Στοχαστικές Ανελίξεις
Σειρά Ασκήσεων 1

ΑΣΚΗΣΗ 1. Σε ένα αναγνωστήριο υπάρχουν οι τρεις τόμοι ενός μαθηματικού συγγράμματος, τοποθετημένοι ο ένας πάνω στον άλλον σε ένα τραπέζι. Οι φοιτητές χρησιμοποιούν τους τόμους ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον με τον εξής τρόπο: Ο φοιτητής παίρνει έναν από τους τρεις τόμους εντελώς τυχαία, τον διαβάζει για λίγο και μετά τον αφήνει στην κορυφή του σωρού των άλλων δύο. Ποτέ δεν χρησιμοποιούν τους τόμους δύο ή περισσότεροι φοιτητές ταυτόχρονα.

Να μοντελοποιηθεί η παραπάνω κατάσταση ως Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου, να οριστούν οι καταστάσεις και ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος.

ΑΣΚΗΣΗ 2. Ένα δυαδικό ψηφίο (0 ή 1) περνά μέσα από μια σειρά αναμεταδότες κάθε ένας από τους οποίους έχει πιθανότητα p σωστής μετάδοσης. Έστω $X_n, n = 0, 1, \ldots$ η τιμή του ψηφίου που μεταδίδει ο $n^{\text{οστός}}$ αναμεταδότης, με X_0 τη σωστή τιμή του ψηφίου που πρέπει να μεταδοθεί.

(α) Δείξτε ότι η $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα και βρείτε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος.

(β) Έστω ότι αρχικά μεταδίδεται το ψηφίο 0. Ποια είναι η πιθανότητα μετά από πολύ μεγάλο αριθμο μεταδόσεων το ψηφίο που μεταδίδεται να είναι 0;

ΑΣΚΗΣΗ 3. Η 'Προσεκτική Ασφαλιστική' χρεώνει τους πελάτες που δεν ατύχημα τα δύο προηγούμενα χρόνια ετήσια ασφάλιστρα 400 ευρώ, αυτούς που είχαν ατύχημα ένα από τα δύο προηγούμενα χρόνια 450 ευρώ, και αυτούς που είχαν ατύχημα και τα δύο προηγούμενα χρόνια 550 ευρώ. Άν ένας πελάτης έχει ατύχημα μια χρονιά τότε η πιθανότητα να έχει και την επόμενη είναι ίση με 10%. Αν δεν έχει ατύχημα μια χρονιά, η πιθανότητα να έχει την επόμενη είναι ίση με 3%.

(α) Να βρεθεί το αναμενόμενο μέσο κόστος ασφάλισης ανά έτος ενός πελάτη για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα.

(β) Αν στην αρχή μιας χρονιάς ένας πελάτης βρίσκεται στην κατηγορία των 550 ευρώ, πόσος είναι ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι να 'ανέβει' στην κατηγορία των 400 ευρώ;

ΑΣΚΗΣΗ 4. Σε μια πολύ μεγάλη ακολουθία DNA έχουν καταγραφεί οι εμπειρικές συχνότητες σύμφωνα με τις οποίες κάθε μια από τις βάσεις A,C,G,T ακολουθείται από μια άλλη. Αυτές φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

$$P = \begin{pmatrix} 0.200 & 0.255 & 0.285 & 0.260 \\ 0.302 & 0.322 & 0.178 & 0.198 \\ 0.392 & 0.139 & 0.292 & 0.177 \\ 0.148 & 0.198 & 0.346 & 0.308 \end{pmatrix}$$

Αν θεωρήσουμε (προσεγγιστικά) ότι η εναλλαγή των βάσεων ακολουθεί το μοντέλο μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας με χώρο καταστάσεων $S = \{A, C, G, T\}$, τότε για αυτό το μοντέλο

(α) Βρείτε και ερμηνεύστε την οριακή κατανομή.

(β) Βρείτε την πιθανότητα σε ένα τυχαίο απομακρυσμένο σημείο της ακολουθίας να υπάρχουν δύο διαδοχικές βάσεις A.

ΑΣΚΗΣΗ 5. Ένα μηχάνημα στο καζίνο έχει ρυθμιστεί έτσι ώστε κάθε φορά που παίζει ένας παίκτης είτε κερδίζει είτε χάνει. Αν σε ένα παίξιμο κερδίσει τότε στο επόμενο έχει πιθανότητα να κερδίσει ίση με 0.25. Αντίστοιχα αν σε ένα παίξιμο χάσει τότε στο επόμενο έχει πιθανότητα να κερδίσει ίση με 0.75. Ο παίκτης πληρώνει 1 ευρώ για κάθε παίξιμο και εισπράττει 2.5 ευρώ κάθε φορά που κερδίζει. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο μοντέλο Μαρκοβιανής αλυσίδας, βρείτε αν το παιχνίδι συμφέρει τον παίκτη ή όχι μακροπρόθεσμα.

ΑΣΚΗΣΗ 6. Δύο ομάδες (A και B) παίζουν διαδοχικά παιχνίδια ανεξάρτητα μεταξύ τους. Σε κάθε παιχνίδι η ομάδα A κερδίζει με πιθανότητα p και η B με πιθανότητα $1-p$ (δεν υπάρχει ισοπαλία). Νικήτρια αναδεικνύεται η πρώτη ομάδα που θα κερδίσει δύο παιχνίδια στη σειρά.
(α) Ορίστε μια κατάλληλη Μαρκοβιανή αλυσίδα με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων που περιγράφει την εξέλιξη του σκορ μεταξύ των δύο ομάδων.
(β) Υπολογίστε την αναμενόμενη διάρκεια του αγώνα.
(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα να κερδίσει τελικά τον αγώνα η ομάδα A.
(δ) Πότε μια ομάδα προτιμά το σύστημα δύο νικών σε σειρά από τον απλό κανόνα ενός μόνο παιχνιδιού, όταν είναι ισχυρότερη ή πιο αδύνατη από την αντίπαλη ομάδα;

ΑΣΚΗΣΗ 7. Ένα δίκαιο ζάρι ρίχνεται διαδοχικά έως ότου να έχουν εμφανιστεί όλες οι ενδείξεις τουλάχιστον μια φορά η καθεμιά. Ορίστε κατάλληλη Μαρκοβιανή αλυσίδα από την οποία να υπολογίσετε τον αναμενόμενο αριθμό των ρίψεων.

ΑΣΚΗΣΗ 8. Μια έρευνα σχετικά με τους τηλεθεατές της χώρας έχει δώσει τα παρακάτω αποτελέσματα: Έστω X_t η κατάσταση ενός τηλεθεατή στην αρχή της περιόδου $t = 1, 2, \ldots$, όπου οι δυνατές καταστάσεις είναι : 0=δε βλέπει ποτέ τηλεόραση, 1=βλέπει μόνο κρατικά κανάλια, 2=βλέπει αρκετά συχνά τηλεόραση, 3=εθισμένος στην τηλεόραση, 4=προσπαθεί να αλλάξει τη στάση του σχετικά με την τηλεθέαση, 5=παθολογική εξάρτηση από την τηλεόραση. Ο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος δίνεται παρακάτω

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1/2 & 3/10 & 0 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 7/10 & 1/10 & 2/10 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(α) Να γίνει κατάταξη των καταστάσεων της αλυσίδας.
(β) Ποια είναι η πιθανοτητα ένας τηλεθεατής ξεκινώντας από το να βλέπει κρατικά κανάλια μόνο, να καταλήξει σε παθολογική εξάρτηση από την τηλεόραση;

ΑΣΚΗΣΗ 9. Ένα μηχάνημα έχει την παρακάτω δομή αξιοπιστίας: Αν λειτουργεί στην αρχή μιας μέρας τότε έχει πιθανότητα ίση με p να χαλάσει στη διάρκεια της μέρας αυτής. Αν συμβεί αυτό τότε τις επόμενες δύο μέρες το μηχάνημα επισκευάζεται και στο τέλος της δεύτερης μέρας επισκευής είναι λειτουργικό όπως και πριν.
(α) Ορίστε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα για την κατάσταση του μηχανήματος στο τέλος κάθε μέρας και βρείτε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος.
(β) Ταξινομήστε τις καταστάσεις και βρείτε την οριακή κατανομή.
(γ) Αν στη διάρκεια μιας μέρας το μηχάνημα λειτουργεί κανονικά χωρίς να πάθει βλάβη αποφέρει ένα έσοδο ίσο με R. Αν χαλάσει στη διάρκεια μιας μέρας τότε το έσοδο αυτής της μέρας είναι ίσο με aR, όπου $0 < a < 1$. Επίσης κάθε μέρα που το μηχάνημα βρίσκεται σε επισκευή κοστίζει C. Να βρεθεί το μέσο καθαρό κέρδος από τη λειτουργία του μηχανήματος ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα.

ΑΣΚΗΣΗ 10. Μια βιοτεχνία έχει δύο όμοια μηχανήματα που λειτουργούν παράλληλα, ανεξάρτητα το ένα από το άλλο και παράγουν το ίδιο προϊόν (π.χ. δύο όμοια φωτοτυπικά

μηχανήματα). Στη διάρκεια μιας μέρας κάθε μηχάνημα, αν λειτουργεί, έχει πιθανότητα p να χαλάσει, ανεξάρτητα από το άλλο. Αν ένα από τα δύο μηχανήματα είναι χαλασμένο και το άλλο λειτουργεί, η βιοτεχνία συνεχίζει την παραγωγή με το ένα μηχάνημα. Αν στο τέλος μιας μέρας και τα δύο μηχανήματα είναι χαλασμένα, τότε στη διάρκεια της επόμενης μέρας επισκευάζονται και στο τέλος της επόμενης μέρας είναι και τα δύο λειτουργικά.
(α) Ορίστε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα για την κατάσταση των μηχανημάτων στο τέλος κάθε μέρας και βρείτε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης ενός βήματος.
(β) Ταξινομήστε τις καταστάσεις και βρείτε την οριακή κατανομή.
(γ) Αν στη διάρκεια μιας μέρας ένα μηχάνημα λειτουργεί κανονικά χωρίς να πάθει βλάβη αποφέρει ένα έσοδο ίσο με R. Αν χαλάσει στη διάρκεια μιας μέρας τότε το έσοδο αυτής της μέρας είναι ίσο με aR, όπου $0 < a < 1$. Επίσης η μέρα που τα μηχανήματα επισκευάζονται κοστίζει C. Να βρεθεί το μέσο καθαρό κέρδος από τη λειτουργία των μηχανημάτων ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα.

ΑΣΚΗΣΗ 11. Ένας τοπικός πυροσβεστικός σταθμός έχει υπό την ευθύνη του δύο δασικές περιοχές Α και Β. Υπάρχουν δύο διαθέσιμα πυροσβεστικά οχήματα. Στην αρχή κάθε μέρας η κάθε περιοχή βρίσκεται είτε σε κανονική κατάσταση (όχι πυρκαγιά) είτε σε κατάσταση πυρκαγιάς. Αν μια περιοχή βρίσκεται σε κανονική κατάσταση στην αρχή μιας μέρας, τότε η πιθανότητα να βρίσκεται σε κατάσταση πυρκαγιάς στην αρχή της επόμενης μέρας είναι ίση με 0.3 αν δεν υπάρχει κανένα όχημα σ' αυτή την περιοχή, με 0.2 αν υπάρχει ένα όχημα και με 0.1 αν υπάρχουν δύο οχήματα. Αντίστοιχα αν μια περιοχή βρίσκεται σε κατάσταση πυρκαγιάς στην αρχή μιας μέρας, τότε η πιθανότητα να βρίσκεται σε κατάσταση πυρκαγιάς στην αρχή της επόμενης μέρας είναι ίση με 0.9 αν δεν υπάρχει κανένα όχημα σ' αυτή την περιοχή, με 0.6 αν υπάρχει ένα όχημα και με 0.3 αν υπάρχουν δύο οχήματα. Υποθέτουμε ότι οι περιοχές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Η κατανομή των δύο οχημάτων στις δύο περιοχές γίνεται ως εξής: αν στην αρχή της μέρας και οι δύο περιοχές είναι στην ίδια κατάσταση, τότε πηγαίνει από ένα όχημα στην κάθε περιοχή, ενώ όταν μόνο μία έχει πυρκαγιά τότε και τα δύο οχήματα πηγαίνουν στην κατάσταση πυρκαγιάς.

Αν μια περιοχή βρίσκεται σε κατάσταση πυρκαγιάς μια μέρα τότε ο αναμενόμενος αριθμός καμένων δέντρων στη διάρκεια της μέρας είναι ίσος με 300 αν εκεί δεν υπάρχει κανένα όχημα, με 250 αν υπάρχει ένα όχημα και με 100 αν υπάρχουν δύο οχήματα.
(α) Να οριστεί μια Μαρκοβιανή διαδικασία για το παραπάνω πρόβλημα (Υπόδειξη: Μπορείτε να ορίσετε ως κατάσταση $s = 0, A, B, AB$ αν στην αρχή της μέρας δεν υπάρχει πουθενά πυρκαγιά, υπάρχει πυρκαγιά μόνο στην Α, μόνο στη Β, ή και στις δύο περιοχές, αντίστοιχα.
(β) Να βρεθεί ο αναμενόμενος αριθμός καμένων δέντρων ανά μέρα σε μεγάλο ορίζοντα.