

κατασκευασμότητας τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων. Ἐντούτοις, στήν ἐπιμονή του νά καθορίσει σάν μοναδικά ὄλικά κατασκευῆς τῶν σύνθετων μαθηματικῶν ίδεων τίς ίδεες τῆς μονάδας καὶ τοῦ σημείου, ἀγνόησε κάποιες ἀλλες, ἀπλές, ἀφηρημένες ίδεες πού συνεισφέρουν στήν κατασκευή καὶ πού προκύπτουν ἀφαιρετικά, μέ πρῶτο ὄλικό τήν ἐσωτερική ἐμπειρία τῶν νοητικῶν μας πράξεων. Μιά τέτοια ίδεα είναι ἡ ἀπλή ίδεα τῆς ἐπανάληψης, ἡ δοπία συνδυασμένη κατάλληλα μέ τήν ίδεα τῆς μονάδας μᾶς δίνει τήν ίδεα τοῦ ἀπέρου. Στήν κατασκευή ἐνός πεπερασμένου ἀριθμοῦ δὲν χρειαζόμαστε τήν ίδεα τῆς ἐπανάληψης, γιατί ἡ πράξη τῆς διαδοχικῆς ἀθροισῆς στηρίζεται στήν ἐπανάληψη, δχι σάν ίδεα, ἀλλά σάν ἐσωτερικό χαρακτηριστικό τῆς κατασκευῆς. Ἀντίθετα, στήν περίπτωση τοῦ ἀπέρου ή ίδεα τῆς ἐπανάληψης ἀπαιτεῖται γιατί αὐτή καθ' ἐαυτή ἡ ἐπανάληψη δέν ἀποτελεῖ καθοριστικό συστατικό στοιχεῖο τῆς κατασκευῆς του, δεδομένου πώς τό ἀπειρο δρίζεται σάν αὐτό τό μαθηματικό ἀντικείμενο, πού προκύπτει ἀπό τή μονάδα, μέ μιά διαδικασία ἀτέρμονης ἐπανάληψης. Γιά τήν ἀναγκαία χρήση τῆς ίδεας τῆς ἐπανάληψης στήν κατασκευή τῆς ἔννοιας τοῦ ἀπέρου συνηγορεῖ, χωρίς νά τό συνειδητοποιεῖ, καὶ ὁ ίδιος δ Locke, δως μαρτυρεῖ τό παρακάτω χωρίο.

... ἀς ἀφήσουμε κάποιον νά συλλέξει σέ ἔνα ἀθροισμα δσον μεγάλο ἀριθμό θέλει, αὐτή ἡ πολλαπλότητα, δσοδήποτε μεγάλη καὶ νά είναι δέν μειώνει τή δυνατότητα προσθήκης σ' αὐτήν, οὔτε τόν φέρνει πλησιέστερα στό τέλος τοῦ ἀνεξάντλητου ἀποθέματος τῶν ἀριθμῶν... Καὶ αὐτή ἡ ἀτέρμονη πρόσθεση... τῶν ἀριθμῶν, τόσο προφανῆς στό μυαλό, είναι αὐτό, νομίζω, πού μᾶς δίνει τήν εὐκρινέστερη καὶ διαυγέστερη ίδεα τοῦ ἀπέρου.⁷⁶

Οἱ παρακάτω παρατηρήσεις βέβαια δέν μειώνουν τήν προσφορά τοῦ Locke στή φιλοσοφία τῶν μαθηματικῶν καὶ στή φιλοσοφία γενικότερα. Ἀλλωστε θά ἡταν ἀτοπο νά ἀπαιτήσουμε ἀπό ἔναν διανοητή τοῦ 17ου αἰώνα νά ἔχει τήν δπτική πού τά ἀπειρως περισσότερα νοητικά στηρίγματα τοῦ 20ού δίνουν σέ ἔνα σημερινό διανοητή. Ἡ προσφορά του, σημαντικότατη καθ' ἐαυτή, δέν μπορεῖ νά μετρηθεῖ μέ τή ζυγαριά ἐνός ἀλλου αιώνα.

76. Στό ίδιο, Vol. I, σ. 282.

1.8. Ἡ συμβολή τοῦ Leibniz στή φιλοσοφία τῶν μαθηματικῶν

Ο Leibniz υπῆρξε μία ἀπό τίς ίδιαιτερα ξεχωριστές φυσιογνωμίες τῆς εὐρωπαϊκῆς πνευματικῆς σκηνῆς τοῦ δευτέρου μισοῦ τοῦ 17ου αἰώνα καὶ τῶν ἀρχῶν τοῦ 18ου. Πολυμαθής, κοσμοπολίτης ἀσχολήθηκε μέ τή φιλοσοφία, τά μαθηματικά, τή φυσική, τήν ιστορία, τά νομικά καὶ μιά σειρά ἀλλα πράγματα πού ἐκτείνονταν σ' δλο τό ὑπαρκτό, γιά τήν ἐποχή του, γνωστικό φάσμα. Η πνευματική του δραστηριότητα διακρίνεται ἀπό μιά ἐντονη δίψα γιά γνώση πού συνοδευόταν ἀπό μιά δρμητική διάθεση γιά ἔρευνα, ἀπό τή μιά μεριά, καὶ μιά δύσκολα συγκαλυπτόμενη ἀνάγκη γιά δημιουργία ἐνοποιητικῶν, συνθετικῶν καὶ δλιστικῶν μεταφυσικῶν συστημάτων, ἀπό τήν ἀλλη. Τό τελικό μεταφυσικό σύστημα πού δημιουργήσε καὶ δλοκλήρωσε πρός τό τέλος τῆς ζωῆς του χαρακτηρίζεται ἀπό δμορφία καὶ πληρότητα. Αὐτό βέβαια δέν σημαίνει πώς οἱ ἀπατήσεις πού ἐπιχείρησε νά δώσει στά κατ' ἔξοχήν δριακά προβλήματα τοῦ δντος καὶ τής γνώσης του πείθουν πλέον τόν ἀφαιρετικά καλύτερα ἐπιστημονικά πληροφορημένο καὶ ἐμπειρικά προσανατολισμένον ἀνθρωπο τοῦ 20ού αἰώνα. Παρά ταῦτα ἡ προσφορά του στή διεύρυνση τοῦ γνωστικοῦ μας δρίζοντα υπῆρξε τεράστια καὶ γιά τήν ἀπαλήθευση τοῦ Ισχυρισμοῦ μας αὐτοῦ ἀρκεί ἡ ἀπλή ἀναφορά τῆς συνέισφορᾶς του στήν ἀνακάλυψη ἡ καλύτερα ἐφεύρεση τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ⁷⁷.

Ο Leibniz δημιούργησε ἔνα φιλοσοφικό σύστημα πού φέρει ἐντονα τά ἵχνη τῆς ἀριστοτελικῆς ἐπίδρασης. Τό δλο σύστημα είναι, βέβαια, καθαρό δημιούργημά του, χωρίς δμως αὐτό νά ἐμποδίζει τήν υπαρξη συγκεκριμένων ἀριστοτελικῶν καταβολῶν πού, μέ τή σειρά τους, δέν ἀποκλείουν τήν υπαρξη ἀλλων —π.χ. νεοπλα-

77. Είναι γνωστό, πώς δ ἀπειροστικός λογισμός, δπως τόν ξέρουμε σήμερα, πέρα ἀπό τήν ἀντιδικία πού έσπασε γύρω ἀπό τήν προτεραιότητα τῆς ἀνακάλυψης του, πρόκυψε ἀπό τήν ἀνεξάρτητη καὶ σχεδόν σύγχρονη δουλειά τῶν Leibniz καὶ Newton.

τωνικῶν ἡ ὑστερομεσαιωνικῶν— ἐπιδράσεων. Ἐνα χαρακτηριστικό παράδειγμα ἀποτελεῖ ἡ ἀντιστοιχία πού παρατηρεῖται ἀνάμεσα σέ δρισμένες λογικῆς καί μεταφυσικῆς υφῆς θέσεις τοῦ ἀριστοτελικοῦ συστήματος καί σέ παρεμφερεῖς ἐπίσης λογικῆς καί μεταφυσικῆς υφῆς θέσεις τοῦ συστήματος τοῦ Leibniz. Πιό συγκεκριμένα, εἶναι γνωστή ἡ πίστη τοῦ Leibniz στὸ ἀριστοτελικό δόγμα, τὸ σχετικό μέ τῇ δυνατότητα ἀναλυσιμότητας δλων τῶν προτάσεων σέ προτάσεις ἀποτελούμενες ἀπό ἓνα οὐσιαστικό συνδεόμενο μέσω τοῦ βιοθητικοῦ ρήματος «εἶναι» μέ ένα ἐπίθετο. Τό οὐσιαστικό ἀποτελεῖ τό συντακτικό υποκείμενο τῆς πρότασης καί τό ἐπίθετο μαζί μέ τό ρῆμα τό κατηγόρημά της. Τό σχῆμα υποκείμενο-κατηγόρημα μεταφερμένο ἀπό τήν περιοχή τοῦ συντακτικοῦ στή σημασιολογική περιοχή τῆς γλώσσας ἀποτελεῖ τό θεμελιωδέστερο δομικό χαρακτηριστικό τῆς δοντολογίας τοῦ Leibniz. Τό δοντολογικό υποκείμενο περιέχει τίς ἰδιότητές του, ἔτσι ὥστε ἡ ὑπόθεση ὑπαρξῆς ἐνός συγκεκριμένου υποκείμενου χωρίς κάποια ἀπό τίς συγκεκριμένες ἰδιότητές του νά στερεῖται νοήματος. Τό σχῆμα δοντολογικό υποκείμενο-ἰδιότητα δέν εἶναι περαιτέρω ἀναλύσιμο καί δλες οἱ δομικές σχέσεις τοῦ κόσμου τῶν δντων μποροῦν μέ τρόπο τελεσίδικο νά ἀναχθοῦν σ' αὐτό. Ἐνα χαρακτηριστικό παράδειγμα μιᾶς τέτοιας ἀναγωγῆς μποροῦμε νά ἀνιχνεύσουμε ἔξετάζοντας μιά ὀποιαδήποτε σχέση ἀνάμεσα σέ δυό δοντότιτες. Ἀς ὑποθέσουμε πώς μέ Α συμβολίζουμε ἓνα συγκεκριμένο ἄνθρωπο καί μέ Β τόν ἀδελφό του. Ἡ πρόταση «ὅ Α καὶ ὅ Β εἶναι ἀδέλφια» καί κατ' ἐπέκταση ἡ δομική σχέση τοῦ κόσμου τῶν δντων (τήν δποία ἡ πρόταση σημαίνει) μποροῦν νά ἀναλυθοῦν ἔτσι, ὥστε στή θέση τῆς ἀρχικῆς πρότασης νά ἔχουμε τίς προτάσεις «ὅ Α εἶναι ἀδελφός τοῦ Β» καί «ὅ Β εἶναι ἀδελφός τοῦ Α». Κάτι τέτοιο ἔχει βαθύτατες, δοντολογικῆς υφῆς, συνέπειες. Σημαίνει πώς ἡ σχέση πού περιγράφεται ἀπό τήν πρόταση «ὅ Α καὶ ὅ Β εἶναι ἀδέλφια» ἀποτελεῖται ἀπό τή σύζευξη δύο ἀπλῶν καί μή περαιτέρω ἀναλύσιμων ἀτομικῶν καταστάσεων πού περιγράφονται ἀπό τίς παραπάνω ἀντίστοιχες προτάσεις. Στήν πρώτη περίπτωση τό δοντολογικό υποκείμενο, πού συμβολίζεται μέ τό Α, περιέχει σάν χαρακτηριστικό τῆς φύσης του τήν ἰδιότητα πού περιγράφεται μέ τή φράση «ἀδελφός τοῦ Β» καί στή δεύτερη τό δοντολογικό υποκείμενο, πού συμβο-

λίζεται μέ τό Β, περιέχει ἐπίσης σάν χαρακτηριστικό τῆς φύσης του τήν ἰδιότητα πού περιγράφεται μέ τή φράση «ἀδελφός τοῦ Α».

Ο μεταφορικός χαρακτήρας τοῦ βασικοῦ μεταφυσικοῦ σχήματος πού ἀποδίδεται ἀπό τή φράση «τό δοντολογικό υποκείμενο περιέχει τίς ἰδιότητές του» δέν πρέπει νά συσκοτίζει τό θεμελιώδες χαρακτηριστικό τῆς συγκεκριμένης συσχέτισης πού ἀποδίδεται μέ τή χρήση τοῦ ρήματος «περιέχει». Τό θεμελιώδες αὐτό χαρακτηριστικό, δπως ἀναφέρθηκε καί πιο πάνω, συνίσταται στήν ἀδυναμία δ-παρέξης ἐνός συγκεκριμένου δοντολογικοῦ υποκείμενου, χωρίς κάποια ἡ κάποιες ἀπό τίς ἰδιότητές του. Οι ἰδιότητες δέν προστίθενται ἡ ἀφαιρούνται κατά βούληση, ἀλλά συνυπάρχουν δξεδιάλυτα μέ τό φορέα τους. Τό σύνολο τῶν ἰδιοτήτων του χαρακτηρίζει, ἔξατομικεύει καί διαφοροποιεί κάθε δοντολογικό υποκείμενο ἔτσι, δστε νά μήν υπάρχουν στά πλαίσια τοῦ (κατά Leibniz) κόσμου δύο ταυτόσημα υποκείμενα.

Σύμφωνα μέ τόν Leibniz, δ φυσικός κόσμος δέν εἶναι τίποτε δλλο παρά μιά δργανωμένη, συνεπής καί λογικά δομημένη σειρά ἀπό φαινόμενα⁷⁸. Τά φαινόμενα αυτά ἐδράζονται πάνω στήν πραγματικότητα ἐνός ἀχρονα παρόντος κόσμου, ἀποτελούμενου ἀπό διακριτές δοντότητες πού τίς ὀνομάζει μονάδες. Οι μονάδες αὗτές δέν ἐπικοινωνοῦν μεταξύ τους, δέν ἀλληλοεπιδροῦν καί υπόκεινται σέ μιά ἐσωτερική διαδικασία ἐναλλαγῆς ἀναπαραστάσεων. Οι ἀναπαραστάσεις αὗτές εἶναι ἀπεικονίσεις τοῦ συστήματος δλων τῶν ἀλλων μονάδων. Ἐσωτερικό στοιχεῖο αυτῶν τῶν ἀναπαραστάσεων, ἐσωτερικό δηλαδή ταξινομικό τους χαρακτηριστικό, εἶναι δ χωροχρόνος. Οι μονάδες υπάρχουν καί ἀλλάζουν χωρίς αὐτό νά σημαίνει πώς υπάρχουν στό φυσικό χῶρο δπως ἐμεῖς τόν ἀντιλαμβανόμαστε, ἡ πώς ἀλλάζουν στό φυσικό χρόνο τοῦ δποίου ἡ αἰσθηση τῆς ροῆς προϋποθέτει διαδικασίες μνήμης. Τό ποῦ τῆς unctions τους ἀναπαριστάνεται ἔτσι, δστε οι εἰκόνες μας νά χαρακτηρίζονται ἀπό ἐσωτερικές σχέσεις διάταξης πού στό σύνολο τους δδηγοῦν στή δημιουργία τῆς γενικῆς ἰδέας τοῦ χώρου. Τό συνεχόμενο τῆς ἀλ-

78. Φαινόμενα πού δ Leibniz τά χαρακτήριζε ως *bene fundata*.

λαγῆς τους ἀναπαριστάνεται ἔτσι, ώστε οἱ εἰκόνες πού προκύπτουν νά περιέχουν δμοιώματα ἄλλων προηγουμένων εἰκόνων. Ἐτσι, στά πλαισία μιᾶς κάθε φορά στατικῆς εἰκόνας, ή μνήμη –δηλαδή ή λειτουργία τῆς ἀναγνώρισης τῶν δμοιωμάτων προηγουμένων εἰκόνων– δέν εἶναι τίποτε ἄλλο παρά ή διαπίστωση γραμμικῶν σχέσεων διάταξης ἀνάμεσά των. Ἡ διαπίστωση αυτή διδηγεῖ στή γενική ἰδέα τοῦ χρόνου.

Ἐναὶ ζῶο, ἔνα φυτό, ἔνας δποιοσδήποτε δργανικός ή ἀνόργανος σχηματισμός ἀποτελεῖται ἀπό ἔνα σύνολο μονάδων, μέ τήν ἐννοια πώς τό σύνολο αὐτό ἀναπαριστάνεται ἔτσι ώστε νά μᾶς ἐμφανίζεται χωροχρονικά σάν ζῶο σάν φυτό, κτλ. Βέβαια κάτι πού τώρα εἶναι μία γάτα δέν εἶναι δυνατό νά μεταβληθεῖ σέ σκύλο σέ κάπιο ἐπόμενο χρονικό σημεῖο. Αὐτό σημαίνει πώς τό σύνολο τῶν ἀναπαραστάσεων μᾶς εἶναι συνεπές, μέ τήν ἐννοια πώς τέτοιες μεταβολές, ή μεταλλαγές εἶναι ἀδύνατες και πώς δ, τι μᾶς ἐμφανίζεται σάν αἰσθητηριακή ἀντίληψη δέν ἐμπεριέχει δυσεξήγητα κενά και ἀπρόβλεπτα ποιοτικά ή ποσοτικά ἀλματα. Ἐπίσης, μία γάτα θά πρέπει νά εἶναι μία γάτα γιά δλα τά μέλη μιᾶς συγκεκριμένης δμάδας παρατηρητῶν, μέ τήν ὑπόθεση βέβαια πώς ή συγκεκριμένη δμάδα δέν περιέχει προβληματικά μέλη⁷⁹. Κάτι τέτοιο σημαίνει, μέ τή σειρά του, πώς οἱ ἀναπαραστάσεις διαφόρων παρατηρητῶν πρέπει νά συμφωνοῦν, μέ τήν προϋπόθεση βέβαια, πώς εἶναι ἀναπαραστάσεις τοῦ ἴδιου συνόλου μονάδων και πώς καθεμία ἔχει σάν χαρακτηριστικό τής τή διαφορετική δπτική γωνιά τοῦ παρατηρητῆς. Ἡ ἀρμονία, ή συμφωνία, ή συνέπεια τοῦ συνόλου τῶν ἀναπαραστάσεων δλων τῶν ὑπαρκτῶν μονάδων εἶναι, σύμφωνα μέ τόν Leibniz, ἔργο τοῦ Δημιουργοῦ πού ἐπέλεξε νά δημιουργήσει τόν καλύτερο ἀπό δλους τούς δυνατούς κόσμους. Οἱ μονάδες, αὐτάρκεις και αἰώνιες, χαρακτηρίζονται ἀπό τή δική τους προσωπική ίστορια πού ξετυλίγεται μέσα τους και πού εἶναι ή ίστορια τοῦ σύμπαντος, εἰδωμένη ἀπό τῆς καθεμιᾶς τή συγκεκριμένη και ἴδιαζουσα δπτική γωνιά. Ὁ

79. Ἐδῶ δέν μᾶς ἐνδιαφέρει ή περίπτωση ἀρρωστημένων ἔξαιρέσεων δπως γιά παράδειγμα ή περίπτωση παραισθήσεων, οἱ δποίες πάντα μποροῦν νά ἐρμηνευθοῦν μέ χρήση μηχανισμῶν σύγχυσης τῶν συγκεκριμένων ἀναπαραστάσεων.

κόσμος τοῦ Leibniz εἶναι ἔνας κόσμος μεταφυσικῶν, κλειστῶν και διακριτῶν δντοτήτων, πού κάθε μία ἀναπαριστάνει δλες τίς δλλες ἔτσι ώστε νά τῆς δημιουργεῖται ή ἐντύπωση ἀμοιβαίς ἐπικοινωνίας και δράσης. Θάνατος τῶν μονάδων δέν υπάρχει, δ θάνατος ή ή φθορά εἶναι φαινόμενο πού σχετίζεται μέ σχηματισμούς μονάδων, δπως αυτοί οι σχηματισμοί ἀναπαριστάνονται σάν υποκείμενοι σέ ἀλλαγές. Κάθε μονάδα μεταφέρει και περιέχει τήν προσωπική της ίστορία δς ἔνα σύνολο εἰκονιστικῶν ίδιοτήτων, εἶναι μοναδική και δέν ταυτίζεται μέ καμιά ἄλλη. Κάθε μονάδα εἶναι ἔνας καθρέφτης τοῦ σύμπαντος. Καθρέφτιζει τό σύμπαν ἀπό μιά συγκεκριμένη δπτική γωνία ἔτσι, ώστε δντας διαφορετική ἀπό κάθε ἄλλη, νά συμφωνεῖ συγχρόνως μαζί της.

‘Ο ἀνθρωπος εἶναι ἔνα σύνολο μονάδων, μία ἀπό τίς δποίες εἶναι κυριαρχη ἀπέναντι σ’ δλες τίς δλλες. Ἡ κυριαρχία της ἔγκειται στό δτι ή δομή τῶν ἀναπαραστάσεων, πού φέρει μαζί της, εἶναι τέτοια, πού τῆς ἐπιτρέπει νά διανοεῖται, νά ἐκτιμᾶ και γενικά νά λειτουργεῖ ἔτσι ώστε νά παίζει τό ρόλο τοῦ κεντρικοῦ δργάνου νοητικῆς δράσης τοῦ ἔλλογου δντος. Θάνατος τοῦ συγκεκριμένου ἀνθρώπου δέν σημαίνει και θάνατο τῶν μονάδων πού τόν ἀποτελοῦν. Σημαίνει ἀπλῶς ἀντικατάσταση τῶν προηγούμενων ἀναπαραστάσεων, πού ἔδιναν τήν ἐντύπωση ἐνός σφύζοντος δργανισμοῦ, μέ ἀναπαραστάσεις πού ἀνήκουν σέ μιά ἄλλη περιοχή και πού μποροῦν νά χαρακτηρισθοῦν ἀρνητικά, ώς μή περιέχοντες στοιχεῖα πού θά ἐξακολουθοῦν νά δίνουν τήν ἐντύπωση πώς δ προηγούμενος δργανισμός συνεχίζει νά ζει. Ἡ ζωή, δπως βιώνεται, και δ θάνατος, δπως δέν βιώνεται, ἀνήκουν στήν περιοχή τοῦ φαινούμενου. Εἶναι ἐσωτερικά χαρακτηριστικά τοῦ συστήματος τῶν ἀναπαραστάσεών μας. Αὐτό πού πραγματικά υπάρχει, δ κόσμος τῶν μονάδων δηλαδή, εἶναι ἀθάνατος και ή μόνη πραγματική κίνηση εἶναι ή ροή τῶν ἀναπαραστάσεων ή δποία καθρέφτιζει ἐσωτερικά σάν χρονική ἐπαλληλία γεγονότων.

‘Ο κόσμος τῆς ἐμπειρίας διαφορίζεται ἀπό τόν κόσμο τῶν καθαρῶν νοητικῶν κατασκευῶν δχι γιατί δ πρώτος ἀπευθύνεται σέ μιά ἐξωτερική πραγματικότητα, μέ τήν δποία πρέπει νά συμφωνεῖ, ἐνώ δ δεύτερος συνίσταται στήν κατασκευή ειδώλων πού δέν έχουν

δμεση σχέση μέ τήν αισθητηριακή ἀντίληψη, ἀλλά γιατί δ πρώτος ἀποτελεῖται ἀπό ἓνα σύνολο ἀναπαραστάσεων συνδεδεμένων μέ τήν αισθητηριακή ἀντίληψη, μέ τήν ἐννοια πώς τό σύνολο αὐτό τῶν ἀναπαραστάσεων ἀναπαριστάνει τήν πραγματική κατάσταση τοῦ κόσμου τῶν μονάδων, δπως αὐτή μᾶς φαίνεται πώς ἀντανακλᾶται μέσω τῶν αἰσθήσεών μας, ἐνῷ δ δεύτερος ἀποτελεῖται ἀπό ἓνα σύνολο ἀναπαραστάσεων, πού δὲν ἀναπαριστάνουν δμεσα δ, τι μᾶς ἐμφανίζεται σάν ἔξωτερική πραγματικότητα, ἀλλά συνδέονται μαζί της μέ δευτερεύοντα τρόπο, ἀποτελώντας τό βασίλειο τῆς θεωρητικῆς δργάνωσης τῆς γνώσης. Σ' αὐτό τό βασίλειο τῆς θεωρητικῆς δργάνωσης τῆς γνώσης ἀνήκουν τά μαθηματικά ἀντικείμενα, ή δέ μαθηματική πράξη δέν είναι τίποτε δλλο παρά ή πειθαρχημένη δραστηριότητα τῆς ἔξερεύνησης αὐτῆς τῆς πολύτιμης γῆς. Κατά τόν Leibniz τά μαθηματικά ἀντικείμενα είναι *entia rationis* καὶ σάν τέτοια, σάν καθαρές δηλαδή δντότητες τοῦ νοῦ, δέν καθεφτίζουν δμεσα αὐτό πού μᾶς ἐμφανίζεται σάν ἔξωτερικός κόσμος. Γιά παράδειγμα, ἰσοσκελή τρίγωνα δέν υπάρχουν στόν κόσμο τῶν αἰσθήσεών μας. 'Υπάρχουν δντότητες πού τό σχῆμα τους προσεγγίζει τή νοητή μορφή τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου. Κανένα δμως σχῆμα δέν είναι ἀκριβῶς ἰσόμορφό του. 'Ο δριθμός «ένα» δέν είναι ἐννοια πού φτάνει σέ μᾶς, κάτω ἀπό διαδικασίες ἀφαίρεσης, ἀπό τά βάθη τοῦ δρυχείου τῆς ἐμπειρίας. Τά μαθηματικά ἀντικείμενα δέν είναι οι τελικές κρυστάλλινες φόρμες τῶν δρυκτῶν ἐκείνων πού, πρίν γίνουν ἀντικείμενα ἐπιμελημένης ἔπεξεργασίας, ἀποτελοῦν ταπεινά κομμάτια μᾶς χθόνιας πραγματικότητας. Είναι τουναντίον τά πρότυπα σύγκρισης, τά ἔργαλεῖα ταξινόμησης, οι κόμβοι στό μεθοδολογικό δίχτυ δργάνωσης αὐτῆς τῆς χθόνιας πραγματικότητας.

'Η πραγματικότητα τοῦ κόσμου πού ζοῦμε —μιά πραγματικότητα πού ἔγινε σύμφωνα μέ τόν Leibniz δυνατή, μετά ἀπό ἀπόφαση τοῦ Δημιουργοῦ νά ἐπιλέξει γιά δημιουργία αὐτόν «τόν καλύτερο δλων τῶν δυνατῶν κόσμων»— είναι ἐνδεχομενική. Στή θέση αὐτοῦ τοῦ κόσμου θά μποροῦσαν νά βρίσκονται ἀλλοι κόσμοι, μέ δομές διαφέρουσες είτε ως πρός τίς συγχρονικές είτε ως πρός τίς διαχρονικές τους πολλαπλότητες. 'Η προνομιούχα θέση τοῦ κόσμου πού ζοῦμε ἔγκειται στό δτι, κάτω ἀπό κριτήρια πού ή πεπερασμένη

διάνοια μας δέν μπορεῖ νά ἀντιληφθεῖ, δ Δημιουργός ἐπέλεξε νά τόν πλάσει γιατί δπως ήδη είπώθηκε ήταν «δ καλύτερος δλων τῶν δυνατῶν κόσμων». 'Η ίδιοτητά του αὐτή, παρά ταῦτα, δέν τόν ἀπαλλάσσει ἀπό τόν ἐνδεχομενικό του χαρακτήρα. Τό δν αὗριο θά βρέξει ίσως νά είναι τελείως καθορισμένο, ἀν υποθέσουμε πώς αὐτός «δ καλύτερος δλων τῶν δυνατῶν κόσμων» είναι ντετερμινιστικά ὅργανωμένος. 'Η, ἀκόμα, μποροῦμε νά ἰσχυριστοῦμε πώς, ἀν διαθέταμε τή γνωστική παντοδυναμία τοῦ Δημιουργοῦ, τό αὕριο τοῦ κόσμου θά ήταν τελείως καθορισμένο γιά μᾶς, ἀνεξάρτητα ἀπό τήν ντετερμινιστική ή μή δργάνωσή του, δεδομένου πώς γιά τήν προϋπάρχουσα γνώση μας δέν θά υπῆρχαν μελλοντικά μυστικά. Παρά ταῦτα, δ ἐνδεχομενικός χαρακτήρας τοῦ κόσμου μᾶς ἐπιβάλλει τέτοιους κανόνες ἀνάγνωσής του, δστε ή υπόθεση τῆς ἐνδεχομένης αὐτιανῆς βροχῆς νά μήν είναι λογικά ἀντιφατική.

Τά μαθηματικά ἀντικείμενα καί οι ἀλήθειες γύρω ἀπό αὐτά δέν ἔχουν ἐνδεχομενικό χάρακτήρα. 'Αλήθειες γύρω ἀπό τά δομικά χαρακτηριστικά τοῦ μαθηματικοῦ μας σύμπαντος είναι ἀπόλυτες ἀλήθειες, ἀλήθειες ἀνεξάρτητες ἀπό τήν ἐνδεχομενικότητα τῶν ίδιαζόντων δομικῶν χαρακτηριστικῶν δποιουδήποτε ἀπό τούς, κατά Leibniz, «δυνατούς κόσμους». Είναι δηλαδή ἀναγκαῖες ἀλήθειες. Σύμφωνα μέ τόν Πλάτωνα, ή ἀναγκαιότητα τῶν μαθηματικῶν ἀληθειῶν δφείλεται στό δτι, είτε ἐκφράζουν τίς συνθήκες δπαρξης τῶν ἀντικειμένων ἐνός ἀναλλοίωτου, ἀπόλυτου καί ἀχρονου μαθηματικοῦ σύμπαντος, είτε περιγράφουν τίς δομικές σχέσεις τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων στό ἐσωτερικό του. Σύμφωνα μέ τόν Leibniz οι μαθηματικές ἀλήθειες είναι ἐπίσης ἀναγκαῖες, ή ἀναγκαιότητά τους δμως δφείλεται στήν ἀναλυτικότητά τους, πού, δπως θά δοῦμε, χαρακτρίζει ἑνα πολύ εύρυτερο φάσμα ἀληθειῶν καί ἀντίστοιχων προτάσεων.

Οι ἀλήθειες καί οι ἀντίστοιχες προτάσεις μέσω τῶν δποίων ἐκφράζονται χωρίζονται, σύμφωνα μέ τόν Leibniz, σέ ἀκριβῶς δνο ἀποκλειστικές —ξένες μεταξύ τους— κλάσεις. 'Η πρώτη είναι ή κλάση τῶν ἀναλυτικῶν καί ή δεύτερη ή κλάση τῶν ἐνδεχομενικῶν ἀληθειῶν καί, ἀντίστοιχα, προτάσεων. Οι ἀναλυτικές είναι ἐκείνες πού στηρίζονται στήν ἀρχή τῆς ἀντίφασης, μέ τήν ἐννοια πώς οι ἀρνή-

σεις τους είναι άντιφατικές προτάσεις. Η άναγκαιότητα τής άληθειας τους προκύπτει από τό γεγονός διτοι οι άρνήσεις τους. δέν είναι άληθεις σέ κανένα «δυνατό κόσμο», πράγμα πού άντιστοχα σημαίνει πώς οι άναλυτικές προτάσεις είναι άντιστοχα άληθεις σέ κάθε «δυνατό κόσμο». Ένα παράδειγμα άναλυτικής πρότασης είναι ή παρακάτω : «Τό Α είναι ταυτόσημο μέ τό Α». Η άρνησή της διηγεῖ στήν πρόταση «Τό Α δέν είναι ταυτόσημο μέ τό Α», τής δποίας ή άντιφατικότητα είναι συνέπεια τής άντιληψης πώς δεδομένου διτοι σέ κάθε «δυνατό κόσμο» κάθε δντότητα είναι ταυτόσημη μέ τόν έαυτό της, ένας κόσμος πού παράλληλα θά περιεχε και κάποια δντότητα μή ταυτόσημη μέ τόν έαυτό της. Θά ήταν ένας κόσμος άδύνατος. Υποθέτοντας πώς τό κ συμβολίζει μιά συγκεκριμένη δντότητα και τό φ συμβολίζει μιά ίδιότητά της, μπορούμε νά δώσουμε ένα άκομα παράδειγμα άναλυτικής πρότασης : «Η ή x έχει τήν ίδιότητα φ, ή ή x δέν έχει τήν ίδιότητα φ». Η άρνησή της μπορεῖ νά άποδοθεί ως έξης : «Δέν ίσχνει διτοι ή ή x έχει τήν ίδιότητα φ, ή ή x δέν έχει τήν ίδιότητα φ» και αυτή, μέ τή σειρά της, μπορεῖ νά μετασχηματισθεί στήν παρακάτω ίσοδύναμή της, τής δποίας ή άντιφατικότητα είναι τελείως προφανής : «Η x δέν έχει τήν ίδιότητα φ και ή x έχει τήν ίδιότητα φ»⁸⁰.

Οι ένδεχομενικές άληθειες έκφραζονται μέ προτάσεις πού οι άρνήσεις τους δέν είναι άντιφατικές προτάσεις. Αυτό σημαίνει πώς παρ' δλο πού οι άρνήσεις τους είναι προτάσεις δχι άληθεις, αυτό δέν είναι άποτέλεσμα τής άντιφατικότητάς τους άλλα άποτέλεσμα τού διτοι συμβαίνει νά μή συμφωνούν μέ τή δεδομένη κατάσταση πραγμάτων. Ένα παράδειγμα ένδεχομενικής άληθειας μπορεῖ νά άποτελεί ή κατοχή δπό μέρους μου ένός άναπτήρα μέ μαδρο χρώμα. Οι άντιστοιχες προτάσεις είναι οι παρακάτω : «Ο άναπτήρας μου έχει χρώμα μαδρο» και «δ άναπτήρας μου δέν έχει χρώμα μαδρο. Είναι άληθεια πώς δέν είναι άληθεια πώς δ άναπτήρας μου δέν έχει

80. Η πρώτη πρόταση και ή δρνησή της, μπορούν στά πλαίσια μας τυπικής πρωτοβάθμιας γλώσσας νά άποδοθεύν άντιστοχα ως έξης: A=A, $\neg(A \equiv A)$. Η δεύτερη πρόταση και ή δρνησή της μπορούν νά άποδοθεύν έπίστης μέ τίς: A $\vee (\neg A)$ και $\neg(A \vee (\neg A))$. Η άρνησή της δεύτερης πρότασης μπορεῖ ίσοδύναμα νά άποδοθεί μέ τήν ($\neg A) \wedge A$. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. Δεύτερο κεφάλαιο, 2.1.

χρώμα μαδρο. Αυτό δμως δέν είναι άποτέλεσμα τής λογικής άντιφατικότητας τής δεύτερης πρότασης, γιατί άπλούστατα ή συγκεκριμένη πρόταση συμβαίνει νά μήν είναι λογικά άντιφατική. Θά μπορούσαμε νά φαντασθούμε πολύ ενκολα μιά κατάσταση πραγμάτων, σύμφωνα μέ τήν δποία ή πρόταση «δ άναπτήρας μου δέν έχει χρώμα μαδρο», θά ήταν άληθης. Τουναντίον δέν θά μπορούσαμε νά φαντασθούμε καμιά κατάσταση πραγμάτων —γιατί άπλούστατα μιά τέτοια κατάσταση δέν μπορεῖ νά υπάρξει— σύμφωνα μέ τήν δποία μιά δντότητα x θά μπορούσε και νά έχει και νά μήν έχει τήν ίδιότητα φ.

Οι άναλυτικές προτάσεις, δηλαδή, είναι άναγκαια άληθεις γιατί συμβαίνει νά είναι άληθεις σέ δλους τούς, κατά Leibniz, «δυνατούς κόσμους», πράγμα πού σημαίνει, άντιστοχα, πώς οι άρνήσεις τους δέν είναι άληθεις σέ κανένα «δυνατό κόσμο». Άντιστοχα οι ένδεχομενικές προτάσεις είναι δλλοτε άληθεις και άλλοτε ψευδεις, πράγμα πού ίσχνει και γιά τίς άρνήσεις τους σέ σχέση πάντα μέ τή συμφωνία, ή άσυμφωνία πού παρουσιάζουν συγκρινόμενες μέ τήν άντιστοιχη κατάσταση πραγμάτων στό δεδομένο πραγματικό ή πιθανό κόσμο⁸¹.

Ένας δεύτερος τρόπος δρισμού τών άναλυτικῶν και ένδεχομενικῶν άληθειῶν — και τών προτάσεων μέσω τών δποίων έκφραζονται— στηρίζεται, κατά Leibniz, στή διαδικασία και τό άποτέλεσμα τής άναλυσιμότητάς τους. Μία άναλυτική πρόταση δέν είναι ένδεχομενική και κάθε ένδεχομενική πρόταση είναι, από τήν ίδια τή φύση της, δχι άναλυτική, χωρίς νά σημαίνει πώς μπορεῖ νά προκύψει σάν άρνηση κάποιας άναλυτικής. Έπιπλέον κάθε άληθεια μπορεῖ νά είναι μέ τρόπο άποκλειστικό δποιασδήποτε άλλης έκδοχής, είτε άναλυτική είτε ένδεχομενική. Οι άναλυτικές προτάσεις χαρακτηρίζονται άπό τόν πεπερασμένο άριθμό βημάτων, πού περιλαμβάνει δποιαδήποτε πλήρης άνάλυσή τους. Μία τέτοια άνάλυση διδηγεί πάντα σύμφωνα μέ τόν Leibniz, στήν άποδομηση τής άρχικής πρότασης στά έπι μέρους μή περαιτέρω άναλύσιμα συστατικά της

81. Οι κατά Leibniz, άναλυτικές προτάσεις, στά πλαίσια μας πρωτοβάθμιας γλώσσας, είναι άκριβώς οι λογικά έγκυρες προτάσεις, δπως αυτές δρίζονται στό Δεύτερο Κεφάλαιο 2.2.4.

πού δέν μπορεῖ νά είναι τίποτε άλλο παρά ταυτοτικές στοιχειώδεις προτάσεις, ή προτάσεις τής μορφής υποκείμενο-κατηγόρημα τέτοιες, ώστε τό υποκείμενο νά περιέχει ούσιωδῶς τό ἀντίστοιχο κατηγόρημα. Παραδείγματα τέτοιου ούσιωδου περιέχεσθαι συναντοῦμε παντού. Κάθε πρόταση πού συνδέεται μέσω τοῦ ρήματος «είναι» γένος και εἶδος, ἀνήκει σ' αὐτή τήν κατηγορία. Ἐνα παράδειγμα θά μποροῦσε νά είναι ή τετριμένα ἀληθής πρόταση «τό τρίγωνο είναι ἐπίπεδο σχῆμα», δταν αὐτή θεωρηθεῖ πώς ἀναφέρεται στήν εὐκλείδεια γεωμετρία. Στό σημεῖο αὐτό θά πρέπει νά τονισθεῖ πώς δέν είναι ἀληθεία δτι δλες οι προτάσεις τής μορφής υποκείμενο-κατηγόρημα ἀποτελοῦν παραδείγματα σχέσης ούσιωδους περιέχεσθαι τοῦ κατηγορούμενου ἀπό τό υποκείμενο του. Γιά παράδειγμα ή στοιχειώδης πρόταση «ὅ ἀναπτήρας μου είναι μαῦρος» δέν ἀνήκει σ' αὐτή τήν κατηγορία, ἔχοντας ἔτσι ἐνδεχομενικό χαρακτήρα. Τό χρῶμα ἐνός συγκεκριμένου ἀναπτήρα μπορεῖ νά είναι μαῦρο, κάτι τέτοιο, δμως, δέν ἀποτελεῖ ούσιωδες χαρακτηριστικό τής ἀντίστοιχης ἔννοιας, πράγμα πού, μέ τή σειρά του, σημαίνει πώς ή πληροφορία δτι κάποιος είναι κάτοχος ἐνός ἀναπτήρα δέν είναι ἀρκετή γιά τή συναγωγή συμπερασμάτων σχετικά μέ τό χρῶμα του. Τουναντίον ή πληροφορία δτι αὐτή τή στιγμή, γιά παράδειγμα, σκεφτόμαστε ἡ σχεδιάζουμε ἔνα τρίγωνο είναι ἀρκετή γιά νά βοηθήσει τόν ἀντίστοιχο δέκτη τής πληροφορίας νά συναγάγει τό συμπέρασμα πώς τό ἀντικείμενο τής ἀσχολίας μας είναι ἐπίπεδο σχῆμα.

Σύμφωνα μέ τόν Leibniz οι ἐνδεχομενικές ἀληθείες και προτάσεις, σέ ἀντιδιαστολή μέ τίς ἀναλυτικές, δέν είναι πεπερασμένα ἀναλύσιμες. Κάθε ἀνθρώπινη προσπάθεια ἀνάλυσης τους είναι καταδικασμένη σέ ἀποτυχία, δεδομένου δτι τό ἔλλογο δν μπορεῖ νά πραγματοποιήσει ἀναλύσεις μόνο πεπερασμένης υφῆς, μέ τήν ἔννοια πώς δλοκληρώσιμες νοητικές διαδικασίες είναι ἐκεῖνες γιά τίς δποῖες δ ἀριθμός βημάτων πού ἀπαιτεῖται είναι πεπερασμένος. Ἡ ἀνάλυση δποιασδήποτε ἐνδεχομενικής ἀληθείας ἀπαιτεῖ, σύμφωνα μέ τόν Leibniz, ἀπειρα τό πλῆθος βήματα και μιά τέτοια ἐκδοχή είναι ἀπαγορευτική γιά τό ἀνθρώπινο δν. Ἡ διαπίστωση πώς ή πρόταση «ὅ ἀναπτήρας μου είναι μαῦρος» είναι ἀληθής είναι πολύ

ἀπλή υπόθεση. Είναι ἀρκετή ή αἰσθητηριακή ἐπαλήθευση πώς δ ἀναπτήρας μου είναι πραγματικά μαῦρος. Τό ίδιο, ή ἀλήθεια τής πρότασης «σήμερα δ καιρός είναι βροχερός», μέ τήν προϋπόθεση δτι ή ημέρα στήν δποία ἀναφέρεται ή λέξη «σήμερα» ἔχει δεόντως καθορισθεῖ, ἔξαρται ἀπό τή συμφωνία της μέ τά πράγματα, δπως αὐτή διαπιστώνεται μέ τήν ἐμπειρική παρατήρηση. «Οσο ἀπλή δμως υπόθεση είναι ή διαπίστωση τής ἀλήθειας ή τοῦ ψεύδους μιᾶς ἐνδεχομενικῆς πρότασης πού ἀναφέρεται στό προσιτό χωροχρονικό κομμάτι τοῦ σύμπαντός μας, τόσο ἀξεδιάλυτα δύσκολη είναι ή ἔξήγηση τοῦ γιατί της. Μιά τέτοια ἔξήγηση είναι, βέβαια, κυριολεκτικά ἀπρόσιτη γιά γεγονότα πού τοποθετοῦνται στό τμῆμα τοῦ σύμπαντος πού, ἀπό πλευρᾶς διαστάσεων, είναι πέρα ἀπό τά χωροχρονικά δρια μέσα στά δποία αἰχμαλωτίζεται ή δυνατότητά μας γιά παρατήρηση. Ἐξήγηση τής ἀλήθειας τής πρότασης «ὅ ἀναπτήρας μου είναι μαῦρος» σημαίνει παροχή πληροφοριῶν γύρω ἀπό τό γιατί τό «τώρα» είναι αὐτό πού είναι, δεδομένου πώς ή υποκατάστασή του μέ κάποια ἄλλη κατάσταση πραγμάτων δέν φαίνεται λογικά ἀδύνατη. Θά ήταν δυνατό δ ἀναπτήρας μου νά μήν είναι μαῦρος, δπως θά μποροῦσε ή σημερινή ημέρα νά ήταν ἡλιόλουστη. Τί είναι δμως αὐτό πού καθορίζει τή συγκεκριμένη πολυπλοκότητα τῶν στιγμῶν τοῦ σύμπαντος και γιατί αὐτή ή πολυπλοκότητα και δχι κάποια ἄλλη; Γιά τήν δπαρξη μιᾶς κατάστασής πραγμάτων πού θά μποροῦσε νά είναι και διαφορετική, ἀπαιτεῖται ένας «ἀποχρόδν λόγος», κάποιο ή κάποια αἴτια. Ἡ συγχρονική και διαχρονική ἀνάλυση τῶν αἰτίων αὐτῶν ἐμπειρέχει παράγοντες τῶν δποίων τό πλῆθος είναι ἀπειρο. Σύμφωνα μέ τόν Leibniz, ἵκανονοιητική ἔξήγηση μιᾶς ἐνδεχομενικῆς ἀληθείας θά σημαίνε ἀναφορά σ' δλη τήν προηγούμενή της ίστορική ἀλυσίδα, μ' δλο τό πλῆθος τῶν παραγόντων πού τή διαμορφώνουν και κάτι τέτοιο είναι ἀδύνατο μιά και ή ἀναδίφηση τῶν λεπτομερειῶν της θά ἀπαιτοῦσε μιά διαδικασία ἀνάλυσης μέ ἀπειρα βήματα. Τό μόνο δν γιά τό δποίο μιά τέτοια ἀνάλυση είναι δχι μόνο δυνατή, ἀλλά και αὐτόματα περατωμένη είναι, γιά τόν Leibniz, δ Δημιουργός, δπως αὐτός προσδιορίζεται μέ τό γνωστό, θεολογικά ὑπερβατικό τρόπο.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα ἀναλυτικῶν προτάσεων είναι,

κατά τόν Leibniz, αυτές πού σήμερα θά λέγαμε πώς άνήκουν στή λογική. Οι λογικά έγκυρες προτάσεις, άνήκουν στήν κατηγορία τῶν άναλυτικῶν προτάσεων. Είναι άναγκαιά ἀληθεῖς, δηλαδή ἀληθεῖς σε κάθε «δύνατό κόσμο», ενῶ οι ἀρνήσεις τους είναι προτάσεις άντιφατικές, δηλαδή παντού ψευδεῖς⁸². 'Άναγκαιά ἀληθεῖς, γιά τόν Leibniz, είναι ἐπίσης δλες οι ἀληθεῖς μαθηματικές προτάσεις και σ' αυτές περιλαμβάνονται ἀξιώματα, θεωρήματα, πορίσματα ἀκόμη και δρισμοί. Είναι, δηλαδή, οι μαθηματικές ἀληθειες άναλυτικές και σάν τέτοιες πεπερασμένα άναλυσιμες.

'Η πίστη τοῦ Leibniz στήν άναλυτικότητα τῶν μαθηματικῶν ἀληθειῶν δφείλεται κατά πάσα πιθανότητα στήν ίδιαζουσα φύση τῆς μαθηματικῆς δραστηριότητας, πού μοιάζοντας ἀποκομμένη ἀπό τήν ἀμεση αἰσθητηριακή ἀντίληψη, δίνει τήν ἐντύπωση πώς οι ἀληθειες, πού άνακαλύπτονται στά πλαίσια της, είναι ἀπαλλαγμένες ἀπό τό στοιχεῖο τοῦ ἐφήμερου και τοῦ μεταβλητοῦ. 'Η ἀντίληψή του αυτή ἐλέγχεται ἀπό τόν σύγχρονο, μαθηματικά και φιλοσοφικά ἐνήμερο, μελετητή του ώς ἐσφαλμένη. Τό σφάλμα μπορεῖ νά ἐντοπισθεῖ στή σύγχρονη πού ὑπῆρχε στό δεύτερο μισό τοῦ 17ου αἰώνα γύρω ἀπό τήν ἔννοια τῆς μαθηματικῆς ἀληθειας. Τό αἰώνιο πρότυπο ἡταν ή εὐκλείδεια γεωμετρία. Οι ἀληθεῖς προτάσεις της, πέρα ἀπό κάθε ἀμφιβολία, ἡταν ἀληθεῖς σε κάθε «δύνατό κόσμο». 'Η άνακάλυψη τῆς ὑπαρξης μή-ευκλείδειων γεωμετριῶν ἀργοῦσε ἀκόμα, και τό ἀνθρώπινο πνεῦμα δέν μποροῦσε ἔτσι νά βοηθηθεῖ στά φιλοσοφικά του πετάγματα. Είναι ἐπίσης γεγονός πώς οι ἔννοιες τῆς ἀληθειας και τῆς ἀποδείξιμότητας συγχέονταν ἔτσι, δστε τό ἀληθές νά είναι ἀποδείξιμο και τό ἀποδείξιμο ἀληθές. 'Ἄς τονισθεῖ σ' αυτό τό σημεῖο πώς κάθε ἀπόδειξη περατώνεται, ή μᾶλλον ἀποτελεῖται ἀπό πεπερασμένα τό πλήθος βήματα, πράγμα πού μᾶς ὑποδεικνύει τήν πι-

82. 'Ο σύγχρονος μελετητής τοῦ Leibniz, ἐντυπωσιάζεται ἀπό τήν δμοιδητηα πού παρουσιάζει δρισμός τῶν άναλυτικῶν προτάσεων σάν άναγκαια ἀληθῶν, δηλαδή ἀληθῶν σ' δλους τούς, κατά Leibniz, «δύνατούς κόσμους», μέ τόν σύγχρονο αυστηρό δρισμό τῶν λογικά έγκυρων προτάσεων στά πλαίσια μιᾶς πρωτοβάθμιας γλώσσας. Σύμφωνα μ' αυτόν τόν δρισμό, οι λογικά έγκυρες προτάσεις είναι ἀκριβῶς αυτές πού είναι ἀληθεῖς σ' δλες τίς δύνατες δομές ή ἐρμηνείες τῆς συγκεκριμένης γλώσσας. Γιά τόν δρισμό τῆς δομῆς ή ἐρμηνείας βλ. Δεύτερο Κεφάλαιο, 2.2.4

θανή πηγή τῆς πίστης τοῦ Leibniz στήν πεπερασμένη ἀναλυσιμότητα τῶν μαθηματικῶν ἀληθειῶν.

Σύμφωνα μέ τήν κυριαρχοῦσα σήμερα ἀντίληψη οι μαθηματικές ἀληθειες δέν είναι ἀναλυτικές γιά τούς ἔξῆς λόγους: Μιά μαθηματική πρόταση γραμμένη στά πλαίσια μιᾶς τυπικῆς πρωτοβάθμιας γλώσσας, δν δέν είναι ἡδη λογικά έγκυρη ή ἀντιφατική, μπορεῖ νά είναι ἀλλοτε ψευδής και ἀλλοτε ἀληθής ἀνάλογα πάντοτε μέ τήν περιρρέουσα ἀτμόσφαιρα πού ή ἐκάστοτε συγκεκριμένη μαθηματική θεωρία δημιουργεῖ. Μιά μαθηματική θεωρία χαρακτηρίζεται ἀπό τό σύνολο τῶν ἀξιωμάτων της. Κάθε μαθηματική πρόταση πού γράφεται στά πλαίσια τῆς γλώσσας τῆς μαθηματικῆς θεωρίας και πού δέν είναι είτε λογικά έγκυρη, είτε ἀντιφατική, μπορεῖ νά ἀνήκει σέ ἀκριβῶς μία ἀπό τίς ἔξῆς τρεῖς κλάσεις: (α) στήν κλάση τῶν προτάσεων γιά τίς δποῖες ὑπάρχει μιά ἀπόδειξη τους ἀπό τό σύνολο τῶν ἀξιωμάτων, (β) στήν κλάση τῶν προτάσεων γιά τίς δποῖες ὑπάρχει μιά ἀπόδειξη τῆς ἀρνησής τους ἀπό τά ἀξιώματα, και (γ) στήν κλάση τῶν προτάσεων γιά τίς δποῖες δέν ὑπάρχει ούτε ἀπόδειξη δική τους ούτε τῆς ἀρνησής τους ἀπό τά ἀξιώματα. Κάποιες διευκρινίσεις είναι τελείως ἀπαραίτητες στό σημεῖο αυτό: (1) Γιά νά ισχύουν τά παραπάνω ή μαθηματική θεωρία δέν θά πρέπει νά είναι ἀντιφατική, δηλαδή δέν θά πρέπει νά ὑπάρχει πρόταση τῆς γλώσσας τῆς θεωρίας τέτοια ὥστε και αυτή και ή ἀρνησή της νά ἀποδεικνύονται ἀπό ἀξιώματα. (2) Μαθηματικό ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν μόνον οι μαθηματικές θεωρίες πού ἀνάμεσα στά ἀξιωμάτα τους ὑπάρχουν προτάσεις πού δέν είναι λογικά έγκυρες. Τέτοιες είναι δλες οι γνωστές θεωρίες μέ τίς δποῖες δουλεύουν οι μαθηματικοί. (3) 'Η ὑπαρξη μιᾶς ἀπόδειξης δέν συνεπάγεται ἀναγκαστικά και γνώση της ἀπό τή μαθηματική κοινότητα. 'Ο προσδιορισμός τῆς ἀκριβούς ιστορικῆς συγκυρίας τῆς ἀνακάλυψης της δέν προσθέτει ούτε ἀφαιρεῖ τίποτε ἀπό τό ὑπαρκτικό της status. Αυτό καθορίζεται ἀποκλειστικά ἀπό τά ἐσωτερικά στοιχεῖα τῆς θεωρίας πού δέν είναι ἀλλα ἀπό τά ἀξιώματα της και τούς ἐπιτρεπτούς μηχανισμούς ἀποδείξιμότητας πού είναι γνωστοί κάτω ἀπό τό γενικό τίτλο «ἀποδεικτικοί κανόνες».

'Η ἀληθεια, κατά Leibniz, τῶν ἐνδεχομενικῶν προτάσεων είναι σχετική. 'Έξαρταιται ἀπό τό «δύνατό κόσμο» στόν δποῖο ἀναφέρε-

ταί, σέ ἀντιδιαστολή μέ τήν ἀλήθεια τῶν ἀναλυτικῶν πού εἶναι ἀπόλυτη, μέ τήν ἔννοια πώς μιά ἀναλυτική πρόταση ἀληθής σέ κάποιον «δύνατο κόσμο» εἶναι παντοῦ ἀληθής. Στά πλαίσια τῆς σύγχρονης μαθηματικῆς λογικῆς τό ἀκριβές ἀνάλογο ἐνός, κατά Leibniz, «δύνατοῦ κόσμου» εἶναι ή δομή ή ἔρμηνεία μιᾶς πρωτοβάθμιας γλώσσας. Μιά δομή λέγεται μοντέλο μιᾶς μαθηματικῆς θεωρίας, ἀν τά ἀξιώματα τῆς θεωρίας εἶναι ἀληθῆ στή δομή αὐτή. Στήν περίπτωση πού μιά μαθηματική πρόταση ἀνήκει στήν κλάση (α), ή ἀλήθεια της ἀκολουθεῖ τήν ἀλήθεια τῶν ἀξιώμάτων τῆς θεωρίας. Πιό συγκεκριμένα, ή πρόταση εἶναι ἀληθής σέ κάθε μοντέλο τῆς θεωρίας. Αὐτό βέβαια δέν σημαίνει πώς ή πρόταση εἶναι ἀληθής σέ κάθε δομή τῆς γλώσσας τῆς θεωρίας. Τουναντίον, δεδομένου πώς ή πρόταση δέν εἶναι λογικά ἔγκυρη, υπάρχει μιά δομή στήν δποία δέν εἶναι ἀληθής. Μιά τέτοια δομή δέν ἐπαληθεύει τά ἀξιώματα τῆς θεωρίας. Στήν περίπτωση πού μιά μαθηματική πρόταση ἀνήκει στήν κλάση (β), εἶναι ή ἀλήθεια τῆς δρνησής της πού ἀκολουθεῖ τήν ἀλήθεια τῶν ἀξιώμάτων τῆς θεωρίας. «Οπως καὶ στήν περίπτωση (α), ή συγκεκριμένη πρόταση εἶναι δλλοτε ἀληθής καὶ δλλοτε ψευδής. Τέλος, στήν περίπτωση πού ή πρόταση ἀνήκει στήν κλάση (γ), υπάρχουν μοντέλα τῆς θεωρίας στά δποία ή πρόταση εἶναι ἀληθής καὶ μοντέλα στά δποία εἶναι ψευδής.

Σύμφωνα μέ τήν παραπάνω ἀνάλυση καὶ ἔχοντας πάντα στό νοο τήν ἀναλογία «δύνατός κόσμος» - «δομή μιᾶς τυπικῆς γλώσσας», τό συμπέρασμα, περί μή-ἀναλυτικότητας τῶν μαθηματικῶν ἀληθειῶν ἔχει μιά ἄμεση προφάνεια. Βέβαια γιά τήν ἔξαγωγή καὶ μόνο ἐνός τέτοιου συμπεράσματος ἀρκεῖ ή ἀπλή ἀναφορά τῆς διπάρξης μή-εὐκλειδείων γεωμετριῶν σέ συνδυασμό μέ τή σχετικότητα τῆς ἀλήθειας τοῦ εὐκλειδείου αίτήματος τῶν παραλλήλων. «Ομως, ή εὐρύτερη συζήτηση θέτει τό δλο πρόβλημα σέ ἔνα πλαίσιο γενικότερο καὶ δχι περιπτωσιολογικό. Τό ἀντι-παράδειγμα τῶν μή-εὐκλειδείων γεωμετριῶν καταρρίπτει τόν ισχυρισμό τοῦ Leibniz χωρίς ἀναγκαστικά νά ἐντοπίζει τήν πηγή τῆς πλάνης τού ή δποία, σύμφωνα μέ τήν παραπάνω ἀνάλυση, πρέπει νά ἐντοπιστεῖ στή σύγχυση πού, μέχρι τήν ἐμφάνιση τῆς πρωτοποριακῆς δουλειᾶς τῶν Tarski καὶ Gödel, συνόδευε δλες τίς προσπάθειες ἀνάλυσης τῶν ἐννοιῶν τῆς ἀλήθειας καὶ τῆς ἀπόδειξης.

‘Η πίστη τοῦ Leibniz στή δυνατότητα τῆς τελικῆς ἀναγωγῆς τῶν μαθηματικῶν στή λογική εἶχε τίς ρίζες της στήν ἀντίληψη πώς ή μαθηματική δραστηριότητα εἶναι κατά βάση μιά λογική δραστηριότητα καὶ σάν τέτοια δέν μπορεῖ νά ἔχει ἐνδεχομενικό χαρακτήρα. Οι μαθηματικές ἀλήθειες δέν μποροῦν νά ἔξαρτονται ἀπό ψυχολογικούς, ιστορικούς καὶ κοινωνικούς παράγοντες. Θά πρέπει νά εἶναι ἀπαλλαγμένες ἀπό ἔξαρτήσεις χρονικοῦ χαρακτήρα καὶ γι’ αὐτό αἰώνιες. Πίστευε πώς τό ἀναλλοίωτο τῶν μαθηματικῶν ἀληθειῶν σχετικόταν μέ τόν ἀναλυτικό τους χαρακτήρα, πράγμα πού σήμαινε γι’ αὐτόν πώς ή ἀναλυτιμότητά τους θά ἐπρεπε νά εἶναι ἰδιότητα πού νά ἀνήκει στά ἀνθρώπινα πλαίσια τοῦ πεπερασμένα ἐφικτοῦ. Παρά τό δτι ή πίστη του στήν ἀναλυτικότητα τῶν μαθηματικῶν ἀληθειῶν εἶναι, δπως εἰδαμε, ἐσφαλμένη, οι ίδεες του οι σχετιζόμενες μέ τή φιλοσοφία τῶν μαθηματικῶν καὶ τή μαθηματική δραστηριότητα γενικότερα, εἶναι σημαντικότατες καὶ ἀποτελοῦν μιά ἀπό τίς καλύτερες πρώιμες προσπάθειες ἀνάλυσης τῆς ἐννοιας τῆς ἀπόδειξης. ‘Ἐτσι, ή πίστη του στήν πεπερασμένη ἀναλυτιμότητα τῶν μαθηματικῶν ἀληθειῶν καὶ ή μεγάλη του ίκανότητα καὶ ἔξοικείωση μέ τή μαθηματική πρακτική τῆς ἐποχῆς του, τόν δδήγησαν στήν ίδεα τῆς διπάρξης μηχανικῶν - δηλαδή τυποποιημένων - διαδικασιῶν συμπερασματικοῦ παραγωγικοῦ λογισμοῦ, γιά τήν ἀνακάλυψη τῶν ἀληθειῶν αὐτῶν. ‘Η ίδεα αὐτή, τελείως πρωτοπόρα γιά τήν ἐποχή του - ίδεα πού στά μέσα τοῦ 19ου αἰώνα προσπάθησε δ Boole νά θέσει σέ πρακτική ἐφαρμογή, ἐπιτυγχάνοντας μιά μερική ἀλγεβροποίηση τῶν διαδικασιῶν πού ἀκολουθεῖ ή ἀνθρώπινη σκέψη - ἀποτελεῖ σήμερα τό βασικό δομικό συστατικό τῆς ἐννοιας τῆς ἀπόδειξης, δπως τήν ἀντιλαμβανόμαστε στά πλαίσια τῆς μαθηματικῆς λογικῆς. Δέν ἀνακαλύπτομε βέβαια μαθηματικές ἀλήθειες μέ διαδικασίες ἀναλυτιμότητας πού δδηγοῦν στά ἐπί μέρους χαρακτηριστικά τους, δπως θά ἡθελε δ Leibniz. Γνωρίζουμε πιά ἀρκετά καλά τούς κανόνες τοῦ παιχνιδιοῦ, δστε νά μή παρασυρόμαστε στήν παγίδα πού δδηγεῖ ή πίστη δτι οι μαθηματικές ἀλήθειες, ἀπό τήν ίδια τους τή φύση, εἶναι ἀπόλυτες. Τουναντίον κάθε μυημένος στό μαθηματικό παιχνίδι ξέρει πώς ή στερεότητα τῶν ἀποτελεσμάτων του δέν δφείλεται στήν ἀπολυτότητα τους, ἀλλά στή στερεότητα

καὶ τὴν πεπερασμένη φύση τῶν αὐτηρῶν συμπερασματικῶν κανόνων ποὺ χρησιμοποιοῦνται. Ἀν συμβαίνει τά ἀποτελέσματα τῆς μαθηματικῆς δραστηριότητας νά χρησιμοποιοῦνται σάν ἐργαλεῖο στήν ἔξερεύνηση τοῦ κόσμου τῶν αἰσθήσεών μας, αὐτό ὀφείλεται δχι στήν ἀπολυτότητά τους, ἀλλά στὸ δτὶ οἱ μαθηματικές θεωρίες μας μορφωποιοῦνται κάτω ἀπό ἡχους γήινης μουσικῆς, δλλες φορές μέ τρόπους αἰσθητούς καὶ ἀλλοτε ἀνεπαίσθητους! Οἱ μαθηματικές ἀλήθειες πού ἀνακαλύπτομε εἶναι διαχρονικά στέρεες, δντας συγχρόνως ἀλήθειες σχετικές. Μιά μαθηματική ἀλήθεια εἶναι σχετική, μέ τήν ἐννοια πώς εἶναι ἔνα θεωρῆμα στά πλαίσια μᾶς μαθηματικῆς θεωρίας. Ἡ ἀλήθεια τοῦ θεωρήματος ἔξαρτᾶται καὶ ἀκολουθεῖ τήν ἀλήθεια τῶν ἀξιωμάτων τῆς θεωρίας⁸³, τά δέ ἀξιώματα τῆς θεωρίας εἶναι ἀληθή ἡ ψευδή ἀνάλογα μέ τή δομή στήν ὅποια ἀναφέρονται. Ὄταν λέμε, λοιπόν, δτὶ ἀνακαλύψαμε κάποια μαθηματική ἀλήθεια, ἐννοοῦμε πώς δεδομένων κάποιων ἐπιτρεπτῶν μηχανικῶν κανόνων ἀποδειξιμότητας, μποροῦμε νά χαράξουμε ἔνα πεπερασμένο μονοπάτι πού δδήγει ἀπό τά ἀξιώματα τῆς συγκεκριμένης θεωρίας στό συγκεκριμένο θεωρῆμα στό δποιο ἀναφερόμαστε.

Ἡ δρμητική διάθεση τοῦ Leibniz γιά ̄ρευνα καὶ ἡ ἀκόρεστη περιέργειά του ἀποτελοῦν τίς ἀπαραίτητες συνιστῶσες γιά τήν κατανόηση τῆς τάσης του γιά ἐνοποίηση καὶ σύνθεση τῶν ἐπί μέρους γνωστικῶν περιοχῶν, πού εἶχε στή διάθεσή του. ባ ̄δέα του γιά τήν δημορχη μηχανικῶν, τυποποιημένων διαδικασιῶν συμπερασματικοῦ λογισμοῦ τόν δδήγησε νά σκεφθεῖ ἔνα πρόγραμμα ̄ρευνας, πού θά εἶχε σάν τελικό του σκοπό τή χαρτογράφηση δλων τῶν περιοχῶν τῆς ἀνθρώπινης σκέψης σέ ἔνα ἐνιοϊ καὶ καλά δργανωμένο γλωσσικό σύστημα. Οἱ κόμβοι τῆς χαρτογράφησης θά ἀποτελοῦνταν ἀπό τά συντακτικά στοιχεῖα ἐνός συστήματος σήμανσης - γράμματα, σύμβολα, πεπερασμένες ἀκολουθίες συμβόλων — τά δποια θά ἀντιστοιχοῦσαν σέ σκέψεις ἀντικειμένων, ἐννοιῶν, ̄δεων κτλ. Τά συντακτικά στοιχεῖα τοῦ συστήματος, θά συνδέονταν μεταξύ τους μέ

83. ባ ̄λήθεια τοῦ θεωρήματος ἔξαρτᾶται καὶ ἀκολουθεῖ τήν ἀλήθεια τῶν ἀξιωμάτων τῆς θεωρίας μέ τήν ἐννοια πώς κάθε μοντέλο τῆς θεωρίας εἶναι καὶ μέντελο τοῦ θεωρήματος. Τό ἀντίστροφο δέν ̄σχει.

τρόπους δμοιούς μέ αὐτούς πού χαρακτηρίζουν τή σύνδεση σκέψεων. ባ ̄παραδειγματική περίπτωση ἐνός τέτοιου τρόπου θεωροῦσε τήν τυποποιημένη διαδικασία συναγωγῆς συμπερασμάτων, δπως γίνεται αἰσθητά ἐμφανέστερη στά πλαίσια τῆς μαθηματικῆς πρακτικῆς. Αὐτή ἡ δλική παγκόσμια γλώσσα, (characteristica universalis), ̄μεινε τό ἀνεκπλήρωτο δνειρο τοῦ Leibniz. Δέν ̄μελλε νά γίνει προγματικότητα οὕτε μέχρι τίς μέρες μας. Αὐτό ̄σως ὀφείλεται στό ἀνέφικτο τῆς πραγμάτωσης ἐνός τέτοιου δράματος. Πδως μπορεῖς νά προσδοκᾶς τήν τυποποίηση τοῦ συνόλου τῆς ἀνθρώπινης σκέψης, στά πλαίσια μᾶς ἐνιαίας γλώσσας, δταν ἀκόμα σήμερα ἡ δημιουργία μᾶς ἐνιαίας γλώσσας φαίνεται νά ἀποκλείεται ἀπό ἀνυπέρβλητα ἐμπόδια, πού ̄χουν σχέση μέ τόν ἀσυνεχή χαρακτήρα τῆς ἀνθρώπινης γνώσης; ̄σως ἡ μόνη ἐλπίδα εἶναι ἡ σμίκρυνση τοῦ δράματος δστε νά ταιριάζει στά ἀνθρώπινα πλαίσια. Σάν τέτοια θά μποροῦσε νά θεωρηθεῖ ἡ προσπάθεια γιά ἐπί μέρους τυποποιημένες γλώσσες, πού θά ἐλάμβαναν ὑπ' ὑπόψη καὶ τά ἀντελῶς ἰδιόμορφα χαρακτηριστικά τῆς ἀντίστοιχης ἐπιστημονικῆς περιοχῆς στήν δποια θά ἀναφέρονταν. Μιά τέτοια ἥδη ἐπιτυχημένη προσπάθεια εἶχε σάν ἀποτέλεσμα τήν τυποποίηση τῆς μαθηματικῆς γνώσης καὶ σκέψης στά πλαίσια τῶν λεγομένων πρωτοβάθμιων γλωσσῶν.