21/01/2015

Μάθημα 23

Επαναληπτικές ασκήσεις ΜΑΔΧ

1) Δύο αθλητικές ομάδες Α, Β παίζουν διαδοχικά παιχνίδια (ανεξ.)

η Α κερδίζει με πιθανότητα p

η Β κερδίζει με πιθανότητα $1-p$

Πρωτάθλημα Ι

Παίζονται διαδοχικά παιχνίδια μέχρι κάποια ομάδα να κερδίσει δύο στη σειρά

✓ αναμενόμενος αριθμός

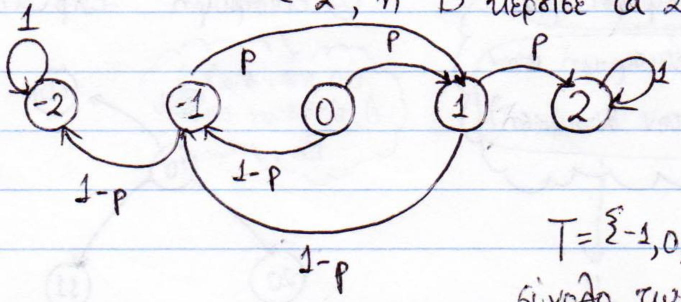
1) Αν. αρ. παιχνιδιών   ABABA$\underline{BB}$ 7

2) P (A πρωταθλ)   AB$\underline{AA}$ 4.

$\{X_n, n=1,2,\dots\}$

$X_n = ?$

$$X_n = \begin{cases} 0, & \text{αρχή του αγώνα} \\ 1, & \text{η A κέρδισε το τελευταίο} \\ -1, & \text{η B κέρδισε το τελευταίο} \\ 2, & \text{η A κέρδισε τα 2 τελευταία} \\ -2, & \text{η B κέρδισε τα 2 τελευταία} \end{cases}$$



$C_1 = \{2\}$ απορ.

$C_2 = \{-2\}$ απορ.

$T = \{-1, 0, 1\}$ σύνολο των παροδικών καταστάσεων

$C_3 = \{-1, 1\}$ παροδ.

$C_4 = \{0\}$ παροδ.

(αφού είναι παροδικές, δεν μας ενδιαφέρει να τις βάλουμε χωριστά, συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε το σύνολό τους το T δεν είναι κλάση φυσικά ☺ :Β)

Έστω $f_i = E[\text{χρόνος μέχρι το τέλος} \mid X_n = i]$

Ζητείται το $f_0 = ?$

$f_2 = f_{-2} = 0$

ο αγώνας που θα πρέπει να έχει γίνει ήδη για να νικήσει μία ομάδα 2 φορές συνεχόμενα και να κερδίσει το τουρνουά!

$f_0 = 1 + p f_1 + (1-p) f_{-1}$

$f_1 = 1 + p \cdot 0 + (1-p) f_{-1}$

$f_{-1} = 1 + p \cdot f_1 + (1-p) \cdot 0$

$$f_0 = \frac{1 + p + (1-p) + p(1-p)}{1 - p(1-p)}$$

Έστω $x_{i2} = P[\underbrace{\text{απορρόφηση στη } 2}_{\text{πρωταθλήτρια η } A} \mid X_0 = i]$

$x_{22}=1$, $x_{-2,2}=0$. $x_{02}, x_{12}, x_{-12} = ?$

$$\left.\begin{array}{l} x_{02} = p\,x_{12} + (1-p)\,x_{-12} \\ x_{12} = p\cdot 1 + (1-p)x_{-1,2} \\ x_{-12} = p\,x_{12} + (1-p)\cdot 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_{02} = \frac{p^2(2-p)}{1-p(1-p)} \quad P(A \text{ πρωτάθλημα})$$

$$x_{0-2} = \frac{1-p-p^2+p^3}{1-p(1-p)} \quad P(B \text{ πρωτάθλημα})$$

Η A πότε προτιμά αυτό το πρωτάθλημα σε σχέση μ' ένα μόνο αγώνα?

Πότε ισχύει $x_{02} > p \Leftrightarrow p > 1/2$

Παραλλαγή της 1

Κάθε ομάδα που κερδίζει παίρνει ένα βαθμό.

Πρωταθλήτρια η ομάδα που πρώτη πετυχαίνει δύο βαθμούς διαφορά από την άλλη.

X_n = διαφορά πόντων μεταξύ A-B

$X_0 = 0$

$X_n = 2$ (A) (-2) (-1) (0) (1) (2)

$X_n = -2$ (B)

Άσκηση 3

Μηχάνημα στην αρχή κάθε περιόδου $\begin{cases} \text{λειτουργεί} \\ \text{χαλασμένο} \end{cases}$

Αν λειτουργεί τότε με πιθανότητα p χαλάει στη διάρκεια της περιόδου

Αν χαλάσει η επισκευή διαρκεί δύο περιόδους

Αν λειτουργεί κανονικά σε μία περίοδο ⇒ έσοδο $= R$

Αν χαλάει μέσα σε μία περίοδο ⇒ έσοδο $= aR$, $a<1$

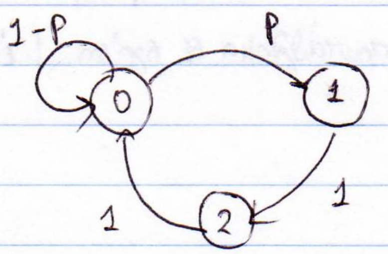
Μόνο στις διακριτά χρόνου έχουμε τιμές!

Επίσης, είναι σαφές ότι είναι διακριτού χρόνου, μιας και μας αναφέρει ότι ένα συμβάν πραγματοποιείται στην αρχή μιας περιόδου!

Η επισκευή κόστος C/περίοδο
Μέσο καθαρό κέρδος/μονάδα χρόνου σε άπειρο χρονικό ορίζοντα

$\{X_n, n=0,1,\dots\}$

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{λειτουργεί κανονικά στην αρχή της περιόδου } n \\ 1 & \text{έχει βλάβη, } 1^{\eta} \text{ μέρα επισκευής} \\ 2 & \text{έχει βλάβη, } 2^{\eta} \text{ μέρα επισκευής} \end{cases}$$



αδιαχώριστη και πεπερασμένη
θετικά επαναληπτική
και απεριοδική.

Εξισώσεις Στάσιμης Κατανομής

$$\left.\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_0(1-p) + \pi_2 \cdot 1 \\ \pi_1 &= \pi_0 \cdot p \\ \pi_2 &= \pi_1 \cdot 1 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \pi_0 = \frac{1}{1+2p}, \quad \pi_1 = \pi_2 = \frac{p}{1+2p}$$

Αμοιβή/μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα

$$= \sum_{i \in S} r_i \pi_i$$

$r_i = E[\text{αμοιβή βήματος } n \mid X_n = i]$

$r_0 = (1-p) \cdot R + paR$

$r_1 = -c$

$r_2 = -c$

Άσκηση 4) Σ' ένα τραπέζι ξ υπάρχουν τρεις τόμοι ενός συγγράμματος σε στοίβα
Σε κάθε βήμα επιλέγεται τυχαία ένας τόμος που χρησιμοποιείται και

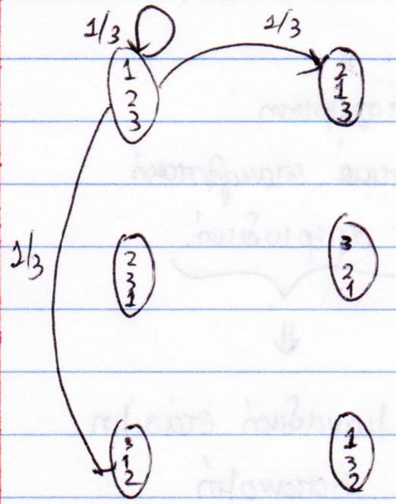
μετά τοποθετείται Πάνω στους άλλους 2

Να οριστεί ΜΑΔΧ και να οριστεί το διάγραμμα μετάβασης

Κατάσταση = σειρά

(i,j,k) ή $\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$ μία μετάθεση των $\{1,2,3\}$

$|S| = 3! = 6$



23/01/2015

Μάθημα 24

Άσκηση 1

Ασφάλιση οδηγού για ένα έτος

Ασφάλιστρα $\begin{cases} 400 & \text{(κανένα ατύχημα)} \\ 450 & \text{(1 ατύχημα στο προηγ. έτος)} \\ 550 & \text{(2 ατυχήματα στα 2 προηγ. έτη)} \end{cases}$

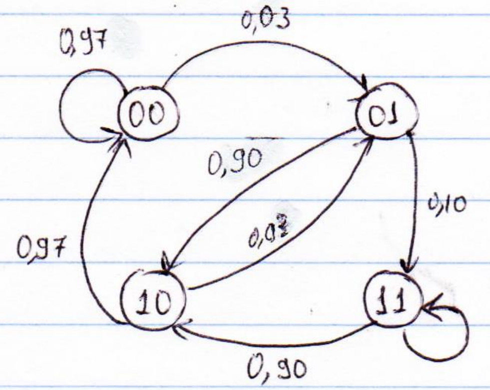
- Αν ατύχημα(-τα) σε μία χρονιά → 10% πιθανότητα να ξανασυμβεί.
- Αν όχι ατυχήματα στην προηγούμενη χρονιά ⇒ στην επόμενη έχει 30% πιθανότητα να συμβεί ατύχημα.

α) Αναμενόμενο κόστος σε άπειρο ορίζοντα

β) Αν στην αρχή της χρονιάς → 550 πόσος είναι ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι → 400

Ορίζουμε ΜΑΔΧ $\{X_n, n=0,1,2,\dots)$

$$X_n = \begin{cases} (0,0) & \text{αν κανένα αίτημα στο } n-2, n-1 \\ (0,1) & \text{όχι αίτημα στο } n-2, \text{ όταν αίτημα στο } n-1 \\ (1,0) & \text{αίτημα στο } n-2, \text{ όχι στο } n-1 \\ (1,1) & \text{αίτημα στα } n=2, n=1 \end{cases}$$



αδιαχώριστη
θετικά επαναληπτική
+ απεριοδική
$\Downarrow$
$\exists$ μοναδική στάσιμη κατανομή

α) αμοιβές (κόστη)

$C_{00} = 400$

$C_{10} = 450$

$C_{01} = 450$

$C_{11} = 550$

Στάσιμη Κατανομή

$$\left.\begin{aligned} \pi_{00} &= 0,97\pi_{00} + 0,97\pi_{10} \\ \pi_{10} &= 0,90\pi_{01} + 0,90\pi_{11} \\ \pi_{01} &= 0,03\pi_{00} + 0,03\pi_{10} \\ \pi_{00} &+ \pi_{01} + \pi_{10} + \pi_{11} = 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \pi_{00} &= 0,937 \\ \pi_{01} &= 0,029 \\ \pi_{10} &= 0,029 \\ \pi_{11} &= 0,033 \end{aligned}$$

$$\overline{C} = C_{00}\pi_{00} + C_{01}\pi_{01} + C_{10}\pi_{10} + C_{11}\pi_{11}$$

β) $f_{11,00} = E[\text{αριθμός περιόδων έως } X_n=(0,0) \mid X_0=(1,1)]$

$$\left.\begin{aligned} f_{11,00} &= 1 + 0,9\cdot f_{10,00} + 0,1 f_{11,00} \\ f_{10,00} &= 1 + 0,97\cdot 0 + 0,03 f_{01,00} \\ f_{01,00} &= 1 + 0,10\cdot f_{11,00} + 0,90 f_{10,00} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} f_{10,00} &= 1,07 \\ f_{01,00} &= 2,18 \\ f_{11,00} &= 2,18 \end{aligned}} - (\ell)$$

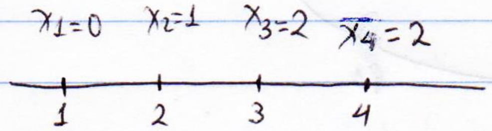
Άσκηση 2

Δίκαιο ζάρι, διαδοχικές ρίψεις μέχρι να έχουν εμφανιστεί όλες οι ενδείξεις τουλάχιστον μία φορά η κάθε μία

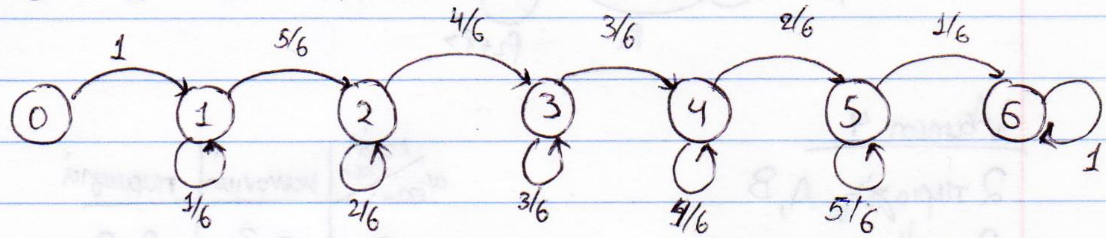
E [αναμενόμενος αριθμός ρίψεων]

ΜΑΔΧ $\{X_n, n=1,2,\dots\}$

X_n = αριθμός διαφορετικών ενδείξεων που έχουν εμφανιστεί στις προηγούμενες $n-1$ ρίψεις



$S=\{0,\dots,6\}$



Ζητείται $f_{06} = E(n: X_n=6 \mid X_1=0)$

Άσκηση 3

Λίμνη 3 τύποι ψαριών $\begin{cases} p_1 \\ p_2 \quad \text{ποσοστά} \\ p_3 \end{cases}$

Διαδοχικές προσπάθειες (1 ψάρι κάθε φορά)
Μέχρι να έχουν πιαστεί και οι τρεις τύποι;

α' τρόπος

$X_n = (0,0,0)$ κανένα

$(1,0,0)$ 1, όχι 2, όχι 3

$(0,1,0)$

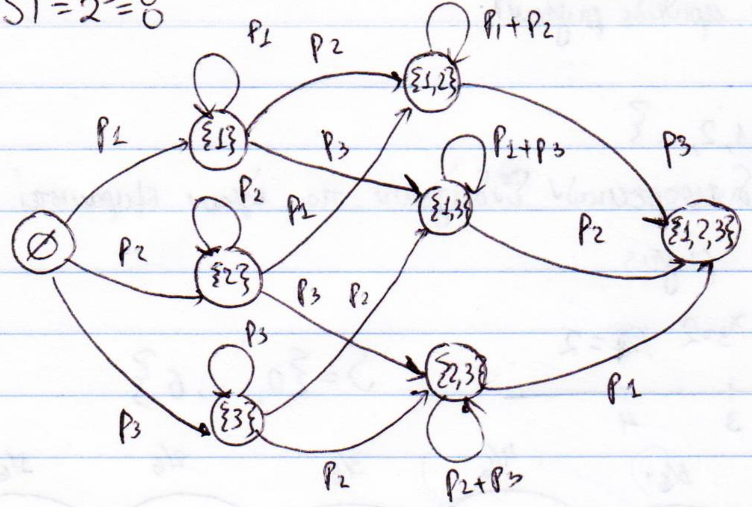
$(1,1,1)$ όλοι οι τύποι

β' τρόπος

$X_n = \{i,\ i \text{ έχει έρθει}\} \subseteq \{1,2,3\}$

$S = 2^{\{1,2,3\}} = P(\{1,2,3\})$ (δυναμοσύνολο)

$|S| = 2^3 = 8$



Άσκηση 4

2 περιοχές A, B

2 οχήματα

Στην αρχή κάθε μέρας

κάθε περιοχή → κανονική

→ πυρκαγιά

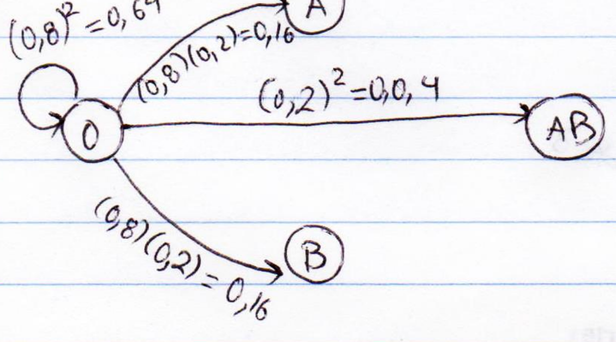
κατάσταση / αρ. οχημάτων	κανονική	πυρκαγιά
0	0.3	0.9
1	0.2	0.6
2	0.1	0.3

Πολιτική

Αν και οι δύο περιοχές στην ίδια κατάσταση 1 → A

1 → B

Αν μία περιοχή πυρκαγιά και η άλλη όχι → 2 → πυρκαγιά



0 A: 1 όχημα

B: 1 όχημα