

## Στοχαστικές ανελίξεις

### Εργασία 2

Προθεσμία υποβολής: Παρασκευή 13 Μαΐου

1) Έστω κλαδωτή ανελίξη  $(Z_n)_{n \geq 0}$  με  $Z_0 = 1$  και  $X_{n,i}$  το πλήθος των παιδιών του  $i$  ατόμου της  $n - 1$  γεννιάς. Υποθέτουμε ότι καθεμία από τις  $X_{n,i}$  έχει μέση τιμή  $\mu$  και διασπορά  $\sigma$ . Ναδειχθεί ότι

$$\text{Var}(Z_n) = \begin{cases} \sigma^2 \mu^{n-1} \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1} & \text{αν } \mu \neq 1, \\ n\sigma^2 & \text{αν } \mu = 1. \end{cases}$$

2) Σε μια κλαδωτή ανελίξη  $(Z_n)_{n \geq 0}$ , η κατανομή του πλήθους παιδιών κάθε ατόμου είναι δυωνυμική με παραμέτρους 2 και  $p \in (0, 1)$ .

α) Υποθέτοντας ότι  $Z_0 = 1$ , να υπολογίσετε (i) την πιθανότητα εξάλειψης και (ii) την πιθανότητα η εξάλειψη να συμβαίνει στην τρίτη γεννιά (δηλαδή  $Z_4 = 0$  και  $Z_3 \neq 0$ ).

β) Υποθέτοντας ότι η  $Z_0$  ακολουθεί την κατανομή Poisson( $\lambda$ ) και ότι  $p > 1/2$ , ναδειχθεί ότι η πιθανότητα εξάλειψης είναι

$$e^{-\lambda} \frac{\lambda^{1-2p}}{p^{2p}}.$$

3) Υποθέτουμε ότι ένας πληθυσμός έχει άτομα τύπου A και τύπου B. Ένα άτομο τύπου A γεννάει 1 παιδί τύπου A ή 1 παιδί τύπου B ή κανένα παιδί. Οι πιθανότητες των τριών αυτών ενδεχομένων είναι  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/4$  αντίστοιχα. Ένα άτομο τύπου B γεννάει 1 παιδί τύπου A ή 2 παιδιά τύπου B. Οι πιθανότητες των δύο αυτών ενδεχομένων είναι  $1/2$ ,  $1/2$  αντίστοιχα. Έστω  $\alpha$  η πιθανότητα εξάλειψης αν ξεκινήσουμε από 1 άτομο τύπου A και  $\beta$  η πιθανότητα εξάλειψης αν ξεκινήσουμε από 1 άτομο τύπου B. Ναδειχθεί ότι  $\alpha, \beta < 1$  και να υπολογιστούν τα  $\alpha, \beta$ .

Από το βιβλίο του Remco van der Hofstad τις ασκήσεις 3.23, 3.26, 4.1, 4.2, 4.4,