $t > 0$ ισχύει*

$$\int_0^t X(s,\omega)\, dB_s = \int_0^t Y(s,\omega)\, dB_s$$

σχεδόν παντού στο $\{\omega \in \Omega : T(\omega) \geq t\}$.

Απόδειξη. Για $n \geq 1$ θέτουμε

$$\tau_n := n \wedge \inf\left\{ r > 0 : \int_0^r X^2(s,\omega)\, ds \geq n \text{ και } \int_0^r Y^2(s,\omega)\, ds \geq n \right\}.$$

Κάθε τ_n είναι χρόνος διακοπής και η ακολουθία $(\tau_n)_{n\geq 1}$ είναι $\mathcal{H}^2$-τοπικοποιούσα για τις X, Y. Επειδή για κάθε $s \geq 0$ ισχύει $X^{(t_n)}(s,\omega) = Y^{(\tau_n)}(s,\omega)$ σχεδόν παντού στο $\{\omega : T(\omega) \geq s\}$, έχουμε

$$I_t(X^{(\tau_n)}) = I_t(Y^{(\tau_n)})$$

σχεδόν παντού στο $\{\omega : T(\omega) \geq t\}$. Άρα

$$I_t(X) = I_t(X^{(\tau_n)}) = I_t(Y^{(\tau_n)}) = I_t(Y)$$

στο $\{\omega : T(\omega) \geq t\} \cap \{\omega : \tau_n \geq t\}$, επομένως και στο

$$\{\omega : T(\omega) \geq t\} \cap \left(\cup_{n=1}^{\infty} \{\omega : \tau_n \geq t\} \right) = \{\omega : T(\omega) \geq t\}.$$

Για να είμαστε ακριβείς, το σύνολο αριστερά της ισότητας ίσως είναι γνήσιο υποσύνολο αυτού δεξιά γιατί η $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$ ισχύει με πιθανότητα 1 και όχι απαραίτητα παντού. Η διαφορά όμως των δύο συνόλων έχει πιθανότητα 0 και έτσι έχουμε το συμπέρασμα. ∎

Απόδειξη της Πρότασης 11.5. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f έχει συμπαγή φορέα. Δηλαδή το σύνολο $K := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ είναι φραγμένο. Με αυτή την υπόθεση μάλιστα θα δείξουμε κάτι ισχυρότερο, δηλαδή ότι η σύγκλιση ισχύει στη νορμα του $L^2(\mathbf{P})$.
Για $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\delta > 0$, και $I \subset \mathbb{R}$, ορίζουμε την ποσότητα

$$\operatorname{osc}(g, I, \delta) := \sup\{|g(x) - g(y)| : x, y \in I, |x - y| < \delta\}, \tag{Γ′.11}$$

η οποία είναι ένα μέτρο της ομοιόμορφης συνέχειας της g στο I.

Θέτουμε $X(s,\omega) = f(B_s)\mathbf{1}_{s\leq t}$ για $s \geq 0$. Μια ακολουθία του $\mathcal{H}^2_0$ που προσεγγίζει τη X στον $\mathcal{H}^2$ είναι η

$$X_n(s,\omega) = \sum_{j=1}^{k(n)} f(B_{t^{(n)}_{j-1}}) \mathbf{1}_{(t^{(n)}_{j-1}, t^{(n)}_j]}(s).$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} \|X - X_n\|^2_{L^2(\lambda\times\mathbf{P})} &= \mathbf{E}\left(\int_0^t |X(s,\omega) - X_n(s,\omega)|^2\, ds \right) = \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{k(n)} \int_{t^{(n)}_{j-1}}^{t^{(n)}_j} |f(B_s) - f(B_{t^{(n)}_{j-1}})|^2\, ds \right) \\ &\leq t\, \mathbf{E}\left(\{\operatorname{osc}(f, K, \operatorname{osc}(B, [0,t], \|\Delta_n\|))\}^2 \right). \end{aligned}$$

Η ποσότητα στην τελευταία μέση τιμή συγκλίνει στο 0 σημειακά για $n \to \infty$ αφού $\|\Delta_n\| \to 0$ και οι B, f είναι ομοιόμορφα συνεχείς στα σύνολα $[0,t], \mathbb{R}$ αντίστοιχα. Επίσης όμως είναι φραγμένη από $4 \sup |f|(\overline{K})$. Από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης έπεται ότι η μέση τιμή τείνει στο 0.

Άρα $I(X_n) \to I(X)$ στον $L^2(\mathbf{P})$. Όμως $I(X)$ είναι το αριστερό μέλος της (11.4) και $I(X_n)$ είναι στο δεξί μέλος της.

Τώρα για τη γενική περίπτωση, χρησιμοποιούμε την ίδια τεχνική όπως στην απόδειξη της Πρότασης 8.9. Έστω $r > 0$ και $\tau_r := \inf\{s > 0 : |B_s| > r\}$. Για οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, καλούμε $J_n(f), J(f)$ το αριστερό και το δεξί μέλος της (8.7) αντίστοιχα. Έστω και $g_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ισούται με 1 στο $[-r, r]$ και με 0 στο $\mathbb{R} \setminus [-r-1, r+1]$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(|J_n(f) - J(f)| > \varepsilon) &= \mathbf{P}(|J_n(f) - J(f)| > \varepsilon, \tau_r > t) + \mathbf{P}(|J_n(f) - J(f)| > \varepsilon, \tau_r \le t) \\
&= \mathbf{P}(|J_n(fg_r) - J(fg_r)| > \varepsilon, \tau_r > t) + \mathbf{P}(|J_n(f) - J(f)| > \varepsilon, \tau_r \le t) \\
&\le \mathbf{P}(|J_n(fg_r) - J(fg_r)| > \varepsilon) + \mathbf{P}(\tau_r \le t).
\end{aligned}
$$

Για την πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι στο $\{\tau_r > t\}$ ισχύει $J_n(f) = J_n(fg_r)$, το οποίο είναι προφανές, και ότι στο ίδιο σύνολο ισχύει $J(f) = J(fg_r)$, λόγω του Λήμματος Γ΄.1 αφού για κάθε $s \ge 0$ έχουμε $f(B_s)g_r(B_s) = f(B_s)$ για κάθε $\omega \in \Omega$ με $\tau_r(\omega) \ge s$ (γιατί για τέτοια ω ισχύει $|B_s| \le r$ και άρα $g_r(B_s) = 1$).

Για την fg_r έχουμε ήδη δείξει το θεώρημα, οπότε έχουμε $\overline{\lim}_{n\to\infty} \mathbf{P}(|J_n(f) - J(f)| > \varepsilon) \le \mathbf{P}(\tau_r \le t)$ για κάθε $r > 0$. Όμως το όριο της τελευταίας ποσότητας για $r \to \infty$ είναι 0 όπως έχουμε δείξει στο τέλος της απόδειξης της Πρότασης 8.9. ■

Απόδειξη του Θεωρήματος 12.1

Απόδειξη. Έστω $(\Delta_n)_{n\ge1}$ ακολουθία διαμερίσεων του $[0, t]$ με $\Delta_n := \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{k(n)}^{(n)} = t\}$ και με $\|\Delta_n\| \to 0$. Με χρήση του Θεωρήματος Taylor, γράφουμε

$$
f(B_t) - f(B_0) = \sum_{j=1}^{k(n)} \{f(B_{t_j^{(n)}}) - f(B_{t_{j-1}^{(n)}})\} = \sum_{j=1}^{k(n)} \left\{ f'(B_{t_{j-1}^{(n)}})(B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}}) + \frac{1}{2} f''(\xi_j^{(n)})(B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}})^2 \right\}
$$

με $\xi_j^{(n)}$ σημείο ανάμεσα στα $B_{t_{j-1}^{(n)}}, B_{t_j^{(n)}}$ για κάθε $1 \le j \le k$. Έπεται ότι

$$
\left| f(B_t) - f(B_0) - \sum_{j=1}^{k(n)} f'(B_{t_{j-1}^{(n)}})(B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k(n)} f''(B_{t_{j-1}^{(n)}})(B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}})^2 \right| \tag{Γ΄.12}
$$

$$
\le \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k(n)} \left| f''(\xi_j^{(n)}) - f''(B_{t_{j-1}^{(n)}}) \right| (B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}})^2
$$

$$
\le \frac{1}{2} \operatorname{osc}(f'', B([0,t]), \operatorname{osc}(B, [0,t], \|\Delta_n\|)) \sum_{j=1}^{k(n)} (B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}})^2. \tag{Γ΄.13}
$$

Η συνάρτηση osc έχει οριστεί στην (Γ΄.11). Τώρα για $n \to \infty$, παρατηρούμε τα εξής:

- Το πρώτο άθροισμα στην (Γ΄.12) συγκλίνει κατά πιθανότητα στο $\int_0^t f'(B_s)\, dB_s$ λόγω της Πρότασης 11.5.
- Το δεύτερο άθροισμα συγκλίνει κατά πιθανότητα στο $\int_0^t f''(B_s)\, ds$ λόγω της Πρότασης 8.9.
- Η ποσότητα
$$\operatorname{osc}(f'', B([0,t]), \operatorname{osc}(B, [0,t], \|\Delta_n\|))$$
τείνει στο 0 με πιθανότητα 1 γιατί για κάθε $B \in C[0, \infty)$, η $\delta_n := \operatorname{osc}(B, [0,t], \|\Delta_n\|)$ τείνει στο 0 αφού η B είναι ομοιόμορφα συνεχής στο συμπαγές σύνολο $[0, t]$ και $\lim_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$. Έπειτα, η f'' είναι ομοιόμορφα συνεχής στο συμπαγές σύνολο $B([0,t])$ και άρα η $\operatorname{osc}(f'', B([0,t]), \delta_n)$ τείνει στο 0 για $n \to \infty$ αφού $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$.
- Το άθροισμα στην (Γ΄.13) συγκλίνει κατά πιθανότητα στο t λόγω της Πρότασης 8.9.

Με χρήση γνωστού θεωρήματος από τη θεωρία μέτρου, βρίσκουμε γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών $(n_k)_{k\geq 1}$ ώστε κατά μήκος αυτής της ακολουθίας όλες οι πιο πάνω συγκλίσεις να συμβαίνουν με πιθανότητα 1. Έτσι προκύπτει ότι η (12.3) ισχύει με πιθανότητα 1 για το συγκεκριμένο $t > 0$.

Επομένως οι δύο ανελίξεις που ορίζονται από το δεξί και το αριστερό μέλος της (12.3) είναι τροποποίηση η μια της άλλης. Επειδή όμως με πιθανότητα 1 έχουν και οι δύο συνεχή μονοπάτια (με βάση τη σύμβαση για το στοχαστικό ολοκλήρωμα), έπεται από την Πρόταση 4.6 ότι οι δύο ανελίξεις είναι μη διακρίσιμες. Αυτός είναι ακριβώς ο ισχυρισμός του θεωρήματος. ■

Απόδειξη του Θεωρήματος 12.3

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Taylor ως εξής. Για $(x_0, t_0), (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$,

$$\begin{aligned} f(x,t) - f(x_0,t_0) &= f(x,t) - f(x,t_0) + f(x,t_0) - f(x_0,t_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(x,\tilde{t})(t-t_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\tilde{x},t_0)(x-x_0)^2, \end{aligned}$$

για κάποια σημεία $\tilde{t}, \tilde{x}$, με το $\tilde{t}$ ανάμεσα στα t_0, t και το $\tilde{x}$ ανάμεσα στα x_0, x αντίστοιχα.

Έστω $\Delta := \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = t\}$ μια διαμέριση του $[0,t]$. Πιο κάτω θα χρησιμοποιήσουμε τη συντομογραφία $\Delta t_j := t_j - t_{j-1}, \Delta B_j = B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$ για $j = 1, 2, \ldots, k$. Με χρήση του Θεωρήματος Taylor γράφουμε

$$\begin{aligned} f(B_t,t) - f(B_0,0) &= \sum_{j=1}^{k}\{f(B_{t_j},t_j) - f(B_{t_{j-1}},t_{j-1})\} \\ &= \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial t}(B_{t_j},\zeta_j)\Delta t_j + \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial x}(B_{t_{j-1}},t_{j-1})\Delta B_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\eta_j,t_{j-1})(\Delta B_j)^2 \end{aligned}$$

με ζ_j σημείο ανάμεσα στα t_{j-1}, t_j και η_j σημείο ανάμεσα στα $B_{t_{j-1}}, B_{t_j}$ για κάθε $1 \leq j \leq k$. Έπεται ότι

$$\left|f(B_t,t) - f(B_0,0) - \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial t}(B_{t_j},t_j)\Delta t_j - \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial x}(B_{t_{j-1}},t_{j-1})\Delta B_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B_{t_{j-1}},t_{j-1})(\Delta B_j)^2\right| \tag{Γ'.14}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k}\left|\frac{\partial f}{\partial t}(B_{t_j},t_j) - \frac{\partial f}{\partial t}(B_{t_j},\zeta_j)\right|\Delta t_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B_{t_{j-1}},t_{j-1}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\eta_j,t_{j-1})\right|(\Delta B_j)^2. \tag{Γ'.15}$$

Για κάθε συνάρτηση $g : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, σύνολο $A \subset \mathbb{R} \times [0,\infty)$, και $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$, ορίζουμε

$$w(g,A,\delta_1,\delta_2) := \sup\{|g(x_1,y_1) - g(x_2,y_2)| : (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in A, |x_1 - x_2| < \delta_1, |y_1 - y_2| < \delta_2\},$$

το οποίο είναι ένα μέτρο της ομοιόμορφης συνέχειας της g στο A.

Ένα άνω φράγμα για την ποσότητα στην (Γ'.15) είναι το

$$\begin{aligned} &t\, w\left(\frac{\partial f}{\partial t}, B([0,t]) \times [0,t], \operatorname{osc}(B,[0,t],\|\Delta\|), \|\Delta\|\right) \\ &\qquad + w\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, B([0,t]) \times [0,t], \operatorname{osc}(B,[0,t],\|\Delta\|), \|\Delta\|\right)\sum_{j=1}^{k}(\Delta B_j)^2. \end{aligned}$$

Έστω τώρα $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία διαμερίσεων του $[0,t]$ με $\|\Delta_n\| \to 0$. Εφαρμόζουμε την ανισότητα (Γ'.14), (Γ'.15) για τη διαμέριση Δ_n και παίρνουμε $n \to \infty$.

(i) Το πρώτο άθροισμα στην (Γ'.14) συγκλίνει με πιθανότητα 1 στο $\int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(B_s, s)\, ds$.

(ii) Το δεύτερο άθροισμα συγκλίνει κατά πιθανότητα στο $\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(B_s, s)\, dB_s$.

(iii) Το τρίτο άθροισμα συγκλίνει κατά πιθανότητα στο $\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B_s, s)\, ds$.

(iv) Οι ποσότητες

$$w\left(\frac{\partial f}{\partial t}, B([0,t]) \times [0,t], \operatorname{osc}(B,[0,t],\|\Delta_n\|), \|\Delta_n\|\right),$$
$$w\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, B([0,t]) \times [0,t], \operatorname{osc}(B,[0,t],\|\Delta_n\|), \|\Delta_n\|\right)$$

τείνουν στο 0 με πιθανοτητα 1.

(v) Το άθροισμα $\sum_{j=1}^{k(n)}(B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}})^2$ συγκλίνει κατά πιθανότητα στο t.

Για την απόδειξη των (ii) και (iii) χρειάζεται να αποδείξει κανείς τις προφανείς γενικεύσεις των Προτάσεων 8.9, 11.5, ενώ για την απόδειξη της (iv) επιχειρηματολογούμε όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 12.1. Και η απόδειξη κλείνει όπως και αυτή του Θεωρήματος 12.1. ■

Απόδειξη του Θεωρήματος 12.5

Απόδειξη. (Σχέδιο) Η απόδειξη αυτής της έκδοσης είναι ανάλογη της έκδοσης ΙΙ με κάποιες λεπτομέρειες παραπάνω οι οποίες είναι μη ουσιώδεις. Θα δώσουμε μόνο μια περιγραφή της. Με τον συμβολισμό της απόδειξης της έκδοσης ΙΙ πάλι γράφουμε

$$f(B_t, t) - f(B_0, 0) = \sum_{i=1}^{n} \{f(B_{t_i}, t_i) - f(B_{t_{i-1}}, t_{i-1})\},$$

και τώρα για κάθε όρο του αθροίσματος έχουμε

$$\begin{aligned} f(B_{t_i}, t_i) - f(B_{t_{i-1}}, t_{i-1}) &= f(B_{t_i}, t_i) - f(B_{t_i}, t_{i-1}) + f(B_{t_i}, t_{i-1}) - f(B_{t_{i-1}}, t_{i-1}) \\ &= \frac{\partial f}{\partial s}(B_{t_i}, \zeta)\, \Delta t_i + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(B_{t_{i-1}}, t_{i-1}) \Delta B_i^{(j)} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\eta, t_{i-1}) \Delta B_i^{(j)} \Delta B_i^{(k)} \end{aligned} \tag{Γ′.16}$$

για κάποιο $\zeta \in (t_{i-1}, t_i)$ και κάποιο $\eta \in \mathbb{R}^d$ στο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $B_{t_{i-1}}, B_{t_i}$.

Εφαρμόζοντας τα πιο πάνω σε μια ακολουθία διαμερίσεων $(\Delta_n)_{n \geq 1}$ όπως στην Πρόταση 8.9, είναι σαφές ότι οι πρώτοι δύο όροι στην (Γ′.16) δίνουν τα πρώτα δύο ολοκληρώματα στην (12.8). Ο τελευταίος όρος στην (Γ′.16) γράφεται

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\eta, t_{i-1})(\Delta B_i^{(j)})^2 + \sum_{\substack{1 \leq j,k \leq n \\ j \neq k}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\eta, t_{i-1}) \Delta B_i^{(j)} \Delta B_i^{(k)}.$$

Το πρώτο από αυτά τα αθροίσματα οδηγεί στο τελευταίο ολοκλήρωμα της (12.8) με βάση την Πρόταση 8.9. Το δεύτερο άθροισμα δεν συνεισφέρει τίποτα και αυτό πηγάζει από το ότι αν οι B, W είναι ανεξάρτητες (μονοδιάστατες) κινήσεις Brown, η ακολουθία

$$\sum_{i=1}^{k(n)} (B_{t_i^{(n)}} - B_{t_{i-1}^{(n)}})(W_{t_i^{(n)}} - W_{t_{i-1}^{(n)}})$$

τείνει στο 0 στον $L^2(\mathbf{P})$ καθώς $n \to \infty$ (Άσκηση 12.3). ■

Δ′

Τεχνικά αποτελέσματα ΙΙ

Απόδειξη της Πρότασης 4.10

Απόδειξη. Έστω C το σύνολο των μετρήσιμων κυλίνδρων στο $\mathcal{S}^{[0,\infty)}$ με παράγοντες ανοιχτά σύνολα του $\mathcal{S}$. Τα στοιχεία του C είναι ανοιχτά ως προς τη μετρική d που ορίσαμε στην Παρατήρηση 4.9 και, επειδή παράγουν την $\otimes_{t\in[0,\infty)}\mathcal{B}(\mathcal{S})$, έπεται ότι $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$.

Για την $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ανοιχτό σύνολο στο Y είναι στοιχείο της $\mathcal{A}_1$. Ο Y είναι διαχωρίσιμος, άρα κάθε ανοιχτό σύνολό του γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση σφαιρών. Έπειτα κάθε σφαίρα γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση συνόλων της μορφής

$$A_{f_0,n,\varepsilon} := \{f \in Y : \sup_{t\in[0,n]} d(f(t), f_0(t)) < \varepsilon\}$$

όπου $f_0 \in Y, n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$. Αυτό το σύνολο είναι στοιχείο της $\mathcal{A}_1$ γιατί γράφεται ως $\cup_{j\geq 1} \cap_{k\geq 1} B_{j,k}$ με

$$B_{j,k} := \left\{ f \in Y : \sup_{0\leq m\leq n2^k} d(f(m/2^k), f_0(m/2^k)) \leq \varepsilon - (1/j) \right\}$$

και κάθε $B_{j,k}$ είναι μετρήσιμος κύλινδρος. ∎

Απόδειξη του Λήμματος 9.7

Λήμμα 9.7 Ο $\mathcal{H}_0^2$ είναι πυκνός υπόχωρος του $\mathcal{H}^2$.

Απόδειξη. Η απόδειξη ακολουθεί τα βήματα που δίνονται στο Πρόβλημα 2.5 από το Κεφάλαιο 3 του Karatzas and Shreve (1991).

Έστω $X \in \mathcal{H}^2$. Θέλουμε να βρούμε μια ακολουθία στον $\mathcal{H}_0^2$ που να προσεγγίζει τη X. Το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης δίνει ότι

$$\lim_{T\to\infty} \|X - X_T\|_2 = 0,$$

όπου η ανέλιξη X_T ορίζεται ως

$$X_T(t,\omega) = X(t,\omega)\mathbf{1}_{t\in[0,T]}\mathbf{1}_{|X(t,\omega)|\leq T}.$$

Έπεται ότι μπορούμε από την αρχή να υποθέσουμε ότι υπάρχει $T > 0$ ώστε$|X(t,\omega)| \leq T$ για κάθε $(t,\omega) \in [0,\infty) \times \Omega$ (δηλαδή η X είναι φραγμένη) και $X(t,\omega) = 0$ για κάθε $(t,\omega) \in (T,\infty) \times \Omega$.

Επίσης, επεκτείνουμε τη X θέτοντας $X(t,\omega) = 0$ για κάθε $t < 0$ και $\omega \in \Omega$.

Βήμα 1. Για $\varepsilon > 0$, υπάρχει X^ε μετρήσιμη ανέλιξη ώστε για κάθε $\omega \in \Omega$ η συνάρτηση $t \mapsto X^\varepsilon(t,\omega)$ είναι συνεχής και

$$\|X - X^\varepsilon\|_2 < \varepsilon. \tag{Δ′.1}$$

Για $n \in \mathbb{N}^+$ θεωρούμε την ανέλιξη

$$H_n(t,\omega) := n \int_{t-n^{-1}}^{t} X(s,\omega)\, ds,$$

η οποία είναι συνεχής ως προς t για κάθε σταθερό ω (χρησιμοποιούμε το ότι η X είναι φραγμένη). Έπειτα για κάθε $\omega \in \Omega$, το σύνολο $\{t \in [0,T] :$ δεν ισχύει $\lim_{n\to\infty} H_n(t,\omega) = X(t,\omega)\}$ έχει μέτρο Lebesgue μηδέν

[Θεώρημα 14.13 στο Κουμουλλής Γ. και Νεγρεπόντης Σ (1991). Το ότι αυτό το σύνολο είναι μετρήσιμο έπεται από την Πρόταση 9.4 από την ίδια αναφορά]. Άρα το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης δίνει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(\int_0^T |X(t,\omega) - H_n(t,\omega)|^2 \, dt \right) = 0$$

και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Βήμα 2. Ισχύει

$$\lim_{h\to 0^+} \mathbf{E}\left(\int_0^T |X(t,\omega) - X(t-h,\omega)|^2 \, dt \right) = 0. \tag{Δ$'$.2}$$

Για $\varepsilon > 0$ βρίσκουμε μια X^ε όπως στο προηγούμενο βήμα. Τότε η τριγωνική ανισότητα για τη νόρμα $\|\cdot\|_2$ δίνει ότι

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{E} \int_0^T |X(t,\omega) - X(t-h,\omega)|^2 \, dt \right)^{1/2} &\le \left(\mathbf{E} \int_0^T |X(t,\omega) - X^\varepsilon(t,\omega)|^2 \, dt \right)^{1/2} \\
+ \left(\mathbf{E} \int_0^T |X^\varepsilon(t,\omega) - X^\varepsilon(t-h,\omega)|^2 \, dt \right)^{1/2} &+ \left(\mathbf{E} \int_0^T |X^\varepsilon(t-h,\omega) - X(t-h,\omega)|^2 \, dt \right)^{1/2} \\
&\le 2\varepsilon + \left(\mathbf{E} \int_0^T |X^\varepsilon(t,\omega) - X^\varepsilon(t-h,\omega)|^2 \, dt \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα συγκλίνει στο 0 για $h \to 0^+$ με χρήση του θεωρήματος φραγμένης σύγκλισης και του ότι η X^ε είναι συνεχής ως προς το πρώτο της όρισμα. Επειδή το ε ήταν αυθαίρετο, το συμπέρασμα έπεται.

Για τη συνέχεια, θα ορίσουμε μερικές ακολουθίες ανελίξεων που σκοπό έχουν να προσεγγίσουν τη X. Ορίζουμε

$$\phi_n : \mathbb{R} \to \left\{ \frac{j}{2^n} : j \in \mathbb{Z} \right\}$$

με

$$\phi_n(t) = \frac{j-1}{2^n} \text{ αν } t \in \left(\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n} \right].$$

Επειδή για κάθε $t, s \ge 0, n \in \mathbb{N}^+$ ισχύει $t - 2^{-n} \le \phi_n(t-s) + s < t$, έπεται ότι η ανέλιξη $X^{(n,s)}$ που ορίζεται ως

$$X^{(n,s)}(t,\omega) := X(\phi_n(t-s) + s, \omega)$$

για κάθε $t \ge 0, \omega \in \Omega$ είναι προσαρμοσμένη. Αφήνεται ως άσκηση να δειχθεί ότι είναι στοιχείο του $\mathcal{H}_0$.

Βήμα 3.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} \int_0^T \int_0^1 |X(t,\omega) - X^{(n,s)}(t,\omega)|^2 \, ds dt = 0. \tag{Δ$'$.3}$$

Για t, ω δεδομένα, έχουμε

$$\int_0^1 |X(t,\omega) - X^{(n,s)}(t,\omega)|^2 \, ds \le \sum_{j=[2^n t]-2^n+1}^{j=[2^n t]+1} \int_{t-j2^{-n}}^{t-(j-1)2^{-n}} |X(t,\omega) - X(\phi_n(t-s) + s, \omega)|^2 \, ds.$$

Παρατηρούμε ότι ο j όρος του τελευταίου αθροίσματος ισούται με

$$\int_{t-j2^{-n}}^{t-(j-1)2^{-n}} |X(t,\omega) - X((j-1)2^{-n} + s, \omega)|^2 \, ds = \int_0^{2^{-n}} |X(t,\omega) - X(t-r,\omega)|^2 \, dr,$$

όπου κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $r = t - s - (j-1)2^{-n}$. Άρα η μέση τιμή στην (Δ′.3) φράσσεται από

$$(2^n + 1)\,\mathbf{E}\int_0^T \int_0^{2^{-n}} |X(t,\omega) - X(t-r,\omega)|^2\,dr dt = (2^n+1)\int_0^{2^{-n}} \mathbf{E}\int_0^T |X(t,\omega) - X(t-r,\omega)|^2\,dt dr$$

$$(1 + 2^{-n}) \sup_{r\in[0,2^{-n}]} \mathbf{E}\int_0^T |X(t,\omega) - X(t-r,\omega)|^2\,dt.$$

Η τελευταία ποσότητα τείνει στο 0 λόγω της (Δ′.2).

Βήμα 4. Απόδειξη του Λήμματος.

Το Λήμμα Fatou και το προηγούμενο βήμα δίνουν ότι

$$\int_0^1 \varliminf_{n\to\infty}\left(\mathbf{E}\int_0^T |X(t,\omega) - X^{(n,s)}(t,\omega)|^2\,dt\right) ds \le 0.$$

Άρα υπάρχει $s \in [0,1]$ ώστε

$$\varliminf_{n\to\infty} \mathbf{E}\int_0^T |X(t,\omega) - X^{(n,s)}(t,\omega)|^2\,dt = 0.$$

Κάθε $X^{(n,s)}$ είναι στοιχείο του $\mathcal{H}_0$, οπότε το λήμμα έπεται. ∎

Απόδειξη της Πρότασης 10.3

Πρόταση 10.3 Έστω T χρόνος διακοπής. Με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\int_0^{t\wedge T} X_s\,dB_s = \int_0^t X_s \mathbf{1}_{[0,T]}(s)\,dB_s \tag{Δ′.4}$$

για κάθε $t > 0$.

Απόδειξη. **Βήμα 1**. Υποθέτουμε ότι $X \in \mathcal{H}_0^2$ και ότι ο T παίρνει μόνο πεπερασμένο πλήθος τιμών. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η X γράφεται όπως στην (9.4) και ο T παίρνει τιμές μέσα στο σύνολο $\{t_i : i = 1, 2, \dots, k+1\}$. Και είναι θέμα ρουτίνας (εφαρμογή του Ορισμού 9.4) να ελέγξουμε ότι ισχύει η (10.2) σε κάθε $\omega \in \Omega$.

Ξεκινάμε. Η ανέλιξη $\{X_s \mathbf{1}_{[0,T]}(s) : s \ge 0\}$ είναι απλή γιατί γράφεται ως

$$X_s \mathbf{1}_{[0,T]}(s) = \sum_{i=1}^k A_i(\omega) \mathbf{1}_{T(\omega)\ge t_{i+1}} \mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(s),$$

και αυτό γιατί, για $s \in (t_i, t_{i+1}]$, η απαίτηση $s \le T(\omega)$ ισοδυναμεί με $t_{i+1} \le T(\omega)$ αφού ο T δεν παίρνει τιμές στο (t_i, t_{i+1}). Έπειτα η $\mathbf{1}_{T(\omega)\ge t_{i+1}}$ είναι $\mathcal{F}_{t_i}$-μετρήσιμη αφού είναι η δείκτρια του συνόλου $\{T \ge t_{i+1}\} = \Omega \setminus \{T \le t_i\}$. Άρα το $\int_0^t X_s \mathbf{1}_{[0,T]}(s)\,dB_s$ ισούται με

$$\begin{array}{ll} 0 & \text{αν } t < t_1 \\ \left\{\sum_{i=1}^{\ell-1} A_i(\omega)\mathbf{1}_{T(\omega)\ge t_{i+1}}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right\} + A_\ell(\omega)\mathbf{1}_{T(\omega)\ge t_{\ell+1}}(B_t - B_{t_\ell}) & \text{αν } t \in [t_\ell, t_{\ell+1}) \text{ με } \ell \in \{1,2,\dots,k\} \\ \sum_{i=1}^k A_i(\omega)\mathbf{1}_{T(\omega)\ge t_{i+1}}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) & \text{αν } t \ge t_{k+1} \end{array}$$

Τώρα, αν $T(\omega) = t_r$, με $r \in \{1, 2, \dots, k+1\}$, αυτή η ποσότητα ισούται με

$$\begin{array}{ll} 0 & \text{αν } t < t_1 \\ \left\{\sum_{i=1}^{\ell-1} A_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right\} + A_\ell(\omega)(B_t - B_{t_\ell}) & \text{αν } t \in [t_\ell, t_{\ell+1}) \text{ με } \ell \in \{1,2,\dots,r-1\} \\ \sum_{i=1}^{r-1} A_i(\omega)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) & \text{αν } t \ge t_r \end{array} \tag{Δ′.5}$$

Το αριστερό μέλος της (Δ′.4), στο σύνολο που $T(\omega) = t_r$, ισούται με

$$\int_0^{t\wedge t_r} X_s\,dB_s$$

το οποίο παίρνει τιμές ακριβώς όπως στην (Δ΄.5).

Βήμα 2. Υποθέτουμε ότι $X \in \mathcal{H}_0^2$ και ο T είναι οποιοσδήποτε χρόνος διακοπής. Επειδή τα δύο μέλη της ζητούμενης ορίζουν ανελίξεις που με πιθανότητα 1 έχουν συνεχή μονοπάτια, αρκεί να δείξουμε ότι αυτές οι ανελίξεις είναι τροποποίηση η μια της άλλης. Το συμπέρασμα θα έπεται τότε από την Πρόταση 4.6. Για $n \in \mathbb{N}^+$, θέτουμε

$$T_n(\omega) := \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{αν } T(\omega) \in \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right] \text{ με } k \in \mathbb{N}^+, k \leq n, \\ n & \text{αν } T(\omega) > n. \end{cases}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι ο T_n είναι χρόνος διακοπής και βέβαια παίρνει μόνο πεπερασμένο πλήθος τιμών. Από το προηγούμενο βήμα έχουμε ότι με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\int_0^{t \wedge T_n} X_s \, dB_s = \int_0^t X_s \mathbf{1}_{[0,T_n]}(s) \, dB_s \tag{Δ΄.6}$$

για κάθε $t > 0$. Στο ίδιο σύνολο πιθανότητας 1 μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ανέλιξη $X \bullet B$ είναι συνεχής. Επομένως, επειδή $T_n \to T$, για δεδομένο $t > 0$, το αριστερό μέλος της (Δ΄.6) συγκλίνει στο $\int_0^{t \wedge T} X_s \, dB_s$. Έπειτα, το δεξί μέλος της (Δ΄.6) συγλίνει στο $\int_0^t X_s \mathbf{1}_{[0,T]}(s) \, dB_s$ στον $L^2(\mathbf{P})$ γιατί

$$\mathbf{E}\left(\int_0^t X_s^2 |\mathbf{1}_{[0,T_n]}(s) - \mathbf{1}_{[0,T]}(s)|^2 \, ds\right) \to 0$$

καθώς $n \to \infty$ από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. Και περνώντας σε υπακολουθία που συγκλίνει με πιθανότητα 1, έχουμε ότι για δεδομένο $t > 0$ ισχύει η ισότητα (Δ΄.4) με πιθανότητα 1.

Βήμα 3. Δείχνουμε τώρα τη γενική περίπτωση. Όπως και στο προηγούμενο βήμα, θα επικαλεστούμε την Πρόταση 4.6.

Έστω $t > 0$ δεδομένο, και $(X^{(n)})_{n \geq 1}$ ακολουθία στον $\mathcal{H}_0^2$ που συγκλίνει στη $(X_s \mathbf{1}_{[0,t]}(s))_{s \geq 0}$ στον $L^2(\lambda \times \mathbf{P})$. Από το προηγούμενο βήμα, έχουμε ότι με πιθανότητα 1, για κάθε $n \geq 1$, ισχύει

$$\int_0^{t \wedge T} X_s^{(n)} \, dB_s = \int_0^t X_s^{(n)} \mathbf{1}_{[0,T]}(s) \, dB_s. \tag{Δ΄.7}$$

Αντίστοιχα όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος (10.2), υπάρχει σύνολο $\Omega_0 \subset \Omega$ πιθανότητας 1 και γνησίως αύξουσα ακολουθία $(n_k)_{k \geq 1}$ φυσικών ώστε στο Ω_0 να ισχύει

$$\int_0^r X_s^{(n_k)} \, dB_s \to \int_0^r X_s \, dB_s$$

ομοιόμορφα για $r \in [0, t]$. Επειδή $t \wedge T(\omega) \leq t$, έχουμε στο Ω_0 επίσης

$$\int_0^{t \wedge T} X_s^{(n_k)} \, dB_s \to \int_0^{t \wedge T} X_s \, dB_s.$$

Το δεξί μέλος της (Δ΄.7) συγκλίνει στο $\int_0^t X_s \mathbf{1}_{[0,T]}(s) \, dB_s$ στον $L^2(\mathbf{P})$ γιατί

$$\mathbf{E}\left(\int_0^t |X_s - X_s^{(n)}|^2 \mathbf{1}_{[0,T]}(s) \, ds\right) \leq \mathbf{E}\left(\int_0^t |X_s - X_s^{(n)}|^2 \, ds\right) \to 0.$$

Αυτές οι παρατηρήσεις και η (Δ΄.7) δίνουν ότι η (Δ΄.4) ισχύει με πιθανότητα 1. ∎

Υποδείξεις για επιλεγμένες ασκήσεις

Κεφάλαιο 2

2.1 (β) Δείχνουμε τη ζητούμενη πρώτα για X δείκτρια ενός μετρήσιμου συνόλου, έπειτα για $X \geq 0$ μετρήσιμη απλή, έπειτα για $X \geq 0$ μετρήσιμη, και τέλος για X μετρήσιμη με $\int |X|\, d\mu < \infty$.

2.3 (α) Το ότι $\mathbf{E}(X \mid \mathcal{G}) \geq 0$ με πιθανότητα 1 είναι γνωστό από τη θεωρία. Μένει να δείξουμε ότι το $A := \{\mathbf{E}(X \mid \mathcal{G}) = 0\}$ έχει πιθανότητα 0. Το A είναι στοιχείο της $\mathcal{G}$ και, εφαρμόζοντας για αυτό την (2.1), έπεται εύκολα ότι $\mathbf{P}(A) = 0$.
(β) Χρησιμοποιούμε την Πρόταση 2.7.

2.4 Όχι. Μπορούμε να κατασκευάσουμε αντιπαράδειγμα χρησιμοποιώντας το Παράδειγμα 2.5 ή και αλλιώς.

2.5 Γράφουμε $\mathbf{E}(X \mid \mathcal{F}_1) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X \mid \mathcal{F}_2) \mid \mathcal{F}_1)$.

2.6 Εφαρμόζουμε τη σχέση $\mathbf{E}(\mathbf{E}(Y \mid \mathcal{G})) = \mathbf{E}(Y)$ με $Y := X\, \mathbf{E}(X \mid \mathcal{G})$.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X\, \mathbf{E}(X \mid \mathcal{G})) &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(X\, \mathbf{E}(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{G})) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X \mid \mathcal{G})\, \mathbf{E}(X \mid \mathcal{G})) \\ &= \mathbf{E}(\{\mathbf{E}(X \mid \mathcal{G})\}^2) \leq \mathbf{E}(\mathbf{E}(X^2 \mid \mathcal{G})) = \mathbf{E}(X^2) \end{aligned}$$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει γιατί η $\mathbf{E}(X \mid \mathcal{G})$ είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη. Η ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα Jensen.

2.7 Παρατηρούμε ότι η X είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη και δείχνουμε ότι $\mathbf{E}\{(X - Y)^2\} = 0$. Αυτό γιατί

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(XY \mid \mathcal{G})) = \mathbf{E}(X\, \mathbf{E}(Y \mid \mathcal{G})) = \ldots$$

2.8 Δουλεύουμε όπως στην προηγούμενη άσκηση.

2.9 (α) $\mathbf{E}(YX) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(YX \mid \mathcal{G})) = \mathbf{E}(Y\, \mathbf{E}(X \mid \mathcal{G}))$ αφού η Y είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη.
(β) Ο ισχυρισμός είναι σχεδόν προφανής αν λάβουμε υπόψιν μας τη γεωμετρική ερμηνεία της δεσμευμένης μέσης τιμής. Η γεωμετρία μας οδηγεί να δείξουμε ότι

$$\mathbf{E}\{(X - Y)^2) = \mathbf{E}\{(X - \mathbf{E}(X \mid \mathcal{G}))^2\} + \mathbf{E}\{(\mathbf{E}(X \mid \mathcal{G}) - Y)^2\},$$

και από αυτό έπεται ο ισχυρισμός.

2.10 Και τα δυό μέλη της ισότητας ισούνται με $\mathbf{E}\{\mathbf{E}(X \mid \mathcal{G})\, \mathbf{E}(Y \mid \mathcal{G})\}$.

2.12 Το αριστερό μέλος ισούται με

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(a_k^2 X_k^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{E}(a_i X_i a_j X_j).$$

Οι X_k, a_k είναι ανεξάρτητες γιατί η X_k είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_{k-1}$ και η a_k είναι $\mathcal{F}_{k-1}$-μετρήσιμη. Όμοια, για $i < j$, η X_j είναι ανεξάρτητη από τις a_i, a_j, X_i και άρα και από το γινόμενο $a_i a_j X_i$. Άρα

$$\mathbf{E}(a_k^2 X_k^2) = \mathbf{E}(a_k^2)\, \mathbf{E}(X_k^2) = \mathbf{E}(a_k^2),$$

ενώ για $1 \leq i < j \leq n$ ισχύει

$$\mathbf{E}(a_i X_i a_j X_j) = \mathbf{E}(a_i X_i a_j)\, \mathbf{E}(X_j) = 0.$$

2.14 (β) Δουλεύουμε όπως στην Άσκηση 2.1(β).

Κεφάλαιο 3

3.1 Προκύπτει με χρήση της Πρότασης 2.9.

3.2 (β) Εφαρμόζουμε το (α) για το σύνολο $\{X_m = 0\} \in \mathcal{F}_m$.

3.3 Όμοια όπως στο Παράδειγμα 3.2.

3.4 Όμοια όπως στα Παραδείγματα 3.2, 3.3. Μάλιστα η $(M_n)_{n\geq 0}$ είναι ειδική περίπτωση του Παραδείγματος 3.3.

3.5 (α) Είναι συνδυαστικό πρόβλημα. Για n, k που είναι και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί και με $|k| \leq n$ ισχύει

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n+k}{2}}.$$

(β) Χρησιμοποιούμε στο αποτέλεσμα του (α) την προσέγγιση Stirling για το παραγοντικό. $k! \sim (k/e)^k \sqrt{2\pi k}$.
(γ) Έπεται από το (β).

3.6 Έπεται από τις σχέσεις

$$\{T \leq n\} = \cup_{k=0}^{n}\{T = k\},$$
$$\{T = n\} = \{T \leq n\}\setminus\{T \leq n-1\}.$$

3.9 Για $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\{X_n^T \in A\} = \cup_{k=0}^{\infty}\{X_n^T \in A\} \cap \{T = k\} = \big(\cup_{k=0}^{n}\{X_k \in A\} \cap \{T = k\}\big) \cup (\{X_n \in A\} \cap \{T \leq n\}^c).$$

3.10 (α) Δουλεύουμε όπως στο Παράδειγμα 3.18 (i) χρησιμοποιώντας το martingale $(M_n)_{n\geq 0}$ από την Άσκηση 3.4.

(δ) Έστω $a < 0$ ακέραιος και $T = T_a \wedge T_b$. Χρησιμοποιούμε το martingale W από την Άσκηση 3.6 για να δείξουμε (με τον γνωστό τρόπο) ότι

$$\mathbf{E}(S_T) = (p-q)\,\mathbf{E}(T).$$

Δηλαδή

$$\mathbf{E}(T_a \wedge T_b) = \frac{1}{p-q}\{b\,\mathbf{P}(T_b < T_a) + a\,\mathbf{P}(T_a < T_b)\}.$$

Παίρνουμε $a \to -\infty$ και χρησιμοποιούμε την έκφραση για τις πιθανότητες $\mathbf{P}(T_b < T_a), \mathbf{P}(T_a < T_b)$ από το ερώτημα (α).

3.11 Η N είναι γεωμετρική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο 1/2, δηλαδή $\mathbf{P}(N = k) = (1/2)(1/2)^{k-1}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^+$ γιατί $N = \min\{k \geq 1 : Z_k = 0\}$. Το θεώρημα επιλεκτικής διακοπής δεν μπορεί να εφαρμοστεί γιατί $\mathbf{E}(R_0) = 1$, ενώ $\mathbf{E}(R_N) = 0$.

3.14 Δείχνουμε ότι $\mathbf{E_P}(X_{n+1}f \,|\, \mathcal{F}_n) = \mathbf{E_P}(X_{n+1}f_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n)$ ως εξής

$$\mathbf{E_P}(X_{n+1}f_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = \mathbf{E_P}(X_{n+1}\,\mathbf{E_P}(f \,|\, \mathcal{F}_{n+1}) \,|\, \mathcal{F}_n) = \mathbf{E_P}(\mathbf{E_P}(X_{n+1}f \,|\, \mathcal{F}_{n+1}) \,|\, \mathcal{F}_n) = \mathbf{E_P}(X_{n+1}f \,|\, \mathcal{F}_n),$$

οπότε από την Άσκηση 2.14,

$$\mathbf{E_Q}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = \frac{\mathbf{E_P}(X_{n+1}f_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n)}{f_n}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την ισότητα, δείχνουμε εύκολα την ισοδυναμία των (α) και (β).

Κεφάλαιο 4

4.6 $\{T < t\} = \cup_{n=1}^{\infty}\left\{T \leq t - n^{-1}\right\}$.

4.8 . Για $0 \leq s \leq t$ και κάθε $n \geq 1$ έχουμε

$$\mathbf{E}(X_{t\wedge\tau_n} \,|\, \mathcal{F}_s) = X_{s\wedge\tau_n}. \tag{Δ′.8}$$

Δείχνουμε ότι $\mathbf{E}\,|X_t| < \infty$ ως εξής.

$$\mathbf{E}\,|X_t| = \mathbf{E}\,X_t = \mathbf{E}(\varliminf_{n\to\infty} X_{t\wedge\tau_n}) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_{t\wedge\tau_n}) = \mathbf{E}(X_0) < \infty.$$

Εφαρμόσαμε το Λήμμα Fatou. Η τελευταία ισότητα προκύπτει από την (Δ′.8) αν θέσουμε $s = 0$ και πάρουμε μέση τιμή. Για να δείξουμε ότι $\mathbf{E}(X_t \,|\, \mathcal{F}_s) \leq X_s$, παίρνουμε $n \to \infty$ στην (Δ′.8) και εφαρμόζουμε το Λήμμα Fatou για τη δεσμευμένη μέση τιμή (Θεώρημα 2.15).

Κεφάλαιο 5

5.1 (α) $f(t) = \mathbf{P}(\sqrt{t}B(1) > t) = \mathbf{P}(B(1) > \sqrt{t})$ (από την ιδιότητα αλλαγής κλίμακας). Το ενδεχόμενο στην τελευταία πιθανότητα φθίνει ως προς t ($0 < s < t \Rightarrow \{B(1) > \sqrt{t}\} \subset \{B(1) > \sqrt{s}\}$) και το συμπέρασμα έπεται.

(β) $f(t) = \mathbf{P}(B(1) > \sqrt{t}) = \int_{\sqrt{t}}^{\infty} \phi(t)\,dt$ όπου ϕ είναι η πυκνότητα της κατανομής $N(0,1)$. Άρα

$$f'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{t}}\,\phi(\sqrt{t}) = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi t}}\,e^{-t/2}.$$

5.2 Οι ροπές της $N(0,1)$ δίνονται στο Λήμμα Α′.1 του Παραρτήματος Α′.

5.3 Γράφουμε τη δεδομένη τυχαία μεταβλητή ως γραμμικό συνδυασμό των $B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ (οι οποίες είναι ανεξάρτητες). Επειδή

$$B(t_r) = \{B(t_r) - B(t_{r-1})\} + \cdots + \{B(t_2) - B(t_1)\} + B(t_1)$$

για κάθε $r \in \{1, \ldots, n\}$, έχουμε

$$a_1 B(t_1) + a_2 B(t_2) + \cdots + a_n B(t_n) = s_1 B(t_1) + s_2\{B(t_2) - B(t_1)\} + \cdots + s_n\{B(t_n) - B(t_{n-1})\}$$

όπου $s_i = a_i + \cdots + a_n$ για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Κατά τα γνωστά από τις στοιχειώδεις πιθανότητες η τελευταία τυχαία μεταβλητή είναι κανονική με μέση τιμή 0 και διασπορά $s_1^2 t_1 + s_2^2(t_2 - t_1) + \cdots + s_n^2(t_n - t_{n-1})$.

5.4 Θέτουμε $X := B(s) - B(r), Y := B(t) - B(s)$. Η δεσμευμένη κατανομή της X δεδομένης της $(B(r), B(t))$ είναι η ίδια με τη δεσμευμένη κατανομή της X δεδομένης της $(B(r), B(t) - B(r))$. Ισχύει $B(t) - B(r) = X + Y$. Η X είναι ανεξάρτητη από τη $B(r)$, οπότε αναγόμαστε στον υπολογισμό της κατανομής της $X \,|\, X + Y = y - x$ ξέροντας ότι $X \sim N(0, s - r), Y \sim N(0, t - s)$ και οι X, Y είναι ανεξάρτητες. Βρίσκουμε την από κοινού πυκνότητα των $(X, X + Y)$ και χρησιμοποιούμε την Άσκηση 2.2.

5.5 Γράφουμε τη X ως όριο αθροισμάτων Riemnann. Έπειτα χρησιμοποιούμε την Άσκηση 5.3 και την Πρόταση Α′.10 στο Παράρτημα Α′. Βέβαια η μέση τιμή και η διασπορά της X υπολογίζονται και άμεσα με χρήση του Θεωρήματος Fubini και της παρατήρησης ότι $X^2 = \int_0^t \int_0^t B(s)B(r)\,ds\,dr$.

5.6 Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Fubini και την Άσκηση 5.2 και βρίσκουμε ότι $\mathbf{E}(Y) = t^2/2$ και $\mathbf{E}(Y^2) = t^4/12$.

5.7 Με χρήση του ορισμού, όπως στο (i) της Πρότασης 5.7.

5.9 Συνδυάζουμε τις Προτάσεις 5.7, 5.13. Η εικόνα είναι ότι η B, ξεκινώντας από το σημείο $(t_0, B(t_0))$, θα αρχίσει αμέσως να ταλαντώνεται, πάνω και κάτω από την ευθεία $y = B(t_0)$ και δεν θα επιτρέψει τη δημιουργία τοπικού ακροτάτου στο t_0.

5.10 Αρκεί να δειχθεί για $t_0 = 0$. Αν η B είναι διαφορίσιμη στο 0 με θετική πιθανότητα, τότε επειδή

$$\mathbf{P}\left(\lim_{t\to 0} \frac{B(t)}{t} \text{ υπάρχει στο } \mathbb{R}\right) = \lim_{C\to\infty} \mathbf{P}\left(\lim_{t\to 0} \frac{B(t)}{t} \text{ υπάρχει και ανήκει στο } (-C, C)\right),$$

υπάρχουν $\varepsilon, C \in (0,\infty)$ ώστε

$$\mathbf{P}\left(\lim_{t\to 0}\frac{B(t)}{t} \text{ υπάρχει και ανήκει στο } (-C,C)\right) > \varepsilon > 0.$$

Το γεγονός στην τελευταία πιθανότητα περιέχεται στο $\liminf_k A_k$ όπου $A_k := \{|B_{1/k}/(1/k)| < C\}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^+$. Όμως

$$\mathbf{P}(\liminf_k A_k) \le \underline{\lim}_{k\to\infty} \mathbf{P}(A_k) = \underline{\lim}_{k\to\infty} \mathbf{P}(|B(1)| < C/\sqrt{k}) = 0.$$

Μια εναλλακτική λύση προκύπτει με χρήση της ιδιότητας αντιστροφής χρόνου (Πρόταση 5.11).

Κεφάλαιο 6

6.2 (β) Προκύπτει εύκολα από το (α).

Κεφάλαιο 7

7.5 Χρησιμοποιούμε την Πρόταση 2.11 (γενίκευση της με X, Y να παίρνουν τιμές σε πολύ γενικούς χώρους). Δεσμεύουμε ως προς T_a.

Κεφάλαιο 8

8.1 Αρκεί να δειχθεί ότι για κάθε διάστημα I με ρητά άκρα, με πιθανότητα 1, η κίνηση Brown δεν είναι μονότονη στο I. Για $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ σημεία του I,

$$\{B \text{ αύξουσα στο } I\} \subset \{B(t_2) - B(t_1) \ge 0, B(t_3) - B(t_2) \ge 0, \ldots, B(t_n) - B(t_{n-1}) \ge 0\}.$$

Το τελευταίο σύνολο έχει πιθανότητα 2^{-n}. Παίρνουμε $n \to \infty$.

8.2 Έστω A_n η τυχαία μεταβλητή στην (8.10). Υπολογίζουμε την $\mathbf{E}(A_n^2)$ χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ανεξαρτησίας των προσαυξήσεων για την κίνηση Brown και το ότι $B_t - B_s \stackrel{d}{=} |t-s|^{1/2} Z$ για οποιαδήποτε $s, t \ge 0$ και με $Z \sim N(0,1)$

8.4 (α) $\mathbf{E}(L_n) = \sum_{j=1}^{k(n)} \sqrt{t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}}\, \mathbf{E}\,|B_1| \ge \mathbf{E}\,|B_1| \sum_{j=1}^{k(n)} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)})/\|\Delta_n\|^{1/2}$.

(β) Η L_n είναι άθροισμα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, οπότε

$$\mathrm{Var}(L_n) = \sum_{j=1}^{k(n)} \mathrm{Var}\left(\sqrt{t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}}|B_1|\right) = \sum_{j=1}^{k(n)} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)})(1 - A^2) = (1 - A^2)t.$$

(γ) $\mathbf{P}(L_n < \mathbf{E}(L_n)/2) \le \mathbf{P}(|L_n - \mathbf{E}(L_n)| > \mathbf{E}(L_n)/2) \le \ldots$

(δ) Ερώτημα (γ) και πρώτο λήμμα Borel-Cantelli.

Αυτό που συμβαίνει είναι ότι η L_n έχει μεγάλη μέση τιμή και μικρή διασπορά. Άρα είναι πολύ συγκεντρωμένη γύρω από τη μέση της τιμή. Με πιθανότητα σχεδόν ένα θα παίρνει μεγάλες τιμές (κοντά στη μέση της τιμή).

8.7 Με χρήση του ορισμού προκύπτει ότι η κύμανση της X στο $[a,b]$ είναι φραγμένη από το $\int_a^b |u(s,\omega)|\, ds$.

Κεφάλαιο 9

9.2 $\mathbf{E}(I(a)) = 0$. Άρα

$$\mathrm{Var}(I(a)) = \mathbf{E}(I(a)^2) = \mathbf{E}\left(\int_0^1 e^{2aB_s}\, ds\right) = \int_0^1 \mathbf{E}(e^{2aB_s})\, ds = \int_0^1 \mathbf{E}(e^{2a\sqrt{s}B_1})\, ds$$
$$= \int_0^1 e^{2a^2 s}\, ds = (e^{2a^2} - 1)/(2a^2).$$

9.3

$$\mathbf{E}\left(\int_0^1 e^{2aB_s^2}\,ds\right) = \int_0^1 \mathbf{E}(e^{2asB_1^2})\,ds.$$

Για $Z \sim N(0,1)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{E}(e^{\lambda Z^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x^2} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(1-2\lambda)x^2}\,dx = \begin{cases} \infty & \text{αν } 1-2\lambda \le 0,\\ \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}} & \text{αν } 1-2\lambda > 0.\end{cases}$$

Άρα το πιο πάνω ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο ακριβώς όταν $a \le 1/4$.

9.4 Η ισομετρία Itô για την ανέλιξη $f+g$ είναι $\|I(f+g)\|_{L^2(\mathbf{P})} = \|f+g\|_{L^2(\lambda\times\mathbf{P})}$. Γράφουμε τις L^2-νόρμες ως εσωτερικά γινόμενα και χρησιμοποιούμε τη διγραμμικότητα.

9.5 Όπως στα Παραδείγματα 9.13, 9.14.

9.6 Έστω L_n το άθροισμα από το παράδειγμα και R_n, M_n τα δύο νέα αθροίσματα της άσκησης. Τότε η ποσότητα $R_n - L_n$ συγκλίνει στο t. Για το δεύτερο όριο, δείχνουμε ότι η $M_n - L_{n+1}$ συγκλίνει στο $t/2$.

9.7 Το δείχνουμε πρώτα για f απλή. Έπειτα χρησιμοποιούμε την Πρόταση Α′.10 στο Παράρτημα Α′.

Κεφάλαιο 10

10.1 Για φυσικούς $0 < m < n$,

$$\rho(x_m, x_n) \le \rho(x_m, x_{m+1}) + \rho(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + \rho(x_{n-1}, x_n) < c^m \frac{1}{1-c}.$$

10.2 Το υπολογιστικό κομμάτι πάει ως εξής. Για $0 \le s \le t$,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y_t\,|\,\mathcal{F}_s) - Y_s = \mathbf{E}(Y_t - Y_s\,|\,\mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}\left(\left(\int_s^t X\,dB_r\right)^2 + 2\int_0^s X\,dB_r \int_s^t X\,dB_r - \int_s^t X^2\,dr \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right)\\ &= \mathbf{E}\left(\left(\int_s^t X\,dB_r\right)^2 - \int_s^t X^2\,dr \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right) + 2\int_0^s X\,dB_r\,\mathbf{E}\left(\int_s^t X\,dB_r \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right)\\ &= 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε την Πρόταση 9.12 (όλα της τα μέρη).

Η Y είναι με πιθανότητα 1 συνεχής γιατί στον ορισμό της το μεν στοχαστικό ολοκλήρωμα είναι συνεχής συνάρτηση του t (Θεώρημα 10.2), το δε ολοκλήρωμα Riemann είναι συνεχής συνάρτηση του t, όπως δίνει το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

Κεφάλαιο 11

11.1 Θεωρούμε τις ανελίξεις Y, Z που ορίζονται ως

$$\begin{aligned} Y_t &:= \int_0^t u(s,\omega)ds,\\ Z_t &:= \int_0^t v(s,\omega)\,dB_s \end{aligned}$$

για κάθε $t \ge 0$. Τότε για κάθε $t \ge 0$ έχουμε από την Άσκηση 8.5,

$$0 = \langle X, X\rangle_{[0,t]} = \langle Z, Z\rangle_{[0,t]}$$

Από την Πρόταση 8.6 παίρνουμε ότι, με πιθανότητα 1, $Z_t = 0$ για κάθε $t \ge 0$. Τώρα από την ισομετρία Itô παίρνουμε το συμπέρασμα για τη v. Άρα $0 = X_t = X_0 + Y_t$ για κάθε $t \ge 0$. Παραγωγίζουμε ως προς t χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 14.13 από το Κουμουλλής Γ. και Νεγρεπόντης Σ (1991).

Κεφάλαιο 12

12.1 $d(B_t^{n+1}) = (n+1)B_t^n\, dB_t + \frac{1}{2}n(n+1)B_t^{n-1}\, dt.$
12.2 Παίρνουμε μέση τιμή στη σχέση της προηγούμενης άσκησης.

Κεφάλαιο 14

14.2 Εφαρμόζουμε τον τύπο του Itô.

Βιβλιογραφία

T. M. Apostol. *Mathematical analysis*. Addison Wesley Publishing Company, (1974).

R. F. Bass. *Stochastic processes*, volume 33. Cambridge University Press, Cambridge, (2011).

R. Durrett. *Stochastic calculus: A practical introduction*. Probability and Stochastics Series. CRC Press, Boca Raton, FL, (1996).

R. Durrett. *Probability: theory and examples*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, fourth edition, (2010).

A. Etheridge. *A course in financial calculus*. Cambridge University Press, Cambridge, (2002).

J. Jacod and P. Protter. *Probability essentials*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, second edition, (2003).

F. John. *Partial differential equations, volume 1 of Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, (1982).

I. Karatzas and S. E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, (1991).

P. Kloeden and E. Platen. *Numerical solution of stochastic differential equations*, volume 23 of *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, (1992).

Κουμουλλής Γ. και Νεγρεπόντης Σ. *Θεωρία Μέτρου*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, (1991).

H.-H. Kuo. *Introduction to stochastic integration*. Universitext. Springer, New York, (2006).

T. Mikosch. *Elementary stochastic calculus—with finance in view*, volume 6 of *Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, (1998).

P. Mörters and Y. Peres. *Brownian motion*. With an appendix by Oded Schramm and Wendelin Werner. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, (2010).

Νεγρεπόντης Σ., Ζαχαριάδης Θ., Καλαμίδας Ν., Φαρμάκη Β. *Γενική τοπολογία και συναρτησιακή ανάλυση*. Εκδόσεις Αίθρα, Αθήνα, (1988).

Νεγρεπόντης Σ., Γιωτόπουλος Σ., Γιαννακούλιας Ε. *Απειροστικός Λογισμός*. Εκδόσεις Αίθρα, Αθήνα, (1992).

B. Øksendal. *Stochastic differential equations. An introduction with applications*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, sixth edition, (2003).

P. E. Protter. *Stochastic integration and differential equations*, volume 21 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer-Verlag, Berlin, (2005). Second edition. Version 2.1, Corrected third printing.

D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, (1999).

S. E. Shreve. *Stochastic calculus for finance. II. Continuous-time models*. Springer Finance. Springer-Verlag, New York, (2004).

J. M. Steele. *Stochastic calculus and financial applications*, volume 45 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, (2001).

Σπηλιώτης, Ιωάννης. *Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις. Με εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά*. Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, (2004).

D. Williams. *Probability with martingales*. Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, Cambridge, (1991).

P. Wilmott, S. Howison, and J. Dewynne. *The mathematics of financial derivatives: a student introduction*. Cambridge University Press, (1995).

Ευρετήριο ελληνικών όρων

Ευρετήριο ξενόγλωσσων όρων

Μετάφραση ορολογίας

Άλγεβρα	Algebra
Αναπαράγον χαρτοφυλάκιο	Replicating portfolio
Ανέλιξη	Process
Ανοιχτή πώληση	Short selling
Αποδεκτό χαρτοφυλάκιο	Admissible portfolio
Αρχή της ανάκλασης	Reflection principle
Αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο	Self-financing portfolio
Γκαουσιανό διάνυσμα	Gaussian vector
Δεσμευμένη μέση τιμή	Conditional expectation
Διάχυση	Diffusion
Διήθηση	Filtration
Δικαίωμα	Option
Δικαίωμα αγοράς	Call option
Δικαίωμα πώλησης	Put option
Δικαίωμα με φράγμα	Barrier option
Εξίσωση θερμότητας	Heat equation
Επιλεκτική διακοπή	Optional stopping
Εσωτερικό γινόμενο	Inner product
Ημερομηνία λήξης	Expiration date
Ισομετρία	Isometry
Κατανομές πεπερασμένης διάστασης	Finite dimensional distributions
Κατανομή	Distribution
Κάλπη του Polya	Polya urn
Κίνηση Brown	Brownian motion
Κύμανση	Variation
Μετρήσιμη ανέλιξη	Measurable process
Μη διακρίσιμες ανελίξεις	Indistinguishable processes
Μονοπάτι	Path
Νόμος επαναλαμβανόμενου λογαρίθμου	Law of the iterated logarithm
Ορθογώνια προβολή	Orthogonal projection
Προβλέψιμη ακολουθία	Predictable sequence
Προσαρμοσμένη ακολουθία	Adapted sequence
Στοχαστική ανέλιξη	Stochastic process
Στοχαστική διαφορική εξίσωση	Stochastic differential equation
Σύγκλιση κατά κατανομή	Convergence in distribution
Τάση	Drift
Τιμή άσκησης	Exercise price
Τετραγωνική κύμανση	Quadratic variation
Τροποποίηση	Modification
Τυπική κίνηση Brown	Standard Brownian motion
Τυχαίος περίπατος	Random walk
Χαρτοφυλάκιο	Portfolio
Χρόνος διακοπής	Stopping time