

Στοχαστικές Ανελιξίες Σειρά Ασκήσεων 2

ΑΣΚΗΣΗ 1. Έστω ότι ο χρόνος μέχρι να συμβεί ένα γεγονός A ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ_A , και ο χρόνος μέχρι να συμβεί ένα άλλο γεγονός B είναι ανεξάρτητος από τον προηγούμενο και ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ_B .

(α) Να βρεθεί η κατανομή του χρόνου μέχρι να συμβεί το πρώτο από τα δύο γεγονότα A και B.

(β) Ποια είναι η πιθανότητα να συμβεί το A πριν το B;

ΑΣΚΗΣΗ 2. Ένα μόριο αιμοσφαιρίνης μπορεί να μεταφέρει είτε ένα μόριο οξυγόνου, είτε ένα μόριο διοξειδίου του άνθρακα ή τίποτα. Έστω ότι τα μόρια οξυγόνου και διοξειδίου του άνθρακα φτάνουν με ρυθμούς λ_1 και λ_2 , αντίστοιχα, και οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους και ακολουθούν εκθετική κατανομή. Έστω επίσης ότι όταν το μόριο αιμοσφαιρίνης είναι ελεύθερο ένα μόριο (οξυγόνου ή διοξειδίου) που φτάνει προσκολλάται πάνω του για χρονικό διάστημα που ακολουθεί εκθετική κατανομή με ρυθμό μ_1 και μ_2 , αντίστοιχα.

(α) Να ορίσετε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου που περιγράφει την εξέλιξη της κατάστασης ενός μορίου αιμοσφαιρίνης και να δώσετε το διάγραμμα και τον πίνακα ρυθμών μετάβασης.

(β) Να βρείτε το ποσοστό χρόνου σε άπειρο ορίζοντα που το μόριο βρίσκεται σε κάθε μια από τις δυνατές καταστάσεις του.

ΑΣΚΗΣΗ 3. Σε ένα γραφείο μοιράζονται το χώρο δύο εργαζόμενοι. Καθένας από αυτούς έχει ένα τηλέφωνο για επαγγελματική χρήση. Κάθε χρονική στιγμή ο εργαζόμενος i μπορεί είτε να εργάζεται είτε να τηλεφωνεί. Ο χρόνος εργασίας ακολουθεί εκθετική κατανομή με ρυθμό λ_i ενώ η διάρκεια ενός τηλεφωνήματος ακολουθεί εκθετική κατανομή με ρυθμό $\mu_i, i = 1, 2$.

(α) Να βρεθεί το ποσοστό του χρόνου σε στάσιμη κατάσταση που και οι δύο εργαζόμενοι εργάζονται. (Υπόδειξη: Οι δύο εργαζόμενοι μπορούν να αναλυθούν χωριστά).

(β) Έστω ότι το ένα τηλέφωνο έχει βλάβη και οι δύο εργαζόμενοι μοιράζονται το μοναδικό τηλέφωνο του γραφείου. Υποθέστε ότι αν ένας εργαζόμενος πρέπει να κάνει τηλεφώνημα αλλά το τηλέφωνο είναι κατειλημμένο, τότε αυτός αρχίζει μια νέα περίοδο εργασίας εκθετικά κατανομημένη. Να βρεθεί το ποσοστό του χρόνου σε στάσιμη κατάσταση που και οι δύο εργαζόμενοι εργάζονται και ναδειχθεί ότι είναι μεγαλύτερο από αυτό του ερωτήματος (α).

(γ) Έστω ότι στο ερώτημα (β) αν ένας εργαζόμενος χρειάζεται να τηλεφωνήσει αλλά το τηλέφωνο είναι κατειλημμένο, τότε περιμένει ανενεργός μέχρι αυτό να ελευθερωθεί. Να βρεθεί το ποσοστό του χρόνου σε στάσιμη κατάσταση που και οι δύο εργαζόμενοι εργάζονται και ναδειχθεί ότι είναι μικρότερο από αυτό του ερωτήματος (α).

ΑΣΚΗΣΗ 4. Μια εταιρεία ενοικίασης αυτοκινήτων έχει σταθμούς σε δύο πόλεις A και B. Επίσης έχει μόνο δύο αυτοκίνητα από ένα συγκεκριμένο ακριβό μοντέλο. Οι πελάτες έρχονται να νοικιάσουν ένα αυτοκίνητο αυτού του τύπου σύμφωνα με διαδικασία Poisson με ρυθμό λ_A και λ_B στις πόλεις A και B, αντίστοιχα. Αν ένας πελάτης δε βρει αυτοκίνητο διαθέσιμο στην πόλη που το θέλει φεύγει χωρίς να κάνει ενοικίαση. Η διάρκεια ενοικίασης ενός αυτοκινήτου είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί εκθετική κατανομή με ρυθμό μ , ανεξάρτητα από το αυτοκίνητο και την πόλη που έγινε η κράτηση. Επίσης όταν επιστραφεί το αυτοκίνητο επιστρέφεται στην πόλη A με πιθανότητα p_A και στην πόλη B με πιθανότητα $p_B = 1 - p_A$. Όταν ένα αυτοκίνητο επιστραφεί, παραμένει στην πόλη στην οποία επιστράφηκε μέχρι να ξανανοικιαστεί.

(α) Να ορίσετε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου που περιγράφει την εξέλιξη της κατάστασης των δύο αυτοκινήτων και να δώσετε το διάγραμμα και τον πίνακα ρυθμών μετάβασης.

(β) Για την περίπτωση $\lambda_A = \lambda_B = \lambda, p_A = p_B = 1/2$, να υπολογίσετε την οριακή κατανομή και να βρείτε το ποσοστό χρόνου σε άπειρο ορίζοντα που είναι νοικιασμένα κανένα, ένα ή και τα δύο αυτοκίνητα.

ΑΣΚΗΣΗ 5. Έστω μια διαδικασία γεννήσεων-θανάτων με ρυθμούς γεννήσεων $\lambda_n = \lambda, n = 0, 1, \dots$, και ρυθμούς θανάτων $\mu_n = \mu, n = 1, 2, \dots$.

(α) Να γραφούν οι εξισώσεις ισορροπίας για κάθε κατάσταση.

(β) Να γραφούν οι εξισώσεις ισορροπίας παίρνοντας τις διαδοχικές διαμερίσεις του χώρου καταστάσεων $S = S_n \cup S_n^c, n = 0, 1, \dots$, όπου $S_n = \{0, 1, \dots, n\}$.

(γ) Ναδειχθεί ότι τα δύο συστήματα εξισώσεων είναι ισοδύναμα.

(δ) Ναδειχθεί ότι η αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική αν και μόνο αν $\lambda < \mu$, και σε αυτή την περίπτωση να βρεθεί η οριακή κατανομή.

ΑΣΚΗΣΗ 6. Μια εταιρεία ηλεκτρονικών έχει ένα συγκεκριμένο μοντέλο tablet σε απόθεμα. Αρχικά στο κατάστημα υπάρχουν K μονάδες του προϊόντος. Οι πελάτες που ζητούν να αγοράσουν αυτό το προϊόν έρχονται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ . Το κατάστημα έχει την πολιτική κάθε φορά που πωλείται ένα κομμάτι να κάνει μια παραγγελία στον προμηθευτή για την αντικατάστασή του. Οι χρόνοι παραλαβής των παραγγελιών είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο μ . Πελάτες που δε βρίσκουν το προϊόν στο κατάστημα φεύγουν χωρίς να αγοράσουν.

Να βρεθεί η οριακή κατανομή του αριθμού προϊόντων στο κατάστημα.

ΑΣΚΗΣΗ 7. Μια βιομηχανία χρησιμοποιεί ένα μηχάνημα για την παραγωγή προϊόντων. Το μηχάνημα παθαίνει συχνά βλάβες και, για να μη σταματά η παραγωγή, η εταιρεία έχει αγοράσει συνολικά m μονάδες από αυτό το μηχάνημα από τις οποίες η μια λειτουργεί και οι υπόλοιπες βρίσκονται σε εφεδρεία. Ο χρόνος λειτουργίας ενός μηχανήματος ακολουθεί εκθετική κατανομή με ρυθμό f . Όταν ένα μηχάνημα πάθει βλάβη, στέλνεται σε ένα συνεργείο επισκευής και αντικαθίσταται από ένα εφεδρικό μηχάνημα, αν υπάρχει κάποιο επισκευασμένο, διαφορετικά η παραγωγή σταματά. Το συνεργείο απασχολεί ένα τεχνικό που μπορεί να επισκευάζει μόνο ένα μηχάνημα τη φορά. Ο χρόνος επισκευής ενός μηχανήματος ακολουθεί εκθετική κατανομή με ρυθμό r . Αν υπάρχουν περισσότερα από ένα χαλασμένα μηχανήματα στο συνεργείο, αυτά επισκευάζονται το ένα μετά το άλλο με τη σειρά. Έστω $X(t)$ ο αριθμός μηχανημάτων στο συνεργείο τη στιγμή t .

(α) Να αποδείξετε ότι η $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και να βρείτε το διάγραμμα και τον πίνακα ρυθμών μετάβασης.

(β) Να δείξετε ότι η αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική και να υπολογίσετε την οριακή κατανομή.

(β) Να υπολογίσετε το ποσοστό χρόνου σε άπειρο ορίζοντα που η παραγωγική διαδικασία έχει σταματήσει, και το ποσοστό χρόνου που το συνεργείο είναι αδρανές.