

μητικής. Θα υπάρχουν σύνολα αριθμών που δεν είναι ισομορφικά με τους φυσικούς αριθμούς.<sup>14</sup> Αυτά θα έχουν μία διαφορετική πληθυκότητα ή μία διαφορετική διατακτική δομή από εκείνη των φυσικών αριθμών.<sup>15</sup> Διάφορες πρόδοδοι «αριθμών» ικανοποιούν τα αξιώματα.

Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι αυτό το οποίο θεωρείται πως είναι μία «καλή» ιδιότητα ώστε ένα μαθηματικό σύστημα να την διαθέτει και το ποια είναι «κακή» ιδιότητα ποικίλει από τον ένα μαθηματικό στον άλλο. Για παράδειγμα, κάποιοι μαθηματικοί θεωρούν πολύ ενδιαφέροντα τα μη καθιερωμένα μοντέλα της αριθμητικής και αντιλαμβάνονται την ύπαρξή τους ως ένα πλεονέκτημα της πρωτοβάθμιας έναντι της δευτεροβάθμιας αριθμητικής. Άλλοι διαφωνούν.

Ανεξάρτητα από τη διαφωνία, ο Φρέγκε ανέπτυξε τη δευτεροβάθμια λογική και έτσι μπόρεσε να παραγάγει τα αξιώματα της αριθμητικής ως «λογικά θεωρήματα». Ο Φρέγκε παρήγαγε το δευτεροβάθμιο αξιώματα της επαγωγής, όχι το αξιωματικό σχήμα της επαγωγής. Το να αποδείξει κανές τα αξιώματα της αριθμητικής από τη λογική αποτελεί ένα σπουδαίο κατόρθωμα. Δείχνει ότι δεν χρειαζόμαστε να εκλάψουμε τα αξιώματα αυτά ως αρχετυπικά ή ως την έσχατη βάση της αριθμητικής. Αντ' αυτού, διδασκόμαστε ότι η λογική είναι η έσχατη βάση της αριθμητικής. Όσα θεωρούνταν πως είναι αξιώματα της αριθμητικής αποδείχθηκαν πως είναι θεωρήματα της λογικής. Τα θεωρήματα της αριθμητικής, όπως το  $2 + 8 = 10$ , αποδείχθηκαν ότι είναι περισσότερο θεωρήματα της λογικής. Εξακολουθεί να είναι πολύ εντυπωσιακό το γεγονός ότι ο Φρέγκε απέδειξε την ύπαρξη ενός απείρου πλήθους φυσικών αριθμών. Μέσω της απόδειξής του, η έννοια του απείρου γίνεται μία λογική έννοια και η αριθμητική είναι στην πραγματικότητα απλώς ένας κλάδος της λογικής. Όταν ο Φρέγκε προχωρά, στη συνέχεια, συλλαμβάνοντας την ανάλυση που είναι η μελέτη των πραγματικών αριθμών, αποδεικνύει ότι υπάρχει ένα άπειρο πλήθος από αυτούς και εκφράζει την ακράδαντη πεποίθησή του ότι θα είναι ικανός, στο μέλλον, να αναπαράγει το διαγώνιο επιχείρημα του Κάντορ με σημειογραφία της λογικής, μόνο για να καταδείξει ότι υπάρχουν περισσότεροι πραγματικοί παρά φυσικοί αριθμοί, καθιστώντας, έτσι, λογικές έννοιες όλους τους άπειρους πληθαρίθμους του Κάντορ.

### 3. Ο λογικισμός του Φρέγκε: φιλοσοφικά επιτεύγματα

Η απόδειξη του Φρέγκε ότι η αριθμητική μπορεί να θεμελιωθεί στη λογική είναι φιλοσοφικά αξιόλογη, τόσο επιστημολογικά όσο και οντολογικά. Η σημασία της έγκειται στην άποψη ότι η γνώση και η δικαιολόγηση είναι διατεταγμένες ιεραρχικά. Εφόσον η λογική βρίσκεται στην κορυφή της ιεραρχίας, είναι καθολική και απολύτως γενική. Η λογική μας αποδίδει τους νόμους της σκέψης ή τους περιορισμούς όσον αφορά τη σκέψη. Μέσω της αναγωγής της αριθμητικής στη λογική, ο Φρέγκε καταδεικνύει ότι η αριθμητική είναι δικαιολογημένη σε τελική ανάλυση, εφόσον είναι καθολική και αντικειμενική. Η λογική, και κατά μείζονα λόγο, η αριθμητική είναι αντικειμενική υπό την έννοια πως βασίζεται σε λογικά αντικείμενα.

Τι είναι λογικό αντικείμενο; Σε γενικές γραμμές, θεωρούμε τα «αντικείμενα» φυσικά αντικείμενα. Θεωρούμε τα τραπέζια και τις καρέκλες, αυτό το οποίο ο Τζ. Λ. Ωστιν αποκαλεί «πράγματα μεσαίου μεγέθους». Υπάρχουν, ωστόσο, κι άλλα είδη αντικειμένων: τα αφηρημένα αντικείμενα.<sup>16</sup> Τα αφηρημένα αντικείμενα δεν διαθέτουν καμία θέση στον χώρο και τον χρόνο. Οι ιδέες, μερικές φορές, θεωρούνται αφηρημένα αντικείμενα, και, στη δική μας περίπτωση, οι αριθμοί μπορούν να θεωρηθούν αφηρημένα αντικείμενα. Αυτοί είναι αντικείμενα υπό τρεις έννοιες:

- (i) υπό την έννοια ότι είναι αντικείμενα αναφοράς των ενικών όρων
- (ii) υπό την έννοια ότι δεν οφείλουν την ύπαρξή τους σε εμάς· και
- (iii) υπό την έννοια ότι αποτελούν αντικείμενα μελέτης.

Η έννοια (i) υποκινείται από τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούμε τη γλώσσα, και από τον τρόπο με τον οποίο δομείται η γραμματική της γλώσσας μας. Μιλώντας με γραμματικούς όρους, δηλώνουμε ότι «ο αριθμός 3» είναι ένας ενικός όρος στη δηλωτική πρόταση «Ο αριθμός 3 προηγείται του αριθμού 8 στη διαδοχή των διατακτικών αριθμών». Ένας ενικός όρος μπορεί να είναι ένα υποκείμενο, αντικείμενο ή υπόρρητο αντικείμενο μίας δηλωτικής πρότασης. Ένας ενικός όρος σε μία δηλωτική πρόταση αναφέρεται σε ένα μοναδικό αντικείμενο. Το γεγονός ότι ο όρος αναφέρεται σε ένα μοναδικό αντικείμενο οφείλεται στη γραμματική. Από αυτό συνάγουμε ότι για να είναι μία δηλωτική πρόταση που περιέχει έναν ενικό όρο, αληθής, το αντικείμενο αναφοράς πρέπει να υπάρχει. Συνεπώς, έχουμε μία κυριολεκτική γραμματική ένδειξη ότι οι αριθμοί είναι αντικείμενα και η γραμματική διαμορφώνει τις πεποίθσεις μας. Θα μπορούσαμε, φυσικά, να παραπλανηθούμε από τη γραμματική. Ο «Μονόκερως» είναι κι αυτός ένας ενικός όρος, ωστόσο οι μονόκεροι δεν υπάρχουν, τουλάχιστον σύμφωνα με την τρέχουσα επιστημονική θεωρία. Για τον λόγο αυτό, η γραμματική πα-

ρέχει μόνο ένα εκ πρώτης όψεως λόγο για να θεωρούμε τους αριθμούς, ας πούμε, αντικείμενα και όχι έναν οριστικό λόγο. Οι έννοιες (ii) και (iii) είναι πιο καθοριστικές.

Σκεφτείτε την έννοια (ii). Όταν κάνουμε αριθμητικούς υπολογισμούς, μελετάμε τις ιδιότητες των αριθμών, για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να «ανακαλύψουμε» ότι  $387 < (567 + 1.27) + 46$ . Ανακαλύπτουμε, και όχι δημιουργούμε, αντικείμενα τα οποία υπάρχουν ανεξάρτητα από εμάς. Οι αριθμητικές ισότητες που είναι αληθείς είναι απόλυτες και αδιαμφισβήτητες. Ως εκ τούτου, πρέπει να υπάρχουν αντικείμενα που καθιστούν τη δηλωτική πρόταση αληθή. Αυτά είναι οι αριθμοί. Αναφερόμαστε σε αυτούς προκειμένου να καταδείξουμε την αλήθεια των ανακαλύψεων μας στην αριθμητική. Κατά συνέπεια, δεν μπορούμε και δεν πρέπει να ελπίζουμε, να σκεφτόμαστε εναλλακτικές λύσεις για την αριθμητική, εφόσον οι αριθμοί υπάρχουν ανεξάρτητα από εμάς.<sup>17</sup> Δεν μπορούμε να τους επηρεάσουμε ή να τους διαμορφώσουμε. Αντίθετα, εφόσον η Ευκλείδεια γεωμετρία δεν είναι καθολική (υπάρχουν διάφορα ανταγωνιστικά γεωμετρικά συστήματα), μπορούμε και όντως, σκεφτόμαστε εναλλακτικές λύσεις.

Τώρα ας σκεφτούμε την έννοια (iii). Αυτό το οποίο καθιστά τους αριθμούς αντικείμενα μελέτης είναι το γεγονός ότι οι μαθηματικοί τους μελετούν. Όταν ασχολούμαστε με τη λογική, μελετούμε τα αντικείμενα της λογικής με τον ίδιο τρόπο που ένας βιολόγος μελετά τα ζωντανά πράγματα: τα αντικείμενα της βιολογίας. Οι αλήθειες της βιολογίας ανακαλύπτονται και ελέγχονται μέσω της αντιστοιχίας τους με τα αντικείμενα της βιολογίας. Κατά παρόμοιο τρόπο με την αριθμητική δοκιμάζουμε την αριθμητική μας θεωρία ελέγχοντας τη θεωρία συγκριτικά με το πώς λειτουργούν οι αριθμοί. Έτσι μελετάμε τα αντικείμενα των μαθηματικών. Είναι ανεξάρτητα από εμάς, υπό την έννοια (ii).

Η πρώτη και η δεύτερη έννοια του «αντικειμένου» είναι ενδιαφέρουσες, εφόσον τα αντικείμενα της λογικής είναι λογικά αντικείμενα, κι αυτό είναι από φιλοσοφική άποψη σημαντικό. Οι αριθμοί μπορούν να οριστούν με τη χρήση μόνο της λογικής γλώσσας και των λογικών εννοιών. Επιπλέον, μπορούμε να παραγάγουμε την ύπαρξη όλων των εξατομικευμένων φυσικών αριθμών με τη μορφή θεωρημάτων της λογικής. Δηλαδή, σύμφωνα με τον Φρεγκεανό λογικιστή, είναι μία λογική αλήθεια, μία ταυτολογία, το ότι, παραδείγματος χάριν, υπάρχει ο αριθμός 6. Για τον λόγο αυτό δηλώνουμε, για παράδειγμα, ότι «ο αριθμός 6 είναι ένα λογικό αντικείμενο» με άλλα λόγια, το μόνο που χρειάζεται είναι η λογική για να καταδείξει κανείς την ύπαρξή του και δεν χρειάζεται να επικαλεστούμε ειδικές αρχές. Προκύπτει λοιπόν ότι οι αριθμοί καταλαμβάνουν μία ιδιαίτερη θέση στη σκέψη μας. Δεδομένου ότι τα αντικείμενα της αριθμητικής είναι αντικείμενα της λογικής, θα είναι καθολικά. Η λογική είναι πανταχού παρούσα. Μπορούμε να οικειοποιούμαστε τους λογικούς συμπερασμούς ή τις λογικές αρχές ανά πάσα στιγμή, κατά τη συζήτηση οποιουδήποτε θέματος. Ε-

φόσον η αριθμητική αποτελεί μέρος της λογικής, μπορούμε να μετρήσουμε οτιδήποτε. Οι αριθμοί είναι καθολικοί.

Μία άλλη πτυχή του να κατέχει κάτι την κορυφή στην ιεραρχία της γνώσης είναι ότι η χρήση των αρχών της αριθμητικής δεν είναι ποτέ μεταφορική. Ας το εξηγήσουμε αυτό μέσω ενός παραδείγματος. Μπορεί κανείς να εφαρμόζει αρχές από τη μηχανική στα οικονομικά και ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι σε κάθε δράση στην αγορά αντιστοιχεί μία ίση και αντίθετη αντίδραση. Ο μηχανικός νόμος συνίσταται στο ότι για κάθε (προσδιορισμένη με βάση τη φυσική) δράση υπάρχει μία ίση και αντίθετη φυσική αντίδραση. Αν μία μπάλα του μπιλιάρδου χτυπήσει μία άλλη, τότε δεν χάνεται καθόλου ενέργεια απλώς μεταφέρεται στην κίνηση της άλλης μπάλας του μπιλιάρδου, και αναλόνται σε τριβή έναντι του τραπεζιού του μπιλιάρδου και στον ήχο της πρόσκρουσης. Κατά παρόμοιο τρόπο στα οικονομικά (σύμφωνα με κάποιες θεωρίες), ανταλλάσσουμε χρήματα με αγαθά. Τα χρήματα που πληρώνουμε είναι η αξία των αγαθών και για κάθε προϊόν που πωλείται υπάρχει μία τιμή: μία ίση και αντίθετη αντίδραση. Χρησιμοποιούμε μία μεταφορά από τη μηχανική και την εφαρμόζουμε στα οικονομικά. Αντίθετα, όταν μετράμε, ή κάνουμε χρήση της λογικής, δεν χρησιμοποιούμε μεταφορά ή παρομοίωση. Χρησιμοποιούμε άμεσα τη λογική και κατά μείζονα λόγο την αριθμητική, κι αυτό αποτελεί μία μαρτυρία της καθολικότητας της λογικής, και, κατά συνέπεια, των λογικών αντικειμένων. Διαθέτουμε επιλογές στην πρόκριση μίας μεταφοράς ή κάποιας άλλης για τις οικονομικές μας θεωρίες, αλλά δεν διαθέτουμε καμία επιλογή όταν μετράμε. Τα αριθμητικά δεδομένα είναι «πρωτογενή δεδομένα».

Η αντικειμενικότητα των αριθμητικών αληθειών επεξηγεί τον λόγο για τον οποίο θεωρούμε την αριθμητική τόσο αδιάσειτη. Δεν πρόκειται για κάτι που μπορούμε να αρνηθούμε. Οι εξισώσεις όπως, η  $2 + 0 = 2$ , φαίνονται αδιαμφισβήτητες και ακλόνητες. Σύμφωνα με τον λογικιστή, αυτό οφείλεται στο ότι οι συγκεκριμένες αλήθειες είναι ανεξάρτητες από εμάς. Εξαρτώνται από τα λογικά αντικείμενα. Τις ανακαλύπτουμε, δεν τις επινοούμε, άρα, το να τις αλλάξουμε μέσω της αναθεώρησής τους, δεν εμπίπτει στη δική μας ικανότητα. Η γραμματική μας δεν μας παραπλανά.

Το γεγονός ότι διαθέτουμε την ικανότητα να αποδίδουμε μια έσχατη δικαιολόγηση για την αριθμητική έχει επιπτώσεις και στην επιστημολογία της. Αποδίδοντας μία τελική δικαιολόγηση για την αριθμητική (δηλαδή, ανάγοντας την αριθμητική στη λογική), ο Φρέγκε κατέδειξε ότι η αριθμητική είναι *a priori* και αναλυτική. Μία αλήθεια είναι αναλυτική αν και μόνο αν είναι αληθής εξαιτίας του νοήματος και/ή της λογικής. Ένα διάσημο παράδειγμα μίας αναλυτικής αληθειας είναι το εξής: «Οι εργένηδες είναι ανύπαντροι άντρες». Η δηλωτική πρόταση είναι αληθής λόγω του νοήματος των λέξεων σε αυτήν. Το μόνο που κάνουμε στη δηλωτική πρόταση είναι να αποσυσκευάζουμε τη λέξη «εργένης». Δηλαδή, η δηλωτική πρόταση «Οι εργένηδες είναι ανύπαντροι άντρες» είναι

μία ανάλυση της λέξης «εργένης». Το αντίθετο του να είναι μία αλήθεια αναλυτική είναι το να είναι συνθετική. Μία δηλωτική πρόταση η οποία είναι συνθετικά αληθής, θα είναι αληθής λόγω της συναρμολόγησης ανεξάρτητων ιδεών. Μία δηλωτική πρόταση η οποία είναι συνθετικά αληθής, θα μπορούσε να είναι μία πρόταση η οποία αφηγείται ένα εμπειρικό γεγονός, όπως «Οι επικρατούντες άνεμοι προέρχονται από τη δύση». Πρόκειται για μια δήλωση παρατήρησης. Οφείλουμε να παρατηρήσουμε το γεγονός ότι τις περισσότερες φορές οι άνεμοι φυσούν από τη δύση προς την ανατολή. Συναρμολογούμε δύο ιδέες, «επικρατών άνεμος» και «κατεύθυνση του ανέμου» και δημιουργούμε μία σύνθεση των δύο εννοιών. Η δηλωτική πρόταση δεν είναι αληθής βάσει των νοημάτων των όρων της, συνεπώς δεν είναι αναλυτική.

Επιστρέφοντας στην αριθμητική, εάν η αριθμητική είναι λογική και εάν η λογική είναι αναλυτική τότε οι αριθμητικές αλήθειες είναι αληθείς λόγω του νοήματος. Είναι αληθείς δυνάμει των αξιωμάτων της λογικής, των ορισμών και του λογικού συμπερασμού. Οι λογικές αλήθειες είναι αναλυτικές κατά τετριμένο τρόπο. Για παράδειγμα, η αγγλική πρόταση "Either the brumish is flampy, or it is not" είναι μία αναλυτική αλήθεια. Δεν χρειάζεται να διαθέτουμε μία εμπειρία των "brumishes" ή να έχουμε οποιαδήποτε ιδέα του τι σημαίνει "flampy" για να εξαγάγουμε την αλήθεια της δηλωτικής πρότασης.<sup>5</sup> Πρόκειται για μία λογική ταυτολογία. Σε αυτήν την περίπτωση, η δηλωτική πρόταση δεν είναι αναλυτική λόγω του νοήματος, αλλά βάσει της λογικής. Όταν ο Φρέγκε παρήγαγε τα αξιώματα του Πεάνο από τη λογική, τα παρήγαγε από λογικά αξιώματα και ορισμούς, χρησιμοποιώντας αποδείξεις χωρίς ενδιάμεσα κενά.

Ο Φρέγκε ονόμασε τα λογικά αξιώματα «βασικούς νόμους», προκειμένου να μην τα συγχέει με τα αξιώματα μίας συγκεκριμένης θεωρίας. Οι βασικοί νόμοι παρουσιάστηκαν ως λογικοί υπό την έννοια του καθολικού, του ανεξάρτητου και του αναλυτικού. Ένας βασικός νόμος είναι απολύτως πρωταρχικός. Αντίθετα, ένα αξίωμα είναι αξίωμα ενός τυπικού συστήματος. Ένα αξίωμα δεν εκλαμβάνεται ως απολύτως πρωταρχικό, παρά μόνο ως πρωταρχικό σε σχέση με τα θεωρήματα του τυπικού συστήματος. Ρωτώντας για τα θεωρήματα, ρωτάμε για τα αξιώματα του συστήματος και για τους κανόνες του συμπερασμού. Ρωτώντας για τα αξιώματα, θα πρέπει να εξέλθουμε από το σύστημα, συνήθως προς ένα άλλο τυπικό σύστημα. Ρωτώντας για τους βασικούς νόμους, εμπλεκόμαστε σε φιλοσοφική συζήτηση, επειδή θα πρέπει να εξέλθουμε από το σύνολο των μαθηματικών και της λογικής.

Πέραν των βασικών νόμων, ο Φρέγκε επιτρέπει ορισμούς στο τυπικό του σύστημα. Στο τυπικό σύστημα του Φρέγκε, οι ορισμοί ήταν μόνο συντομεύσεις, συνεπώς ήταν ουσιαστικά αναλώσιμοι. Για παράδειγμα, ο ορισμός του «εργένη» είναι «ανύπαντρος άντρας». Εάν επιθυμούσαμε, θα μπορούσαμε να απαλλα-

γούμε από τη λέξη «εργένης» σε όλα μας τα γραπτά και να την αντικαταστήσουμε με τη λέξη «ανύπαντρος άντρας», χωρίς να απωλέσουμε το νόημα ή την αλήθεια των δηλωτικών προτάσεων. Το τυπικό σύστημα της απόδειξης του Φρέγκε δεν έχει «κενά». Κάθε κίνηση σε μία απόδειξη δικαιολογείται μέσω της προσφυγής σε έναν προηγουμένων αποδεκτό συμπερασματικό κανόνα. Στην πραγματικότητα, στο τυπικό σύστημα του Φρέγκε, υπάρχει μόνο ένας κανόνας συναγωγής κι αυτός είναι ο *modus ponens*. Ο κανόνας *modus ponens* δηλώνει ότι αν κάποιος έχει μια υποθετική πρόταση και, ανεξάρτητα, την ηγουμένη της υποθετικής πρότασης τότε μπορεί να συναγάγει την επομένη της υποθετικής πρότασης.<sup>18</sup> Οι χωρίς κενά αποδείξεις διασφαλίστηκαν έναντι της γρήγορης συλλογιστικής. Αυτή θα μπορούσε με τη σειρά της να περιλαμβάνει την προσφυγή σε κάποια ανεξέταστη αρχή, που ίσως αποδεικνύοταν ότι προσθέτει κάποια νέα έννοια στο σύστημα, η οποία θα έκανε την παραγόμενη «αλήθεια» συνθετική. Αυτό αποτέλεσε κρίσιμο κομμάτι της απόδειξης ότι οι αλήθειες της αριθμητικής είναι αναλυτικές.

Εφόσον η αναλυτικότητα και η συνθετικότητα είναι αμοιβαία αποκλειόμενες, ένας άλλος τρόπος για να καταδείξει κανείς ότι η αριθμητική είναι αναλυτική έγκειται στο να καταδείξει ότι δεν είναι συνθετική. Η αριθμητική θα μπορούσε να είναι συνθετική για δύο διαφορετικούς λόγους: η αριθμητική θα μπορούσε να είναι μία εμπειρική επιστήμη ή η αριθμητική θα μπορούσε να εξαρτάται από τη χωροχρονική εποπτεία. Θα ξεκινήσουμε με τον πρώτο. Ένας ισχυρισμός, τον οποίο πρέπει να αιτιολογήσει ο ειδικός της λογικής, είναι ότι η αριθμητική δεν είναι εμπειρική. Είναι κάτι που γίνεται εύκολα. Η ιεραρχική αντίληψη του ειδικού της λογικής για τη γνώση και τη δικαιολόγηση υποδηλώνει ότι η αριθμητική δεν είναι *a posteriori*, δεδομένου ότι η καθιέρωση ή η ανακάλυψη των αληθειών της αριθμητικής δεν βασίζεται στην αισθητηριακή εμπειρία,<sup>19</sup> και αν μία αλήθεια είναι γνωστή *a posteriori*, αυτό την αποκλείει από το να είναι αναλυτική. Μία αλήθεια γίνεται γνωστή *a posteriori*, όταν πρέπει να χρησιμοποίησουμε αισθητηριακή εμπειρία για να την γνωρίσουμε. Αυτό δεν σημαίνει ότι δεν μπορούμε να διδαχθούμε κάποια αριθμητική με τη χρήση «εμπειρικού πειραματισμού». Απεναντίας, το σημείο στο οποίο θέλει να δώσει έμφαση ο ειδικός της λογικής, είναι ότι τα εμπειρικά πειράματα τα οποία βασίζονται κατ' ανάγκην στην αισθητηριακή εμπειρία, δεν θα μας επιτρέψουν να προχωρήσουμε αρκετά στην κατανόηση της αριθμητικής. Για παράδειγμα, ίσως να επιχειρούσαμε να διδάξουμε σε ένα παιδί ότι  $8 + 8 = 16$ , βάζοντας το παιδί να μετρήσει οκτώ βώλους, κι άλλους οκτώ βώλους, που θα τοποθετήσει μαζί και έπειτα θα μετρήσει, ανακαλύπτοντας, στη συνέχεια, ότι υπάρχουν 16 βώλοι. Θα μπορούσαμε να επαναλάβουμε το πείραμα με το παιδί για διάφορους τύπους αντικειμένων, έως ότου αυτό να πεισθεί, εμπειρικά, ότι 8 πράγματα συν άλλα 8 πράγματα ισούται συνολικά με 16 πράγματα. Το πρόβλημα με τη συγκεκριμένη μέθοδο είναι ότι το παιδί δεν μαθαίνει *απαραίτητως* γενικές αρχές για την πρό-

<sup>5</sup> Στα ελληνικά θα μπορούσαμε να έχουμε π.χ. την αναλυτική πρόταση «το χιόνι είναι λευκό ή το χιόνι δεν είναι λευκό».

σθεση. Δεν δικαιολογείται παρά μόνο εμπειρικά πώς το παιδί σκέπτεται ότι 8 αντικείμενα μαζί με άλλα 8 αντικείμενα θα δίνουν ως αποτέλεσμα 16 αντικείμενα. Μιλώντας εμπειρικά, θα πρέπει να σχεδιαστεί ένα νέο πείραμα για την πρόσθεση 8 αντικειμένων σε 9 αντικείμενα. Μόνο έως το σημείο αυτό μπορεί να προχωρήσει η πειραματική μέθοδος.

Για να μάθει κανείς γενικές αρχές σχετικά με την πρόσθεση, χρειάζεται να αποσπαστεί από την εμπειρία μας και να παραγάγει γενικές αρχές όπως τα αξιώματα, κι αυτά είναι αναλυτικά. Ξεπερνούν επαρκώς την εμπειρία και δεν επιδέχονται δοκιμής μέσω του φυσικού πειράματος ή της φυσικής παρατήρησης, ιδιαίτερα στην περίπτωση των απείρων αριθμών. Οι νόμοι της λογικής, και κατά μείζονα λόγο τα θεωρήματα της λογικής τα οποία λογίζονται ως αξιώματα της αριθμητικής, δεν μπορούν να προκύπτουν επαγγωγικά ή να εξάγονται, από φυσικά πειράματα, σύμφωνα με τον ειδικό της λογικής. Στην πραγματικότητα, το να σκεφθούμε ότι κάποιος μπορεί να το κάνει αυτό αποτελεί, και πάλι σύμφωνα με τον ειδικό της λογικής, απλώς μία πεισματική ανοησία. Αντ' αυτού, προσδιορίζουμε τις γενικές αρχές και είναι αυτές οι οποίες αποδίδουν το νόημα στους αριθμούς, στην πρόσθεση και ούτω καθεξής.

Σύμφωνα με τον λογικιστή, όχι μόνο δεν εξαρτάται η αριθμητική τελικά από συγκεκριμένα εμπειρικά πειράματα αλλά ούτε εξαρτάται από τη χωροχρονική εποπτεία, υπό την έννοια του Ιμμάνουελ Καντ. Αυτή θα ήταν ο δεύτερος τρόπος με τον οποίο θα μπορούσε να είναι συνθετικό ένα σύνολο αληθειών. Είναι πολύ πιο δύσκολο να καταδείξει κανείς με αυτόν τον τρόπο ότι η αριθμητική δεν είναι συνθετική. Ο Φρέγκε διαφωνεί με την πεποίθηση του Καντ ότι τόσο η αριθμητική όσο και η γεωμετρία είναι συνθετικές. Οι αλήθειες είναι συνθετικές (που είναι το αντίθετο του αναλυτικού), αν, σε τελική ανάλυση, εξαρτώνται είτε από την εμπειρία της αισθησης είτε από την καντιανή εποπτεία. Την αναφέρουμε ως «καντιανή εποπτεία», επειδή ο Καντ χρησιμοποιεί τον όρο «εποπτεία» με έναν αρκετά ιδιαίτερο τρόπο. Για τον Καντ, η αριθμητική εξαρτάται από αυτό το οποίο ο ίδιος αποκαλεί χρονική και χωρική εποπτεία. Υπό την τεχνική καντιανή έννοια, η «εποπτεία» αποτελεί τη γέφυρα μεταξύ της αισθητηριακής εμπειρίας και της θεωρητικής συλλογιστικής. Η εφαρμογή του συλλογισμού μας στον φυσικό κόσμο γύρω μας καθίσταται δυνατή από την εποπτεία. Με την «εποπτεία», ο Καντ εννοεί κάτι που είναι διαθέσιμο για τον καθένα κατά τον ίδιο τρόπο δηλαδή, για τον Καντ, όλοι διαθέτουμε την ίδια χωρική και χρονική εποπτεία. Μοιραζόμαστε αυτές ακριβώς τις διαισθήσεις, άρα, με την έννοια του «κοινού σε όλους εμάς», αυτές είναι καθολικές. Επιπρόσθετα, κάτι τέτοιο αποτελεί ένα απαραίτητο γεγονός για τον τρόπο με τον οποίο αναπαριστούμε τον κόσμο στους εαυτούς μας. Αυτό το οποίο μας αποδίδει η χρονική εποπτεία είναι μία αίσθηση της διάταξης: της μίας στιγμής που προηγείται της επόμενης στον χρόνο. Είναι ανάλογο με τους αριθμούς: ο ένας είναι μικρότερος από τον άλλο. Η χωρική εποπτεία μας αποδίδει την αίσθηση του αριθμού που

«τοποθετείται πριν» από κάποιον άλλον στη γραμμή των αριθμών. Η ερμηνεία των καντιανών εννοιών της χρονικής και της χωρικής εποπτείας συνιστά ένα δυσδιάκριτο έργο.<sup>20</sup> Ο Φρέγκε δεν πίστευε ότι κάτι τόσο βασικό όσο η αριθμητική θα έπρεπε να εξαρτάται από διαισθήσεις, είτε υπό την έννοια του Καντ, είτε υπό οποιαδήποτε άλλη χαλαρότερη έννοια.<sup>21</sup> Για τον Φρέγκε, η αριθμητική είναι απλώς μέρος της βασικής λογικής, κάτι το οποίο δεν απαιτεί καμία εποπτεία εξαιτίας του σημείου που τονίστηκε παραπάνω, ότι δεν διαθέτουμε τη δυνατότητα να σκεφτόμαστε εναλλακτικές λύσεις στην αριθμητική. Αυτό υποστηρίζει την ιδέα ότι η αριθμητική είναι λογική και όχι μία ειδική επιστήμη που εξαρτάται από την εποπτεία. Πρέπει να είμαστε προσεκτικοί. Ο Φρέγκε δεν απέρριπτε ολοκληρωτικά τις ιδέες του Καντ περί εποπτείας<sup>22</sup> αλλά μάλλον, θεωρούσε ότι ο Καντ είχε υποτιμήσει τη δύναμη της λογικής. Όταν συνέγραψε ο Καντ τη μελέτη της «λογικής», αυτή ήταν περισσότερο ή λιγότερο οριοθετημένη στην Αριστοτελική συλλογιστική λογική. Οι ιδέες του Καντ σχετικά με την αριθμητική, που απαιτούσαν χωροχρονική εποπτεία, δεν προέκυπταν ως ένα αποτέλεσμα της υποτίμησης της δύναμης της Αριστοτελικής συλλογιστικής λογικής: αλλά μάλλον, η Αριστοτελική συλλογιστική λογική δεν αντιπροσωπεύει τυπικά όλα όσα εμπίπτουν στη λογική. Είναι η δευτεροβάθμια λογική, όπως παρουσιάζεται στο τυπικό λογικό σύστημα του Φρέγκε, αυτή η οποία αντιπροσωπεύει πλήρως τη «λογική» και η αριθμητική είναι αναγώγιμη σε αυτήν τη λογική.

Εάν ο Καντ είχε μυηθεί στο τυπικό σύστημα του Φρέγκε, θα είχε συμμαχήσει με τον Φρέγκε ή όχι; Μία από τις δυνατότητες θα ήταν ο Καντ να είχε συμμαχήσει με τον Φρέγκε και να είχε δηλώσει «Α, έχετε δίκιο! Δεν είχα στη διάθεσή μου ένα πλήρες λογικό σύστημα. Διέθετα μόνο την Αριστοτελική συλλογιστική λογική. Τώρα διαπιστώνω ότι η αριθμητική δεν εξαρτάται από την εποπτεία, αλλά είναι αναλυτική». Στην προκειμένη περίπτωση, ο Καντ θα είχε αναγνωρίσει πως θα ήταν λάθος να σκέφτεται κανείς ότι η Αριστοτελική λογική εξαντλεί τη «λογική» η «λογική» διαθέτει ένα πολύ ευρύτερο φάσμα. Εναλλακτικά, στη φανταστική μας συνάντηση, ο Καντ θα μπορούσε να αρνηθεί πλήρως το τυπικό σύστημα του Φρέγκε ως αντιπροσωπευτικό της «λογικής». Θα μπορούσε να έχει προσκολληθεί σε μία θέση βάσει της οποίας η Αριστοτελική συλλογιστική λογική είναι ό,τι υφίσταται για τη «λογική» το υπόλοιπο είναι μαθηματικά. Αν ήταν αυτή η αντίδραση του Καντ, τότε, κατά την παρουσίαση του τυπικού συστήματος του Φρέγκε, ο Καντ θα είχε ισχυρίστει ότι αυτό το οποίο ο Φρέγκε αποκαλεί «λογική» είναι τα μαθηματικά και για να γίνει κατανοητό χρειάζεται η χωρική και η χρονική εποπτεία. Σε αυτήν την τελευταία περίπτωση, η αντιπαράθεση αφορά περισσότερο στο τι εκλαμβάνεται ως «λογική», όπως και στο τι είναι η «αναλυτικότητα», παρά στο ποιο είναι το πεδίο και η τυπική αναπαράσταση της «λογικής». Ποτέ δεν θα μάθουμε πώς θα είχε αντιδράσει ο Καντ.

Είτε έτσι είτε αλλιώς, ο Φρέγκε διαφωνεί ρητά με τον Καντ. Πρόκειται για μία τολμηρή κίνηση. Οι φιλοσοφικές παρατηρήσεις του Καντ σχετικά με τα μαθηματικά θεωρούνταν ένα πολύ σημαντικό σημείο αναφοράς για τους φιλοσόφους. Σύμφωνα με τον Αλμπέρτο Κόφα, «καλώς ή κακώς, σχεδόν κάθε φιλοσοφική εξέλιξη από το 1800 και έπειτα έχει αποτελέσει μία απάντηση στον Καντ» (1991: 7).<sup>23</sup>

Για να συνοψίσουμε, η φιλοσοφική σπουδαιότητα του λογικισμού δικαιολογεί τη γοητεία του. Ο λογικισμός επεξηγεί σε κάποιον βαθμό την απροθυμία μας να αμφισβητούμε την αριθμητική. Δυστυχώς, υφίστανται ορισμένα βαθύτερα προβλήματα γι' αυτόν.

#### 4. Προβλήματα σχετικά με τον λογικισμό του Φρέγκε

Το πιο κρίσιμο πρόβλημα σχετικά με την απόπειρα του Φρέγκε να αποδείξει ότι η αριθμητική είναι πραγματικά λογική, ανακαλύφθηκε από τον Ράσελ ο οποίος είχε μία χειρόγραφη έκδοση των *Grundgesetze* του Φρέγκε. Πριν δημοσιευθεί ο δεύτερος τόμος των *Grundgesetze*, ο Ράσελ έγραψε στον Φρέγκε εξηγώντας ότι θα μπορούσε κάποιος να αντλήσει μία αντίφαση από το τυπικό του σύστημα κάτι που έγινε γνωστό ως το «παράδοξο του Ράσελ».<sup>24</sup> Καθώς ο Φρέγκε έλαβε πολύ αργά την επιστολή, έτσι ώστε να μην μπορεί να κάνει σημαντικές αλλαγές στον δεύτερο τόμο, παραδέχεται την ανακάλυψη του Ράσελ σε ένα παράρτημα του αναφερόμενου τόμου των *Grundgesetze*. Ο Φρέγκε αναγνώρισε αμέσως τη βαρύτητα της ανακάλυψης του Ράσελ:

Σχεδόν τίποτα πιο ατυχές δεν μπορεί να συμβεί σε έναν επιστημονικό συγγραφέα από το να έχει κλονιστεί ένα από τα θεμέλια του οικοδομήματός του, αφού το έργο έχει ολοκληρωθεί.

Σ' αυτήν τη θέση βρέθηκα από μία επιστολή του κ. Μπέρτραντ Ράσελ, ακριβώς όταν η εκτύπωση αυτού του τόμου κόντευε να ολοκληρωθεί.

(Frege 1952: 214)<sup>25</sup>

Το πρόβλημα αφορά στον βασικό νόμο V του Φρέγκε, ο οποίος αφορά στις εκτάσεις των εννοιών. Ο βασικός νόμος V του Φρέγκε είναι ο εξής:

$$\forall F \forall G ((\text{Ext}F = \text{Ext}G) \leftrightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Gx))$$

Τα *F* και *G* είναι σχηματικά γράμματα που συμβολίζουν έννοιες δηλαδή, μπορούν να αντικατασταθούν από κατηγορήματα, σχέσεις ή συναρτήσεις. Ο βασικός νόμος V δηλώνει ότι για οποιεσδήποτε έννοιες *F* και *G*, η έκταση της *F* είναι ταυτόσημη με την έκταση της *G*, αν και μόνο αν όλα τα αντικείμενα τα οποία εμπίπτουν στην έννοια *F* είναι τα ίδια με τα αντικείμενα τα οποία εμπίπτουν στην έννοια *G*. Με άλλα λόγια, ο βασικός νόμος V απλώς ερμηνεύει διεξοδικά τη σημασία της «έκτασης μίας έννοιας». Φαίνεται αρκετά αβλαβής. Φαίνεται να είναι κατά τετριμένο τρόπο και προφανώς αληθής.

Για να το επεξηγήσουμε περαιτέρω, η έννοια της έκτασης αντιπαραβάλλεται με εκείνη της έντασης υποδήλωσης. Τόσο η έκταση όσο και η ένταση σχετίζονται με τον τρόπο με τον οποίο μας παρουσιάζεται η έννοια. Η εκτατική παρουσίαση της έννοιας είναι απλώς ένας κατάλογος των αντικειμένων που εμπίπτουν στην έννοια. Αντιθέτως, η εντασιακή παρουσίαση της έννοιας αποδίδει έναν χαρακτηρισμό της έννοιας, πράγμα το οποίο, στη συνέχεια, μας επιτρέπει να διακρίνουμε ποια αντικείμενα εμπίπτουν σε αυτή. Για παράδειγμα, θα μπορούσε κάποιος να μας δώσει μία λίστα πέντε ατόμων που είναι προσκεκλημένα

σε δείπνο. Η λίστα είναι η έκταση της εντασιακά δεδομένης έννοιας «πρόσωπο προσκεκλημένο σε δείπνο». <sup>26</sup> Μπορούμε να συνδέουμε το παράδειγμα αυτό με τον βασικό νόμο V. Ας ονομάσουμε "F" την έννοια «πρόσωπο προσκεκλημένο σε δείπνο». Ας ονομάσουμε "G" την έννοια «μέλος της ποιητικής λέσχης». Η λίστα των ανθρώπων που έχουν προσιδηθεί στο δείπνο είναι ταυτόσημη με τη λίστα των μελών της ποιητικής λέσχης, αν και μόνο αν οι δύο λίστες έχουν επιλεγμένους τους ίδιους ανθρώπους. Όταν αυτό συμβαίνει, δηλώνουμε ότι, λογικά, «οι έννοιες είναι ισοδύναμες», όπου ισοδύναμος σημαίνει «παρόμοιος σε μερικές, πιθανώς σε πολλές, συγκεκριμένες πτυχές». Σ' αυτήν την περίπτωση, οι έννοιες είναι ταυτόσημες στις εκτάσεις τους, συνεπώς οι έννοιες είναι λογικά εναλλάξιμες (δεν μας ενδιαφέρει ο τρόπος με τον οποίο τις αποκαλεί κανείς, ή ποια μέσα διαθέτει κανείς για να τις επιλέγει). Δηλαδή, ο τρόπος με τον οποίο θα καταλήξει κανείς στη δημιουργία της λίστας –εξετάζοντας τη λίστα των μελών της ποιητικής λέσχης ή εξετάζοντας τη λίστα των καλεσμένων στο δείπνο– δεν σχετίζεται με τις εκτάσεις του εντασιακού χαρακτηρισμού. Επιθυμούμε απλώς να είμαστε σε θέση να δημιουργούμε τη λίστα. Ο βασικός νόμος V προορίζεται ως νόμος της λογικής. Δηλώνει ότι αποτελεί ζήτημα της λογικής το γεγονός ότι ο τρόπος με τον οποίο εκφραζόμαστε (το πώς αναπαριστούμε εντασιακά τις έννοιες) είναι αδιάφορος, υπό την προϋπόθεση ότι επιλέγουμε τα αντικείμενα που επιθυμούμε. Δύο έννοιες είναι ταυτόσημες στην έκταση, δηλαδή, λογικά μη διακρίσιμες, εάν επιλέγουν τα ίδια αντικείμενα. Η λογική είναι εκτασιακού χαρακτήρα: τυφλή στην εντασιακή παρουσίαση. Η έννοια 2 + 2 είναι λογικά ισοδύναμη με την έννοια 4. Οι έννοιες έχουν ταυτόσημες εκτάσεις, εφόσον το "2 + 2" επιλέγει το ίδιο αντικείμενο με αυτό που επιλέγει το "4".

Ο βασικός νόμος V ίσως να φαίνεται τετριμμένος και προφανής. Αυτό οφείλεται εν μέρει στο ότι όλοι σχεδόν οι μαθηματικοί προϋποθέτουν ότι τα συστήματά τους είναι εκτασιακά συστήματα, επομένως επιδοκιμάζουν, σιωπηρά ή ρητά, κάτι σαν τον βασικό νόμο V. Ο Φρέγκε αυτό το αναγνώρισε. Ήταν αυτός ο λόγος για τον οποίο θεώρησε ότι ο βασικός νόμος V θα μπορούσε να γίνει αποδεκτός ως μία λογική αρχή. Ο Φρέγκε απλώς κατέστησε την αρχή ρητή. Ο βασικός νόμος V κι άλλα αξιώματα σαν κι αυτόν, αποκαλούνται μερικές φορές «αφελείς» αρχές (συμπεριληψης).<sup>27</sup> Οι αρχές είναι αφελείς, επειδή φαίνονται αρκετά προφανείς αλλά οδηγούν σε αντίφαση.

Από τον βασικό νόμο V μπορούμε να παραγάγουμε μία αντίφαση, επειδή δεν υφίσταται κανένας περιορισμός όσον αφορά τα είδη των έννοιων που μας επιτρέπεται να εκφράζουμε στο τυπικό σύστημα του Φρέγκε.<sup>28</sup> Δύο οποιεσδήποτε έννοιες διαθέτουν το χαρακτηριστικό της ταυτοσημίας στην έκταση (λογικά ίδιες και απαράλλακτες) μόνο στην περίπτωση που επιλέγουν τα ίδια αντικείμενα. Μπορούμε να αντικαθιστούμε ότι επιθυμούμε για την F ή την G, υπό την προϋπόθεση ότι μπορούμε να εκφράσουμε, ή να τυποποιήσουμε την έννοια στη γλώσσα. Θυμηθείτε τους καθολικούς ποσοδείκτες στην αρχή του βασικού νόμου V,  $\forall F \forall G$ : «για οποιεσδήποτε έννοιες F, για οποιεσδήποτε έννοιες G». Θυμηθείτε

επίσης ότι στην κλασική λογική μπορούμε πάντοτε να παραγάγουμε μία υπαρκτική πρόταση από μία καθολική: το  $\forall x(Hx) \vdash \exists x(Hx)$  είναι λογικά έγκυρο (το  $\vdash$  διαβάζεται ως «μπορούμε νά παραγάγουμε συντακτικώς (ακολουθώντας τους λογικούς κανόνες της παραγωγής)»). Η έκφραση  $\forall x(Hx) \vdash \exists x(Hx)$  διαβάζεται ως: «Όλα τα αντικείμενα στο πεδίο κατέχουν την ιδιότητα H, συνεπώς, υπάρχει κάτι στο πεδίο που κατέχει την ιδιότητα H». Στον βασικό νόμο V, οι καθολικοί ποσοδείκτες ποσοδεικτούν πάνω σε δευτεροβάθμια αντικείμενα, δηλαδή, σε έννοιες. Άρα, οι καθολικότητες στον βασικό νόμο V υπαιγίσσονται, με μία μικρή μεθόδευση, την ύπαρξη οποιωνδήποτε έννοιών τις οποίες αναλογιζόμαστε για να αντικαταστήσουν την F και την G. Ο βασικός νόμος V μας αδειοδοτεί να επινοούμε οποιαδήποτε έννοια την οποία μπορούμε να εκφράσουμε στην τυπική γλώσσα και εγγυάται την ύπαρξη μίας έκτασης για τη συγκεκριμένη έννοια. Ας σημειωθεί ότι η έκταση θα μπορούσε να είναι κενή στην περίπτωση που δεν υπάρχει κάτι προς επιλογή. Μία αντιφατική έννοια επιλέγει (έχει έκταση) το κενό σύνολο. Για παράδειγμα, η έννοια των «πραγμάτων που δεν είναι ταυτόσημα με τους εαυτούς τους» επιλέγει (έχει έκταση) το κενό σύνολο.

Μπορούμε τώρα να στραφούμε στην ένσταση του Ράσελ έναντι του βασικού νόμου V. Εξετάστε την έννοια «το σύνολο όλων των πραγμάτων που δεν ανήκουν στη δική τους έκταση». Τα περισσότερα σύνολα δεν εμπεριέχονται στην έκταση τους. Για παράδειγμα, το σύνολο των μελών της ποιητικής λέσχης, το ίδιο, δεν αποτελεί μέλος της ποιητικής λέσχης. Συνεπώς, το σύνολο δεν ανήκει στην έκτασή του. Αντίθετα, μπορούμε να αναλογιζόμαστε έννοιες οι οποίες εμπεριέχονται στις εκτάσεις τους. Ένα παράδειγμα θα παρέθετε η έννοια «ένα άπειρο σύνολο». Το σύνολο των «απείρων συνόλων» είναι το ίδιο άπειρο, και, κατά συνέπεια, ανήκει στη δική του έκταση. Επιστρέφοντας στη θεώρηση των «συνόλων που δεν εμπεριέχονται στην έκτασή τους», μπορούμε όλα να τα συγκεντρώσουμε υπό μία έννοια: «όλα τα σύνολα που δεν ανήκουν στην έκτασή τους». Αυτό συνιστά ένα σύνολο. Ας το ονομάσουμε "R", από το όνομα του Ράσελ. Τώρα θέτουμε το ερώτημα εάν το R ανήκει ή όχι στη δική του έκταση. Αν το R ανήκει στη δική του έκταση τότε οφείλει να μην ανήκει, εξαιτίας της σημασίας της έννοιας. Αν το R δεν ανήκει στη δική του έκταση, τότε οφείλει να ανήκει, εξαιτίας αυτού που περιλαμβάνεται στην έννοια. Προκύπτει αντίφαση.

Ο βασικός νόμος V δεν είναι τόσο αθώος ή τόσο προφανής όσο νομίζαμε. Μέρος του προβλήματος είναι ότι επιτρέπει οποιαδήποτε έννοια: κάτι για το οποίο δεν διαθέτει αρμοδιότητα. Ο βασικός νόμος V δεν δηλώνει «όλες οι έννοιες εκτός από ...». Η προσθήκη μιας τέτοιας συνθήκης στον βασικό νόμο V δεν συνιστά ένα σύνολο. Αν είχε εξαιρέσεις τότε δεν θα ήταν υποψήφιος ως λογική αρχή, εφόσον οι βασικοί νόμοι υποτίθεται ότι θα πρέπει να είναι εξ ολοκλήρου γενικοί, και ένας υποτιθέμενος «νόμος της λογικής» που έχει μερικές εξαιρέσεις ούτε γενικός είναι ούτε καθολικός.

Ο Φρέγκε επιχείρησε να αποκαταστήσει τη ζημιά προτείνοντας έναν εναλλακτικό νόμο στον βασικό νόμο V, από τον οποίο ο Ράσελ είχε παραγάγει το πα-

ράδοξο. Δυστυχώς, η εναλλακτική λύση αποδείχθηκε κι αυτή αντιφατική. Ο Φρέγκε βρέθηκε σε βαθειά απόγνωση για το έργο του και δεν επιχείρησε να το αποκαταστήσει περαιτέρω. Στην πραγματικότητα, δεν δημοσίευσε ξανά για χρονικό διάστημα δεκατεσάρων ετών. Όταν εν τέλει το έκανε, προσπάθησε να επαναθεμελιώσει την αριθμητική στην Ευκλείδεια γεωμετρία, παρά στη λογική. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο Φρέγκε εξακολούθησε να είναι πεπεισμένος ότι η μαθηματική ανάλυση της έννοιας του αριθμού ήταν ανεπαρκής. Η ανάλυση της έννοιας του αριθμού έπρεπε να δοθεί μέσω της προσφυγής σε κάτι πιο βασικό από την έννοια του αριθμού καθ' εαυτήν. Αποφάσισε ότι η Ευκλείδεια γεωμετρία πρέπει να είναι πιο βασική, σε ότι αφορά την απόδοση μίας δικαιολόγησης των εννοιών μας σχετικά με τον αριθμό. Το περαιτέρω έργο του ούτε πλήρως ανεπτυγμένο ήταν ούτε εξελήφθη σοβαρά από οποιουδήποτε υποστηρικτές του, οπότε δεν αποτέλεσε αντικείμενο ενασχόλησης.

Εκτός από το ζήτημα της ασυνέπειας, υπάρχει ένα δεύτερο μείζον πρόβλημα στην παρουσίαση της φιλοσοφικής άποψης του Φρέγκε το οποίο θα εκτεθεί εντός ολίγου. Στη βιβλιογραφία, αναφέρεται ως «το πρόβλημα του Ιουλίου Καίσαρα» και έχει ως εξής. Από την ίδια τη λογική, καθώς στεκόμαστε στο υψηλότερο μέρος της γνωσιακής μας ιεραρχίας, δεν έχουμε τη δυνατότητα να αποφανθούμε αν ένα αυθαίρετο αντικείμενο που μας παρουσιάζεται, όπως ο Ιούλιος Καίσαρας, είναι αριθμός ή δεν είναι. Πρόκειται για κάτι που φαίνεται αρκετά παράξενο. Ωστόσο, το θέμα αφορά στο ότι η λογική από μόνη της δεν μπορεί να μας πληροφορήσει πραγματικά σχετικά με το τι είδος αντικείμενα είναι οι αριθμοί τουλάχιστον όχι επαρκώς, ώστε να τους διαιρέσουμε από άλλα είδη αντικειμένων. Εάν βασιστούμε στην κοινή λογική τότε γνωρίζουμε ότι ο Ιούλιος Καίσαρας δεν είναι αριθμός, αλλά η λογική από μόνη της δεν μπορεί να μας το αποκαλύψει αυτό.

Το παραπάνω επισημαίνει την αποτυχία της ανάλυσης της έννοιας «είναι ένας αριθμός» από τον Φρέγκε. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι πρέπει να κατέλθουμε την ιεραρχία της γνώσης, προκειμένου να πληροφορηθούμε σχετικά με κάτι για τα ανώτερα επίπεδα της ιεραρχίας. Άρα, η λογική δεν συνιστά έναν αυτάρκη τομέα επιστημονικής γνώσης, απαιτεί τη βοήθεια των κατώτερων επιπέδων. Αυτό δημιουργεί πρόβλημα στον Φρέγκε, εξαιτίας του ότι ένα από τα κίνητρά του, κατά την ανάπτυξη του λογικισμού, ήταν ότι καμία επαρκής θεωρία αριθμών δεν υφίσταται, αλλά αποδεικνύεται ότι, υπό την καθοδήγησή του, ούτε η δική του θεωρία αριθμών είναι επαρκής.

Ο Φρέγκε ήταν σε μεγάλο βαθμό ενήμερος για το εν λόγω πρόβλημα. Το συζητά στην παράγραφο 56 των *Grundlagen* και θεωρεί ότι το έχει επιλύσει έως την παράγραφο 66. Ωστόσο, ο τρόπος επίλυσης του προβλήματος ήταν η χρήση της ιδέας σχετικά με την «έκταση μιας έννοιας». Έπειτα, ο Φρέγκε έπρεπε να εισαγάγει την ιδέα της έκτασης μιας έννοιας στη λογική του. Για να το κάνει αυτό, παρουσίασε τον βασικό νόμο V και γνωρίζουμε πού ακριβώς οδήγησε η συγκεκριμένη παρουσίαση.<sup>29</sup>

## 5. Ο λογικισμός των Ουάιτχεντ και Ράσελ

Οι Ουάιτχεντ και Ράσελ<sup>30</sup> σύνεχισαν από το σημείο στο οποίο είχε σταματήσει ο Φρέγκε. Αποφάσισαν να αναπτύξουν ένα λογικό σύστημα που θα ήταν πιο περίτεχνο από δύο σκοπιές. Η φιλοδοξία των Ουάιτχεντ και Ράσελ ήταν μεγαλύτερη από τη φιλοδοξία του Φρέγκε: επιδιώκαν να αναγάγουν το σύνολο των μαθηματικών στο δικό τους τυπικό σύστημα. Για τον λόγο αυτό χρειάστηκαν σημαντική εκφραστική δύναμη στη λογική τους γλώσσα.<sup>31</sup> Ο άλλος παράγοντας που συντελεί στη δημιουργία ενός περισσότερο περίτεχνου τυπικού συστήματος σε σύγκριση με το αντίστοιχο του Φρέγκε, αφορά στο ότι οι Ουάιτχεντ και Ράσελ ήταν ανένδοτοι στην υποχρεωτική αποφυγή οποιουδήποτε παραδόξου, για τον λόγο αυτό δεν υφίστανται αφελείς αρχές. Δυστυχώς, οι αρχές που αντικαθίστούν την αρχή της απλής συμπεριληψης είναι λιγότερο προφανείς διαισθητικά και, έτσι, αναμφισβήτητα μη καθολικές, και συνεπώς μη λογικές.<sup>32</sup>

Το τυπικό σύστημα που αναπτύχθηκε από τους Ουάιτχεντ και Ράσελ ονομάζεται «θεωρία τύπων». Οι θεωρίες τύπων, του ενός ή του άλλου είδους, χρησιμοποιούνται στις μέρες μας από τους επιστήμονες των υπολογιστών. Οι Ουάιτχεντ και Ράσελ ανέπτυξαν δύο θεωρίες τύπων: την απλή θεωρία τύπων και τη διακλαδίζόμενη θεωρία τύπων. Η διακλαδίζόμενη θεωρία τύπων είναι πιο εξειδικευμένη, όπως ακριβώς υποδεικνύει το όνομα, και αναπτύχθηκε προκειμένου να επιτρέπει μία λεπτομερέστατη ανάλυση, όπως και οργάνωση, των μαθηματικών εννοιών. Στο σημείο αυτό δεν θα επεκταθούμε σε πιο εξεζητημένες λεπτομέρειες της θεωρίας τύπων, εφόσον οι λεπτομέρειες αυτές δεν θα αποδείχθουν σημαντικές στη συνολική φιλοσοφική θέση, όμως από την άλλη πλευρά όντως χρειαζόμαστε να αποκτήσουμε κάποια ιδέα αυτής της θεωρίας. Στη θεωρία τύπων κάποιος είναι απολύτως σαφής σχετικά με το ποιος τύπος πραγμάτων εμπίπτει υπό ένα δεδομένο σύμβολο. Για παράδειγμα, προηγουμένως, κατά τη συζήτηση της λογικής του Φρέγκε, αναφέρθηκε ότι τα “F” και “G” χρησιμοποιούνται από τον Φρέγκε για να συμπεριλαμβάνουν κατηγορήματα, σχέσεις και συναρτήσεις. Στη θεωρία τύπων αυτά τα πράγματα διατηρούνται σε μεγάλο βαθμό ξεχωριστά, επειδή είναι διαφορετικών τύπων. Αυτό το κάνουμε έμμεσα σε οποιοδήποτε τυπικό σύστημα με τη χρήση διαφορετικών γραμματοσειρών, συμβόλων και αλφαριθμητικών. Στη θεωρία τύπων, είμαστε πολύ σαφείς σχετικά με τους κανόνες της συναγωγής συμπεράσματος και τα αξιώματα που διέπουν διαφορετικούς τύπους. Επιπλέον, με σκοπό να αποφευχθεί το παράδοξο, υφίσταται ένα αυστηρό σύστημα επιπέδων, όπου στα κατηγορήματα επιτρέπεται να εφαρμόζονται μόνο σε σχέση με πράγματα ενός κατωτέρου επιπέδου. Αυτό συνιστά το μυστικό της αποφυγής του παραδόξου. Δεν μας επιτρέπεται, από τους «κανόνες της γραμματικής» της θεωρίας τύπων, να ρωτάμε για ένα σύνολο κάποιου επιπέδου, αν αυτό ανήκει στον εαυτό του ή όχι (στο ίδιο επίπεδο) κατά συνέπεια δεν είναι δυνατό να εκκινήσουμε από τη συλλογιστική της παραγωγής του παραδόξου. Οι Ουάιτχεντ και Ράσελ ήταν

γιμότητας εγγυάται ότι έχουμε ακριβή αντίγραφα των αριθμών σε κάθε επίπεδο. Οι επικριτές του έργου των Ουάιτχεντ και Ράσελ επισημαίνουν ότι προφανώς ούτε αυτό συνιστά ζήτημα απόφασης που εναπόκειται στη λογική. Μοιάζει περισσότερο με βολικό εργαλείο ή με κάποιο μαθηματικό γεγονός στην καλύτερη περίπτωση.<sup>37</sup>

Ο Ράσελ γνώριζε αυτές τις επικρίσεις και η τελική του απόκριση ήταν να παραδεχθεί ότι το παραπάνω αποτελούσε πρόβλημα. Διακρίνει λογικά τα αναγκαία αξιώματα από όσα ονομάζει «εμπειρικά αξιώματα»<sup>6</sup> κατά τον ακόλουθο τρόπο. Τα λογικώς αναγκαία αξιώματα είναι παρόμοια με τους βασικούς νόμους τους Φρέγκε. Για τον Ράσελ, αυτά τα αξιώματα είναι αδιαφισβήτητα λογικοί νόμοι. Αντίθετα, τα «εμπειρικά αξιώματα» δεν χαίρουν του ίδιου φιλοσοφικού κύρους αν συγκριθούν με τα λογικώς αναγκαία αξιώματα. Δηλαδή, υπάρχει κάποια παρατεταμένη αμφιβολία για το εάν αυτά είναι λογικά ή μάλλον μαθηματικά (Potter 2000: 160). Δικαιολογούνται εμπειρικά εκ των υστέρων, υπό την έννοια της μεγάλης τους χρησιμότητας. Εν τέλει, υφίσταται πρόβλημα με τη συγκεκριμένη απόπειρα στον λογικισμό. Τα μαθηματικά είναι αναγώγιμα σε ένα τυπικό σύστημα το οποίο περιλαμβάνει τόσο αναγκαία όσο και «εμπειρικά» αξιώματα. Επιτλέον, τα «εμπειρικά αξιώματα» είναι μη εξαλείψιμα. Συνεπώς, η απόπειρα των Ουάιτχεντ και Ράσελ να αποδείξουν τον λογικισμό αποτυγχάνει, επειδή το μόνο που καταδεικνύει είναι ότι τα μαθηματικά είναι αναγώγιμα στη θεωρία τύπων, και η θεωρία τύπων είναι απλώς και μόνο ακόμα ένας μαθηματικός κλάδος.

## 7. Άλλες απόπειρες στον λογικισμό

Το 1983, ο Κρίστιαν Ράιτ πρότεινε μία πιθανή αποκατάσταση στο ερευνητικό σχέδιο του Φρέγκε.<sup>38</sup> Ο Ράιτ πρότεινε να επιφέρουμε αλλαγή στο τυπικό σύστημα του Φρέγκε με την κατάργηση του βασικού νόμου V, και με την αντικατάστασή του από την «αρχή των αριθμών» του Φρέγκε. Αυτό το νέο τυπικό σύστημα διαθέτει το τεχνικό πλεονέκτημα της συνέπειας και από αυτό το σύνολο αξιωμάτων (οι τέσσερις βασικοί νόμοι του Φρέγκε συν την αρχή των αριθμών) μπορούμε να αντλήσουμε τα αξιώματα του Πεάνο ως θεωρήματα του τυπικού συστήματος. Για μία παρουσίαση του τυπικού συστήματος της λογικής του Φρέγκε, ας δει ο αναγνώστης τα έργα του *Begriffsschrift* (1976) και *Grundgesetze* (1980b).

Μπορούν να αναφερθούν πολλά ενδιαφέροντα πράγματα γι' αυτήν την ευφύη πρόταση. Από τεχνική άποψη, λειτουργεί. Δηλαδή, μπορούμε όντως να αντλήσουμε τα αξιώματα του Πεάνο ως θεωρήματα ενός πιο «πρωταρχικού τυπικού συστήματος».<sup>39</sup> Ωστόσο, αυτήν τη στιγμή αντιμετωπίζουμε την ίδια επίκριση, την οποία διαπιστώσαμε και εναντίον της θεωρίας τύπων των Ουάιτχεντ και Ράσελ. Το ερώτημα είναι αν αυτό το πιο πρωταρχικό σύστημα αποτελεί όντως λογική. Για να το απαντήσουμε αυτό, πρέπει να εξετάσουμε προσεκτικά την αρχή των αριθμών.

Η αρχή των αριθμών είναι η εξής:  $\forall F \forall G ((NF = NG) \leftrightarrow (F \approx G))$

Διαβάζεται ως εξής: «για όλες τις έννοιες  $F$  και για όλες τις έννοιες  $G$ , ο αριθμός των  $Fs$  είναι ταυτόσημος με τον αριθμό των  $Gs$ , αν και μόνο αν ο  $F$  και  $G$  μπορούν να τοποθετηθούν σε αντιστοιχία ένα προς ένα (και επί)». [Βλ. Γλωσσάρι]. Αυτό συλλαμβάνει εκ νέου την έννοια του Κάντορ για το μέγεθος ενός συνόλου. Αντί να πραγματεύεται το μέγεθος ως μία απόλυτη έννοια πληθικότητας, συγκρίνει τα μεγέθη δύο συνόλων, το ένα προς το άλλο. Τα σύνολα επιλέγονται από τις έννοιες  $F$  και  $G$ . Κατά συνέπεια, χάρη στην αρχή των αριθμών διαθέτουμε την έννοια των ισοπληθικών συνόλων. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ότι η έννοια  $F$  είναι «προσκεκλημένος που προσέρχεται στο δείπνο» η έννοια  $G$  τότε θα μπορούσε να είναι: «είναι μία ορισμένη θέση στο τραπέζι». Τότε θα διαπιστώναμε ότι ο αριθμός των προσκεκλημένων θα ήταν ο ίδιος με τον αριθμό των θέσεων που έχουν οριστεί, αν και μόνο αν για τον κάθε προσκεκλημένο ή για την κάθε προσκεκλημένη, δεν έχει οριστεί στο τραπέζι παρά μόνο μία θέση. Δεν έχουν οριστεί περισσότερες θέσεις από τον αριθμό των προσκεκλημένων και όλοι οι προσκεκλημένοι κατέχουν μία θέση. Το ερώτημα για τους νεο-Φρεγκεανούς, όπως αυτοαποκαλούνται οι Μπομπ Χέιλ και Ράιτ,<sup>40</sup> διατυπώνεται ως: είναι η αρχή των αριθμών βασικός νόμος ή όχι; Δηλαδή, ο Χέιλ και ο Ράιτ επιθυμούν να δικαιολογήσουν τον ισχυρισμό βάσει του οποίου η αρχή των αριθμών είναι ένας νόμος της λογικής.

<sup>6</sup> Σημ. της επιμελήτριας: ο χαρακτηρισμός «εμπειρικά» εδώ δεν συνδέεται με την αισθητηριακή αντίληψη.

Σε ό,τι αφορά την αξιοπιστία ως προς τις αρχικές προδιαθέσεις του Φρέγκε, η αρχή των αριθμών είναι σημαντική. Ο Φρέγκε είχε αποδείξει την εν λόγω αρχή στο σύστημά του και την είχε χρησιμοποιήσει για να παραγάγει το αξίωμα της μαθηματικής επαγωγής στην αριθμητική του Πεάνο. Έτσι, η αρχή ήδη αποτελούσε ένα θεώρημα στο τυπικό του σύστημα. Επιπλέον, πραγματεύεται την αρχή των αριθμών στα *Grundlagen* (1980a). Κατά την πραγμάτευση της αρχής στα *Grundlagen*, ο Φρέγκε ισχυρίζεται ότι ενώ είναι προφανέστατα αληθής, ο ίδιος δεν έχει πειστεί για το ότι είναι προφανώς μια λογική αρχή, αντί μιας αρχής της αριθμητικής (αυτό το οποίο δεν έχει ακόμα αποδείξει είναι απλώς λογική και δεν επιθυμεί να κάνει οποιεσδήποτε υποθέσεις). Αυτή η επιφύλαξη οφείλεται στο ότι η αρχή των αριθμών αναφέρει την έννοια του αριθμού, ενώ αυτή δεν έχει ακόμα οριστεί ως λογική έννοια. Για να αποδείξει ότι η αρχή των αριθμών είναι αρχή της λογικής, ο Φρέγκε την παρήγαγε αργότερα από τον βασικό νόμο V στα *Grundgesetze*. Αυτή η παραγωγή όχι μόνο απέδειξε την προφανή αλήθεια της αρχής των αριθμών, αλλά επίσης τη λογική της καταγωγή. Δεδομένης της αντίφασης που προήλθε από τον βασικό νόμο V, η λογική καταγωγή της αρχής των αριθμών τίθεται εκ νέου υπό αμφισβήτηση.

Καθώς ενδέχεται να θεωρήσουμε ότι η αρχή των αριθμών είναι ένας τύπος ορισμού, η έννοια του ορισμού χρήζει ιδιαίτερης προσοχής. Εάν είναι όντως τύπος ορισμού, τότε δεν χρειάζεται να τον υπερασπιστούμε ως βασικό νόμο, εφόσον ο Φρέγκε ισχυρίζεται ότι οι αλήθειες της λογικής μπορούν να παραχθούν από τους βασικούς νόμους και τους ορισμούς, με τη χρήση του αποδεικτικού του συστήματος που δεν έχει κενά και είναι πολύ αυστηρό. Δυστυχώς, πρόκειται για κάτι που δεν θα λειτουργήσει. Για τον Φρέγκε, ένας ορισμός πρέπει να είναι αυστηρά πλεοναστικός και να μας επιτρέπει να «εξατομικεύουμε» τα αντικείμενα που ορίζονται διηλαδή, πρέπει να είμαστε σε θέση να διακρίνουμε, ή να αναγνωρίζουμε τα αντικείμενα. Για να το κάνει αυτό, ένας ορισμός θα πρέπει να μας ενημερώνει πότε κάτι που παρουσιάζεται εμπίπτει σε αυτόν ή όχι. Επιπλέον, θα πρέπει να μας ενημερώνει πότε αυτά, τα οποία θεωρούσαμε πως είναι δύο ξεχωριστά αντικείμενα, είναι στην πραγματικότητα το ίδιο αντικείμενο. Η αρχή των αριθμών πραγματοποιεί το τελευταίο, δεν πραγματοποιεί όμως το πρώτο. Συν τοις άλλοις, καμία άλλη αρχή δεν υφίσταται που να πληροφορεί σχετικά με το πότε κάτι είναι αριθμός, σε αντιδιαστολή με κάποιο άλλο είδος αντικειμένου. Πρόκειται για έναν άλλο τρόπο να σκεφτεί κανείς το πρόβλημα του Ιουλίου Καίσαρα. Οι Χείλ και Ράιτ έχουν, εν τέλει, ενδεχομένως τερματίσει την ενασχόληση με το πρόβλημα του Καίσαρα στο «Θάβοντας τον Καίσαρα» (Το *Bury Caesar ...*) (2001a). Ωστόσο, θα πρέπει να επιδείξουμε σύνεση, επειδή μεταξύ των φιλοσόφων υπάρχει πάντοτε περιθώριο για περαιτέρω αντιπαράθεση.

Αλλά αυτό δεν είναι αρκετό. Ακόμα και εάν επιλύσουμε το πρόβλημα του Καίσαρα, αυτό θα καταστήσει την αρχή των αριθμών, μαζί με κάποιες άλλες εκτιμήσεις, ένα μέσο εξατομίκευσης αντικειμένων, ωστόσο δεν θα μας επιβεβαιώνει

ότι οι αριθμοί, «ορισμένοι» μέσω της αρχής των αριθμών, είναι πράγματι λογικά αντικείμενα. Ας θυμηθούμε ότι η αρχή των αριθμών διατυπώνεται ως βασικός νόμος, όχι ως ένας απλός πλεοναστικός ορισμός. Εξακολουθεί να ισχύει ότι θα πρέπει να ασχοληθούμε με το φιλοσοφικό στάτους της αρχής των αριθμών. Εάν η αρχή είναι λογική αρχή τότε, σύμφωνα με τον Φρέγκε και τους νεο-Φρεγκεανούς, πρέπει να είναι *a priori* και αναλυτική. Η αρχή των αριθμών είναι αρκούντως και αδιαμφισβήτητα *a priori*, υπό την έννοια ότι το να γνωρίζει κανείς ότι είναι αληθής ή ακόμα απλώς και μόνο να την κατανοεί, δεν απαιτεί την αισθητηριακή εμπειρία. Δεν είναι κάτι που επιβεβαιώνεται ή απορρίπτεται μέσω του περιβάλλοντος φυσικού κόσμου, τον οποίο συλλαμβάνουμε με τις αισθήσεις μας. Με πολύ απλά λόγια, δεν θα μπορούσαμε να σχεδιάσουμε ένα εργαστηριακό πείραμα για να αποδείξουμε ότι να διαψεύσουμε την αρχή των αριθμών.

Η αναλυτικότητα απαιτεί λεπτότερους χειρισμούς. Ο Φρέγκε είχε δηλώσει ότι μία σκέψη είναι αναλυτική, αν μπορεί να αποδειχθεί από τους βασικούς νόμους του τυπικού του συστήματος, εφόσον ο καθένας από αυτούς είναι σαφώς αναλυτικός, και το σύστημα των αποδείξεων δεν επιτρέπει καμία προϋπόθεση εκτός από τους νόμους και τους πλεοναστικούς ορισμούς. Το κάθε θεώρημα που παράγεται από τους βασικούς νόμους και τους ορισμούς παράγεται μόνο με τη χρήση του *modus ponens*. Ο συγκεκριμένος χαρακτηρισμός της αναλυτικότητας δεν βοηθά σε αυτήν την περίπτωση, καθώς προτείνουμε ένα νέο βασικό νόμο ο οποίος δεν είναι αποδείξιμος από τους άλλους νόμους.

Ένας άλλος χαρακτηρισμός, τον οποίο έδωσε ο Φρέγκε, για την αναλυτικότητα διατυπώνεται ως εξής: μία ιδέα είναι αναλυτική σε περίπτωση που δεν είναι συνθετική. Δηλαδή, μπορούμε να την κατανοούμε χωρίς να προηγείται η κατοχή οποιασδήποτε ιδιαίτερης αισθητηριακής εμπειρίας του κόσμου και χωρίς οποιαδήποτε εποπτεία (η κάθε μία από αυτές είναι επαρκής για να καταστήσει μία ιδέα συνθετική). Δεδομένου ότι η αρχή των αριθμών είναι *a priori*, η διένεξη αναφορικά με το στάτους της πράγματι σχετίζεται με την ορισμένη έννοια της εποπτείας. Αναπτύσσοντας διεξοδικά την προηγούμενη συζήτηση για την Καντιανή εποπτεία, ο Φρέγκε χρησιμοποιεί τη λέξη «εποπτεία» με δύο διαφορετικούς τρόπους (Goethe 2001): ο πρώτος αφορά σε κάποιο είδος ενορατικότητας ή αίσθησης και ο δεύτερος είναι η τεχνική καγυπανή έννοια της χρονικής και χωρικής εποπτείας. Ας εξετάσουμε εάν μπορούμε να αποκλείσουμε την «εποπτεία» που ερμηνεύεται ως «αίσθηση», όταν συζητάμε για την κατανόηση της αρχής των αριθμών. Θέτουμε το ερώτημα αν απαιτείται ενορατικότητα ή κάποια αίσθηση σχετικά με το τι είναι αριθμός, για να αναγνωρίσουμε την αρχή των αριθμών ως αληθή. Η αποδοχή της αρχής των αριθμών ως αληθούς δεν εξαρτάται από την αίσθηση, αφού οι αισθήσεις ή τα ένστικτα είναι άκρως αναξιόπιστα. Διαφορετικοί άνθρωποι έχουν διαφορετικές διαισθήσεις αναφορικά με το τι οι ίδιοι εικάζουν ως αληθές ή ψευδές. Οι μαθηματικές αλήθειες είναι αντικειμενικές, και, κατά συνέπεια, δεν μπορούν να εξαρτώνται από τη διαίσθηση υπό την έννοια των συναισθημάτων. Στην πραγματικότητα, η επιχειρηματολογία υπέρ της αρχής των αριθμών ως α-

ληθούς, μέσω της προσφυγής στα ένστικτα ή τη διαισθηση, έγκειται στο να αντιστρέψει κανείς τη σειρά της δικαιολόγησης. Θα θέλαμε πραγματικά να μάθουμε κατά πόσον διαθέτουμε τη δυνατότητα της εξοικείωσης με την έννοια του αριθμού μέσω της μελέτης της αρχής των αριθμών χωρίς κάποια προγενέστερη αντίληψη του αριθμού. Η απάντηση σε αυτό είναι λιγότερο προφανής και απαιτεί να καταδείξουμε ότι η αρχή είναι αναλυτική. Οι αναλυτικές αλήθειες είναι δηλωτικές προτάσεις οι οποίες είναι αληθείς, μόνο εξαιτίας του νοήματος. Οι ρητοί ορισμοί είναι αναλυτικοί. Παρ' όλα αυτά, παραπάνω διαπιστώσαμε πως δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η αρχή των αριθμών είναι κάποιος ορισμός.

Ο Ράιτ δίνει ένα έμμεσο επιχείρημα σχετικά με το γεγονός ότι η αρχή είναι αναλυτική. Το επιχείρημα είναι έμμεσο στη δομή του. Ισχυρίζεται ότι η αρχή δεν μπορεί να είναι συνθετική, και, για τον λόγο αυτό, είναι αναλυτική.<sup>41</sup> Δηλαδή, υποστηρίζει ότι η αποδοχή της αρχής των αριθμών δεν αποτελεί ζήτημα στήριξης προσφυγής στην καντιανή χωροχρονική εποπτεία. Αντ' αυτού, η αρχή αποτελεί ένα συγκεκριμένο είδος ορισμού. Αποκαλεί την αρχή «πλαισιακή αρχή». Το επιχείρημα αφορά στη δομή της αρχής. Ας την εξετάσουμε ξανά:  $\forall F \forall G ((NF = NG) \leftrightarrow (F \approx G))$ . Σε σχέση με τη δομή, δεν αποτελεί ρητό ορισμό, επειδή η ισοδυναμία (που συμβολίζεται ως « $\equiv$ » σε κάποια κείμενα και ως « $\leftrightarrow$ » σε κάποια άλλα, και διαβάζεται ως «αν και μόνο αν») δεν αποτελεί τον μοναδικό τελεστή στη δηλωτική πρόταση. Οι ρητοί ορισμοί λαμβάνουν τη μορφή ...  $\leftrightarrow$ ..., όπου η ισοδυναμία είναι ο βασικός τελεστής. Αντ' αυτού, το ζεύγος των καθολικών ποσοδεικτών είναι οι κύριοι τελεστές. Το/τα οριζόμενο/α, βρίσκεται/βρίσκονται στα αριστερά και ο τρόπος με τον οποίο πρόκειται να κατανοήσουμε τον όρο ή τους όρους, βρίσκεται στα δεξιά. Στην αρχή των αριθμών, ο «ορισμός» διατυπώνεται εντός του πεδίου των δύο καθολικών ποσοδεικτών, οι οποίοι δίνουν το εννοιολογικό πλαίσιο στον ορισμό. Εξετάζοντας πιο προσεκτικά την αρχή και παρατηρώντας το εσωτερικό του πεδίου των ποσοδεικτών, δηλαδή, μόνο την έκφραση  $(NF = NG) \leftrightarrow (F \approx G)$ , έχουμε έναν υποψήφιο για τον ορισμό. Εξακολουθεί να μην είναι ακόμα ρητός ορισμός, επειδή τα ίδια γράμματα εμφανίζονται και στις δύο πλευρές της ισοδυναμίας, οπότε ο «ορισμός» δείχνει να είναι κυκλικός. Ο Ράιτ υποστηρίζει ότι ο ορισμός δεν είναι κυκλικός, επειδή εάν διαχωρίσουμε τις δύο συνθήκες της ισοδυναμίας, τα προκύπτοντα μέρη συνιστούν δύο πολύ διαφορετικούς ισχυρισμούς. Η κατεύθυνση  $(NF = NG) \rightarrow (F \approx G)$  αποτελεί έναν επιστημολογικό ισχυρισμό. Αν διαθέτουμε ίδιους αριθμούς οι οποίοι ανήκουν στις έννοιες  $F$  και  $G$ , τότε μπορούμε να τοποθετήσουμε τα αντικείμενα, τα οποία εμπίπτουν σε αυτές τις έννοιες, σε μία αντιστοιχία ένα προς ένα. Κατά τον τρόπο αυτό γνωρίζουμε και δικαιολογούμε, ότι ο αριθμός των  $Fs$  είναι ο ίδιος με τον αριθμό των  $Gs$ . Η αντίστροφη κατεύθυνση  $(NF = NG) \leftarrow (F \approx G)$  αποτελεί οντολογικό ισχυρισμό: αν δύο έννοιες μπορούν να τεθούν σε μία αντιστοιχία ένα προς ένα, τότε μας γνωστοποιείται ότι οι πληθικοί αριθμοί των δύο έννοιών είναι ίδιοι. Οι πληθικοί αριθμοί είναι αντικείμενα, γιατί, μεταξύ άλλων,<sup>42</sup> δηλώνουμε «ο αριθμός των  $Fs$ ». Δηλαδή, για γραμματικούς λόγους (που τυπικά αναπαρίστανται από το  $NF$ ) «ο

αριθμός» αναφέρεται σε έναν αριθμό. Αυτή η κατεύθυνση του βέλους κάνει την αρχή να έχει τη μορφή ορισμού. Η άλλη κατεύθυνση είναι αυτό το οποίο δικαιολογεί τον ισχυρισμό ότι ο ορισμός είναι αναλυτικός. Οι θεωρήσεις της ταυτότητας και της αντιστοιχίας ένα προς ένα δεν βασίζονται στη χωροχρονική εποπτεία. Είναι αμιγείς αναλυτικές έννοιες, ή κάπως έτσι εξελίσσεται το επιχείρημα. Το επιχείρημα στηρίζεται στη δομική ανάλυση της αρχής.

Δυστυχώς, αυτή η προσέγγιση αντιμετωπίζει την ακόλουθη ένσταση της «κακής συναναστροφής». Η ένσταση της «κακής συναναστροφής» προβάλλεται πιο έντονα από τον Τζορτζ Μπούλος στο άρθρο «Είναι Αναλυτική η Αρχή του Χιουμ;» (1998a).<sup>43</sup> Ο Μπούλος ονομάζει την αρχή των αριθμών «Αρχή του Χιουμ», επειδή ο Φρέγκει αναγνωρίζει πως η εισήγηση της αρχής των αριθμών είναι ανιχνεύσιμη στον Χιουμ. Η ένσταση του Μπούλος επαφίεται στο ότι δεν υπάρχει τίποτα που να υπονοεί ότι η αρχή του Χιουμ είναι αναλυτική, εκτός από την προηγηθείσα εξουκείωση με την έννοια του πληθικού αριθμού. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι υπάρχουν αρκετές αρχές που μπορούμε να προτείνουμε, οι οποίες μοιράζονται τη δομή της αρχής του Χιουμ (γνωστής και ως αρχής των αριθμών), αλλά έρχονται σε αντίθεση με αυτήν. Συνεπώς, η δομή δεν αποδεικνύεται επαρκής ώστε να ξεχωρίσει την αρχή του Χιουμ έναντι των άλλων ανταγωνιστικών αρχών που μοιράζονται την ίδια δομή. Η ορθή βάση της δευτεροβάθμιας λογικής (οι τέσσερις πρώτοι βασικοί νόμοι του Φρέγκει) γίνεται αποδεκτή μπορούμε να δεχθούμε ότι παράγει μόνο αναλυτικές αλήθειες. Ωστόσο, αν επιθυμούμε να προσθέσουμε σ' αυτό, προσαρτώντας μία αρχή με μια ορισμένη δομή, τότε θα έχουμε πολλές αντιτιθέμενες, αμοιβαίως αποκλειόμενες υποψήφιες αρχές.

Ο Μπούλος ονομάζει τις αρχές που μοιράζονται τη δομή της αρχής του Χιουμ, «αρχές αφαίρεσης». Υιοθετώντας το συγκεκριμένο λεξιλόγιο, επιθυμεί να αποστασιοποιήσει από τους ισχυρισμούς του Ράιτ περί πλαισιακών ορισμών. Η συναφής δομή είναι ότι η αρχή πρέπει να έχει δύο καθολικούς ποσοδείκτες που είναι οι βασικοί τελεστές. Εντός του πεδίου εκείνων των ποσοδεικτών έχουμε μία ισοδυναμία ως τον κύριο λογικό σύνδεσμο. Από τη μία πλευρά της ισοδυναμίας έχουμε μία ταυτότητα μεταξύ δύο πραγμάτων από την άλλη πλευρά, έχουμε μία σχέση ισοδυναμίας. Ας θυμηθούμε ότι μία σχέση είναι στην «σχέση ισοδυναμίας»<sup>7</sup> μόνο στην περίπτωση όπου υπάρχουν κάποιες όψεις, από τις οποίες οι δύο πλευρές είναι όμοιες. Δηλαδή, η αρχή μάς γνωστοποιεί πως αυτές οι όψεις είναι αρκετά ισχυρές ώστε να εκφράζουν την ταυτότητα μεταξύ των «δύο» αντικειμένων, επιδεικνύοντας πότε «αυτά» είναι στην πραγματικότητα ένα αντικείμενο. Οι αρχές αφαίρεσης συνιστούν έναν τρόπο δήλωσης σύμφωνα με αυτόν δεν χρειάζεται να ασχολούμαστε με άλλες διαφορές. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να δηλώσουμε ότι ο αριθμός 3, που παριστάνεται ως 3 και εκείνος που παριστάνεται ως 3 είναι ο ίδιος 3. Δεν μας ενδιαφέρει ποια γραμματοσειρά χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε τον 3. Ο 3 είναι ο ίδιος 3 ανεξάρτητα από το πόσες φορές πληκτρο-

<sup>7</sup> Σημ. της επιφελήτριας: η σχέση ισοδυναμίας είναι σχέση ανακλαστική, συμμετρική, μεταβατική.

λογούμε 3 ή πού πληκτρολογούμε 3 ή κατά πόσον συμβολίζουμε τον 3 με έναν καινούργιο τρόπο, για παράδειγμα,  $1 + 1 + 1$ . Η αρχή των αριθμών μας δηλώνει ότι δύο αριθμοί που ταιριάζουν στην  $F$  και την  $G$ , είναι ίδιοι μόνο σε περίπτωση που μπορούν να τεθούν σε μία αντιστοιχία ένα προς ένα.

Η αρχή αφαίρεσης που μοιράζεται την ίδια δομή με την αρχή των αριθμών, είναι ο βασικός νόμος V. Πάντως, ο Ράιτ τον αποκλείει, αφού οδηγεί σε αντίφαση. Ο βασικός νόμος V δεν μπορεί να είναι αληθής, συνεπώς δεν μπορεί να είναι αναλυτικός. Ωστόσο υπάρχουν αρχές αφαίρεσης, οι οποίες μπορούν να προστεθούν στην ορθή βάση της δευτεροβάθμιας λογικής με σκοπό την κατασκευή ενός συνεπούς τυπικού συστήματος αλλά είναι ασυνεπείς με την αρχή των αριθμών (ή την αρχή του Χιουμ). Ακολουθεί ένα παράδειγμα, το οποίο δεν χρειάζεται να μπορεί ο αναγνώστης να το κατανοήσει. Τα φιλοσοφικά μαθήματα μπορούν να καθίστανται σαφή χωρίς τις λεπτομέρειες. Εξετάστε την αρχή των ισοτιμών: η ισοτιμία της  $F$  είναι όμοια με την ισοτιμία της  $G$  αν και μόνο αν η  $F$  και η  $G$  διαφέρουν άρτια (δηλαδή, η μία μείον την άλλη να έχει ως αποτέλεσμα έναν άρτιο αριθμό). Με σύμβολα μπορούμε να γράψουμε  $\forall F \forall G ((PF = PG) \leftrightarrow E < F, G >)$ : «[Ο]ι έννοιες  $F$  και  $G$  διαφέρουν άρτια, αν ο αριθμός των αντικειμένων που εμπίπτουν στην  $F$  αλλά όχι στην  $G$ , ή στην  $G$  αλλά όχι στην  $F$  είναι άρτιος (και πεπερασμένος)» (Boolos 1998c: 214–15). Η αρχή των ισοτιμών διαθέτει δύο καθολικούς ποσοδείκτες ως τους κύριους τελεστές. Μέσα στο πεδίο των ποσοδεικτών έχουμε μία έκφραση όπου η ισοδυναμία είναι ο κύριος σύνδεσμος. Το “E” (διαβάζεται ως «διαφέρουν άρτια») είναι μία σχέση ισοδυναμίας. Όλοι οι άρτιοι αριθμοί είναι ισοδύναμοι σε σχέση με την ιδιότητα του να είναι διαιρέσιμοι δια του δύο και να έχουν ως αποτέλεσμα έναν ακέραιο αριθμό. Στην αριστερή πλευρά της ισοδυναμίας έχουμε μία ταυτότητα. Άρα, έχουμε τη σωστή δομή. Αν προσθέσουμε την αρχή των ισοτιμών στην ορθή βάση της δευτεροβάθμιας λογικής, τότε διαθέτουμε ένα συνεπές τυπικό σύστημα. Ωστόσο, η αρχή των ισοτιμών είναι μάλλον διαισθητικά παράξενη. Δηλώνει ότι όλα τα ζεύγη αριθμών τα οποία έχουν την ίδια ισοτιμία, είναι ταυτόσημα: είναι ακριβώς τα ίδια, μη διακρίσιμα. Για παράδειγμα, η ισοτιμία του 8 και η ισοτιμία του 4 είναι ταυτόσημες, η ισοτιμία του 7 και η ισοτιμία του 3 είναι ταυτόσημες. Η ισοτιμία του 35 και η ισοτιμία του 7 είναι ταυτόσημες. Κάτι τέτοιο μας κάνει αμήχανους. Οφείλεται στο γεγονός ότι η αρχή των ισοτιμών δεν είναι συμβατή με την αρχή του Χιουμ (την αρχή των αριθμών), επειδή ένα από τα θεωρήματα που μπορούμε να παραγάγουμε από αυτήν σε συνδυασμό με την ορθή βάση της δευτεροβάθμιας λογικής, είναι ότι υπάρχει μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος αριθμών (Boolos 1998b: 215). Οι άπειροι αριθμοί δεν έχουν ισοτιμίες. Θυμηθείτε ότι ένα από τα τεχνικά πλεονεκτήματα του λογικισμού έγκειται στο ότι μπορούμε να αντλήσουμε το άπειρο των φυσικών αριθμών από την αρχή των αριθμών. Και οι δύο αρχές είναι συνεπείς με τους τέσσερις πρώτους νόμους του Φρέγκε, οπότε δεν μπορούμε να αποκλείσουμε την αρχή των ισοτιμών στη βάση του ότι είναι αντιφατική και, ως εκ τούτου, ψευδής. Επί

της ουσίας της δομής και μόνο, η αρχή των αριθμών παραμένει με κακή συναναστροφή.

Το συμπέρασμα το οποίο οι Μπούλος, Ράιτ και Χέιλ συμφωνούν να εξαγάγουν από τα παραπάνω, συνίσταται στο ότι μόνο η δομή και η συνέπεια δεν αρκούν για να εγγυηθούν ότι η αρχή των αριθμών είναι αναλυτική: Θα πρέπει να υπάρξει κάτι άλλο. Η «προφάνεια» δεν κρίνεται κατάλληλη, εφόσον πρόκειται για μία ψυχολογική περιγραφή, κι αυτό που είναι προφανές σε κάποιους ανθρώπους δεν είναι προφανές σε κάποιους άλλους. Το όλο ζήτημα του λογικισμού είναι να επικυρώσουμε τη δική μας αίσθηση περί προφάνειας όσον αφορά την αρχή των αριθμών. Αντί να ακολουθήσουμε την απάντηση του Ράιτ και του Χέιλ στην ένσταση του Μπούλος περί της κακής συναναστροφής, ας στραφούμε προς μία διαφορετική απάντηση.

Ο Κέλερ (τον οποίο συναντήσαμε στο δεύτερο Κεφάλαιο) προτείνει μία ευφύή λύση, απαντώντας σε προβληματισμούς τόσο του ρεαλισμού όσο και του λογικισμού. Ας θυμηθούμε ότι ο Κέλερ (2000) δηλώνει πως υφίσταται μία «ορθολογική εποπτεία» που απαιτείται για την αναγνώριση της αλήθειας μιας λογικής αρχής. Επιπλέον, η «ορθολογική εποπτεία» δεν παραβιάζει την αναλυτικότητα. Δηλαδή, οτιδήποτε είναι αληθές σύμφωνα με την ορθολογική εποπτεία είναι αναλυτικό. Οτιδήποτε είναι αληθές για άλλους λόγους, απαιτώντας χωροχρονική εποπτεία, για παράδειγμα, ή εμπειρική παρατήρηση, είναι συνθετικό. Αυτό το σημείο μπορεί κανείς να το εκτιμήσει. Φαίνεται ότι μερικοί άνθρωποι απλώς διαθέτουν μαθηματική ενορατικότητα ή εποπτεία ενώ άλλοι δεν διαθέτουν τέτοια νοητική ικανότητα. Εκείνοι που την στερούνται είναι εκείνοι οι οποίοι απλώς δεν αποδίδουν αρκετά στις τάξεις που διδάσκονται τα μαθηματικά. Εκείνοι που διαθέτουν την εποπτεία βλέπουν τις μαθηματικές δομές, και διαθέτουν μία μεγάλη αμεσότητα αναφορικά με αυτές. Προφανώς, δεν βλέπουν τις μαθηματικές δομές με τα μάτια τους, αλλά τις βλέπουν με τα μάτια του νου τους, μέσω, όπως υποστηρίζεται, της νοητικής ικανότητας της ορθολογικής εποπτείας.

Υπάρχει ένας αριθμός ερωτημάτων που θα μπορούσαμε να θέσουμε γι' αυτήν την εποπτεία, όπως το γιατί κάποιοι άνθρωποι την διαθέτουν κι άλλοι όχι, τι χρειάζεται για να την αναπτύξει κανείς και ούτω καθεξής. Αυτά είναι σε μεγάλο βαθμό εμπειρικά και/ή ψυχολογικά, και ενδεχομένως έχουν απαντηθεί από τη γενετική επιστήμη και την επιστήμη της εξέλιξης. Αυτό που στο συγκεκριμένο σημείο είναι πιο σημαντικό για εμάς έχει να κάνει με το αν, το να υποθέτουμε μία τέτοια νοητική ικανότητα επιδοκιμάζει τον λογικισμό ή όχι. Θα συνδράμει τον λογικισμό μόνο στην περίπτωση που θα έμαστε πεπεισμένοι ότι οι αλήθειες που συλλαμβάνονται μέσω αυτής της νοητικής ικανότητας εξακολουθούν να είναι αναλυτικές. Ακολουθεί το επιχείρημα. Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι οι πεπερασμένοι ιδέα η οποία μπορεί να συλληφθεί με τη χρήση της συλλογιστικής και μόνο, είναι, ως εκ τούτου, αναλυτική, επειδή φαίνεται ότι αυτό ακριβώς σημαίνει «αναλυτική» μέσα σε αυτό το πλαίσιο. Μία αλήθεια είναι αναλυτική μόνο στην περίπτωση που είναι αληθής δυνάμει της ανάλυσης των εννοιών. Αυτό αντιτίθε-

ται στις συνθετικές αλήθειες που απαιτούν κάποιο είδος ενόρασης που σχετίζεται με τον προσανατολισμό μας μέσα στον κόσμο, και την ικανότητά μας να πλοηγούμε σε αυτόν τον φυσικό κόσμο. Επομένως, η αρχή των αριθμών φαίνεται πως είναι αναλυτική με τον ορθό τρόπο. Η αρχή των αριθμών αναλύει την αντίληψή μας για τον πληθυκό αριθμό. Δεν είναι αληθής μέσω της αίσθησης και δεν βασίζεται στη χωρική και τη χρονική εποπτεία, όπως θεωρούσε ο Καντ.

Ωστόσο, τώρα αντιμετωπίζουμε ένα άλλο πρόβλημα. Το πρόβλημα με αυτήν την άποψη σχετίζεται με μερικά από τα άλλα ερωτήματα γι' αυτήν την εποπτεία. Ας θυμηθούμε ότι οι Ράιτ και Χέιλ προσπαθούσαν να επιχειρηματολογήσουν ότι θα έπρεπε να έχουμε τη δυνατότητα της εξουκείωσης με την έννοια του αριθμού, μέσω της έκθεσης στην αρχή των αριθμών, και ότι η αρχή δεν θα έπρεπε να αποκρίνεται σε κάποια προγενέστερη διαίσθηση ή έννοια. Ο Κέλερ φαίνεται να υποστηρίζει ότι αποκτούμε την έννοια του αριθμού μέσω αυτής της ορθολογικής εποπτείας, κι αυτό είναι ό,τι ακριβώς θα δικαιολογούσε την αρχή των αριθμών ως αναλυτική.<sup>44</sup> Ο Κέλερ επίσης αντιμετωπίζει την ένσταση της κακής συναναστροφής που προέβαλε ο Μπούλος. Η ορθολογική εποπτεία θα μπορούσε να δικαιολογήσει την αρχή των αριθμών, δεν είναι όμως σαφές ότι μπορεί να αποκλείσει την αρχή των ισοτιμών. Για να συμβεί αυτό, θα έπρεπε να ισχυριστούμε ότι το άπειρο των φυσικών αριθμών είναι αληθές λόγω της ορθολογικής εποπτείας και αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο επιλέγουμε την αρχή των αριθμών αντί της αρχής των ισοτιμών. Εντούτοις, το συγκεκριμένο επιχείρημα αντιπαρέρχεται το ερώτημα: χρειαζόμαστε την αρχή των αριθμών, προκειμένου να αποδείξουμε το άπειρο των φυσικών αριθμών.

Το πρόβλημα γίνεται εξαιρετικά βαθύ σε σημαντικό βαθμό, καθώς υπάρχουν αντικρουόμενες απόψεις σχετικά με το ποια είναι η «ορθή» λογική, με την έννοια μίας λογικής η οποία είναι κανονιστική για το σύνολο της συλλογιστικής ή της ορθολογικότητας. Δηλαδή, ακόμα και αν αποδεχθούμε την έννοια της ορθολογικής εποπτείας, υφίσταται μία διένεξη για το ποια είναι η ορθή ή η σωστή ορθολογικότητα και/ή συλλογιστική διαίσθηση. Υπάρχει ένας αριθμός τυπικών αναπαραστάσεων της συλλογιστικής. Μερικές αναπαραστάσεις διαφέρουν μεταξύ τους βάσει του αντικειμένου ενδιαφέροντος της ξεχωριστής θεώρησης τους. Για παράδειγμα, η λογική με τους χρονικούς τελεστές έχει ειδικά σχεδιαστεί για να αντιμετωπίζει γεγονότα που συμβαίνουν στον χρόνο. Ένα ακόμα παράδειγμα παραθέτει η ελεύθερη λογική, η οποία έχει ειδικά σχεδιαστεί για να βοηθά στην οργάνωση της συλλογιστικής μας σχετικά με τα φανταστικά αντικείμενα, ή τα ανύπαρκτα αντικείμενα κάποιου είδους. Υπάρχουν επίσης τυπικά συστήματα συλλογιστικής που μπορούν να συνδυάζουν περισσότερα από ένα από αυτά τα χαρακτηριστικά.

Το πρόβλημα διαθέτει ένα ευρύ πεδίο εμβέλειας, αφού σε κάθε μία από αυτές τις περιοχές των ειδικά προσαρμοσμένων λογικών, υπάρχουν αρκετές τυπικές αναπαραστάσεις, μία για τον κάθε συνδυασμό αξιωμάτων. Έτσι, για παράδειγμα, υπάρχουν αρκετές τροπικές λογικές, αρκετές χρονικές λογικές και αρκετές ελεύθερες λογικές. Το πρόβλημα εναπόκειται στο ότι πρέπει να επιλέξουμε μία χρονι-

κή λογική έναντι των άλλων ως κανονιστική της συλλογιστικής μας επί των χρονικών πλαισίων. Ακόμα χειρότερα, μερικά ζεύγη των τυπικών συστημάτων είναι αντιφατικά μεταξύ τους, κατά συνέπεια δεν είναι δυνατό να συνδυαστούν. Πρόκειται για αυτό με το οποίο ήρθαμε αντιμέτωποι κατά την εξέταση της αρχής των αριθμών και της αρχής των ισοτιμών. Δεν μπορούμε να τις προσθέσουμε αμφότερες στους τέσσερις πρώτους νόμους του Φρέγκε, επειδή θα καταλήγαμε σε μία αντίφαση: ότι το πλήθος των πληθυκών αριθμών είναι και άπειρο και πεπερασμένο. Αυτό το πρόβλημα επίσης αντιμετωπίζεται σε ένα πολύ πιο θεμελιώδες επίπεδο. Δεν είναι δυνατό να συμφωνούμε για όλα τα είδη των επεκτάσεων των τεσσάρων πρώτων νόμων του Φρέγκε.

Ακόμη χειρότερα, ακόμα και οι τέσσερις πρώτοι νόμοι διατρέχουν κίνδυνο, εφόσον είναι βασικοί νόμοι για τη δημιουργία αυτού το οποίο ονομάζουμε «κλασικό» σύστημα της λογικής. Ό,τι κανονικά διδασκόμαστε στο πρώτο μάθημα λογικής είναι η κλασική προτασιακή λογική και η κλασική πρωτοβάθμια λογική. Δεν υπάρχουν μη-κλασικές προτασιακές λογικές και μη-κλασικές πρωτοβάθμιες λογικές, μη-κλασικές δευτεροβάθμιες λογικές και ούτω καθεξής. Αυτό το οποίο καθιστά μία λογική μη-κλασική είναι το γεγονός ότι διαφωνεί με ένα ή περισσότερα από τα κλασικά αξιώματα.<sup>45</sup> Θα διερευνήσουμε μία από αυτές τις μη-κλασικές λογικές στο πέμπτο Κεφάλαιο.

## 8. Συμπέρασμα

Προσπερνάμε τη λογικιστική φιλοσοφία. Αυτό το οποίο είναι κεντρικής σημασίας στον λογικισμό είναι η ιδέα ότι το σύνολο, ή μέρος των μαθηματικών είναι κατ' ουσίαν λογική. Πρόκειται για κάτι το οποίο τιμιάζει απολύτως με τη δική μας αίσθηση της γνωσιακής ιεραρχίας, όπου η λογική εμφανίζεται στην κορυφή. Η λογική δεν θεωρείται απλώς ως ένας κλάδος των μαθηματικών, αλλά ως αυτή η οποία θέτει τον κανόνα για την ορθολογικότητα. Η λογική είναι καθολική, υπό την έννοια ότι είναι εφαρμόσιμη σε οποιαδήποτε περιοχή μελέτης κατά έναν μη μεταφορικό τρόπο. Η λογική είναι άμεσα εφαρμόσιμη μπορούμε πάντοτε να προσφεύγουμε στη λογική. Επιπρόσθετα, η λογική δεν αφορά σε οτιδήποτε συγκεκριμένο απεναντίας, οργανώνει τη συλλογιστική. Για να υποστηρίξουμε τον λογικισμό, χρειάζεται αρχικά να παρουσιάσουμε μία λογική. Η λογική θα πρέπει να δικαιολογηθεί με βάση το γεγονός ότι καταλαμβάνει την προνομιακή θέση στη γνωσιακή μας ιεραρχία. Στη συνέχεια, θα πρέπει να αναγάγουμε ένα μέρος ή το σύνολο των μαθηματικών σε αυτήν τη λογική.

Οι τρεις ομάδες του λογικισμού, για τις οποίες έχουμε συζητήσει, είναι ο Φρέγκε, οι Ουάιτχεντ και Ράσελ, και οι νεο-Φρεγκεανοί. Η προσπάθεια του Φρέγκε στην κατάδειξη του λογικισμού απέτυχε, εξαιτίας της ανακάλυψης του παραδόξου στο τυπικό λογικό του σύστημα. Κάτι τέτοιο μας γνωστοποιεί ότι το σύστημα δεν μπορούσε κατά έναν εφικτό τρόπο να συνιστά λογική, εφόσον η λογική θα πρέπει να είναι τουλάχιστον συνεπής (υπό τις κλασικές έννοιες της λογικής). Η προσπάθεια των Ουάιτχεντ και Ράσελ να καταδείξουν τον λογικισμό ήταν περισσότερο φιλόδοξη από εκείνη του Φρέγκε. Ήθελαν να δείξουν ότι το σύνολο των μαθηματικών, όχι μόνο η αριθμητική και η ανάλυση, είναι στην πραγματικότητα λογική. Απέτυχαν, επειδή μερικά από τα αξιώματα του συστήματός τους είναι αναμφισβήτητα μη λογικές αρχές με τη συναφή φιλοσοφική σημασία. Οι νεο-Φρεγκεανοί δοκιμάζουν να επιδιορθώσουν την κατάδειξη του Φρέγκε με τον καθορισμό της υποκείμενης λογικής, ωστόσο, ακόμα και για να αναγάγουν την αριθμητική στη λογική, χρειάζονται την αρχή των αριθμών. Αποδεικνύεται ότι υφίσταται μία διένεξη, η οποία μπορεί να διεξάγεται σε βάθος σχετικά με το κατά πόσο η αρχή αυτή αποτελεί αρχή της λογικής ή όχι.<sup>46</sup> Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε, η μελέτη του λογικισμού είναι ελκυστική, και εξακολουθεί να υπάρχει μεγάλο μέρος ενός συναρπαστικού έργου προς διεκπεραίωση.

## 9. Σύνοψη

Τα κύρια σημεία τα οποία θα πρέπει να συγκρατήσουμε από το παρόν κεφάλαιο, είναι:

- Ο λογικισμός είναι μία φιλοσοφική θέση η οποία ισχυρίζεται ότι μέρος ή το σύνολο των μαθηματικών είναι κατ' ουσίαν λογική.
- Η σημασία του λογικισμού έγκειται στο ότι αποδίδεται ιδιαίτερη θέση στη λογική μέσα στην επιστημολογία μας, επομένως ο λογικισμός αποπειράται να απαντήσει στους επιστημολογικούς γρίφους που ανακύπτουν έναντι του πλατωνισμού.
- Οι λογικιστικές φιλοσοφίες έχουν αναπτυχθεί πολύ λεπτομερώς και είναι αρκετά εξελιγμένες.
- Ο λογικισμός του Φρέγκε είναι μέτριος: αναγωγή της αριθμητικής και της ανάλυσης στη λογική. Ο Φρέγκε συνέβαλε σε τεράστιο βαθμό στο πεδίο της λογικής, ωστόσο η λογική του ήταν ελαττωματική εξαιτίας της ασυνέπειας.
- Οι Ουάιτχεντ και Ράσελ προσπάθησαν να αναγάγουν το σύνολο των μαθηματικών στη λογική. Απέτυχαν, επειδή η προτεινόμενη από αυτούς «λογική» –η θεωρία των τύπων– δεν φαίνεται να είναι λογική με τη φιλοσοφική σημασία.
- Οι Χέηλ και Ράιτ έχουν πρόσφατα υποστηρίξει έναν νεο-λογικισμό, κι αυτός όμως περιστοιχίζεται από προβλήματα τα οποία αφορούν στην αναλυτικότητα της αρχής των αριθμών η οποία υποτίθεται ότι πρέπει να είναι λογική αρχή.