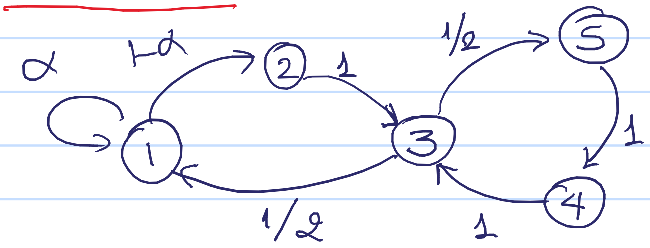
Στοχαστικές Ανελίξεις
Απαντήσεις Διαγωνίσματος Ιουνίου 2014

ΘΕΜΑ 1



(α) Για $\alpha=1$ η κατάσταση 1 είναι απορροφητική, επομένως η αλυσίδα δε μπορεί να είναι αδιαχώριστη.
Για $\alpha=0$ η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και περιοδική με περίοδο 3
Για $0<\alpha<1$ η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και απεριοδική.
Είναι επίσης και θετικά επαναληπτική, αφού είναι αδιαχώριστη και πεπερασμένη.

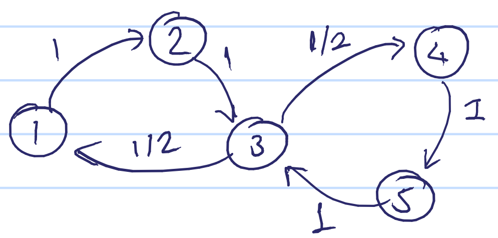
(β) Έστω $0<\alpha<1$. Οι εξισώσεις οριακής κατανομής είναι

$$\left.\begin{array}{l}
\pi_1 = \alpha\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_3 \\
\pi_2 = (1-\alpha)\pi_1 \\
\pi_3 = \pi_2 + \pi_4 \\
\pi_4 = \pi_5 \\
\pi_5 = \frac{1}{2}\pi_3 \\
\pi_1 + \dots + \pi_5 = 1
\end{array}\right| \quad
\begin{array}{l}
\Rightarrow \pi_3 \quad 2(1-\alpha)\pi_1 \\
\Rightarrow \pi_2 = -\alpha)\pi_1 \\
\Rightarrow \pi_4 = \pi_5 = (1-\alpha)\pi_1
\end{array}$$

$$\Rightarrow \pi_1\big(1 + (1-\alpha) + 2(1-\alpha) + (1-\alpha) + (1-\alpha)\big) = 1$$

$$\Rightarrow (6-5\alpha)\pi_1 = 1 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \pi_1 = \dfrac{1}{6-5\alpha} \\ \pi_2 = \pi_4 = \pi_5 = \dfrac{1-\alpha}{6-5\alpha} \\ \pi_3 = \dfrac{2(1-\alpha)}{6-5\alpha} \end{array}}$$

(γ) Για $\alpha=1$:



Έστω $f_i = E[\text{χρόνος πρώτης μετάβασης στην } 1 \mid X_0 = i]$

Οι f_i, $i=1,\dots,5$ ικανοποιούν τις εξισώσεις παρακάτω:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= 0\\
f_2 &= 1+f_3\\
f_3 &= 1+\tfrac{1}{2}f_1+\tfrac{1}{2}f_4\\
f_4 &= 1+f_5\\
f_5 &= 1+f_3
\end{aligned}
$$

$$f_4 = 1+f_5 = 2+f_3$$

$$f_3 = 1+\tfrac{1}{2}(2+f_3)$$

$$\Rightarrow \boxed{f_3 = 4}$$

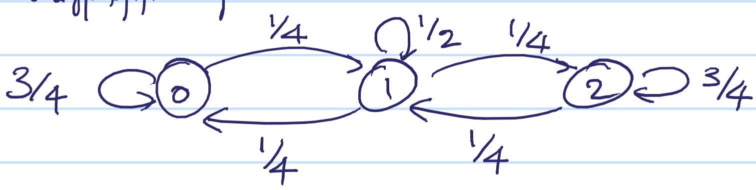
ΘΕΜΑ 2

Έστω X_n ο αριθμός ζευγαριών που βρίσκονται έξω από την κύρια είσοδο το πρωί της μέρας n, με $X_n \in \{0,1,2\}$. Προφανώς έξω από τη βοηθητική είσοδο θα βρίσκονται $2-X_n$ ζευγάρια.

Η $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $S=\{0,1,2\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος:

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Για παράδειγμα, αν $X_n=0$ δηλαδή και τα δύο ζεύγη βρίσκονται στη βοηθητική. Τότε για να ισχύει $X_{n+1}=1$ θα πρέπει ο αθλητής να βγει από τη βοηθητική (να πάρει το ένα ζεύγος) και να επιστρέψει από την κύρια, γεγονός που έχει πιθανότητα $1/4$, επομένως $P_{01}=1/4$.
Επίσης $P_{02}=0$ επομένως $P_{00}=3/4$.
Οι υπόλοιπες πιθανότητες υπολογίζονται παρόμοια.
Το διάγραμμα μεταβάσεων είναι



Η αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική και απεριοδική. Η οριακή κατανομή υπολογίζεται από:

$$
\left.
\begin{aligned}
\pi_0 &= \tfrac{3}{4}\pi_0 + \tfrac{1}{4}\pi_1\\
\pi_2 &= \tfrac{3}{4}\pi_2 + \tfrac{1}{4}\pi_1\\
\pi_0 &+ \pi_1 + \pi_2 = 1
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow \pi_0 = \pi_2 = \pi_1 = 1/3
$$

Ο αθλητής τη μέρα n θα τρέξει ξυπόλητος αν $X_n=0$ και βγεί από την κύρια είσοδο ή αν $X_n=2$ και βγεί από τη βοηθητική. Επομένως το ποσοστό ημερών που συμβαίνει αυτό σε μεγάλο ορίζοντα προσεγγίζεται από

$$\frac{1}{2}\pi_0+\frac{1}{2}\pi_3=\frac{1}{3}.$$

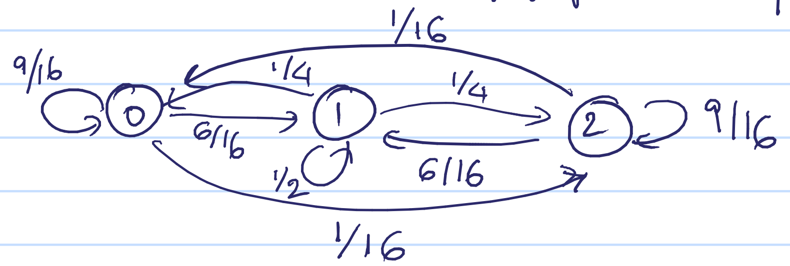
ΘΕΜΑ 3

Έστω X_n ο αριθμός των ενοικιασμένων δωματίων τη μέρα n. Η $\{X_n, n=0,1,2,\dots\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $S=\{0,1,2\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος:

$$P=\begin{pmatrix} \frac{9}{16} & \frac{6}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{16} & \frac{6}{16} & \frac{9}{16} \end{pmatrix}$$

Για παράδειγμα, αν $X_n=0$, τότε την επόμενη μέρα θα ενοικιαστούν και τα δύο δωμάτια με πιθανότητα $\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$, δε θα νοικιαστεί κανένα με πιθανότητα $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$, κ' θα νοικιαστεί ένα με πιθανότητα $1-\frac{1}{16}-\frac{9}{16}=\frac{6}{16}$

Οι υπόλοιπες πιθανότητες υπολογίζονται παρόμοια. Το διάγραμμα είναι:



Η αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική και αδιαχώριστη. Η οριακή κατανομή δίνεται από:

$$\left.\begin{aligned} \pi_0&=\frac{9}{16}\pi_0+\frac{1}{4}\pi_1+\frac{1}{16}\pi_2 \\ \pi_2&=\frac{9}{16}\pi_2+\frac{1}{4}\pi_1+\frac{1}{16}\pi_0 \\ \pi_0&+\pi_1+\pi_2=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\pi_0=\pi_2$ (συμμετρία)

$$\pi_0=\frac{10}{16}\pi_0+\frac{1}{4}\pi_1 \Rightarrow \frac{6}{16}\pi_0=\frac{4}{16}\pi_1 \Rightarrow \pi_0=\pi_2=\frac{2}{3}\pi_1$$

$$\frac{2}{3}\pi_1+\pi_1+\frac{2}{3}\pi_1=1 \Rightarrow \boxed{\pi_1=\frac{3}{7},\ \pi_0=\pi_2=\frac{2}{7}}$$

Επομένως το ποσοστό ημερών που είναι ενοικιασμένα 0 δωμάτια είναι $\frac{2}{7}$, 1 δωμάτιο $\frac{3}{7}$ και 2 δωμάτια $\frac{2}{7}$. Τα αντίστοιχα ημερήσια έσοδα σε κάθε κατάσταση είναι 0, 70, και 140.

Επομένως το αναμενόμενο έσοδο ανά ημέρα είναι ίσο με

$$0\cdot\frac{2}{7}+70\cdot\frac{3}{7}+140\cdot\frac{2}{7}=\frac{490}{7}=70.$$

ΘΕΜΑ 4

(α) Έστω $X(t)$ η αίθουσα που βρίσκεται ο αναγνώστης τη χρονική στιγμή t, όπου

$$X(t)=\begin{cases}0 & \text{μεγάλη αίθουσα}\\ 1 & \text{πρώτη μικρή αίθουσα}\\ 2 & \text{δεύτερη -''- \quad -''-}\end{cases}$$

Η $\{X(t), t\geq 0\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με:

T_i = χρόνος παραμονής στην κατάσταση i, $T_i \sim Exp(q_i)$.

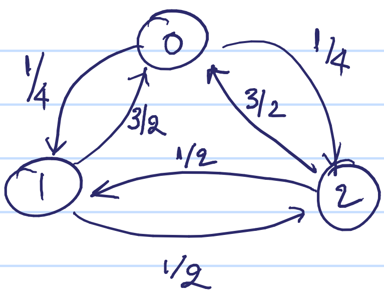
Έχουμε $E(T_0)=\frac{1}{q_0}=2 \Rightarrow q_0=1/2$

$E(T_1)=E(T_2)=\frac{1}{2} \Rightarrow q_1=q_2=2$.

Επίσης $P_{01}=P_{02}=1/2$, $P_{10}=\frac{3}{4}$, $P_{12}=\frac{1}{4}$, $P_{20}=\frac{3}{4}$, $P_{21}=\frac{1}{4}$

Επομένως οι ρυθμοί μετάβασης δίνονται από $q_{ij}=q_i\cdot P_{ij}$

$$Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -2\end{pmatrix}$$



(β) Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και πεπερασμένη, επομένως θετικά επαναληπτική.
Η οριακή κατανομή δίνεται από τις εξισώσεις ολικής ισορροπίας:

$$\left.\begin{aligned} P_1\cdot 2 &= P_0\cdot\frac{1}{4}+P_2\cdot\frac{1}{2}\\ P_2\cdot 2 &= P_0\cdot\frac{1}{4}+P_0\cdot\frac{1}{2}\\ P_0+P_1+P_2&=1\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$P_1=P_2 \Rightarrow P_1\cdot\frac{3}{2}=P_0\cdot\frac{1}{4} \Rightarrow$

$P_1=P_2=\frac{1}{6}P_0 \Rightarrow P_0+\frac{1}{6}P_0+\frac{1}{6}P_0=1 \Rightarrow$

$\Longrightarrow \boxed{P_0=\frac{3}{4},\ P_1=P_2=1/8}$

(γ) Ο αναμενόμενος χρόνος επανόδου στην κατάσταση i είναι ίσος με $1/p_i$, επομένως για τη μεγάλη αίθουσα ο μέσος χρόνος επανόδου είναι $\frac{1}{p_0} = \frac{4}{3}$ ώρες $= 1$ ώρα κ' 20 λεπτά.