

Διονύσιος Α. Αναπολιτάνος

ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΕΣ ΕΞΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ,  
ΑΦΗΓΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΧΗΜΑΤΑ

*23 κείμενα φιλοσοφίας*

ΕΚΚΡΕΜΕΣ

σα, περιγράφεται, αλλά και λαμβάνει χώρα, όλη η παραπάνω δραστηριότητα. Απλώς δεν συνειδητοποιείται πλήρως ότι στην περιγράφουσα γλώσσα προϋποτίθενται και ενυπάρχουν ήδη όλα τα εργαλεία που έγιναν απτά και συνειδητοποιήθηκαν ως επίσης υπάρχοντα στο επίπεδο της γλώσσας-αντικείμενο. Η θεωρία των συνόλων με την συσσωρευτική της ιεραρχία αποτελεί μία αυστηρή συστηματοποίηση οντοτήτων και πρακτικών, που ήδη υπάρχουν και χρησιμοποιούνται στην φυσική μας γλώσσα.

ΑΠΕΙΡΟΣΤΑ: ΕΙΣΑΓΩΓΗ, ΕΞΟΒΕΛΙΣΜΟΣ  
ΚΑΙ ΠΑΛΙΝΟΡΘΩΣΗ ΤΟΥΣ

Η εισαγωγή απειροστών μεγεθών στα μαθηματικά, όπου και όποτε επιχειρήθηκε, γνωρίζουμε πλέον ότι σχετίζοταν με την ανάγκη δημιουργίας ενός λογισμού ο οποίος θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στην επίλυση προβλημάτων αναφερόμενων στην έννοια του ορίου. Τέτοια προβλήματα είναι απολύτως συνδεδεμένα με τις δύο βασικές ανάγκες, που, τουλάχιστον ως προς την εννοιολογική και υπολογιστική δομή τους (η οποία απαιτείται για την ικανοποίησή τους), συνδέονται με την μεταβολή και ιδιαίτερα με την στιγμιαία μεταβολή και την άπειρη άθροιση. Η πρώτη βασική ανάγκη έχει να κάνει με την μαθηματική εννοιολογική καθυπόταξη του ρυθμού μεταβολής (της «ταχύτητας», δηλαδή) και η δεύτερη με την αντίστοιχη υπολογιστική τιθάσευση εμβαδών και όγκων μέσω διαδικασιών άπειρης άθροισης στοιχειωδών εμβαδών και όγκων. Είναι, λοιπόν, η πρώτη συνδεδεμένη με αυτό που καλούμε παραγώγηση (ή διαφόριση) και η δεύτερη με αυτό που καλούμε ολοκλήρωση.

Για τους αρχαίους, τα κεντρικά προβλήματα ήταν κατ' εξοχήν αυτά του υπολογισμού εμβαδών και όγκων συγκεκριμένων γεωμετρικών σχημάτων ή στερεών, και όχι τόσο αυτά της εύρεσης ρυθμών μεταβολής. Προς την κατεύθυνση αυτή, οι Αρχαίοι Έλληνες δεν χρησιμοποίησαν απειροστά κατά τρόπο συνειδητό για τον υπολογισμό τέτοιων εμβαδών ή όγκων. Η βασική αποδεικτική τους μέθοδος ήταν αυτή της εξάντλησης, τα θεμελιωδέστερα χαρακτηριστικά της οποίας ήταν τα ακόλουθα:

- (α) Ως χρηστική αποδεικτική μέθοδος εμπεριείχε μια διπλή απαγωγή εις άτοπον.
- (β) Συνήθως οδηγούσε στην απόδειξη ότι συγκεκριμένα εμβαδά ή όγκοι ικανοποιούσαν κάποιες εκ των προτέρων δεδομένες σχέσεις, οι οποίες μπορούσαν να έχουν προκύψει με την χρήση άλλων εμπει-

ρικότερων και διασθητικότερων μεθόδων, όπως, επί παραδείγματι, της μηχανικής μεθόδου του Αρχιμήδους.

- (γ) Επειδή η προς απόδειξη σχέση ήταν, κατά κάποιον τρόπο, ήδη γνωστή, δεν ήταν απαραίτητη κάποια αρχή πληρότητας (την οποία άλλωστε δεν διέθεταν) με την μορφή της ύπαρξης ορίου τυχούσης προσέγγισης.
- (δ) Στα πλαίσια της μεθόδου και στο ουσιαδέστερο συνήθως σημείο εφαρμογής της, γινόταν χρήση του γνωστού άξιώματος Αρχιμήδους-Ευδόξου στην δυϊκή απειροστική του μορφή, σύμφωνα με την οποία, δεδομένου ενός τυχόντος  $\epsilon > 0$ , υπάρχει φυσικός αριθμός  $n$  τέτοιος ώστε  $\epsilon > 1/n$ .
- (ε) Η χρήση της μεθόδου αφορούσε στην λύση εντελώς συγκεκριμένων προβλημάτων εύρεσης εμβαδών ή όγκων για τον πρόσθετο λόγο ότι η γενική έννοια της συνάρτησης δεν ανήκε στο εννοιολογικό οπλοστάσιο των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών.

Η μέθοδος της εξάντλησης, θεωρούμενη από τον Αρχιμήδη ως η κατ' εξοχήν αυστηρή γεωμετρική μέθοδος απόδειξης, δεν απαιτεί στην εφαρμογή της την χρήση απειροστών. Προσεκτική μελέτη της αποδεικνύει ότι είναι συγγενέστερη προς μεθόδους που σχετίζονται με ε-δ τεχνικές, με τις οποίες, ως γνωστόν, εισάγεται η έννοια του ορίου χωρίς να προϋποτίθεται η αποδοχή ύπαρξης και χρήσης απειροστών.

Παρά ταύτα και υπό μία συγκεκριμένη έννοια θα μπορούσε να ισχυρισθεί κανείς ότι γινόταν κάποια χρήση απειροστών στην αρχαιότητα. Επί παραδείγματι, είναι γνωστό ότι ο Αρχιμήδης κατά την χρήση της μηχανικής μεθόδου του στον υπολογισμό του όγκου σφαιράς χρησιμοποιεί απειροστές τομές κυλίνδρου, σφαιράς και κώνου. Επίσης, κατά τον Σιμπλίκιο, ο σοφιστής Αντιφών θεωρούσε τον κύκλο ως πολύγωνο με έναν απειρότερα μεγάλο αριθμό εξαιρετικά μικρών πλευρών, οι οποίες έκειντο, κυριολεκτικά, στην περιφέρεια, ως ένα είδος απειροστών. Φαίνεται ότι ο Αντιφών επηρεάστηκε από τον σοφιστή Πρωταγόρα, ο οποίος, σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, πίστευε ότι η περιφέρεια δεν εγγίζει μια τυχούσα εφαπτομένη της σε ένα σημείο, αλλά κατά μήκος ενός στοιχειώδους τμήματός της, ορισμένου αλλά απειροστού μήκους.

Οι παραπάνω επισημάνσεις δεν σημαίνουν την νιοθέτηση της θέσης ότι οι αρχαίοι δέχονταν γενικά την ύπαρξη απειροστών μεγεθών. Κάτι τέτοιο, άλλωστε, θα παραβίαζε τις εξής δύο βασικές αρχές τους: (α) Δεν υπάρχει ευθεία οποιουδήποτε μεγέθους που να συμπίπτει με τμήμα καμπύλης. (β) Κάθε ευθύγραμμο τμήμα είναι άπειρα διαιρέσιμο και, επομένως, η ύπαρξη μη περαιτέρω διαιρέσιμων απειροστά μικρών ευθύγραμμων τμημάτων θα

πρέπει να αποκλεισθεί ως μη δυνατή. Η δεύτερη αρχή, βεβαίως, δεν αποκλείει εντελώς την ύπαρξη απειροστών ευθύγραμμων τμημάτων. Ωστόσο θα πρέπει να τονισθεί ότι για τους αρχαίους ένα απειροστό μέγεθος θα έπρεπε να είχε, ως βασική ιδιότητά του, την μη περαιτέρω διαιρεσιμότητά του, δεδομένου ότι αυτοί δεν φαίνεται να διέκριναν μεταξύ απειροστών διαφορετικού μεγέθους.

Κατά τον Μεσαίωνα και ιδιαίτερα τους υστερομεσαιωνικούς χρόνους, η συζήτηση γύρω από την δομή του συνεχούς και την ύστατη φύση των δομικών του λίθων υπήρξε εξαιρετικά έντονη. Η φιλοσοφική συζήτηση γύρω από το αν οι λίθοι αυτοί ήταν αδιάστατες οντότητες ή οντότητες απειροστά μικρές, μη περαιτέρω διαιρέσιμες, συμβάδιζε με τα νέα μαθηματικά επιτεύγματα, τα οποία, κυρίως, στρέφονταν γύρω από τον υπολογισμό απειρών αθροισμάτων. Οι αιώνες που ακολούθησαν υπήρξαν εξαιρετικά γόνιμοι και οδήγησαν στην κορύφωση που συναντούμε στον 17ο αιώνα. Οι Newton και Leibniz και, κατά πολλούς, πριν από αυτούς ο Barrow αναγνωρίζουν την αντίστροφη φύση διαφόρισης και ολοκλήρωσης, θέτοντας τις βάσεις για την θεμελίωση του απειροστικού λογισμού. Γ' αυτήν την θεμελίωση χρησιμοποιείται σε μεγάλη έκταση με την μία ή την άλλη μορφή η έννοια του απειροστού.

Ο Newton αναπτύσσει και χρησιμοποιεί έναν λογισμό τον οποίον ονομάζει μέθοδο των *fluxions*. Με την ορολογία που εισάγει, δίνει έμφαση στην ροή και γενικότερα στην μεταβολή, πράγμα που εξηγείται από το γεγονός ότι, ως φυσικός, αντιλαμβανόταν τα προβλήματα εύρεσης ορίων ως προβλήματα δυναμικά. Στο έργο του *Methodus fluxiorum et serierum infinitarum* διατυπώνει το εξής πρόβλημα: Δεδομένων των *fluents* και των σχέσεων τους, να βρεθούν οι σχέσεις μεταξύ των *fluxions* τους και αντίστροφα, όπου οι όροι *fluent* και *fluxion* μπορούν να μεταφερθούν στα ελληνικά ως «ρέον» και «ρυθμός μεταβολής ρέοντος» αντίστοιχα. Θεωρούντες ως ρέοντα ποσότητες που παρίστανται με τις μεταβλητές  $x$ ,  $y$  και  $z$  των *fluxions* τους τα  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  και χρησιμοποιώντας το σύμβολο  $0$  για να παριστά ένα απειροστά μικρό διάστημα χρόνου, ο Newton υπολόγιζε, ότι θα καλούσαμε σήμερα παράγωγο του  $y$  ως προς  $x$ , ως  $\dot{y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$ . Στην συνέχεια αναπτύσσουμε το διώνυμο, απλοποιούμε διαγράφοντας τα  $y$  και  $x^n$ , διαιρούμε με το απειροστά μικρό διάστημα του χρόνου  $0$ , αγνοούμε τους όρους που συνεχίζουν να περιέχουν το  $0$  και καταλήγουμε στην  $\dot{y} = nx^{n-1} \cdot \dot{x}$  ή στην  $\dot{y}/\dot{x} = nx^{n-1}$ . Θα πρέπει να τονισθεί ότι ο Newton δεν εξηγούσε γιατί θα έπρεπε να αγνοούνται οι όροι που συνεχίζουν να περιέχουν το  $0$ . Στην κατοπινή του δουλειά και μέσω της μεθόδου των *prime and ultimate ratios*

που εισήγαγε στο έργο του *Quadratura Curvarum*, προσπάθησε να λύσει αυτό το πρόβλημα εγκαταλείποντας κατά κάποιον τρόπο την έννοια των απειροστά μικρών ποσοτήτων, γιατί «... δεν πρέπει να θεωρούνται αμελητέα και τα παραμικρότερα λάθη στα μαθηματικά»,<sup>1</sup> υποστηρίζοντας συγχρόνως ότι:

... στα πλαίσια της μεθόδου των *fluxions* δεν υπάρχει αναγκαιότητα εισαγωγής στην γεωμετρία απειροστά μικρών σχημάτων. Παρά ταντα η ανάλυση μπορεί να λάβει χώρα σε οποιοδήποτε είδος σχημάτων, είτε πεπερασμένων είτε απειροστά μικρών.<sup>2</sup>

Ο Leibniz, παρ' ότι δεν δεχόταν την ύπαρξη χωροχρονικά προσδιορισμένων απειροστών οντοτήτων, θεωρούσε ότι τα απειροστά για τα μαθηματικά ήταν χρήσιμα φαντασιώδη κατασκευάσματα του νου. Για να βρει, επί παραδείγματι, τον ρυθμό μεταβολής μιας ποσότητας  $y$ , που ως συνάρτηση του  $x$  δίδεται από τον τύπο  $y=x^2$ , θεωρούσε τις αντίστοιχες απειροστικές μεταβολές των  $x$  και  $y$ ,  $dy$  και  $dx$ , και εργαζόταν ως εξής: Έθετε  $y+dy=(x+dx)^2$ . Ανέπτυσσε το  $(x+dx)^2$  και είχε  $y+dy=x^2+2xdx+(dx)^2$ . Απλοποιούσε και διαιρούσε με το  $dx$ , και, τέλος, αγνοούσε τον όρο που εξακολουθούσε να περιέχει το  $dx$ , ως εξαιρετικά μικρότερον του όρου  $2x$ , παίρνοντας το σωστό αποτέλεσμα:  $dy/dx=2x$ .

Στο σημείο αυτό απαιτούνται κάποιες παρατηρήσεις προς την κατεύθυνση της σύγκρισης των προσεγγίσεων των Newton και Leibniz. Η χρησιμοποιούμενη από τον Newton ιδέα φαίνεται να είναι αυτή της ροής για την τιθάσευση της στιγμαίας μεταβολής  $\dot{x}$ , μάλλον καλύτερα, του ρυθμού μεταβολής, όπως ήδη ελέχθη. Χρησιμοποιείται ο όρος *fluent* για τις ρέουσες οντότητες, που αντιπροσωπεύουν οι μεταβλητές  $x$  και  $y$ , και ο όρος *fluxion* για τις στοιχειώδεις μονάδες μεταβολής αυτών των ρεουσών οντοτήτων. Δεν φαίνεται να χρησιμοποιεί ο Newton την έννοια του απειροστού με στατικό τρόπο, αλλά την έννοια της απειροστικής μεταβολής, καθώς συνδέει τα *fluxions* με απειροστικές χρονικές διάρκειες. Η μέθοδός του έχει δυναμικό χαρακτήρα, κάτι, όπως ήδη ανεφέρθη, μάλλον αναμενόμενο από έναν διανοητή που έβλεπε τον κόσμο (αισθητό και νοητό) με τα μάτια του φυσικού.

Από την άλλη μεριά, η προσέγγιση του Leibniz φαίνεται να έχει στατικό χαρακτήρα, δεδομένου ότι χρησιμοποιούνται τα απειροστά του με τρόπο τελεστικά στατικό. Τι εννοούμε με αυτήν την διατύπωση; Ο Leibniz θεω-

ρούμε ότι αντιμετωπίζει την διαφόριση (παραγώγιση) με αλγεβρικό τρόπο, που υποκρύπτει μια νοητική σταθεροποίηση του ρέοντος. Χειρίζεται τα απειροστά του, τα οποία συμβολίζει με  $dx$ ,  $dy$ ,  $dt$ , ως παράγοντες εντός ενός πραξιακού αλγεβρικού πλαισίου, το οποίο είναι σχεδόν αδιάφορο σε έννοιες ροής ή μεταβολής, επιτρέποντας πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις απειροστών αντίστοιχες αυτών μεταξύ πραγματικών αριθμών. Βέβαια και αυτή η προσέγγιση αντιμετωπίζει το πρόβλημα, που, όπως θα δούμε παρακάτω, επεσήμανε ο «καλός επίσκοπος» George Berkeley, σύμφωνα με το οποίο στην κατά Leibniz διαδικασία εύρεσης της παραγώγου  $dy/dx$  καταλήγουμε να διαιρούμε με κάτι που έχει τις ιδιότητες του μηδενός. Η αλγεβρικής έμπνευσης προσέγγιση του Leibniz υπερίσχυσε αυτής του Newton (παρ' ότι ουσιαστικά ισοδύναμη της), όπως, μάλλον, πιστοποιείται και από το γεγονός ότι ο μέχρι σήμερα χρησιμοποιούμενος συμβολισμός για το διαφορικό  $dx$ ,  $dy$ , την παραγώγο  $dy/dx$  και το ολοκλήρωμα  $\int f(x)dx$  οφείλονται στον Leibniz, με το βασικό σύμβολο της ολοκλήρωσης να αποτελεί εκδοχή του γράμματος  $S$ , αρχικού του λατινικού όρου που αφορά στην άθροιση. Στο σημείο αυτό, θα πρέπει να επισημανθεί ότι ο Leibniz θεωρούσε τα απειροστά, όπως ήδη ελέχθη, χρήσιμα φαντασιώδη κατασκευάσματα του νου, τα οποία δεν έχουν υπαρκτικό αντίκρυσμα στον κόσμο μας.

Όσον αφορά στα απειροστά, μου φαίνεται ότι όχι μόνον δεν μπορούμε να εισδύσουμε σ' αυτά, αλλά δεν υπάρχουν στην φύση, δηλαδή δεν είναι δυνατά. Αλλωστε, όπως έχω ήδη πει, δέχομαι ότι αν μπορούσα να συνομολογήσω την δυνατότητα ύπαρξής τους θα συνομολογούσα [θα αποδεχόμουν]<sup>3</sup> την ύπαρξή τους.<sup>4</sup>

Το είδος λογισμού που εισήγαγαν οι Newton και Leibniz απέκτησε στους αιώνες που ακολούθησαν φανατικούς φίλους και φανατικούς εχθρούς. Οι φανατικοί φίλοι χρησιμοποιούσαν, ως βασικό τους επιχείρημα, την εξαιρετική αποτελεσματικότητα της μεθόδου, οι εχθροί αντιπαρέθεταν σ' αυτήν την αποτελεσματικότητα την ασάφεια και αντιφατικότητα της έννοιας του απειροστού. Είναι γνωστή η επίθεση του «καλού επισκόπου» Berkeley εναντίον και του Newton και του Leibniz, ο θεμελιώδης πυρήνας της οποίας συνίστατο στην διαπίστωση ότι, κατά τον υπολογισμό ρυθμών μεταβολής, διαιρεί κανές τις ανακύπτουσες ποσότητες με κάτι που έχει τις ιδιότητες του μηδενός.

Ας δούμε ξανά το παράδειγμα της κατά Leibniz παραγώγισης της συ-

1. Βλ. F. Cajori, *A History of the Concept of the Limit and Fluxions in Great Britain (from Newton to Woodhouse)*, Chicago and London 1919, σ. 23.

2. Στο *Idem*, σ. 24.

3. Προσθήκη δική μου.

4. Βλ. L. E. Loemker (επιμ.), *Gottfried Wilhelm Leibniz. Philosophical Papers and Letters*, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, Boston, London 1976, σ. 511.

νάρτησης  $y=x^2$ . Θεωρώντας τις απειροστικές μεταβολές των  $x$  και  $y$ , δηλαδή τα απειροστά  $dx$  και  $dy$ , μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι μια μετάβαση από το  $x$  στο  $x+dx$  συνοδεύεται από μια μετάβαση από το  $y$  στο  $y+dy$ . Έτοιμο προσφύγουμε την ισότητα  $y+dy=(x+dx)^2$ . Εκτελώντας τις σημειούμενες πράξεις, οδηγούμαστε στην ισότητα  $y+dy=x^2+2xdx+(dx)^2$ . Απλοποιώντας τα  $y$  και  $x^2$  έχουμε  $dy=2xdx+(dx)^2$ . Διαιρώντας αμφότερα τα μέλη της προκύψασας ισότητας με το  $dx$ , λαμβάνουμε  $dy/dx=2x+dx$ . Θεωρώντας ότι το  $dx$ , ως απειροστό, δεν επηρεάζει ουσιωδώς το  $2x$ , καταλήγουμε, παραλείποντάς το, στην τελική ισότητα  $dy/dx=2x$ , που μας δίνει την παράγωγο της συνάρτησης  $y=x^2$ . Η κριτική του George Berkeley συνίστατο στην επισήμανση του αντιφατικού γεγονότος ότι, παραλείποντάς το  $dx$  στην τελευταία ισότητα, αποδίδουμε σ' αυτό ιδιότητες του μηδενός, περίπου ταυτίζοντάς το με το μηδέν, ενώ προηγουμένως είχαμε προχωρήσει σε διαίρεση με αυτό, κάτι που απαγορεύεται, αν αυτό με το οποίο διαιρούμε έχει τα χαρακτηριστικά του μηδενός.

Η ανάγκη για ισχυρή θωράκιση και θεμελίωση του απειροστικού λογισμού παρέμεινε ανοικτή υπόθεση μέχρι και τον 19ο αιώνα. Τότε, μέσα από τις εργασίες των Cauchy, Riemann, Weierstrass, Dedekind και Cantor και την εισαγωγή των ε-δ τεχνικών, η έννοια του απειροστού εγκαταλείφθηκε οριστικά ως χρήσιμη μεν αντιφατική δε.

Η οριστική αυτή εγκατάλειψη, όπως θα δούμε, δεν εσήμανε το τέλος των προσπαθειών για την αποκάθαρσή της από το στίγμα της αντιφατικότητας. Παρά ταύτα και παρά την σε άλλο εννοιολογικό πλαίσιο παλινόρθωσή τους, ποτέ πλέον δεν χρησιμοποιήθηκαν τα απειροστά, ως η βασική και κυριαρχούσα αντίληψη για την τιθάσευση των εννοιών της συσσώρευσης και της σύγκλισης. Μέσω της εισαγωγής των ε-δ τεχνικών κατέστη δυνατή η οριστική θεμελίωση της πραγματικής ευθείας με την αξιωματικά κατοχυρωμένη ισοδυναμία των παραπάνω εννοιών. Εννοούμε, με τον ισχυρισμό αυτό, το αξιωματικό γεγονός της ισοδυναμίας τους μέσω της θεμελιώδους πρότασης ότι κάθε βασική ακολουθία (ή ακολουθία Cauchy, όπως άλλις λέγεται) είναι συγκλίνουσα. Το αντίστροφο αυτής της πρότασης είναι αποδεικτικά τετριμένο, με την έννοια ότι είναι σχεδόν αποδεικτικά προφανές ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι βασική. Το ρηξικέλευθα νέο είναι το γεγονός της αξιωματικής αποδοχής της θέσης ότι κάθε συσσώρευση σημείων της πραγματικής ευθείας λαμβάνει χώρα όχι γύρω από κάποια μυστηριώδη οπή, αλλά γύρω από κάποιο σημείο της ευθείας, που αποτελεί το σημείο σύγκλισης των συσσωρευομένων ολόγυρά του σημείων της. Η προσέγγιση αυτή οδήγησε στην κυριαρχούσα πλέον σήμερα αντιμετώπιση των εννοιών του διαφορικού, της παραγώγου και του ολοκληρώματος, που

αναγνωρίζονται ως οι κυρίαρχοι θεμέλιοι λίθοι της περιοχής του λεγομένου «απειροστικού λογισμού», μέσω, όχι της έννοιας του απειροστού, αλλά της έννοιας του ορίου. Η έννοια του απειροστού, έχοντας πέσει σε ανυποληφία για πάνω από 100 χρόνια, φάνταζε ως ιδέα-δεινόσαυρος, κατάλληλη πια μόνον για το μουσείο ιστορίας της ανθρώπινης σκέψης. Και θα παρέμενε εκεί, αν ο Abraham Robinson, γύρω στα 1961, δεν ανέπτυσσε μια μέθοδο κατασκευής μιας μη αρχιμήδειας επέκτασης της πραγματικής ευθείας.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να εξηγήσουμε τι εννοούμε με την φράση «μη αρχιμήδεια επέκταση της πραγματικής ευθείας». Όπως θα δούμε λιγάκι παρακάτω, η πραγματική ευθεία μπορεί να επεκταθεί με την προσθήκη απειροστών και απειρών στοιχείων, έτσι ώστε να μην ισχύει το αξιώμα Αρχιμήδους-Ευδόξου, σύμφωνα με το οποίο, δεδομένου ενός πραγματικού αριθμού  $x$  και ενός θετικού πραγματικού αριθμού  $y$ , υπάρχει φυσικός αριθμός  $n$  τέτοιος ώστε  $x < ny$ . Κάτι τέτοιο είναι δυνατόν, διότι στην συγκεκριμένη επέκταση θα υπάρχουν αριθμοί απειροστικού μεγέθους πέριξ του μηδενός, τέτοιοι ώστε αν  $x$  είναι ένας τυχών πραγματικός αριθμός (κατά προτίμηθη θετικός) και  $y$  είναι ένας θετικός αριθμός απειροστικού μεγέθους, τότε δεν υπάρχει φυσικός αριθμός  $n$  τέτοιος ώστε  $x < ny$ . Δηλαδή, χρησιμοποιώντας μία γλώσσα λογοτεχνίουσα, δεν θα υπάρχει αρχιμήδεια γέφυρα μεταξύ των δεδομένων αριθμών  $x$  και  $y$ . Η επέκταση αυτή είχε μεν, κατά κάποιον τρόπο, τις ίδιες ιδιότητες με την πραγματική ευθεία, με την έννοια ότι ήταν μοντέλο των αξιωμάτων της πραγματικής ευθείας, αλλά περιείχε επίσης, εκτός των πραγματικών αριθμών, απειροστά και άπειρα μεγάλους αριθμούς. Σε ό,τι ακολουθεί, θα επιχειρήσουμε μια σύντομη σκιαγράφηση της παλινόρθωσης αυτής των απειροστών από τον Robinson, ένα εγχείρημα που, όπως φάνηκε, απαιτούσε, από την μια μεριά, κατάλληλη ανάπτυξη της μαθηματικής λογικής και, από την άλλη, την ύπαρξη ενός καλού μαθηματικού με φιλοσοφικές ανησυχίες και αγάπη για την ιστορία των μαθηματικών.

Όπως ήδη ελέχθη, η ανάπτυξη της μαθηματικής λογικής στον 20ό αιώνα απετέλεσε το πλαίσιο ανάπτυξης εργαλείων καταλλήλων για την ανστηρή θεμελίωση της μαθηματικής ανάλυσης με χρήση της υποτιμημένης έννοιας του απειροστού. Τα εργαλεία αυτά παρεσχέθησαν από την νεοαναπτυσσόμενη θεωρία μοντέλων και οδήγησαν τον Abraham Robinson στην οικοδόμηση της εντυπωσιακής non-standard ανάλυσης.

Χωρίς πολλές τεχνικές λεπτομέρειες, θα μπορούσαμε να ισχυρισθούμε ότι δύο είναι τα θεμελιώδη χαρακτηριστικά αυτής της νέας προσέγγισης. Σύμφωνα με το πρώτο, η ευθεία των πραγματικών αριθμών  $\mathbb{R}$  επεκτείνεται κατάλληλα σε μία υπερευθεία  $\mathbb{R}^*$  η οποία αποτελείται από τέσσερα είδη

αντικειμένων. Τα είδη αυτά είναι τα εξής: (α) Οι standard πραγματικοί αριθμοί, δηλαδή τα σημεία της ευθείας  $\mathbb{R}$  (η υπερευθεία  $\mathbb{R}^*$ , δηλαδή, εμπεριέχει ως στοιχειώδη υποδομή της την ευθεία  $\mathbb{R}$ . Παρακάτω θα εξηγηθεί επαρκώς τι σημαίνει «στοιχειώδης υποδομή»). (β) Τα απειροστά αντικείμενα, δηλαδή,  $x$  για τα οποία ισχύει  $x \neq 0$  και  $|x| < a$ , για κάθε standard θετικό πραγματικό αριθμό  $a$ . Έτσι, θα μπορούσαμε να πούμε ότι, γύρω από το μηδέν, υπάρχει μια «φυσαλίδα» αντικειμένων  $x$  τα οποία βρίσκονται απείρως κοντά προς το  $0$ , με την έννοια, όπως ήδη είπαμε, ότι η απόλυτη τιμή τους είναι μικρότερη από κάθε standard θετικό πραγματικό αριθμό  $a$ . (γ) Οι μεικτοί αριθμοί, που προκύπτουν ως αθροίσματα ή διαφορές πραγματικών αριθμών και απειροστών. Έτσι, επίσης, θα μπορούσαμε να πούμε ότι γύρω από έναν standard πραγματικό αριθμό  $a$  υπάρχει μια «φυσαλίδα» αριθμών της μορφής  $a \pm x$ , όπου το  $x$  είναι απειροστό, με την έννοια ότι για κάθε  $a \pm x$  ισχύει ότι δεν υπάρχει standard πραγματικός αριθμός  $b$  που διατακτικά να βρίσκεται πιο κοντά στον  $a$  από τον  $a + x$  ή τον  $a - x$ . (δ) Τέλος, οι άπειροι αριθμοί  $x$  για τους οποίους ισχύει ότι δεν υπάρχει standard θετικός πραγματικός αριθμός  $a$  τέτοιος ώστε  $|x| < a$ . Είναι προφανές ότι στο πλαίσιο αυτής της υπερευθείας  $\mathbb{R}^*$  ισχύει ότι αν  $x$  είναι στοιχείο της  $\mathbb{R}^*$  και  $x \neq 0$ , τότε το  $x$  είναι άπειρο αν και μόνον αν το  $1/x$  είναι απειροστό. Στο σημείο αυτό, ολοκληρώνοντας την σύντομη περιγραφή του πρώτου θεμελιώδους χαρακτηριστικού της νέας προσέγγισης, θα μπορούσαμε να ορίσουμε την  $\mathbb{R}$  ως στοιχειώδη υποδομή της  $\mathbb{R}^*$  όταν, για κάθε πρόταση  $\varphi$  της γλώσσας που χρησιμοποιείται για την περιγραφή της  $\mathbb{R}$ , η φικανοποιείται από την  $\mathbb{R}$  αν και μόνον αν η φικανοποιείται από την  $\mathbb{R}^*$ . Σύμφωνα με το δεύτερο θεμελιώδες χαρακτηριστικό της νέας (non-standard) προσέγγισης, ισχύει κάτι εξόχως σημαντικό, το οποίο ανεφέρθη ήδη στην αμέσως προηγούμενη πρόταση. Για την  $\mathbb{R}$  και την υπερδομή της  $\mathbb{R}^*$  ή, αλλιώς, για την  $\mathbb{R}^*$  και την στοιχειώδη υποδομή της  $\mathbb{R}$ , ισχύει η αρχή της μεταφοράς, σύμφωνα με την οποία, όπως ήδη ελέχθη, για κάθε πρόταση  $\varphi$  της γλώσσας που χρησιμοποιείται για την περιγραφή της  $\mathbb{R}$ , η φικανοποιείται από την  $\mathbb{R}$  αν και μόνον αν ικανοποιείται από την  $\mathbb{R}^*$ . Η αρχή αυτή έχει μεγάλη πρακτική σημασία, διότι μας επιτρέπει, όταν θέλουμε να δούμε αν μια πρόταση  $\varphi$  ικανοποιείται από την δομή  $\mathbb{R}$ , να είναι αρκετό να διαπιστώσουμε την ικανοποιησιμότητά της από την στοιχειώδη επέκτασή της  $\mathbb{R}^*$ . Κάτι τέτοιο είναι ιδιαιτέρως σημαντικό, διότι αυτό μεταφέρεται σε αποδεικτικό επίπεδο μέσω των θεωρημάτων πληρότητας του K. Gödel για τις πρωτοβάθμιες γλώσσες. Πρέπει όμως να τονισθεί κάτι το οποίο μετριάζει την συγκεκριμένη σπουδαιότητα της αρχής της μεταφοράς. Όποια πρόταση της αρχικής γλώσσας της πραγματικής ευθείας μπορεί να αποδειχθεί με τα νέα εργαλεία της non-standard ανάλυσης, θα μπορούσε να

αποδειχθεί και στο πλαίσιο της παλαιάς standard ανάλυσης. Έτσι, δεν κερδίζουμε τίποτε σε επίπεδο νέων θεωρημάτων. Αυτό που πιθανώς κερδίζουμε είναι ότι κάποιες αποδείξεις στο πλαίσιο της non-standard ανάλυσης είναι ευκολότερες των αντιστοίχων τους στο πλαίσιο της standard ανάλυσης.

Η παλινόρθωση των απειροστών από τον A. Robinson υπήρξε μια σπουδαία στιγμή για την δικαίωση των διαισθητικών εννοιών του απειρων μικρού και ίσως και του απείρως μεγάλου. Παρά ταύτα, από πλευράς όχι ευκολίας, αλλά αποτελεσματικότητας, η προσέγγιση μέσω των εννοιών του ορίου, της διαφόρισης, της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης είναι ισοδύναμη της προσέγγισης μέσω των εννοιολογικά αποκαθαριμένων απειροστών. Ως προς τα μαθηματικά της πραγματικής ευθείας, η επανεισαγωγή της έννοιας του απειροστού δεν προσέθεσε σε επίπεδο θεωρημάτων κάτι καινούργιο. Αν προσέθεσε κάτι καινούργιο, αυτό αναφέρεται σε χαρακτηριστικά της δομής  $\mathbb{R}^*$  που δεν ανήκουν στην δομή  $\mathbb{R}$ . Αυτό, ίσως, εξηγεί μερικώς το γεγονός ότι η μαθηματική κοινότητα συνέχισε και συνεχίζει να λειτουργεί και να παράγει, δουλεύοντας με την κλασική έννοια του ορίου, όπως την παρέλαβε από τον 19ο αιώνα.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Αναπολιτάνος, Δ. Α., «Εισαγωγή στην θεωρία μοντέλων, αξιωματική συνολοθεωρία και μέθοδος της επιβολής (forcing) του Cohen», *Τεύχος Διαλέξεων '77, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία*, 1978, σσ. 127-248.
- Αναπολιτάνος, Δ. Α., «Εισαγωγή στην non-standard ανάλυση», *Μαθηματική Επιθεώρηση*, 15 (1979), σσ. 16-39.
- Anapolitanos, D. A., *Leibniz: Representation, Continuity and the Spatio-temporal*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, Boston, London 1999.
- Bridge, J., *Beginning Model Theory*, Oxford Logic Guides, Oxford University Press, 1977.
- Cajori, F., *A History of the Concept of Limit and Fluxions in Great Britain (from Newton to Woodhouse)*, Chicago and London 1919.
- Chang, C. και H. J. Keisler, *Model Theory*, North-Holland, Amsterdam 1973.
- Child, J. M., *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*, Open Court, Chicago 1920.
- De Morgan, A., «On the Early History of Infinitesimals in England», *Philosophical Magazine*, 4 (26) (1852), σσ. 321-330.
- Edwards, C. H. Jr., *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag, New York 1982.

- Heath, T. L., «The Method of Archimedes», στο T. L. Heath, *The Works of Archimedes*, Dover Publications, Inc., New York 1953.
- Heath, T. L., *A History of Greek Mathematics*, Oxford University Press, Oxford 1921.
- Heath, T. L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Dover Publications, Inc., New York 1956.
- Κάππος, Δ., *Μαθήματα αναλύσεως. Απειροστικός λογισμός, τεύχος Α'*, Αθήνα 1962.
- Keisler, H. J., *Elementary Calculus. An Approach Using Infinitesimals*, Borden and Quigley, Inc. Publ. Co., 1971.
- Loemker, L. E. (επιμ.), *Gottfried Wilhelm Leibniz. Philosophical Papers and Letters*, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, Boston, London 1976.
- Luxemburg, W. A. J., *Non-Standard Analysis*, Lecture Notes, Caltech, Pasadena, California 1966.
- Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, Van-Noststrand, 1964.
- Mentzeniotis, D., *Three Views Concerning Continuity and Infinitesimals: Non-Standard Analysis, Topos Theory and Intuitionism*, Ph.D. thesis, University of London, London 1986.
- Νεγρεπόντης, Σ., Σ. Πιωτόπουλος και Ε. Γιαννακούλιας, *Απειροστικός λογισμός*, τόμ. I, Συμμετρία, Αθήνα 1987.
- Robinson, A., *Non-Standard Analysis*, North-Holland, Amsterdam 1974.

Η ΓΛΩΣΣΑ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ Η ΓΛΩΣΣΑ ΤΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ

Ο όρος «λογική» χρησιμοποιείται στην καθομιλουμένη ως νοηματικώς αντιπροσωπεύων ένα σχετικά ευρύ σύνολο σημασιών, χαρακτηριστικό στοιχείο των οποίων αποτελεί το γεγονός της επιθυμίας να εκφρασθεί η συστηματική και κανονιστικά λιγότερο ή περισσότερο επαρκής ιδέα της τακτοποίησης των εμπειρικών και λοιπών δεδομένων μας, έτσι ώστε να επιτρέπονται συμπερασματικές διαδικασίες επ' αυτών και επί των συνεπειών τους και να αποφεύγονται αντιφάσεις και παραδοξότητες. Ο όρος «φιλοσοφία», από την άλλη μεριά, χρησιμοποιείται για να δηλωθεί ο αρκετά ευρύς χώρος της ενασχόλησης με προβλήματα που πια θεωρούμε ότι έχει διαπιστωθεί πως δεν ανήκουν στις επιστήμες, αλλά αναφέρονται σε οριακές για την γνώση περιοχές. Τέτοια προβλήματα, όπως έχουμε ισχυρισθεί και σε άλλες ευκαιρίες, είναι, επί παραδείγματι, το πρόβλημα του όντος και της γνώσης του, το πρόβλημα της συνείδησης και της ύλης, το πρόβλημα του προκαθορισμού, της αιτιοκρατίας και της ελεύθερης βούλησης, το πρόβλημα του εμπειρικού status των μαθηματικών εννοιών κτλ. Η χρησιμοποιούμενη γλώσσα για τον καθορισμό και την μελέτη των παραπάνω όρων-εννοιών αποτελεί, συνήθως, πολύ συγκεκριμένο τμήμα της καθομιλουμένης (ελληνικής, αγγλικής, γαλλικής ή όποιας άλλης), η οποία στριμώχνεται κατάλληλα για να αποφευχθούν αυτοαναφορές (κάτι εξαιρετικά δύσκολο) και εσωτερικές αντιφάσεις (κάτι ευκολότερο, αλλά ορισμένες φορές δυσχερέστατα ανιχνεύσιμο). Το γλωσσικό παιχνίδι καθορισμού των ορίων της λογικής, της φιλοσοφίας και των πιθανών διασυνδέσεων και αλληλοεξαρτήσεών τους είναι μεν ανοικτόν τέλους, αλλά δεν αποτελεί μάταιη ενασχόληση, γιατί το ζητούμενο δεν είναι, απαραιτήτως, η ανίχνευση, εύρεση και διατύπωση οριστικών λύσεων. Το γλωσσικό παιχνίδι στο οποίο αναφέρομαστε είναι γνωσιακά ενδιαφέρον, όχι γιατί υπάρχουν τελικές απαντήσεις,