3.3. Ἰντουισιονισμός

Ὁ Ἰντουισιονισμός ὡς σχολή φιλοσοφίας τῶν μαθηματικῶν εἶναι ἔντονα πρωτότυπος καί διαφορετικός ἀπό τίς δύο προηγούμενες σχολές πού ἐξετάσαμε. Ἐμφανίστηκε στίς ἀρχές τοῦ 20οῦ αἰώνα καί ἱδρυτής του ἦταν ὁ Ὀλλανδός μαθηματικός L.E.J. Brouwer, πού προσπάθησε νά δώσει τή δική του λύση στήν κρίση στά θεμέλια τῶν μαθηματικῶν, θεσμοθετώντας μιά ἰδιαίτερη ἔννοια κατασκευαστικότητας καί εἰσάγοντας κυριολεκτικά ρηξικέλευθες ἰδέες γύρω ἀπό τήν ἐπιτρεπτή μαθηματική πρακτική. Ἐδῶ θά πρέπει νά εἰπωθεῖ πώς ἡ σχολή τῶν Ἰντουισιονιστῶν δέν ἀποτέλεσε μιά σχολή φιλοσοφίας τῶν μαθηματικῶν πού προσπάθησε νά στηρίξει τήν ὑπάρχουσα μαθηματική πρακτική, ἀλλά, τουναντίον, τήν ἀμφισβήτησε καί θεσμοθέτησε τήν ἀνάγκη ξεκαθαρίσματος τῆς πρακτικῆς αὐτῆς, ἀπορρίπτοντας ἔτσι μεγάλα κομμάτια τῶν κλασικῶν μαθηματικῶν. Ἀπ' αὐτή τήν ἄποψη ἦταν καί ἡ μόνη ἀπό τίς τρεῖς βασικές σχολές φιλοσοφίας τῶν μαθηματικῶν τοῦ 20οῦ αἰώνα πού συνέτεινε στή δημιουργία μαθηματικῶν διαφορετικῶν ἀπό τά κλασικά γνωστῶν κάτω ἀπό τό γενικό τίτλο «Ἰντουισιονιστικά Μαθηματικά».

Τό βασικό σημεῖο στό ὁποῖο ἐπικεντρώθηκε τό ἐνδιαφέρον τοῦ Brouwer ἦταν ἡ ἐξέταση τῆς φύσης τῶν νοητῶν μαθηματικῶν κατασκευῶν. Ὡς συνέπεια αὐτοῦ τοῦ προσανατολισμοῦ προκύπτει ἡ ὑποβάθμιση τοῦ ἐρωτήματος τῆς φύσης τῶν νοητῶν ἀντικειμένων πού παράγονται μέ κατασκευαστικές διαδικασίες καί ἡ τοποθέτησή του στήν περιοχή τῶν δευτερεύουσας σημασίας φιλοσοφικῶν προβλημάτων[18]. Τό αἴτημα πού ἀναδύθηκε ἦταν πώς κριτήριο τῆς ὕπαρξης τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων θά πρέπει νά εἶναι ἡ νοητή παραγωγή τους μέ διαδικασίες κατασκευαστικά ἐλεγχόμενες. Αὐτή ἡ ἐμμονή στήν κατασκευαστικότητα ὁδήγησε, ἄν ὄχι στόν ἄμεσο καθορισμό τῆς ἴδιας τῆς ἔννοιας, τουλάχιστον στήν περιχαράκωσή της μέ τρόπους πού ἀποδείχτηκαν ἱκανοί νά στηρίξουν μιά συνεπή νέα μαθηματική πρακτική, στά πλαίσια τῆς ὁποίας ἄνθισε καί ὡς ἕνα βαθμό συνεχίζει νά ἀνθεῖ ἡ καθαρή μαθηματική ἔρευνα καί ὁ φιλοσοφικός στοχασμός. Ἡ περιχαράκωση αὐτή στηρίχθηκε σέ μιά φιλοσοφική θέση καντιανῆς προέλευσης καί σέ μιά πρωτότυπη ἀντιμετώπιση τοῦ ἐννοιολογικοῦ διπόλου ἀποδεξιμότητα-ἐπαληθευσιμότητα πού θά ἐξετάσουμε παρακάτω. Ἡ βασική αὐτή φιλοσοφική θέση σχετίζεται μέ τή φύση τῆς μαθηματικῆς ἐποπτείας (ἐνόρασης)[19].

18. Σύμφωνα μέ τόν Heyting, τό πρόγραμμα τοῦ Brouwer ἀφοροῦσε στήν: ἐξέταση τῶν νοητῶν μαθηματικῶν κατασκευῶν καθ' ἑαυτῶν, χωρίς ἀναφορά σέ ἐρωτήματα πού ἀφοροῦν στή φύση τῶν κατασκευαζόμενων ἀντικειμένων, ὅπως, γιά παράδειγμα, ἄν αὐτά τά ἀντικείμενα ὑπάρχουν ἀνεξάρτητα ἀπό τή γνώση μας γι' αὐτά.
Βλ. A. Heyting *Intuitionism: An Introduction*, North Holland, Amsterdam, 1971, σ. 1.

3.3.1. Στοιχεῖα τῆς φιλοσοφίας τῶν Ἰντουισιονιστῶν

Γιά νά μπορέσει κανένας νά πάρει μιά ἰδέα τοῦ τί εἶναι τά ἰντουισιονιστικά μαθήματα, θά πρέπει νά περάσει μέσα ἀπό συγκεκριμένα νοητικά μονοπάτια πού φέρουν ἔντονα τή σφραγίδα τοῦ δύσκολου γιά τόν ἀμύητο καί τοῦ σχετικά εὔκολου γιά τόν μυημένο στό συγκεκριμένο σύστημα τῶν ἰδεῶν πού κρύβεται πίσω τους. Τό σύστημα αὐτό ἰδεῶν ἀποτελεῖ καί τό καθαρά φιλοσοφικό σῶμα τῆς σχολῆς.

Μιά ἀπό τίς βασικές θέσεις τῶν Ἰντουισιονιστῶν σχετίζεται μέ τήν αὐτονομία τῆς μαθηματικῆς δραστηριότητας καί τήν ἀνεξαρτησία της ἀπό συγκεκριμένα γλωσσικά συστήματα καί ἀπό τήν τυπική λογική πού αὐτά συνεπάγονται. Σέ ἀπόλυτη ἀντίθεση μέ τούς Λογικιστές, θεωροῦν πώς ἡ θεμελιώδης μαθηματική δραστηριότητα εἶναι προγλωσσική καί προλογική, μέ τήν ἔννοια πώς ἡ φύση της δέν ἐξαρτᾶται ἀπό καί οὔτε ἀνάγεται σέ κάποιο λογικό ὑπόβαθρο συνδεδεμένο μέ κάποιο συγκεκριμένο σύστημα σήμανσης. Ἡ μαθη-

19. Ἡ χρησιμοποίηση καί τῶν δύο λέξεων «ἐποπτεία» «ἐνόραση» γιά τήν ἀπόδοση τοῦ ὅρου «intuition», ὀφείλεται στήν ἀδυναμία μας νά ἐπιλέξουμε ἀνάμεσα στίς δύο.

ματική δραστηριότητα γι' αὐτούς δέν εἶναι ἄλογη, ὅμως προηγεῖται στόν καθορισμό τῶν κανόνων τοῦ παιχνιδιοῦ. Ἔτσι, οἱ συγκεκριμένοι λογικοί κανόνες πού θά προκύψουν θά πρέπει νά εἶναι τό ὥριμο προϊόν αὐτῆς τῆς δραστηριότητας, ἡ ἐξέταση τῆς φύσης τῆς ὁποίας θά πρέπει καί νά καθορίσει τά ὅρια δράσης αὐτῶν τῶν κανόνων. Εἶναι ἀπαράδεκτο, γι' αὐτούς, λογικές ἀρχές, ὅπως ἡ ἀρχή τῆς ἀπόκλεισης τοῦ τρίτου, γιά παράδειγμα, πού προκύπτουν ἀπό τή σπουδή πεπερασμένων ὁλοτήτων, νά ἐπεκτείνονται σέ ἄπειρες ὁλότητες οἱ ὁποῖες εἶναι προβληματικές ἀπό τήν ἴδια τους τή φύση. Ἡ ἀποδοχή ὕπαρξης τέτοιων ὁλοτήτων προϋποθέτει τό νοητικό ἅλμα τῆς ἀντικειμενοποίησης τοῦ ἀπείρου χωρίς τή δυνατότητα μίας βῆμα μέ βῆμα κατασκευῆς ἤ ἐλέγχου του.

Ἡ προτερότητα τῆς μαθηματικῆς δραστηριότητας σέ σχέση μέ τή γενικότερη γλωσσική καί λογική δραστηριότητα ὀφείλεται σύμφωνα μέ τόν Brouwer στήν προτερότητα τῆς θεμελιώδους καί διακριτῆς *χρονικῆς* ἐποπτείας (ἐνόρασης). Ἡ βασική αὐτή θέση εἶναι καντιανῆς προέλευσης καί σάν τέτοια ἀδιαφορεῖ γιά τήν φύση των καθ' ἑαυτά πραγμάτων. Σέ τελευταῖα ἀνάλυση, αὐτό πού μετράει στό ἐπίπεδο τῆς γνώσης εἶναι ὁ *τρόπος* πού τά πράγματα καθ' ἑαυτά — ἄν ὑπάρχουν — εἰκονίζονται μέσα μας. Ἡ θεμελιώδης διακριτή χρονική ἐποπτεία (ἐνόραση) ἀποτελεῖ ἐσωτερικό στοιχεῖο τοῦ νοῦ καί θά ὑπῆρχε ἀκόμη καί ἄν ὑποθέταμε πώς ὁ γνωστικός ὑποδοχέας ἦταν ἀπόλυτα ἀποκλεισμένος ἀπό τήν ὁποιαδήποτε ὑπαρκτή ἤ μή ἐξωτερική πραγματικότητα. Ἡ μετάπτωση ἀπό κάποια ἀτομική - μή περαιτέρω δηλαδή ἀναλύσιμη — νοητική πράξη αὐτοσυνείδησης στήν ἑπόμενη της εἶναι ἀρκετή γιά τήν ἐσωτερική ἐποπτεία τῆς δυαδικότητας, μέ τήν ἔννοια πώς ἡ τελευταία πράξη θά ἐμπεριεῖχε σάν στοιχεῖο της τήν μνήμη τῆς προηγουμένης της. Μιά τέτοια μετάπτωση μπορεῖ νά συμβαίνει μόνο διακριτά — δηλαδή βῆμα μέ βῆμα — καί ὄχι συνεχιστικά.

Σύμφωνα μέ τόν Brouwer οἱ ἀρχές τῆς κλασσικῆς τυπικῆς λογικῆς εἶναι γλωσσικές γενικεύσεις καί σάν τέτοιες μπορεῖ νά ὁδηγοῦν σέ μή-ἀντιφατικά ἀποτελέσματα πού, ὅμως, πολλές φορές δέν δικαιολογοῦνται, οὔτε στηρίζονται σέ διαδικασίες αὐστηρά καθορισμένες ἀπό τήν πεπερασμένης καί διακριτῆς ὑφῆς φύση τῶν γνω-

στικῶν μας ἀ-γλωσσικῶν καί προ-λογικῶν ἐργαλείων. Τά ἐργαλεῖα αὐτά πρέπει νά ἔχουν ὡς βάση τους τή θεμελιώδη πεπερασμένη καί διακριτή χρονική ἐποπτεία (ἐνόραση), πρέπει ἑπομένως νά μήν ἐπιτρέπουν τήν ἀποδοχή τῆς ὕπαρξης ἀντικειμενοποιημένων ἄπειρων ὁλοτήτων. Ἀκόμη καί οἱ φυσικοί ἀριθμοί, ὡς ἀντικειμενοποιημένη καί τελειωμένη ὁλότητα, δέν εἶναι ἀποδεκτοί, μέ τήν ἔννοια πώς ὑπάρχει πεπερασμένα ἐλέγξιμος ἀλγόριθμος γιά τήν κατασκευή κάθε φυσικοῦ ἀριθμοῦ, χωρίς νά ὑπάρχει ἀντίστοιχος ἀλγόριθμος κατασκευῆς τῆς ὁλότητας τους σάν ἰδιαίτερου καί ξεχωριστοῦ ἀντικειμένου. Ἔτσι, ἡ κλασσική καντοριανή συνολοθεωρητική ἀντίληψη — ἀντίληψη κατά βάση ἐκτατικοῦ χαρακτήρα — πρέπει νά εἶναι, καί εἶναι γιά τούς Ἰντουισιονιστές, ἐξοβελιστέα. Πῶς θά μποροῦσαν ἄλλωστε νά δεχθοῦν τήν ὕπαρξη ὀντοτήτων, πού δέν μποροῦν νά κατασκευασθοῦν; Τό ἐρώτημα τῆς ὕπαρξης τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων γιά τούς Ἰντουισιονιστές ἔρχεται σέ δεύτερη μοίρα, μέ τήν ἔννοια πώς τούς εἶναι σχετικά ἀδιάφορη ἡ ὀντολογική μεταφυσική του διάσταση. Ἀπό τήν ἄλλη μεριά ὅμως, στό καθαρά ἐπιστημολογικό ἐπίπεδο, ὁρίζουν τήν ὕπαρξη ὡς συνώνυμη τῆς ἰντουισιονιστικῆς κατασκευαστικότητάς τους. Παραμένει, βέβαια, τό ἐρώτημα πῶς καθορίζεται αὐτή ἡ περίφημη κατασκευαστικότητα. Ἡ ἀπάντηση σ' αὐτό θά πρέπει νά ἀναβληθεῖ, ὡς ὅτου δοῦμε πῶς λειτουργοῦν οἱ κλασσικοί λογικοί σύνδεσμοι στό ἰντουισιονιστικό σύστημα.

Σύμφωνα μέ τόν Brouwer δύο βασικές *ἀρχές - πράξεις* συγκροτοῦν τό φιλοσοφικό ὑπόβαθμο τῶν ἰντουισιονιστικῶν μαθηματικῶν. Ἡ ἀναφορά καί συζήτηση τῆς δεύτερης ἀρχῆς-πράξης θά γίνει στό σημεῖο πού θά ἀσχοληθοῦμε μέ τόν ὁρισμό τῆς ἀκολουθίας ἤδη κατασκευασμένων μαθηματικῶν ἀντικειμένων. Ἡ πρώτη ἀρχή-πράξη σχετίζεται μέ τήν περιγραφή καί τόν ὁρισμό τῆς διακριτῆς χρονικῆς ἐποπτείας (ἐνόρασης) καί ἀποτελεῖ τό θεμελιῶδες μανιφέστο τῆς ἰντουισιονιστικῆς σχολῆς. Ἄς ἀκούσουμε ὅμως τόν ἴδιο τόν Brouwer νά τήν διατυπώνει:

> *Ἡ πρώτη πράξη τοῦ Ἰντουισιονισμοῦ* διαχωρίζει τά μαθηματικά ἀπό τή γλώσσα τῶν μαθηματικῶν, ἰδιαίτερα ἀπό τά φαινόμενα τῆς γλώσσας πού περιγράφονται ἀπό τή θεωρητική λογική, καί ἀναγνωρί-

ζει πώς τά ἰντουισιονιστικά μαθηματικά εἶναι μιά θεμελιωδῶς ἀ-γλωσσική δραστηριότητα τοῦ νοῦ πού ἔχει τίς ρίζες της στήν ἀντίληψη *μιᾶς κίνησης τοῦ χρόνου*, δηλαδή τῆς διάλυσης μιᾶς στιγμῆς τῆς ζωῆς σέ δύο διακριτά πράγματα, πού τό ἕνα δίνει τή θέση του στό ἄλλο διατηρούμενο ὅμως στήν μνήμη. Ἄν αὐτή ἡ ἔτσι γεννημένη δυάδα ἀπογυμνωθεῖ ἀπό κάθε ποιότητα, παραμένει ἡ *ἄδεια μορφή τοῦ ὑποβάθρου ὅλων τῶν δυάδων*. Αὐτό ἀκριβῶς τό ὑπόβαθρο, αὐτή ἡ ἄδεια μορφή, εἶναι ἡ *βασική ἐποπτεία [ἐνόραση] τῶν μαθηματικῶν*.[20]

Ἔτσι, ἡ βασική ἐποπτεία (ἐνόραση) τῶν μαθηματικῶν συνδέεται μέ τήν χρονική ἐπαλληλία διακριτῶν νοητικῶν πράξεων καί ἀποτελεῖ τήν βάση τῆς ἔμφυτης οἰκειότητάς μας μέ τούς φυσικούς ἀριθμούς. Στό σημεῖο αὐτό, συστηματοποιῶντας τίς παρατηρήσεις μας, θά μπορούσαμε νά ταξινομήσουμε τά θεμελιώδη χαρακτηριστικά αὐτῆς τῆς ἐποπτείας ὡς ἑξῆς:

α) Εἶναι κατά τρόπο θεμελιακό μιά δραστηριότητα σκεπτικοῦ χαρακτῆρα (thinking activity).

β) Ὡς κριτήριο ἀλήθειας ἔχει ἕναν a priori χαρακτῆρα. Ἄν δηλαδή κάτι εἶναι ἀληθές σ' αὐτή τήν πρωτογενῆ σφαίρα τῆς ἐνόρασής μας, εἶναι ἀληθές ἐπειδή ἀκριβῶς συμβαίνει νά εἶναι αὐτό ἀκριβῶς πού εἶναι.

γ) Εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό ὁποιαδήποτε γλῶσσα. Ἐδῶ λέγοντας γλῶσσα ἐννοοῦμε ὁποιοδήποτε ὀργανωμένο σύστημα σήμανσης. Οἱ Ἰντουισιονιστές πιστεύουν πώς ἡ ἐνόραση ἔχει προγλωσσικό χαρακτῆρα. Ἡ ἔννοια τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, γιά παράδειγμα, προηγεῖται ὁποιασδήποτε γλωσσικῆς διαδικασίας, ὄντας σύμφυτη μέ τήν διακριτή χρονική ἐπαλληλία (temporal succession) τῶν πνευματικῶν πράξεων. Ἐδῶ πρέπει νά τονίσουμε πώς ὁ Brouwer δεχόταν τό παραπάνω ἐπηρεασμένος ἀπό τόν Kant, χωρίς ὅμως νά δέχεται ἀναγκαστικά καί τόν a priori χαρακτῆρα τῆς χωρικῆς ἐπαλληλίας (spatial succession).

δ) Ἔχει ἀντικειμενικό χαρακτῆρα, μέ τήν ἔννοια ὅτι εἶναι ἡ ἴδια γιά ὅλα τά σκεπτόμενα ὄντα. Ἐδῶ θά πρέπει νά ποῦμε πώς μ' αὐτή τήν βασική παραδοχή οἱ Ἰντουισιονιστές ξεπερνοῦν τό πρό-

20. Βλ. A. Heyting (Ed.) *L. E. J. Brouwer: Collected Works*. Τόμ. 1, North-Holland, Amsterdam, 1975, σσ. 509-510.

βλημα τῆς συνεννόησης καί ἐπικοινωνίας πού εἶναι ἰδιαίτερα ὀξύ σέ κάθε φιλοσοφική θεωρία πού μεταφέρει τό κέντρο τῆς προσοχῆς ἀπό τό ἀντικείμενο στό ὑποκείμενο τῆς γνώσης.

Ἔχοντας λίγο ἤ πολύ καθορίσει τήν ἔννοια τῆς ἐνόρασης, ἐρχόμαστε νά ποῦμε δύο λόγια γιά τήν μή ἀποδοχή ἀπό τούς Ἰντουισιονιστές τῆς ἀρχῆς τῆς ἀπόκλεισης τοῦ τρίτου. Βέβαια, ἡ μή ἀποδοχή τῆς ἀρχῆς τῆς ἀπόκλεισης τοῦ τρίτου ἔρχεται σάν ἄμεση συνέπεια τοῦ τρόπου μέ τόν ὁποῖο βλέπουν τήν κατασκευαστικότητα στά μαθηματικά. Ὅμως, πίσω ἀπ' αὐτό κρύβεται ἡ βασική τους ἀντίληψη πώς κακῶς ἐπεκτείνουμε ἀρχές πού εἶναι εὔλογες γιά νοητικές διαδικασίες πού ἀπαιτοῦν πεπερασμένα (ὡς πρός τό πλῆθος τους) βήματα, σέ διαδικασίες πού ἀπό τήν ἴδια τους τή φύση ἀπαιτοῦν ἄπειρα βήματα. Γι' αὐτούς μιά φράση σάν τήν παρακάτω, δέν εἶναι οὔτε ἀληθής οὔτε ψευδής· δέν ἔχει ἁπλῶς νόημα:

«Κάθε ἄνθρωπος εἶναι θνητός ἤ ὑπάρχει ἕνας ἄνθρωπος πού εἶναι ἀθάνατος»

Ἔλεγχος τῆς ἀλήθειας ἤ τοῦ ψευδοῦς τῆς πρότασης αὐτῆς θά σήμαινε γιά τούς Ἰντουισιονιστές ἔλεγχο τῆς ἀλήθειας ἤ τοῦ ψεύδους κάθε μιᾶς ἀπό τίς ἐπί μέρους προτάσεις, πού συνδέονται μέ τόν διαζευκτικό σύνδεσμο «ἤ». Πιό συγκεκριμένα, ἐξετάζοντας τήν πρώτη ἐπί μέρους πρόταση «κάθε ἄνθρωπος εἶναι θνητός» διαπιστώνουμε πώς γιά τήν πιστοποίηση τῆς ἀλήθειας της, καί μέ τήν ὑπόθεση πώς τό ἀνθρώπινο γένος θά συνεχίσει νά ὑπάρχει ἐπ' ἄπειρον, ἀπαιτεῖται ἄπειρος χρόνος καί ἑπομένως εἶναι ἀδύνατη ἡ ὕπαρξη ἀλοριθμικοῦ ἐλέγχου της. Ἀντίστοιχα γιά τήν πιστοποίηση τοῦ ψεύδους της ἀπαιτεῖται ἐπίσης ἄπειρος χρόνος, λόγω τῆς ἀναγκαίας ἄπειρης διάρκειας τῆς ζωῆς τοῦ τυχεροῦ ἤ τῶν τυχερῶν ἀθανάτων. Ὁ ἔλεγχος τῆς δεύτερης ἐπί μέρους πρότασης ἐμφανίζει ἀκριβῶς τίς ἴδιες δυσκολίες λόγω τῆς σχέσης ἀντιστροφῆς-ἄρνησης πού ἔχει μέ τήν πρώτη. Στό δύσπιστο ἀναγνώστη, πού θά ἀντιτάξει τό ἐπιχείρημα τῆς ἰδιοτυπίας τοῦ παραδείγματος ἐξ αἰτίας τῆς παρεμβολῆς τῆς διάστασης πεπερασμένο-ἄπειρο στό ἐπίπεδο τῆς ἰδιότητας «διάρκεια ἀνθρώπινης ζωῆς», εἶναι ἀρκετό νά εἰπωθεῖ πώς παρεμφερεῖς, ἄν καί μικρότερης ἔντασης, ἀξεπέραστες δυσκολίες ὑπάρχουν καί στό ἐπίπεδο περισσότερο καθημερινῶν τέτοιων προτάσεων, ἀρκεῖ τό ὑπό ἐξέταση σύνολο ἀντικειμένων νά εἶναι ἄπειρο, χωρίς νά ὑπάρχει ἐμφανής ἀλγόριθμος ἐξέτασης ὅλων τῶν ἀντικειμένων του. Βέβαια ἄν κάποιος τυχαῖα διαπιστώσει τήν ὕπαρξη ἑνός ἀντιπαραδείγματος, πού νά διαψεύδει μιά τυχοῦσα πρόταση τῆς μορφῆς $\forall x(\varphi(x))$, τά πράγματα τελειώνουν ἐκεῖ. Ἄν ὅμως ἕνα τέτοιο ἀντιπαράδειγμα δέν ὑπάρχει, ἤ δέν μπορεῖ νά ὑπάρξει, ἡ διαπίστωση τῆς ἀλήθειας μιᾶς πρότασης τῆς μορφῆς $\forall x(\varphi(x)) \vee \neg\forall x(\varphi(x))$ εἶναι κυριολεκτικά ἀδύνατη.

Γιά τούς Ἰντουισιονιστές δέν ὑπάρχει ἔννοια ἀλήθειας ὁρισμένη σέ κάποιο μεταγλωσσικό ἐπίπεδο ἀνεξάρτητα ἀπό ὁποιαδήποτε ἔννοια ἀπόδειξης. Σύμφωνα μέ τό σύστημά τους, οἱ ἔννοιες ἀπόδειξης καί ἀλήθειας συμφύρονται καί συμπλέκονται ἀξεδιάλυτα. Ἡ ἀπόρριψη ὅλων τῶν συστημάτων σήμανσης σημαίνει ταύτιση τῆς ἔννοιας τῆς ἀλήθειας μέ τήν ἔννοια τῆς ἀποδειξιμότητας. Ὑπαρκτό γι' αὐτούς σημαίνει κατασκευαστικά ὑπαρκτό. Ἡ μή ἀποδοχή τῆς ἀρχῆς τῆς ἀπόκλεισης τοῦ τρίτου ἔχει σάν συνέπεια τή μή ἀποδοχή ὅλων τῶν ἀποδείξεων πού χρησιμοποιοῦν ἀπαγωγή σέ ἄτοπο καί, ἑπομένως, κάθε θεώρημα ὕπαρξης πού στήν ἀπόδειξή του χρησιμοποιεῖται κάτι τέτοιο δέν εἶναι θεώρημα, ἐκτός ἄν ὑποκατασταθεῖ ἡ προηγούμενη ἀπόδειξή του μέ μιά ἀπόδειξη καθαρά κατασκευαστική. Γι' αὐτήν τήν ἰδιαίτερη ἔννοια κατασκευαστικότητας θά μιλήσουμε στήν ἑπόμενη παράγραφο. Στό μεταξύ θά δώσουμε μιά κλασσική ἀπόδειξη ἑνός ἁπλοῦ θεωρήματος, πού γιά τούς Ἰντουισιονιστές δέν εἶναι ἀποδεκτή γιατί χρησιμοποιεῖται ἡ ἀρχή ἀπόκλεισης τοῦ τρίτου.

«Ὑπάρχουν δύο ἄρρητοι ἀριθμοί a καί b, τέτοιοι ὥστε ὁ ἀριθμός a^b νά εἶναι ρητός».

Ἀπόδειξη: Ἔστω ὁ ἀριθμός $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Ὁ ἀριθμός αὐτός εἶναι ἤ ρητός ἤ ἄρρητος. Ἄν εἶναι ρητός τότε τό πρόβλημα ἔχει τελειώσει. Ἄν δέν εἶναι τότε ὁ ἀριθμός $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^2=2$ εἶναι ρητός ὁπότε καί πάλι τό πρόβλημα ἔχει τελειώσει.

Ἡ ἀπόδειξη αὐτή εἶναι, ὅπως εἴπαμε, ἀπαράδεκτη ἀπό πλευρᾶς ἰντουισιονιστικῶν μαθηματικῶν γιατί χρησιμοποιεῖται σ' αὐτήν ἡ ἀρχή τῆς ἀπόκλεισης τοῦ τρίτου. Μιά παραδεκτή ἀπόδειξη θά μποροῦσε, γιά παράδειγμα, νά δείχνει μέ κατασκευαστικούς τρόπους πώς ὁ $\sqrt{2}$ καί ὁ $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ εἶναι ἄρρητοι καί στή συνέχεια νά χρησιμοποιεῖ τό τελευταῖο κομμάτι τῆς προηγούμενης ἀπόδειξης.

3.3.2. Οἱ ἔννοιες τῆς κατασκευαστικότητας τῆς ἀπόδειξης καί τῆς ἀλήθειας στά ἰντουισιονιστικά μαθηματικά

Γιά νά μπορέσουμε νά καθορίσουμε τήν ἔννοια τῆς ἀπόδειξης στά ἰντουισιονιστικά μαθηματικά, χρειάζεται νά δοῦμε πῶς λειτουργοῦν τά διάφορα λογικά σύμβολα σέ σχέση μέ τήν παραπάνω ἔννοια. Θά πρέπει δηλαδή νά καθορίσουμε γιά κάθε πρόταση μέσα στήν ὁποία κάποιο συγκεκριμένο λογικό σύμβολο παίζει τό ρόλο τοῦ βασικότερου τελεστή, τί σημαίνει ἡ φράση «ἡ πρόταση αὐτή εἶναι ἀποδείξιμη».

Σάν τέτοια λογικά σύμβολα θά θεωρήσουμε τούς γνωστούς μας ἤδη λογικούς συνδέσμους καί τούς ποσοδεῖκτες:

Σύνδεσμοι:

$\neg$ (ἄρνηση)
$\vee$ (διάζευξη)
$\wedge$ (σύζευξη)
$\rightarrow$ (συνεπαγωγή)
$\leftrightarrow$ (ἰσοδυναμία)

Ποσοδεῖκτες:

$\exists$ (ὑπαρκτικός)
$\forall$ (καθολικός)

Ἐδῶ θά πρέπει νά τονίσουμε πώς ὁ ὁποιοσδήποτε καθορισμός τοῦ ρόλου αὐτῶν τῶν λογικῶν συμβόλων θά πρέπει νά ὑπακούει στή γενική ἀρχή ὅτι, δεδομένης μιᾶς ὁποιασδήποτε κατασκευαστικῆς διαδικασίας, θά εἴμαστε σέ θέση νά τήν ἀναγνωρίσουμε σάν μιά δυνατή ἤ ὄχι ἀπόδειξη μιᾶς ὁποιασδήποτε συγκεκριμένης πρότασης.

Ἔστω λοιπόν ἡ πρόταση $(A) \vee (B)$. Θά λέμε πώς ἔχουμε στά χέρια μας μιά ἀπόδειξη της ἄν καί μόνο ἄν ἔχουμε στά χέρια μας μιά ἀπόδειξη τῆς A ἤ μιά ἀπόδειξη τῆς B. Ἄν δηλαδή γιά παράδειγμα ἔχουμε τήν παρακάτω πρόταση τῆς θεωρίας ἀριθμῶν, «1=1 ἤ κάθε ἄρτιος μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν ἄθροισμα δύο πρώτων», τότε ἔχουμε στά χέρια μας μιά ἀπόδειξή της ἐπειδή μποροῦμε νά ἔχουμε στά χέρια μας μιά κατασκευαστική ἀπόδειξη τῆς πρότασης «$1=1$».

Ἐδῶ ἀκριβῶς θά πρέπει νά ποῦμε πώς οἱ Ἰντουισιονιστές ἀρνοῦνται τήν καθολικότητα τῆς ἀρχῆς τῆς ἀπόκλεισης τοῦ τρίτου (δηλαδή ἀρνοῦνται τήν καθολική ἰσχύ προτάσεων τῆς μορφῆς $(A) \vee \neg(A)$) γιατί ὑπάρχουν προτάσεις πού οὔτε γι' αὐτές οὔτε γιά τίς ἀρνήσεις τους μποροῦμε νά βροῦμε κατασκευαστικά ἀποδεκτές ἀποδείξεις (τουλάχιστον στήν παροῦσα φάση). Ἕνα τέτοιο παράδειγμα θά μποροῦσε νά εἶναι ἡ περίφημη εἰκασία τοῦ Goldbach πού ἀναφέραμε καί προηγουμένως, δηλαδή ἡ πρόταση «κάθε ἄρτιος ἀριθμός μπορεῖ νά γραφεῖ σάν ἄθροισμα δύο πρώτων».

Ἄς θεωρήσουμε τώρα τήν πρόταση $(A) \wedge (B)$. Θά λέμε ὅτι ἔχουμε στά χέρια μας μιά ἀπόδειξη τῆς $(A) \wedge (B)$, ἄν καί μόνο ἄν, ἔχουμε στά χέρια μας μιά ἀπόδειξη τῆς A καί μιά ἀπόδειξη τῆς B.

Ἐδῶ ἄς ἀνοίξουμε μιά παρένθεση. Εἶναι προφανές πώς οἱ παραπάνω περιπτώσεις ἀντιμετωπίστηκαν ὅπως ἀκριβῶς θά ἀνέμενε κανείς, ἐπηρεασμένος ἀπό τόν τρόπο πού δροῦν οἱ σύνδεσμοι καί στήν κλασική λογική. Θέλουμε νά ποῦμε μ' αὐτό πώς μέχρι ἐδῶ δέν ὑπάρχει τίποτα παράξενο στόν τρόπο μέ τόν ὁποῖο ἀντιμετωπίζονται ἀπό τούς Ἰντουισιονιστές οἱ παραπάνω σύνδεσμοι. Τό ἴδιο ἰσχύει καί στήν περίπτωση τοῦ ὑπαρκτικοῦ ποσοδείκτη, ὅπως θά δοῦμε ἀμέσως παρακάτω.

Ἔστω ὅτι ἔχουμε μιά πρόταση τῆς μορφῆς $\exists x(\varphi(x))$. Γιά μεγαλύτερη εὐκολία ἄς ὑποθέσουμε πώς πρόκειται γιά μιά πρόταση τῆς γλώσσας τῆς θεωρίας τῆς ἀριθμητικῆς τοῦ Peano. Θά λέμε πώς ἔχουμε στά χέρια μας μιά ἀπόδειξη τῆς $\exists x(\varphi(x))$, ἄν γιά κάποιο φυσικό ἀριθμό n ἔχουμε στά χέρια μας μιά ἀπόδειξη τῆς πρότασης $\varphi(\underline{n})$, ὅπου με $\underline{n}$ παριστάνουμε τό γλωσσικό σύμβολο γιά τόν ἀριθμό n.

Ἡ δυσκολία ἀρχίζει ἀπό δῶ καί κάτω. Ἄς ὑποθέσουμε τώρα, πώς ἡ πρότασή μας ἔχει τήν μορφή $(A) \rightarrow (B)$. Ἀπόδειξη τῆς $(A) \rightarrow (B)$ λέμε μιά ἀναγνωρίσιμη κατασκευαστική διαδικασία μετάβασης ἀπό μιά ὁποιαδήποτε ἀπόδειξη τῆς A σέ μιά ἀπόδειξη τῆς B. Κάθε τέτοια ἀπόδειξη δέν εἶναι τίποτα ἄλλο παρά μιά πράξη (κατα-

σκευαστικοῦ καί ἀναγνωρίσιμου χαρακτήρα) μετάβασης ἀπό ἀποδείξεις σέ ἀποδείξεις. Ἔχει λοιπόν ἀναγκαστικά μιά τέτοια πράξη τή σφραγίδα τοῦ πεπερασμένα ἐλέγξιμου, ὡς πρός τά συγκεκριμένα βήματα πού κατά περίπτωση τήν ἀποτελοῦν. Πρέπει νά τονίσουμε, πώς δέν εἶναι σωστό νά παραλείψουμε τή λέξη «ἀναγνωρίσιμη» ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό, γιατί τότε θά μπορούσαμε ἴσως νά ἔχουμε μιά κατασκευαστική διαδικασία μετάβασης ἀπό μιά ὁποιαδήποτε ἀπόδειξη τῆς A σε μιά ἀπόδειξη τῆς B χωρίς αὐτό νά σημαίνει, πώς θά μπορούσαμε μέ πεπερασμένα νοητικά βήματα νά τήν ἀναγνωρίσουμε σάν τέτοια.

Ἄς δοῦμε τώρα τήν περίπτωση, πού ἡ πρότασή μας ἔχει τή μορφή $\forall x(\varphi(x))$. Ὁ ὁρισμός τῆς ἀπόδειξης της $\forall x(\varphi(x))$ ἀκολουθεῖ τά ἴχνη τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἀπόδειξης γιάτήν περίπτωση τῆς συνεπαγωγῆς. Ἀπόδειξη, λοιπόν, τῆς $\forall x(\varphi(x))$ λέμε μιά ἀναγνωρίσιμη κατασκευαστική διαδικασία μετάβασης ἀπό ἕναν ὁποιονδήποτε φυσικό ἀριθμό n σέ μιά ἀπόδειξη τῆς πρότασης $\varphi(\underline{n})$. Γιά τόν παραπάνω ὁρισμό, ἰσχύουν γενικά οἱ παρατηρήσεις πού κάναμε γιά τόν ὁρισμό τῆς ἀπόδειξης τῆς πρότασης $(A) \rightarrow (B)$.

Στούς ὁρισμούς τῶν ἀποδείξεων τῶν προτάσεων τῆς μορφῆς $\exists x(\varphi(x))$ καί $\forall x(\varphi(x))$ θεωρήσαμε γιά εὐκολία, πώς τό πεδίο μεταβολῆς τῆς μεταβλητῆς x ἦταν οἱ φυσικοί ἀριθμοί. Κάτι τέτοιο δέν ἰσχύει γενικά. Ἔτσι, ἄν τό πεδίο μεταβολῆς τῆς μεταβλητῆς x δέν εἶναι οἱ φυσικοί ἀριθμοί, γιά νά ἔχουμε μιά ἀπόδειξη τῆς $\exists x(\varphi(x))$ πρέπει μαζί μέ τό ἀντικείμενο a καί τήν ἀπόδειξη τῆς $\varphi(\underline{a})$, νά μᾶς δώσουν καί μιά ἀπόδειξη ἰντουισιονιστικά ἀποδεκτή, πώς τό ἀντικείμενο a ἀνήκει στό συγκεκριμένο πεδίο μεταβολῆς τῆς x. Ὅμοια μιά ἀπόδειξη τῆς πρότασης $\forall x(\varphi(x))$ εἶναι μιά ἀναγνωρίσιμη κατασκευαστική διαδικασία μετάβασης ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε ἀντικείμενο a καί ἀπό μιά ἀπόδειξη ἰντουισιονιστικά ἀποδεκτή πώς τό a ἀνήκει στό δοσμένο πεδίο μεταβολῆς, σέ μιά ἀπόδειξη τῆς πρότασης $\varphi(\underline{a})$.

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα πώς ἔχουμε στά χέρια μας μιά πρόταση τῆς μορφῆς $(A) \leftrightarrow (B)$. Μιά ἀπόδειξη της ἀποτελεῖται ἀπό δύο ἀποδείξεις. Ἡ πρώτη θά ἀφοροῦσε τήν πρόταση $(A) \rightarrow (B)$ καί ἡ δεύτερη θά ἀφοροῦσε τήν πρόταση $(B) \rightarrow (A)$. Ἔτσι θά λέγαμε πώς ἔχουμε στά χέρια μας μιά ἀπόδειξη τῆς (A) $\leftrightarrow$ (B) ἄν καί μόνον ἄν διαθέταμε δύο ἀναγνωρίσιμες κατασκευαστικές διαδικασίες μετάβασης (α) ἀπό μιά ὁποιαδήποτε ἀπόδειξη τῆς A σέ μιά ἀπόδειξη τῆς B καί (β) ἀπό μιά ὁποιαδήποτε ἀπόδειξη τῆς B σέ μιά ἀπόδειξη τῆς A.

Τελικά μᾶς μένει μιά ἀκόμα περίπτωση. Ἔστω ὅτι ἡ πρόταση μας ἔχει τήν μορφή $\neg$(A). Μιά ἀπόδειξή της δέν εἶναι τίποτε ἄλλο παρά μιά ἀναγνωρίσιμη κατασκευαστική διαδικασία μετάβασης ἀπό μιά ὁποιαδήποτε ἀπόδειξη τῆς πρότασης A σέ μιά ἀπόδειξη κάποιας ἀντίφασης. Αὐτός, βέβαια, ὁ ὁρισμός δέν εἶναι ἀπόλυτα ἱκανοποιητικός γιατί μιά ἀντίφαση γίνεται συνήθως ἀντιληπτή σά μιά πρόταση τῆς μορφῆς (B)$\wedge\neg$(B), πράγμα πού πιθανῶς νά μᾶς κάνει νά νομίσουμε ὅτι ὁρίζουμε τήν ἄρνηση συναρτήσει τοῦ ἑαυτοῦ της. Μποροῦμε ὅμως νά ἀποφύγουμε αὐτή τή δυσκολία μέ τόν ἑξῆς τρόπο. Μποροῦμε νά διαλέξουμε μιά εὔκολα κατασκευαστικά ἀναγνωρίσιμη ἀντιφατική πρόταση, ὅπως ἡ $0 = 1$, καί νά ὁρίσουμε μιά ἀπόδειξη της $\neg$ (A) σάν μιά ἀπόδειξη της (A) $\rightarrow$ ($0 = 1$). Αὐτό θεωρητικά εἶναι ἄμεμπτο γιατί μποροῦμε εὔκολα νά δοῦμε, πώς κάθε ἀντιφατική πρόταση μπορεῖ νά προκύψει κατασκευαστικά ἀπό τήν $0=1$. Ἐδῶ βέβαια, μιλᾶνε γιά προτάσεις τῆς γλώσσας τῆς θεωρίας τῆς κατά Peano ἀριθμητικῆς. Ἄν ὁ παραπάνω ἰσχυρισμός δέν φαίνεται τελείως προφανής μποροῦμε νά συμφωνήσουμε νά θεωροῦμε κάθε ἀπόδειξη τῆς $0=1$ ταυτόχρονα καί σά μιά ἀπόδειξη ὁποιασδήποτε ἄλλης πρότασης, χωρίς αὐτό νά δημιουργεῖ κινδύνους γιά τό σύστημά μας.

Ἀπό ὅσα εἰπώθηκαν μέχρι τώρα προκύπτει, πώς τό ἰντουισιοστικό σύστημα ὄχι μόνο ἀμφισβητεῖ τή δεδομένη μαθηματική πρακτική καί τούς κανόνες της, ἀλλά φιλοδοξεῖ νά προτείνει συγκεκριμένες ἐναλλακτικές λύσεις. Οἱ προτάσεις τῶν Ἰντουισιονιστῶν εἶναι κυριολεκτικά ρηξικέλευθες καί ἀπαιτοῦν μιά συγκριτική ἐξέτασή τους κάτω ἀπό τό φῶς τῶν δεδομένων κανόνων μέ τή βοήθεια τῶν ὁποίων συντελεῖται ἡ κλασική μαθηματική πράξη. Ἡ κατασκευαστικότητα, στηριγμένη στήν προφάνεια τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, εἶναι γι' αὐτούς ἕνα αἴτημα γιά ἐξοβελισμό ὅλων ἐκείνων τῶν ἀποδείξεων πού στηρίζονται στήν ἀρχή τῆς ἀπόκλεισης τοῦ τρίτου καί πού κατ' ἐπέκταση κάνουν χρήση τῆς ἀπαγωγῆς σέ ἄτοπο.

Ἔτσι ἕνα τεράστιο μέρος κλασικῶν μαθηματικῶν θεωρημάτων πού κατοχυρώνουν τήν ὕπαρξη κάποιων συγκεκριμένων μαθηματικῶν ἀντικειμένων ὀφείλουν νά ἀπορριφθοῦν γιατί στίς ἀποδείξεις τους χρησιμοποιεῖται μέ τρόπο θεμελιώδη ἡ ἀπαγωγή σέ ἄτοπο. Στίς ἀποδείξεις αὐτές δέν κατασκευάζεται τό συγκεκριμένο μαθηματικό ἀντικείμενο, ἀλλά ἀποδεικνύεται ἡ ὕπαρξη του μέ τόν ἑξῆς τρόπο: Ἡ ἀπόδειξη ξεκινάει μέ τήν ὑπόθεση πώς τό ὑπό συζήτηση ἀντικείμενο δέν ὑπάρχει καί, κάτω ἀπό ἐπιτρεπτές γιά τήν κλασική μαθηματική πρακτική ἀποδεικτικές διαδικασίες, περατώνεται μέ τήν τελική συνεπαγωγή κάποιας ἀντίφασης. Ἡ κατάληξη σ' αὐτήν τήν ἀντίφαση —μέ τήν ὑπόθεση πάντα πώς στήν διάρκεια τῆς ἀπόδειξης δέν ἔχει παρεισφρύσει κάποιο λάθος στήν χρήση τῶν ἐπιτρεπτῶν ἀποδεικτικῶν κανόνων — σημαίνει πώς ἡ ἀρχική ὑπόθεση τῆς μή ὕπαρξης τοῦ ὑπό συζήτηση ἀντικειμένου ἦταν λανθασμένη. Στό σημεῖο αὐτό τό συμπέρασμα ἔρχεται ἀβίαστα γιά τόν κλασικά σκεπτόμενο μαθηματικό. Δεδομένου πώς τό ἀντικείμενο ἤ ὑπάρχει ἤ δέν ὑπάρχει, καί πώς ἡ ὑπόθεση τῆς μή ὕπαρξης του ὁδηγεῖ σέ ἀντιφάσεις, θεωρεῖ τόν ἑαυτό του ὑποχρεωμένο νά ἀπαντήσει καταφατικά στό ἐρώτημα πού σχετίζεται μέ τήν ὕπαρξή του. Ἡ θεμελιώδης πίστη τῶν κλασικά σκεπτομένων μαθηματικῶν στήν καθολική ἰσχύ τῆς ἀρχῆς τῆς ἀπόκλεισης τοῦ τρίτου τούς ἐπιτρέπει, μ' ἄλλα λόγια, νά ἀποδεικνύουν θεωρήματα ὕπαρξης, χωρίς νά ἀπαιτεῖται ἡ κατασκευή τοῦ ἀντικειμένου τοῦ ὁποίου ἡ ὕπαρξη κατοχυρώνεται μέ τόν παραπάνω τρόπο. Ὅμως κάτι τέτοιο, σύμφωνα μέ τούς Ἰντουισιονιστές, εἶναι βαθύτατα λανθασμένο, γιατί ἡ ἀρχή τῆς ἀπόκλεισης τοῦ τρίτου δέν ἔχει καί δέν μπορεῖ νά ἔχει καθολική ἰσχύ. Ὡς ἀρχή ἀποτελεῖ τό προϊόν ἀνεπίτρεπτης γενίκευσης ἀπό τό ἐπίπεδο πεπερασμένων στό ἐπίπεδο ἄπειρων ὁλοτήτων, πού γιά τήν ὕπαρξή τους καί γιά τήν ἐλεγξιμότητά τους ὑπάρχουν ἀνοικτά καί ἀναπάντητα ἐρωτήματα.

Οἱ διαφορές τῶν ἰντουισιονιστικῶν μαθηματικῶν ἀπό τά κλασικά εἴδαμε πώς, μεταξύ ἄλλων, ἐντοπίζονται καί στόν τρόπο μέ τόν ὁποῖο φιλοδοξοῦν τά πρῶτα νά περιχαρακώσουν τή λειτουργία τῶν λογικῶν συνδέσμων καί τῶν ποσοδεικτῶν. Οἱ περισσότερο προβληματικές περιπτώσεις εἶναι αὐτές τῆς ἑρμηνείας τοῦ τρόπου τῆς λειτουργίας τοῦ συμβόλου τῆς συνεπαγωγῆς — καί κατ' ἐπέκταση τοῦ συμβόλου τῆς ἰσοδυναμίας —, τοῦ συμβόλου τῆς ἄρνησης καί τοῦ συμβόλου ∀ (καθολικός ποσοδείκτης).

Στά πλαίσια τῶν κλασικῶν μαθηματικῶν καί σέ ἀντιστοιχία μέ τόν τρόπο λειτουργίας τῆς συνεπαγωγῆς στό σημασιολογικό ἐπίπεδο (ἀληθοπίνακες), μιά πρόταση τῆς μορφῆς (A) → (B) θεωρεῖται πώς ἔχει ἀποδειχθεῖ, ἄν ὑπάρχει μιά ἀπόδειξη τῆς ἄρνησης τῆς A, ἤ ὑπάρχει μιά ἀπόδειξη τῆς B. Στά πλαίσια τῶν ἰντουισιονιστικῶν μαθηματικῶν μιά ἀπόδειξη μιᾶς πρότασης τῆς μορφῆς (A) → (B) δέν μπορεῖ νά ἐξαντλεῖται στήν ἀπόδειξη τῆς ἄρνησης τῆς πρώτης ἤ στήν ἀπόδειξη τῆς δεύτερης προτασιακῆς συνιστώσας τῆς ἀρχικῆς πρότασης. Ὀφείλει καί πρέπει νά εἶναι ἡ εὕρεση ἑνός ἐλέγξιμου ἀλγορίθμου μετάβασης ἀπό ὁποιαδήποτε ἀπόδειξη τῆς πρώτης σέ κάποια ἀπόδειξη τῆς δεύτερης. Ἔτσι τό πρόβλημα τῆς ἀποδειξιμότητας τῆς πρότασης (A) → (B), μεταφέρεται καί ἀνάγεται, μέ αναδρομικό τρόπο, στήν ἀναγνωρισιμότητα ἀποδείξεων τῶν προτασιακῶν συνιστωσῶν της, οἱ ὁποῖες ἀποδείξεις διασυνδέονται μέ κάποια κατασκευαστικά ἀναγνωρίσιμη διαδικασία μετάβασης ἀπό ὁποιοδήποτε μέλος τῆς ὁλότητας[21] τῶν ἀποδείξεων τῆς πρώτης προτασιακῆς συνιστώσας, σέ κάποιο τυχαῖο καί διαφορετικό κατά περίπτωση, μέλος τῆς ὁλότητας τῶν ἀποδείξεων τῆς δεύτερης.

Ὁ τρόπος λειτουργίας τῆς ἄρνησης στά πλαίσια τῶν κλασικῶν μαθηματικῶν παρουσιάζει τά ἴδια χαρακτηριστικά ἀντιστοιχίας ἀνάμεσα στό σημασιολογικό καί συντακτικό ἐπίπεδο πού παρουσιάζει καί ἡ συνεπαγωγή. Ἔτσι ἀπόδειξη μιᾶς πρότασης τῆς μορφῆς $\neg$(A) πολλές φορές δέν εἶναι τίποτε ἄλλο παρά ἡ εὕρεση μιᾶς ἀπόδειξης πού δέν ἀποκλείει ἀλλά χρησιμοποιεῖ μέ τρόπο οὐσιαστικό τήν ἀπαγωγή σέ ἄτοπο καί πού, μέ τήν ὑπόθεση πώς ἰσχύει ἡ A, μᾶς ὁδηγεῖ σέ κάποια ἀντίφαση. Μιά τέτοια διαδικασία βρίσκεται σέ ἄμεση συμφωνία μέ τόν τρόπο πού λειτουργοῦν οἱ ἀληθοπίνακες,

21. Στό σημεῖο αὐτό πρέπει νά τονισθεῖ πώς ἡ χρήση τῆς λέξης «ὁλότητα» ἔγινε γιά λόγους εὐκολότερης ἐπικοινωνίας ἀνάμεσα στόν γράφοντα καί στούς ἀναγνῶστες αὐτοῦ τοῦ βιβλίου καί δέν πρέπει νά χρεωθεῖ στούς Ἰντουισιονιστές, οἱ ὁποῖοι ἀποφεύγουν συνολοθεωρητικῆς καί ἄρα ἐκτατικῆς μορφῆς ἐκφράσεις.

σύμφωνα μέ τούς ὁποίους ἡ ἀπόδοση τῆς ἀληθοτιμῆς F στήν πρόταση A ὁδηγεῖ ἀναπόφευκτα στήν ἀπόδοση τῆς ἀληθοτιμῆς T στήν πρόταση $\neg$(A). Ὑπάρχει, βέβαια, περίπτωση ἡ ἀπόδειξη μιᾶς πρότασης τῆς μορφῆς $\neg$(A) νά ἀκολουθήσει διαδρομές πολύ πιό ἄμεσες ἀπ' αὐτήν πού περιγράψαμε πιό πάνω. Ὁ λόγος, ὅμως, πού ἐπισημάναμε αὐτή τήν εἰδική μορφή ἀπόδειξης τῆς $\neg$(A), ὀφείλεται στήν ἀνάγκη τονισμοῦ μιᾶς φαινομενικῆς ὁμοιότητάς της μέ τόν ἀποδεκτό γιά τούς Ἰντουισιονιστές ὁρισμό ἀπόδειξης τῆς $\neg$(A). Ἔτσι γιά τούς Ἰντουισιονιστές μιά ἀπόδειξη τῆς $\neg$(A) εἶναι ἕνας γενικός, κατασκευαστικά ἀναγνωρίσιμος ἀλγόριθμος μετατροπῆς μιᾶς ὁποιασδήποτε ἀπόδειξης τῆς A σέ μιά ἀπόδειξη κάποιας ἀντίφασης. Ἡ διαφορά τῆς ἰντουισιονιστικῆς αὐτῆς ἀντίληψης μέ τήν κλασική ὀφείλεται, σέ τελευταία ἀνάλυση, στά ἑξῆς δύο πράγματα: (α) στό αἴτημα πώς μιά ἀπόδειξη τῆς $\neg$(A) πρέπει νά εἶναι ἡ εὕρεση ἑνός γενικοῦ ἀλγόριθμου μετατροπῆς ἀποδείξεων τῆς A σέ ἀποδείξεις κάποιας ἀντίφασης καί ὄχι στήν εὕρεση μιᾶς περιστασιακῆς διαδρομῆς μετάβασης ἀπό τήν ὑπόθεση τῆς ἰσχύος τῆς A σέ κάποια ἀντίφαση καί (β) στό αἴτημα γύρω ἀπό τή φύση αὐτοῦ τοῦ ἀλγορίθμου, πού πρέπει νά εἶναι κατασκευαστικός καί πεπερασμένα ἐλέγξιμος, ἀποκλείοντας διαδικασίες μέσα ἀπό τίς ὁποῖες μποροῦν νά παρεισφρύσουν ἀμφιλεγόμενες καί ἀπαγορευμένες ἀρχές, ὅπως ἡ ἀρχή ἀπόκλεισης τοῦ τρίτου.

Ὁ ἰντουισιονιστικός ὁρισμός τῆς ἀπόδειξης προτάσεων τῆς μορφῆς ∀xφ(x) εἶναι λιγότερο δύσπεπτος, διαφέροντας ἀπό τόν κλασικό στό βαθμό πού ἀπαιτεῖ ξανά τήν εὕρεση ἑνός γενικοῦ κατασκευαστικοῦ ἀλγορίθμου μετάβασης ἀπό ὁποιοδήποτε δύσκολα ἤ εὔκολα ἐντοπιζόμενο στοιχεῖο a τοῦ πεδίου μεταβολῆς (ὁρισμοῦ) τῆς μεταβλητῆς x, σέ κάποια ἀπόδειξη τῆς φ(a). Κάτι τέτοιο δέν εἶναι καί πολύ μακριά ἀπό τό πνεῦμα τοῦ ἀποδεικτικοῦ κανόνα γενίκευσης τῆς κλασικῆς λογικῆς[22]. Τέλος, ὁ ἰντουισιονιστικός ὁρισμός τῆς ἀπόδειξης προτάσεων τῆς μορφῆς (A) ↔ (B), εἶναι ἀπόλυ-

22. Ἡ θεμελιωδέστερη διαφορά ὀφείλεται καί ἐδῶ στίς συγκεκριμένες ἀπαιτήσεις τῶν Ἰντουισιονιστῶν γύρω ἀπό τή φύση τοῦ ἀλγορίθμου αὐτοῦ.

τα ἐξαρτημένος ἀπό τόν ὁρισμό ἀπόδειξης τῆς συνεπαγωγῆς καί ἔτσι οἱ παρατηρήσεις πού θά μποροῦσαν νά γίνουν γύρω ἀπ' αὐτόν εἶναι ἐντελῶς προφανεῖς.

Ἡ ἔννοια τῆς ἀλήθειας, ὅπως ἤδη εἰπώθηκε, εἶναι γιά τούς Ἰντουισιονιστές ἀπόλυτα συνδεδεμένη μέ τήν ἔννοια τῆς ἀπόδειξης. Στά κλασικά μαθηματικά ὑπάρχουν δύο σαφῶς διακεκριμένα ἐπίπεδα πάνω στά ὁποῖα ἀρθρώνεται ἡ μαθηματική πρακτική. Τό ἕνα ἐπίπεδο εἶναι τό συντακτικό στό ὁποῖο ἀνήκει ἡ ἔννοια τῆς ἀπόδειξης καί τό ἄλλο εἶναι τό σημασιολογικό στό ὁποῖο ἀνήκει ἡ ἔννοια τῆς μαθηματικῆς ἀλήθειας. Οἱ δύο αὐτές ἔννοιες συνδέονται μέ τό κλασικό θεώρημα πληρότητας τοῦ Gödel πού ἀναφέρεται στίς πρωτοβάθμιες γλῶσσες καί θεωρίες, μέ τρόπο πού νά νομιμοποιεῖται τό κλασικό μαθηματικό παιχνίδι μετάβασης ἀπό διαδικασίες ἀποδειξιμότητας σέ διαδικασίες ἐπαληθευσιμότητας καί ἀντίστροφα. Στά ἰντουισιονιστικά μαθηματικά δέν ὑπάρχουν δύο ἐπίπεδα. Ἡ μαθηματική δραστηριότητα εἶναι ἑνιαία καί ὁ χῶρος της εἶναι αὐτός τῶν νοητῶν, αὐστηρά περιχαρακωμένων, κατασκευῶν. Ὑπαρκτό εἶναι τό ἰντουισιονιστικά κατασκευάσιμο καί ἀληθινό τό ἰντουισιονιστικά ἀποδείξιμο. Γιά τούς Ἰντουισιονιστές δέν ἀπαιτεῖται κάποιο θεώρημα πληρότητας —τουλάχιστον στή μορφή καί στό πνεῦμα τοῦ κλασικοῦ θεωρήματος τοῦ Gödel— γιά τή δικαίωση τῆς ἰντουισιονιστικῆς μαθηματικῆς πρακτικῆς. Ἡ ἴδια ἡ ἰντουισιονιστική μαθηματική πρακτική εἶναι ὁ φορέας τῆς ἀλήθειας της. Δέν χρειάζεται ἕνα μοντελοθεωρητικό, σημασιολογικό (καί γιά πολλούς φιλοσοφικά πλατωνικό) μεταεπίπεδο πάνω στό ὁποῖο νά τοποθετήσει τήν ἔννοια τῆς ἀλήθειας. Οὔτε ἔχει ἀνάγκη τήν ὕπαρξη ἀντιστοιχιῶν[23] ἀνάμεσα στό συντακτικό καί σημασιολογικό αὐτό μεταεπίπεδο γιά νά νομιμοποιηθεῖ ὡς δραστηριότητα. Ὑπάρχει, βέβαια, τό γενικότερο ἐρώτημα τῆς συμφωνίας ἀνάμεσα σ' αὐτούς πού παράγουν τήν ἰντουισιονιστική ἀλήθεια. Τό σημασιολογικό μεταεπίπεδο, πέρα ἀπό τόν καθαρά λειτουργικό του χαρακτήρα στά πλαίσια μιᾶς τυποποιημένης μεταθεωρίας, ἔχει καθαρά πλατωνικές καταβολές πού δροῦν κατευναστικά, ὅταν ἡ ἀντικειμενικότητα καί τό ὁμοιότροπο τῆς μαθηματικῆς σκέψης ἀμφισβητοῦνται. Λειτουργεῖ σάν τό πλατωνικό σύμπαν τῶν Ἰδεῶν, πού δέν δημιουργεῖται ἀλλά ἀνακαλύπτεται ἀπό καθένα χωριστά. Αὐτό πού ἀνακαλύπτεται, ὄντας ἀνεξάρτητο ἀπό αὐτόν πού τό ἀνακάλυψε, μπορεῖ νά ἀποτελεῖ τό κοινό ἀντικείμενο συνεννόησης. Αὐτό πού δημιουργεῖται, ἐξαρτώμενο ἀπό αὐτόν πού τό δημιούργησε, δέν μπορεῖ νά εἶναι τό κοινό ἀντικείμενο συνεννόησης, ἐκτός ἄν μιά ἀπό τίς ἀρχικές ἀξιωματικές ὑποθέσεις του ἀντίστοιχου φιλοσοφικοῦ συστήματος εἶναι πώς οἱ δημιουργοί εἶναι ἔτσι κατασκευασμένοι, ὥστε νά δημιουργοῦν ὁμοιότροπα. Μιά τέτοια ὑπόθεση ἀνήκει καί στό ἰντουισιονιστικό φιλοσοφικό σύστημα, συνοδεύεται δέ ἀπό τήν πίστη πώς ἡ ἀξιολόγηση τῆς μαθηματικῆς δραστηριότητας ποτέ δέν εἶναι ἐσωτερικό θέμα τῆς ἴδιας, ὅπως τό παρακάτω ἐδάφιο ἀπό τό βιβλίο του Heyting *Intuitionism: An Introduction* ἀποκαλύπτει:

> Κατ' ἀρχήν οἱ μαθηματικές μου σκέψεις ἀνήκουν στήν προσωπική μου νοητή πραγματικότητα καί περιορίζονται μέσα στά πλαίσια τοῦ νοῦ μου, ὅπως καί κάθε ἄλλη σκέψη μου. Εἴμαστε γενικά πεπεισμένοι ὅτι καί οἱ ἄλλοι σκέπτονται ἀνάλογα μ' ἐμᾶς καί ὅτι μποροῦν νά μᾶς καταλάβουν ὅταν ἐκφραζόμαστε στά πλαίσια μιᾶς γλώσσας. Ἀπό τήν ἄλλη μεριά ξέρουμε πώς δέν εἴμαστε ποτέ ἀπόλυτα σίγουροι ὅτι μᾶς ἔχουν καταλάβει χωρίς λάθη. Σ' αὐτόν τόν κανόνα τά μαθηματικά δέν ἀποτελοῦν ἐξαίρεση ... Τό χαρακτηριστικό τῆς μαθηματικῆς σκέψης εἶναι, πώς δέν εἶναι φορέας ἀλήθειας γιά τόν ἐξωτερικό κόσμο, ἀλλά πώς ἐνδιαφέρεται μόνο γιά νοητές κατασκευές. Σ' αὐτό τό σημεῖο θά πρέπει νά κάνουμε ἕνα διαχωρισμό ἀνάμεσα στήν ἁπλή μαθηματική πρακτική καί στήν ἀξιολογική ἀποτίμησή της. Γιά νά κατασκευάσουμε μαθηματικές θεωρίες δέν χρειαζόμαστε κανένα φιλοσοφικό προαπαιτούμενο, ἡ ἀξία, ὅμως, πού ἀποδίδουμε σ' αὐτή τή δραστηριότητα ἐξαρτᾶται ἀπό τίς φιλοσοφικές μας ἰδέες[24]

23. Ὅπως αὐτές πού, γιά παράδειγμα, μιά θεωρία ἀλήθειας κατά Tarski θά ἀπαιτοῦσε.

24. Βλ. σσ. 8-9.